グラフ理論 講義ノート #7

井上 純一
北海道大学 大学院情報科学研究科
URL：http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

平成 19 年 6 月 4 日

目 次

演習問題 6 の解答例

(1) ピータースン・グラフは図の実線 + 破線からなるグラフで点数 $|G| = 10$, 辺数 $\varepsilon = 15$ からなる．これから図の破線: $\overline{23}, \overline{68}, \overline{710}, \overline{49}, \overline{810}, \overline{27}$ の 6 本の辺を除去すると図の実線のような全域木が一つできる．

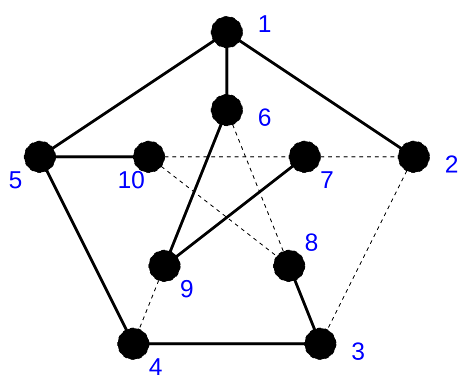

図 125: ピータースン・グラフの全域木 (実線).

(2) (1) で得られたピータースン・グラフの全域木において, 除去した辺 $\overline{23}$ を加えると閉路 $\overline{123451}$ が得られ, $\overline{68}$ を加えると閉路 $\overline{1683451}$ が得られ, 辺 $\overline{710}$ を加えると閉路 $\overline{71051697}$ が得られ, 辺 $\overline{49}$ を加えると閉路 $\overline{945169}$ が得られ, 辺 $\overline{810}$ を加えると閉路 $\overline{8345108}$ が得られ, 辺 $\overline{27}$ を加えると閉路 $\overline{279612}$ が得られる．従って, (1) で除去した辺を一つ加えるごとに閉路が一つずつ得られ, これが基本閉路となる．よって, 基本閉路の個数は全域木ができるまで除去した辺の本数に等しい．例えば, (1) のピータースン・グラフの場合には, 6 本であり, これは確かに $\varepsilon - |G| + 1 = 15 - 10 + 1 = 6$ と等しい．
点数 $|G|$, 辺数 ϵ を持つ一般のグラフにおいては, できあがる全域木の辺数が「$|G|$ 個の点からなる木の辺数は $|G| - 1$ 本である」ことを思い出せば, やはり, $|G| - 1$ 本であるから, 全域木ができるまでに除

去しなければならない辺数は $\varepsilon - (|G| - 1) = \varepsilon - |G| + 1$ 本であり, この辺を一つずつ加えると基本閉路が一つずつできるので, 結局, 基本閉路の個数は $\varepsilon - |G| + 1$ となる.

7.4 木の数え上げ

点にラベルを付けた木を「ラベル付き木」と言うが, このように各点にラベルを付けて木を区別した場合, その総数はいくつあるか, ということが問題になる. その答えは **Cayley (ケイリー) の定理**としてまとめられており, 「n 個の点からなるラベル付き木の総数は n^{n-2} 個である」というように, とても簡単な形で表される. ここではこの定理 (公式) の証明を詳しく追い, 関連する系, 及び, いくつかの例題をとりあげ, その理解を深めて行くことにしよう.

定理 10.1 (Cayley の定理)
n 点の異なるラベル付の木は n^{n-2} 個ある.

(証明)
まずは準備として

- $\deg(v) = k - 1$ の点 v を含むラベル付きの木を A
- $\deg(v) = k$ の点 v を含むラベル付きのの木を B

と定義しておく.

ここで述べる証明のポイントは「『ラベル付き木 A からラベル付き木 B を作る**連鎖 (linkage)** の総数』と『逆にラベル付き木 B からラベル付き木 A を作る連鎖の総数』が等しい」という条件 (関係式) から可能なラベル付き木の総数を求める, という点である.

それでは以下で連鎖 : A → B, 及び, 連鎖 : B → A なる操作をそれぞれ見て行くことにしょう. この際, n **個の点からなるラベル付き木のある点** v **の次数が** k **であるものの総数を** $T(n,k)$ で表しておくことにする.

連鎖 : A → B
図 126 のように A を点 v に接続していない辺で分離し (図 126 の (a) → (b)), 点 v と点 z とを結ぶと (図 126 の (b) → (c)), $\deg(v) = k$ であるラベル付き木 B が得られる. さて, ラベル付き木 A の選び方は $T(n, k-1)$

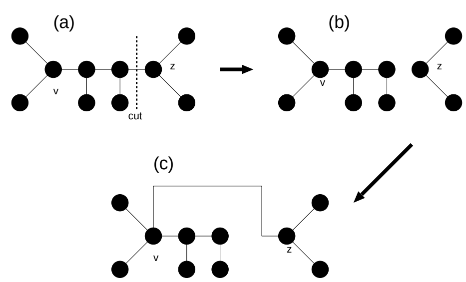

図 126: 連鎖 : A → B.

通りあり, 1 つの A に対して, 切断する辺の選び方は

$$
\begin{aligned}
(\text{点 } v \text{ に接続していない辺の選び方}) &= (\text{木 A の辺の本数}) - (\text{点 } v \text{ の次数}) \\
&= (n-1) - (k-1) = n - k \quad (\text{通り})
\end{aligned}
$$

だけあるから, 連鎖 : A → B の総数は

$$(\text{連鎖 : A} \to \text{B の総数}) \quad = \quad T(n,k-1)(n-k)$$

となる. 次に連鎖 : B → A を考える.

<u>連鎖 : B → A</u>

図 127 のように, ラベル付き木 B から点 v, 及び, その接続辺を除去して得られる, 木 B の成分である一連の部分木を $(\mathrm{T}_1, \mathrm{T}_2, \cdots, \mathrm{T}_k)$ とする (図 127 の (a)). ここで各部分木に含まれる点の総数は n_i であり, 当然のことながら

$$n-1 \ (v \text{ 以外の点の数}) \quad = \quad \sum_{i=1}^{k} n_i$$

を満たしている. このとき, ラベル付き木 B から点 v, 及び, その接続辺の 1 本を除去し (この際にできる成

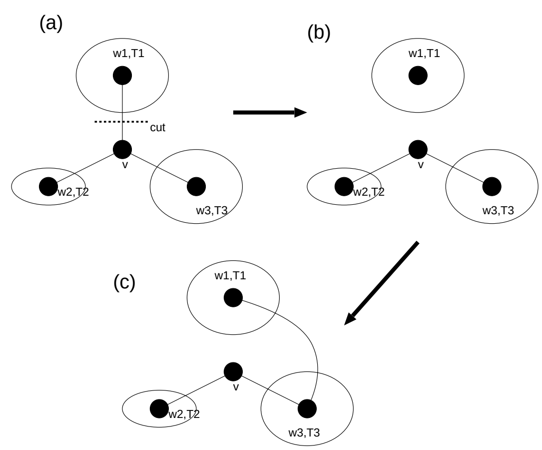

図 127: 連鎖 : B → A.

