グラフ理論　#11

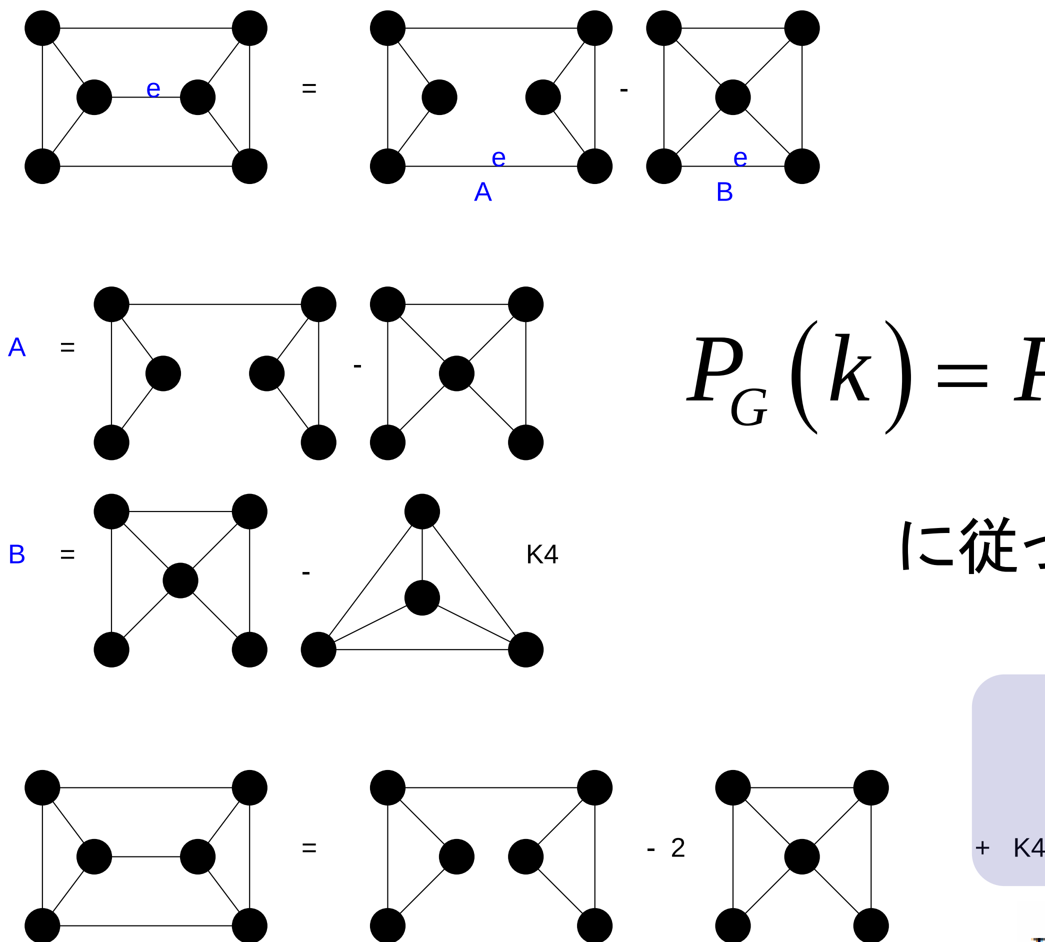
第11回講義　7月2日

--- 有向グラフ---

情報科学研究科　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題10の解答例



関係式

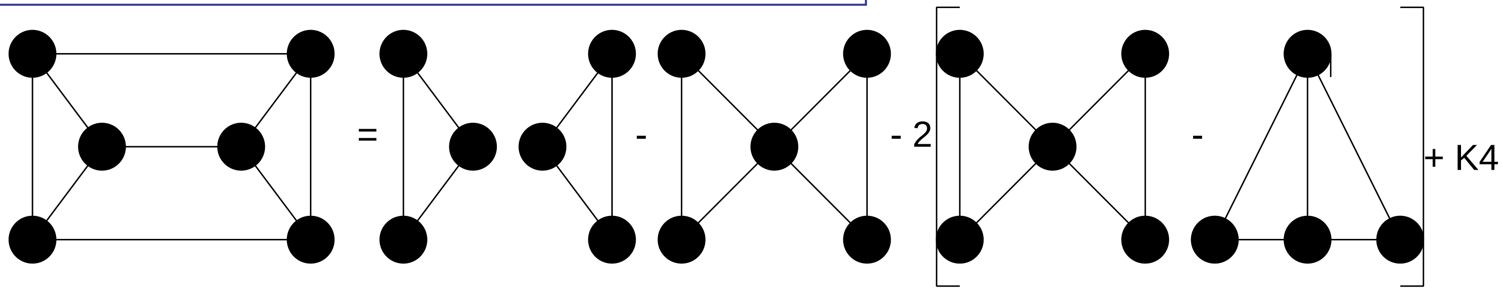
$$P_G(k) = P_{G-e}(k) - P_{G/e}(k)$$

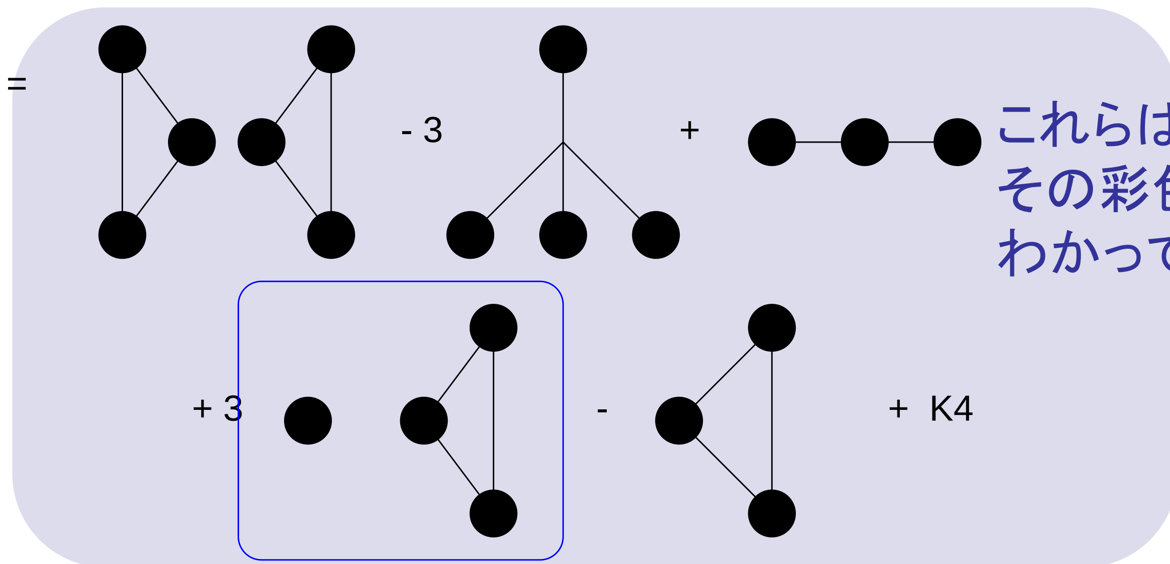
に従ってグラフを分解していく

完全グラフの
彩色多項式はわかっている

$$P_{K_4}(k) = k(k-1)(k-2)(k-3)$$

演習問題10の解答例





これらは全て
その彩色多項式が
わかっている