分である部分木を T_i と名付ける)(図 127 の (a) → (b)), T_i 以外の部分木 T_j の任意の点 u と部分木 T_i 内の任意の点 w_i を辺で結ぶ (図 127 の (b) → (c)) と $\deg(v) = k-1$ のラベル付き木 A が得られる.

ここでラベル付き木 B の選び方は $T(n,k)$ 通りであり, 点 w_i と T_i 以外の部分木 T_j の任意の点を結ぶ方法は

$$(\text{点 } v \text{ を除く点の総数}) - (\text{部分木 } \mathrm{T}_i \text{ に属する点の総数}) \quad = \quad (n-1) - n_i \quad (\text{通り})$$

だけあるから, 連鎖 : B → A の総数は

$$\begin{aligned} T(n,k)\sum_{i=1}^{k}(n-1-n_i) \quad &= \quad T(n,k)\{(n-1-n_1)+(n-1-n_2)+\cdots+(n-1-n_k)\} \\ &= \quad T(n,k)\{(n-1)k-(n_1+n_2+\cdots+n_k)\} = T(n,k)(n-1)(k-1) \end{aligned}$$

となる.

　連鎖 : A → B, B → A の総数を等しいと置くことにより, 関係式 :

$$(n-k)T(n,k-1) \quad = \quad (n-1)(k-1)T(n,k)$$

が得られる.

ところで, $T(n,n-1)=1$ に注意して, 上関係式で $k=n-1,n-2,n-3,\cdots$ と書き出して行ってみると

$k=n-1$ のとき

$$T(n,n-2) \;=\; (n-1)(n-2)T(n,n-1)=(n-1)(n-2)$$

$k=n-2$ のとき

$$2T(n,n-3) \;=\; (n-1)(n-3)T(n,n-2)=(n-1)^2(n-2)(n-3)$$

つまり

$$T(n,n-3) \;=\; \frac{1}{2}(n-1)^2(n-2)(n-3)$$

$k=n-3$ のとき

$$3T(n,n-4) \;=\; (n-1)(n-4)T(n,n-3)=\frac{1}{2}(n-1)^3(n-2)(n-3)(n-4)$$

つまり

$$T(n,n-4) \;=\; \frac{1}{3\cdot 2\cdot 1}(n-1)^3(n-2)(n-3)(n-4)$$

が得られる. これを一般化すると, 二項定理より $k=k+1$ のとき

$$T(n,k) \;=\; \frac{(n-1)^{n-k+1}(n-2)}{(k-1)(k-2)\cdots}={}_{n-2}C_{k-1}(n-1)^{n-k-1}$$

という結果が得られる. 従って, 求めるラベル付き木の総数 $T(n)$ は上記の $T(n,k)$ に関し, $k=1$ から $k=n-1$ まで和をとることにより

$$\begin{aligned}T(n) &= \sum_{k=1}^{n-1}T(n,k)\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}{}_{n-2}C_{k-1}(n-1)^{n-k-1}\\ &= \sum_{k=1}^{n-1}{}_{n-2}C_{k-1}1^{k-1}(n-1)^{(n-2)-(k-1)}=\{(n-1)+1\}^{n-2}=n^{n-2}\end{aligned}$$

となり, Cayley の定理が証明された. **(証明終わり)**.

この定理に関する例題を一つ見ておく.

例題 7.5 (2003 年度 レポート課題 #5 **問題 1**)

n 点のラベル付き木の個数を $T(n)$ とする．このとき以下の問いに答えよ．

(1) k 点のラベル付き木と $n-k$ 点のラベル付き木の結び方の総数を計算することで次の関係式を示せ．

$$2(n-1)T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k(n-k)T(k)T(n-k)$$

(2) 次の関係式を示せ．

$$\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} = 2(n-1)n^{n-2}$$

(解答例)

(1) n 点からなる木の辺を一辺だけ切って, 2 つのグラフ A, B を作る方法は

$$2 \times (n-1) \times T(n) = 2(n-1)T(n) \tag{140}$$

通り存在する．ここで, $T(n)$ は n 点からなる木の総数であり, 係数 $(n-1)$ はどの辺を切るかという自由度を, また, 係数 2 はグラフ A, B の交換による自由度を表している．

ところで, k 点のラベル付き木 A と $(n-k)$ 点のラベル付き木 B の結び方の総数は, k 点のラベル付き木の中から一点を選ぶ方法の $kT(k)$ 通りと $n-k$ 点のラベル付き木の中から一点を選ぶ方法の $(n-k)T(n-k)$ 通りを掛け合わせ, これに n 個の点から k $(k=1,2,\cdots,n-1)$ 個の点を選んで A, B を作る場合の数を掛け合わせただけの個数だけ存在するから

$$\sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, kT(k)(n-k)T(n-k) = \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k(n-k)T(k)T(n-k) \tag{141}$$

となる．(140)(141) は等しいので

$$2(n-1)T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k(n-k)T(k)T(n-k) \tag{142}$$

が得られる．

(2) (142) 式において, Cayley の定理：$T(n) = n^{n-2}$ 等を用いると

$$2(n-1)n^{n-2} = \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k(n-k)k^{k-2}(n-k)^{n-k-2} = \sum_{k=1}^{n-1} {}_nC_k\, k^{k-1}(n-k)^{n-k-1} \tag{143}$$

が得られる．

この節の最後に Cayley の定理から導かれる系を一つあげておこう．

系 10.2
完全グラフ K_n の全域木の総数は n^{n-2} 個である．

(証明)
完全グラフ K_n から, 各点に接続している辺を適切に除去することにより, n 点のラベル付き木 (全域木) が得られ, 逆に, n 点のラベル付き木の各点に, 各点の次数が $n-1$ になるよう, 適切に辺を加えることにより完全グラフ K_n が得られる (例えば, 図 128 に K_5 の場合を載せた). 従って, n 点のラベル付き木は完全グラフ K_n の全域木に一意に対応し, よって, 完全グラフ K_n の全域木の総数は n^{n-2} である. **(証明終わり)**.

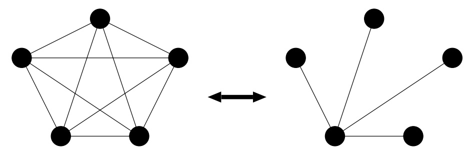

図 128: 完全グラフ K_5 とその全域木.

7.5 点行列と行列木定理

ここで学ぶ **行列木定理 (matrix-tree theorem)** は, 与えられたグラフ G のラベル付き全域木の個数を与える実用的な定理である.

具体的に定理とその応用例を見る前に, グラフ G の**点行列 (vertex matrix)** $\boldsymbol{D}$ を次のように定義する [1] .

グラフ G の点行列 $\boldsymbol{D}$ とは, その要素 D_{ij} が

$$D_{ij} = \begin{cases} \text{点 } v_i \text{ の次数} & (i=j \text{ のとき}) \\ -(\text{点 } v_i \text{ と点 } v_j \text{ を結ぶ辺の本数}) & (i \neq j \text{ のとき}) \end{cases}$$

で与えられる行列である.

このとき, グラフ G の全域木の本数 $\tau(\mathrm{G})$ は行列 $\boldsymbol{D}$ の任意の余因子で与えられる. つまり, 行列 $\boldsymbol{D}$ の第 i 行, 第 j 列を削除して得られる行列を $\boldsymbol{D}(\bar{i},\bar{j})$ とすると

$$\tau(\mathrm{G}) = (-1)^{i+j}|\boldsymbol{D}(\bar{i},\bar{j})|$$

が全域木の本数を与える. ここで, $|\boldsymbol{X}|$ は行列 $\boldsymbol{X}$ の行列式を意味する.

なお, 実用的には行列 $\boldsymbol{D}$ のサイズが $N \times N$ ならば, $i=j=N$ と選ぶのが扱いやすく, このとき

$$\tau(\mathrm{G}) = |\boldsymbol{D}(\overline{N},\overline{N})|$$

が全域木の総数となる. 以上の内容を**行列木定理**と呼ぶ.

この定理の使い方を具体的に見るために, 次のような例題を考えてみよう.

[1] この講義では個々のグラフのデータ構造を表現するための行列を既にいくつか取りあげてきたが, この点行列は 5 番目の行列である. 各自, これまでに学んだ「隣接行列」「接続行列」「タイセット行列」「カットセット行列」を復習しておくこと.

例題 7.6

隣接行列 $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

で与えられるグラフ G の全域木の総数 $\tau(\mathrm{G})$ を求めよ．また, その全域木を全て図示せよ．

(解答例)

隣接行列 $\boldsymbol{A}$ を持つグラフ G を図示してみると図 129(左) となる．このグラフ G の点行列 $\boldsymbol{D}$ は, その定義

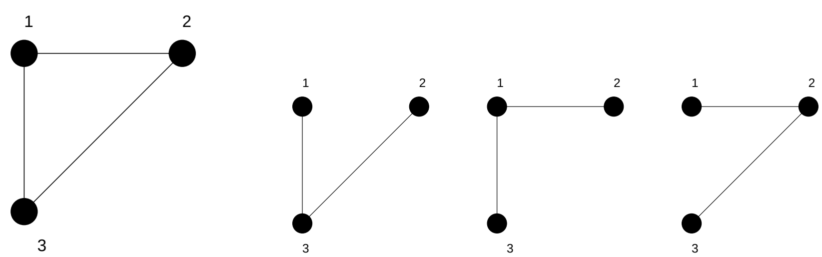

図 129: 隣接行列 で与えられるグラフ G(左) とその 3 つの全域木 (右).

から

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

であり, その $i = j = 3$ での余因子が, このグラフ G の全域木の総数 $\tau(\mathrm{G})$ を与え

$$\tau(\mathrm{G}) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3 \ (個)$$

となる．この 3 つの全域木を描くと図 129(右) のようになる．

例題 7.7 (2004 年度 **演習問題 7**)

1. 今回の講義で学んだ Cayley の定理の証明を参考にして, 下記の問いに答えよ.
 (1) n 個の点からなる木で, 与えられた点 v が端点になっているものは何個あるか ?
 (2) n 個の点からなる木の与えられた点 v が端点となっている確率 $P(n)$ を求めよ.
 また, 点の数 n が無限大のときの $P(n)$ の極限値が

$$\lim_{n\to\infty} P(n) \quad = \quad \frac{1}{\mathrm{e}}$$

 で与えられることを示せ. ただし, e は自然対数の底である.

2. 隣接行列 $\boldsymbol{A}$ が

$$\boldsymbol{A} \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

 で与えられるグラフ G に関する行列木定理について以下の問いに答えよ.
 (1) グラフ G の点行列 $\boldsymbol{D}$ を求めよ.
 (2) 行列木定理により, グラフ G の全域木の総数 $\tau(\mathrm{G})$ を求めよ.
 (3) (2) で得られた個数だけ存在する全域木を具体的に全て図示せよ.

(解答例)

1(1) 今回の講義で学習した Cayley の定理の証明の過程で得られた関係式 :

$$T(n,k) \quad = \quad {}_{n-2}C_{k-1}\,(n-1)^{n-k-1} \tag{144}$$

に注目する. これは, n 点からなる木における, ある点 v の次数が k であるものの個数を与えるわけであるから, 問題となっている「与えられた点 v が端点である木の個数」は上関係式で $k=1$ と置いたものに等しい. 従って, 求める木の個数は

$$T(n,1) \quad = \quad {}_{n-2}C_{0}\,(n-1)^{n-2} = (n-1)^{n-2} \tag{145}$$

である.

(2) 求める確率 $P(n)$ は n 個の点からなるラベル付き木の個数 n^{n-2} で上の結果である $T(n,1)$ を割ったものに相当するので

$$P(n) \quad = \quad \frac{T(n,1)}{n^{n-2}} = \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-2} \tag{146}$$

が求める答えである.

(3) 自然対数 e の定義から

$$\lim_{n\to\infty} P(n) \quad = \quad \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-2} = \lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{n} = \frac{1}{\mathrm{e}} \tag{147}$$

となり, 題意が示された.

(参考)

$P(n)$ の極限値：

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{1}{e} \tag{148}$$

の示し方として, 例えば $P(n)$ の対数をとったものの極限値：

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty} n\log\left(1-\frac{1}{n}\right) \tag{149}$$

を考えることによって「間接的」に (148) を示すこともできます. (149) の極限値はこのままでは

$$\lim_{n\to\infty} n=\infty, \quad \lim_{n\to\infty}\log\left(1-\frac{1}{n}\right)=0 \tag{150}$$

なので, $\infty\times 0$ を評価することになって厄介だが, $\log(1-1/n)$ を $(1/n)$ で展開すれば

$$\log\left(1-\frac{1}{n}\right) = -\frac{1}{n}-\frac{1}{2n^2}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^3}\right) \tag{151}$$

となるので,

$$n\log\left(1-\frac{1}{n}\right) = -1-\frac{1}{2n}+\mathcal{O}\left(\frac{1}{n^2}\right) \tag{152}$$

であり, 極限値 (149) は簡単に

$$\lim_{n\to\infty}\log\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = -1 \tag{153}$$

のように求めることができる. 従って, $n\to\infty$ のときに上式の log の中身が $1/e$ に近づくべきことは明らかであり, これで極限値 (148) が示せたことになる.

2(1) 隣接行列 $\boldsymbol{A}$ により与えられるグラフ G は図 130 のようになる. 従って, 求める点行列 $\boldsymbol{D}$ は

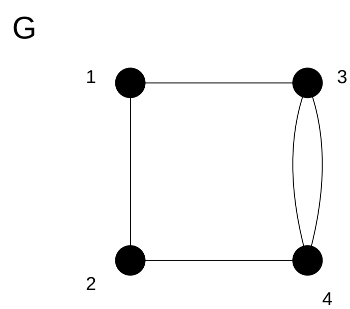

図 130: 隣接行列 **A** によって定義されるグラフ G.

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix} \tag{154}$$

である.

(2) $i = j = 4$ で余因子展開することにより, グラフ G の全域木の個数 $\tau(\mathrm{G})$ は

$$\tau(\mathrm{G}) = (-1)^{4+4}\begin{vmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 \end{vmatrix} = (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 3\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = -2 + 3\cdot 3 = 7\ (\text{個}) \tag{155}$$

となる.

(3) グラフ G の 7 通りの全域木を図示すると図 131 になる.

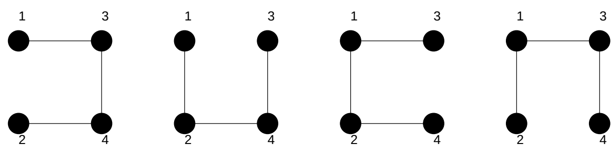

図 131: 隣接行列 **A** によって定義されるグラフ G の全域木. ただし, 辺 3 → 4 を削除するか, 辺 4 → 3 を削除するかにより, これら 4 つのグラフの中で辺 34 があるグラフにはそれぞれ 1 つずつ異なるグラフが存在するので, 計 7 つの全域木が得られる.

(注 1)

隣接行列 $\boldsymbol{A}$ と点行列 $\boldsymbol{D}$ の間には, 次に定義する行列 $\boldsymbol{\delta}$ を介して一般的な関係が存在する.
行列 $\boldsymbol{\delta}$ はその要素 δ_{ij} が

$$\delta_{ij} = \begin{cases} \deg(v_i) & (i = j\ \text{のとき}) \\ 0 & (i \neq j\ \text{のとき}) \end{cases} \tag{156}$$

で定義される行列であり, この行列と, 隣接行列 $\boldsymbol{A}$, 点行列 $\boldsymbol{D}$ の間には

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{\delta} - \boldsymbol{A} \tag{157}$$

なる関係がある. 各自がこの演習問題で扱ったグラフ G において, この関係式が成り立っていることを確認しておくこと.

(注 2)

ここで取り上げた点行列の行列式を計算することにより, ラベル付き全域木の数を数え上げる方法を**点行列式法**と名付けるとすれば, この全域木の個数を勘定する方法としては, もう一つ, **閉路行列式法**と呼ばれる方法がある. ここでは, この方法に関していくつかコメントしておこう.
まず, 行列要素 R_{ij} が次のように与えられる**閉路行列** $\boldsymbol{R}$ を導入する[2].

$$R_{ij} = \begin{cases} \text{閉路}\ c_i\ \text{を構成する辺の数} & (i = j) \\ \pm\ (\text{閉路}\ c_i\ \text{と}\ c_j\ \text{に共通な辺の本数}) & (i \neq j) \end{cases} \tag{158}$$

ここで非対角成分の符号は c_i と c_j の共通な辺上で, これら 2 つの閉路の向きが同じであればプラスを, 逆であればマイナスを選ぶことに約束する.
すると, この閉路行列 $\boldsymbol{R}$ を有するグラフ G に関する全域木の総数 $\tau(\mathrm{G})$ は

$$\tau(\mathrm{G}) = |\boldsymbol{R}| \tag{159}$$

つまり, 行列 $\boldsymbol{R}$ の行列式で与えられる. この方法の有効性を確認するために, **例題 7.6** 2 の隣接行列で与えられたグラフ (図 130 のグラフ G) に対して, この方法を適用してみよう.

[2] この講義に出てきたものとしては 6 番目のグラフ行列.

まず, このグラフ G には閉路 c_1, c_2 が存在し, それぞれは点の順序でその向きを指定すれば, $c_1 = 12431, c_2 = 343$ となる. 従って, このグラフ G の閉路行列 $\boldsymbol{R}$ は

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \tag{160}$$

である. よって, このグラフ G に対する全域木の総数 $\tau(\mathrm{G})$ は

$$\tau(\mathrm{G}) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7 \tag{161}$$

となり, 点行列式法による結果, つまり, **例題 7.6** 2.(2) の答えと一致する.
ところで, あるグラフ G が与えられたとき, その全域木の総数を勘定する必要が生じた際, 上述の点行列式法と閉路行列式法のどちらを使ったらよいのであろうか ? この疑問に対する一般的な答えは**グラフ G に含まれる点の数が閉路の数よりも少ない場合には点行列式法を用い, その逆の場合には閉路行列式法を用いるのがよい**ということである.
上記指針の正しさを確認するため, 閉路行列式法の点行列法に対する「優位性」が際立ってわかるような例を取りあげ, そのグラフに両方法を適用してみることにしよう.
図 132 に示したグラフ G に対して, まずは閉路行列式を適用してみると, この平面グラフの閉路はいずれも三角形であり, $c_1 = 1451, c_2 = 3453, c_3 = 1231$ である. 従って, このグラフの閉路行列 $\boldsymbol{R}$ は

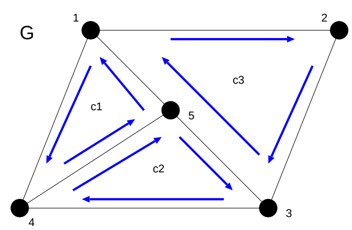

図 132: ここで点行列式法と閉路行列式法との計算手数を比較するために用いるグラフ G.

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \tag{162}$$

となる. この行列式は直ちに計算できて, グラフ G の全域木の個数は

$$\tau(\mathrm{G}) = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = 3 \times 8 = 24 \tag{163}$$

と求まる.
一方で点行列式法を使うとなると, 点行列を求めなければならないが, このグラフは 5 点からなるグラフなので, 点行列 $\boldsymbol{D}$ のサイズは 5×5 であり, 具体的に次のように与えられる.

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{164}$$

従って, この行列 $\boldsymbol{D}$ の 5 行 5 列における余因子によってグラフ G の全域木の本数が与えられて

$$\tau(\mathrm{G}) = (-1)^{5+5}\begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} \tag{165}$$

となる. しかし, 計算の手数から言うと, ここから所望の個数を求めるためには余因子展開法等を使って行列式を計算しなければならない. ここでは実際に展開を実行し, 行列式のサイズを段階的に落としていってみると

$$\begin{aligned}
\tau(\mathrm{G}) &= 3\begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \end{vmatrix} \\
&= 3\left\{2\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right\} + \left\{(-1)\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right\} \\
&+ \left\{(-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}\right\} = 3\{2\times 8 - 3\} + \{-8-1\} + \{-1-5\} = 24
\end{aligned} \tag{166}$$

となり, 確かに閉路行列式法による結果と一致する. しかし, 計算の手間は閉路行列式法の方が少ないことがわかるであろう.

例題 7.8 (2005 年度 **演習問題 7**)

行列木定理を用いて Cayley の定理を証明せよ.

(解答例)

この行列木定理を用いた証明では, 後に述べるように完全グラフ K_n の点行列の行列式を求めることが必要となるので, まずは準備として次のような $m \times m$ の対称行列の行列式を求める公式を作っておくことにする.

$$b_m \equiv \begin{vmatrix} a & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -(a+1) & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & a & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & a \end{vmatrix} = (a+1)\,b_{m-1} + (a+1)\,c_{m-1} \tag{167}$$

ただし, 下付きの添え字はその行列式のサイズを表し, c_{m-1} は次のような漸化式で定義される行列式である.

$$c_{m-1} \equiv \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & a & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ -(a+1) & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & a & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & -1 & \cdots & a \end{vmatrix} = (1+a)\,c_{m-2} \tag{168}$$

従って, b_m を求めるためには b_m, c_{m-1} に関する次の連立漸化式を解けばよい.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} b_m & = & (a+1)\,b_{m-1} + (a+1)\,c_{m-1} \\ c_{m-1} & = & (a+1)\,c_{m-2} \end{array} \right. \tag{169}$$

c_{m-1} に関する漸化式は直ちに解けて, $c_{m-1} = (a+1)^{m-2}c_1$ が得られるので, これを b_m に関する漸化式に代入すれば, 求めるべき b_m は簡単に

$$b_m \;=\; (a+1)^{m-1}b_1 + (m-1)(a+1)^{m-1}c_1 \tag{170}$$

のように定まる. 完全グラフの全域木の総数はこの公式 (170) で求めることができる. 例として完全グラフ $\mathsf{K}_5, \mathsf{K}_6$ の点行列はそれぞれ

$$\boldsymbol{D}_{\mathsf{K}_5} = \begin{pmatrix} 4 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 4 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{D}_{\mathsf{K}_6} = \begin{pmatrix} 5 & -1 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 5 & -1 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 5 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 5 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 5 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & -1 & 5 \end{pmatrix} \tag{171}$$

と書くことができる. 従って, 一般に完全グラフ K_n の全域木の総数は, 前に求めた公式 (170) で

$$m = n-1, a = n-1, b_1 = a, c_1 = -1 \tag{172}$$

と置けばよいので, これらの値を代入すれば直ちに

$$\tau(\mathsf{K}_n) = b_{n-1} = n^{n-2} \tag{173}$$

が求める全域木の総数であることがわかる. 完全グラフ K_n の全域木と n 点からなるラベル付き木は 1 対 1 に対応するので, 以上により, ケイリーの定理を行列木定理を用いて証明することができた.

例題 7.9 (2006 年度 $\boxed{\textbf{演習問題 7}}$)

完全グラフ K_n から任意の 1 辺 e を削除することで得られるグラフ $K_n - e$ の全域木の総数 $\tau(K_n - e)$ は

$$\tau(K_n - e) \;=\; (n-2)n^{n-3}$$

で与えられることを示せ.

[**ヒント**] 完全グラフから任意の 1 辺を除去したグラフの点行列を求めて行列木定理を用いる. このとき求める行列式は**例題 7.8** の b_m, c_m を用いて書けることに注意する.

(解答例)

例えば, 図 133 に与えたように完全グラフ K_5 の辺が 1 本削除されたグラフの全域木の総数を求めたい. 例えば, 図 133 のグラフの場合の点行列は

$$\boldsymbol{D}_{K_5 - e} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 4 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 4 & 4 \\ -1 & -1 & -1 & -1 & 4 \end{pmatrix} \tag{174}$$

となる (※この場合には辺 $\overline{12}$ を除去したが, どの 1 辺を選ぼうが, 完全グラフの対称性より結果は同じになることに注意). 従って, これを一般の完全グラフに拡張すれば

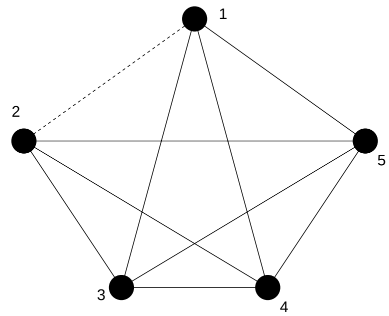

図 133: $K_5 - e$ の一例. 破線が削除した辺 e に該当する.

$$
\boldsymbol{D}_{K_n - e} = \begin{pmatrix} a-1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ -1 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & a \end{pmatrix} \tag{175}
$$

と書ける. 従って, この点行列の行列式を求めることができれば, それが求める全域木の総数になっている. 前回の**例題 7.8** で見た余因子展開と同様の手続きを行うと

$$
\begin{aligned}
\tau(K_n - e) &= (-1)^{N+N} |\boldsymbol{D}_{K_n - e}(N-1, N-1)| \\
&= \left| \begin{array}{cccccc} a-1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ 0 & a-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{array} \right|_{m \times m} = \left| \begin{array}{cccccc} a-1 & 0 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -(a-1) & a-1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{array} \right|_{m \times m} \\
&= (a-1) \left| \begin{array}{cccccc} a-1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{array} \right|_{(m-1) \times (m-1)} \\
&+ (a-1) \left| \begin{array}{cccccc} 0 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & a & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ -1 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ -1 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{array} \right|_{(m-1) \times (m-1)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= (a-1)\begin{vmatrix} a & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -(a+1) & a & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}_{(m-1)\times(m-1)} \\
&+ (a-1)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -(a+1) & a & -1 & \cdots & -1 & 1 \\ 0 & -1 & a & -1 & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & \cdots & -1 \\ 0 & -1 & \cdots & \cdots & -1 & a \end{vmatrix}_{(m-1)\times(m-1)} \\
&= (a-1)\{ab_{m-2}+(a+1)c_{m-2}\}+(a-1)\{b_{m-2}+(a+1)c_{m-2}\} \\
&= (a-1)(a+1)(b_{m-2}+2c_{m-2}) \qquad (176)
\end{aligned}
$$

が得られる. ここで, 行列式 b_m, c_m は**例題 7.8** で用いた行列式であり, 次の連立漸化式を満たし

$$
\left\{ \begin{array}{lcl} b_m &=& (a+1)\,b_{m-1}+(a+1)\,c_{m-1} \\ c_{m-1} &=& (a+1)\,c_{m-2} \end{array} \right. \qquad (177)
$$

これらの解は次式で与えられたことを思い出そう.

$$
\left\{ \begin{array}{lcl} c_{m-1} &=& (a+1)^{m-2}c_1 \\ b_m &=& (a+1)^{m-1}b_1+(m-1)(a+1)^{m-1}c_1 \end{array} \right. \qquad (178)
$$

初期条件 :

$$
m=n-1, a=n-1, b_1=a, c_1=-1 \qquad (179)
$$

に注意して, b_{m-2}, c_{m-2} を (176) 式に代入すれば直ちに

$$
\begin{aligned}
\tau(K_n-e) &= n(n-2)\{(a+1)^{m-3}b_1+(m-3)(a+1)^{m-3}c_1+2(a+1)^{m-3}c_1\} \\
&= n(n-2)(a+1)^{m-3}\{b_1+c_1(m-1)\}=n(n-2)n^{n-4}=(n-2)n^{n-3} \qquad (180)
\end{aligned}
$$

が求める全域木の総数であることがわかる. 従って題意が示された.

例題 7.10 (2006 年度情報工学演習 II(B) #1)

(1) グラフ H はその全ての隣接する 2 点が k 個の辺で結ばれているものとする. H に含まれる全てのループを取り除き, 全ての多重辺を 1 つの辺になるまで削除してできるグラフ — **底単純グラフ** — を G とする. G の点数, 辺数をそれぞれ n, m とするとき, グラフ G, H の全域木の総数 $\tau(G), \tau(H)$ に関して

$$\tau(H) = k^{n-1}\tau(G)$$

が成り立つことを示せ.

(2) F をグラフ G の各辺を全て長さ k の道で置き換えてできるグラフとする. このとき

$$\tau(F) = k^{m-n+1}\tau(G)$$

を示せ.

(3) (2) の結果を用いて完全二部グラフ $K_{2,n}$ の全域木の総数は

$$\tau(K_{2,n}) = n \cdot 2^{n-1}$$

で与えられることを示せ.

(解答例)

(1) グラフ H では任意の隣接する 2 点間で G での辺の他に $k-1$ 本の辺が存在するので, k 本の中から 1 本を選び出す操作を考えると, G の全域木の辺数が $n-1$ であるから, その組み合わせは k^{n-1} 通りである. これがこの操作を繰り返してできる G の全域木全てに当てはまるので, H の全域木の総数は

$$\tau(H) \quad = \quad k^{n-1}\tau(G) \tag{181}$$

で与えられる.

(2) G の辺の中で G の全域木の辺として選ばれた辺に該当する F での辺は長さ k の道で置き換わっているが, この辺を長さが 1 の道, つまり, G の全域木の辺となるまで縮約する操作を考えると, この操作の前後で F の全域木と G の全域木の総数は変化しないことに着目する. すると, これらの総数に変化を与える要因は G の辺の中で全域木の辺に選ばれなかった辺に該当する F での辺の効果である. つまり, F での各辺に存在する $k-1$ 個の点のうち, どの点で G での点への縮約をとるかという場合の数は k 通りであり, G の辺の中で全域木の辺に選ばれなかった辺数は $m-(n-1)$ であるから, 結局

$$\tau(F) \quad = \quad k^{m-n+1}\tau(G) \tag{182}$$

となる.

(3) 2 つの点を n 本の辺で結んだグラフを G としょう. この各辺を全て長さが 2 の道で置き換える. このグラフを F とする. この変換: $G \to F$ で増加する n 個の点は全て元の 2 点と隣接し, 互いに隣接しないので完全二部グラフ $K_{2,n}$ となる (図 134 参照). 従って, (2) での結果を用いると今の場合 $\tau(G) = n$ であることに注意して

$$\tau(K_{2,n}) \quad = \quad \tau(F) = 2^{n-2+1}\tau(G) = 2^{n-1} \cdot n \tag{183}$$

が得られる.

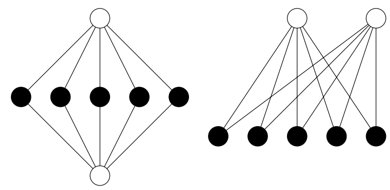

図 134: ここで考えるグラフ F(左) とその同型グラフである完全二部グラフ $K_{2,n}$(右).

例題 7.11 (2006 年度情報工学演習 II(B) #1)

n 本のスポークを持つ車輪グラフの全域木の総数を w_n とすると

$$w_n - 4w_{n-1} + 4w_{n-2} - w_{n-3} = 0$$

が成り立つことを示し, w_n を求めよ.

(解答例)

まずは n 本のスポークを持つ車輪の点行列 $\boldsymbol{D}$ は

$$\boldsymbol{D} = \begin{pmatrix} n & -1 & -1 & \cdots & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ -1 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{pmatrix}_{n\times n} \tag{184}$$

である. 余因子展開法を用いて, $w_n = |\boldsymbol{D}(1,1)|$ を計算すると

$$w_n = 3a_{n-1} + 2b_{n-1} \tag{185}$$

が得られる. ここに, a_n は次で定義され, ここでもまた余因子展開を行うと次式のような漸化式に従う.

$$a_n = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix}_{n\times n} = 3a_{n-1} - a_{n-2} \tag{186}$$

b_n もまた次のように定義され, ここでもまた余因子展開を用いると次の漸化式に従う.

$$b_n = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & -1 & 3 \end{vmatrix}_{n\times n} = -a_{n-1} + b_{n-1} + a_{n-2} \tag{187}$$

この漸化式は次のように書き直すことができて, $b_n + a_{n-1}$ は初項が $b_3 + a_2$, 公比 1 の等比数列なので

$$b_n + a_{n-1} = b_3 + a_2 = \begin{vmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} = -1 \tag{188}$$

が成り立つ. 従って, あとは連立漸化式 (185)(186)(188) を w_n に関して解き, 実際に問題で与えられた関係式が成立することを示せばよい. 実際に解くと, $\alpha = (3+\sqrt{5})/2, \beta = (3-\sqrt{5})/2$ として

$$\begin{aligned} w_n &= \alpha^n + \beta^n - 2 = 3(\alpha^{n-1} + \beta^{n-1} - 2) - (\alpha^{n-2} + \beta^{n-2} - 2) + 2 \\ &= 3w_{n-1} - w_{n-2} + 2 \end{aligned} \tag{189}$$

となるが, これとこの式で $n \to n+1$ としたものを辺々引くと

$$w_n - 4w_{n-1} + 4w_{n-2} - w_{n-3} = 0 \tag{190}$$

が得られる. これはここで示すべき漸化式である.

例題 7.12　(2004 年度情報工学演習 II(B) #1)

図 135 のグラフ G に対し, 以下の問いに答えよ.

(1) グラフ G から全域木 T を作ったとしよう. このとき, T の辺数を求めよ.
(2) (1) で全域木を作るまでに削除しなければならない辺数 $\overline{m}$ を求めよ.
(3) T に (2) で求めた辺を 1 つずつ付加すると必ず閉路が 1 つだけできる. このようにして作られる閉路を**基本閉路**と呼ぶが, この基本閉路を $\overline{m}$ 個全て描け.
(4) (3) で求めた閉路 $C_1, C_2, \cdots, C_{\overline{m}}$ に対し, 閉路行列法を用いることにより, 全域木の総数 τ(G) を求めよ.

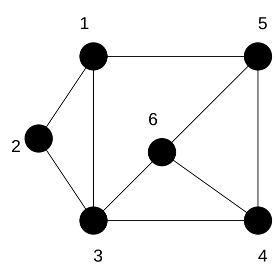

図 135: ここで全域木を考えるグラフ G.

(解答例)

(1) 5 本
(2) $\overline{m} = 4$
(3) 基本閉路 4 つ C_1, C_2, C_3, C_4 を描くと図 136 のようになる.

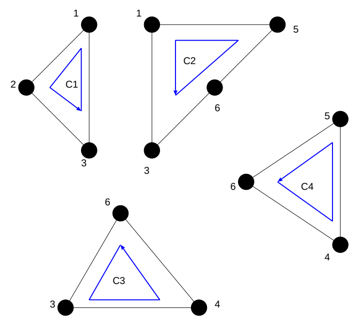

図 136: 求める基本閉路. 閉路行列式法を用いるために, 各閉路には図のように向き付けをしておく.

(4) グラフ G の閉路行列 $\boldsymbol{R}$ は (3) で求めた基本閉路に注意して

$$\boldsymbol{R} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & 3 & -1 \\ 0 & -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \tag{191}$$

と書けるので, 全域木の総数 $\tau(\mathsf{G})$ は

$$\begin{aligned} \tau(\mathsf{G}) = |\boldsymbol{G}| &= 3\begin{vmatrix} 4 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 3\left\{4\begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - (-1)\begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix}\right\} - \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix} \\ &= 64\ (\text{個}) \end{aligned} \tag{192}$$

である.

例題 7.13 (2004 年度情報工学演習 II(B) #1)

図 137 のように 1 点から k 本の枝を出し, その k 本の枝からさらに k 本の枝を出すという操作を n 回繰り返してできる木を $\mathsf{T}_k(n)$ と名付けよう. 図 137 の例は $\mathsf{T}_3(2)$ である. このとき, 次の問いに答えよ.

(1) $\mathsf{T}_3(n)$ に含まれる点の総数 $S_3(n)$ を求めよ. また, $\mathsf{T}_3(n)$ の端点の総数を $Q_3(n)$ を求め, 比 $P_3(n) = Q_3(n)/S_3(n)$ に対し, 極限値 :

$$p_3 = \lim_{n\to\infty} P_3(n)$$

を計算せよ.

(2) (1) を参考にして, 任意の自然数 K に対して $P_K(n)$ を計算し, n に関する極限値 :

$$p_K = \lim_{n\to\infty} P_K(n)$$

を求め, さらに K に関する極限値 :

$$p_\infty = \lim_{K\to\infty} p_K$$

を計算し, 木 $\mathsf{T}_K(n)$ の構造と極限値 p_∞ からわかることを簡潔に述べよ.

(注) : n と言うと普通はグラフの点の数を示しますが, ここでは「操作」の回数であることに注意.

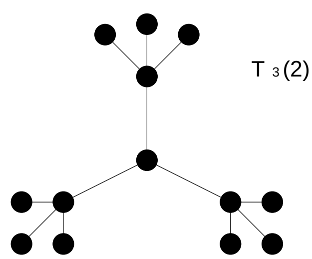

図 137: ここで述べた「操作」によって作られた木 $\mathsf{T}_3(2)$.

(解答例)

(1) 明らかに, $S_3(n)$ は初項 1, 公比 3 の等比数列の第 n 項までの和であるから

$$S_3(n) = 1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n = \frac{3^{n+1}-1}{3} \qquad (193)$$

である. 一方, $\mathsf{T}_3(n)$ の端点の総数 $Q_3(n)$ は $\mathsf{T}_3(n)$ の作り方から明らかに $Q_3(n) = 3^n$ であるので, これらの比 $P_3(n) = Q_3(n)/S_3(n)$ は

$$P_3(n) = \frac{2\cdot 3^n}{3^{n+1}-1} \qquad (194)$$

であり, 問題の極限値は

$$p_3 = \lim_{n\to\infty} P_3(n) = \frac{2}{3} \tag{195}$$

と求まる.

(2) $k = K$ の場合には

$$S_K(n) = \frac{K^{n+1}-1}{K-1} \tag{196}$$

$$Q_K(n) = K^n \tag{197}$$

$$P_K(n) = \frac{(K-1)K^n}{K^{n+1}-1} \tag{198}$$

となるので, $P_K(n)$ に関して $n \to \infty$ の極限をとると

$$p_K = \lim_{n\to\infty} P_K(n) = \frac{K-1}{K} \tag{199}$$

が得られる ($K = 3$ と置けば (1) の結果と一致することに注意). さらに, この確率で $K \to \infty$ の極限をとれば $p_{K\to\infty} = 1$ が得られるが, この結果はほとんど全ての点が木の末端に分布しており, 中心からその末端に至るまでの間に存在する点の数は末端の点数と比べて無視できるほど少ないことを意味している. 末端が密に詰まっているのに対して, 中心から末端にいたるまでの間がスカスカの状態なわけである. ちなみに, このような作り方で出来上がる木のことを**ケーリーの木 (Caley's tree)** と呼んでいる.

例題 7.14 (2005 年度情報工学演習 II(B) #2)

行列木定理を用いて完全二部グラフ $K_{m,n}$ の全域木の総数が

$$\tau(K_{m,n}) = m^{n-1}n^{m-1}$$

で与えられることを証明せよ.

(解答例)

完全二部グラフ $K_{m,n}$ の点行列 $\boldsymbol{D}$ は次のサイズ $(m+n)\times(m+n)$ の正方行列である.

$$\boldsymbol{D} = \left(\begin{array}{cccc|cccc} n & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & n & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & -1 & & \\ 0 & \cdots & \cdots & n & & & & \\ \hline & & & & m & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & 0 & m & \cdots & 0 \\ & -1 & & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & \cdots & \cdots & n \end{array}\right) \tag{200}$$

従って, 以下ではやや煩雑ではあるが, この点行列の第 (1,1) 成分での余因子:

$$|\boldsymbol{D}(\bar{1},\bar{1})| = \left|\begin{array}{cccc|cccc} n & 0 & \cdots & 0 & & & & \\ 0 & n & \cdots & 0 & & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & & -1 & & \\ 0 & \cdots & \cdots & n & & & & \\ \hline & & & & m & 0 & \cdots & 0 \\ & & & & 0 & m & \cdots & 0 \\ & -1 & & & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & & & 0 & \cdots & \cdots & n \end{array}\right| \tag{201}$$

を丁寧に計算していくことになる. ここに, 左上と右下の部分行列:

$$\begin{pmatrix} n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & n & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & n \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} m & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & m & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \cdots & m \end{pmatrix} \tag{202}$$

のサイズはそれぞれ, $(m-1)\times(m-1)$, $n\times n$ であることに注意しょう.

そこで, 次のような行列の基本変形を行う. すなわち, 第 m 列から第 $(m+n-2)$ 列までの $(n-1)$ 個の列ベクトルを第 $(m+n-1)$ 列に加算し, 次いで, 第 $(m+n-1)$ 列に $1/m$ を乗じたベクトルを第 1 列から第 $(m-1)$ 列まで加算する. この操作により

$$|\boldsymbol{D}(\bar{1},\bar{1})| = m^n \begin{vmatrix} n\frac{m-1}{m} & & -n\frac{1}{m} \\ & \ddots & \\ -n\frac{1}{m} & & n\frac{m-1}{m} \end{vmatrix} \tag{203}$$

が得られる. これ以降はこの行列式を上三角行列にするように基本変形を繰り返す.

まずは, この第 1 行に $1/(m-1)$ を乗じた行ベクトルを第 2 行から第 $(m-1)$ 行まで加算すると

$$|\boldsymbol{D}(\bar{1},\bar{1})| = m^n \begin{vmatrix} n\frac{m-1}{m} & * & * & * \\ 0 & n\frac{m-2}{m-1} & & -n\frac{1}{m-1} \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & -n\frac{1}{m-1} & & n\frac{m-2}{m-1} \end{vmatrix} \tag{204}$$

が得られるが, これ以降, 第 i 行に $1/(m-i)$ を乗じた行ベクトルを第 $(i+1)$ 行以降に加算するという操作を $i=2$ から $i=m-2$ まで順次繰り返すことで所望の行列式 $|\boldsymbol{D}(\bar{1},\bar{1})|$ が

$$|\boldsymbol{D}(\bar{1},\bar{1})| = m^n \begin{vmatrix} n\frac{m-1}{m} & * & * & * \\ 0 & n\frac{m-2}{m-1} & & -n\frac{1}{m-1} \\ \vdots & 0 & \ddots & \\ 0 & 0 & & n\frac{1}{2} \end{vmatrix} = m^n\cdot n^{m-1}\cdot\frac{1}{m} = m^{n-1}n^{m-1} \tag{205}$$

と計算される.

従って, 行列木定理より完全二部グラフの全域木の総数が $m^{n-1}n^{m-1}$ であることが証明された.

※ 完全二部グラフの対称性を考えると, もう少しスマートな数え上げ方ができるかもしれないが, 現時点で思いつく複雑ではあるが地道な数え上げ方は上に示した点行列の余因子計算である.

演習問題 7

葉 (末端) の数が n である 2 分木 (一つの枝から 2 つの枝が伸びる木) の総数を p_n としよう．すると明らかに $p_0 = 0, p_1 = p_2 = 1$ である．このとき以下の問いに答えよ．

(1) $p_3 = 2$ である．この 2 つの 2 分木を描け.

(2) p_4 を求め, その全ての 2 分木を描け.

(3) 葉数 n_1 の 2 分木と葉数 n_2 の 2 分木の互いの根 (2 分木の開始点) を 1 つの新しい根を介してつなげる操作で葉数 $n_1 + n_2$ の 2 分木が $p_{n_1} p_{n_2}$ 通りできる．$n_1 = 3, n_2 = 4$ の場合に対し, この操作でできる 2 分木を全て描け.

(4) x を任意の実数とする．x の n 次の冪係数が葉数 n の 2 分木の総数 p_n になるようにして作られる次の多項式:

$$P(x) \quad = \quad p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n + \cdots$$

を「2 分木生成多項式」と名づけることにしょう．すると, 前問 (3) で与えた操作でできる 2 分木の総数 $p_{n_1} p_{n_2}$ は 2 分木生成多項式の 2 乗, つまり, $\{P(x)\}^2$ における $x^{n_1+n_2}$ の係数の一部分として現れる (同じ $n_1 + n_2$ を与える n_1 と n_2 の組み合わせは複数あるので「一部分」である)．この事実をふまえた考察により

$$P(x) \quad = \quad x + \{P(x)\}^2 \tag{206}$$

が成り立つことを示せ.

(5) (4) で示した関係式 (206) から p_n を n の関数として求めよ.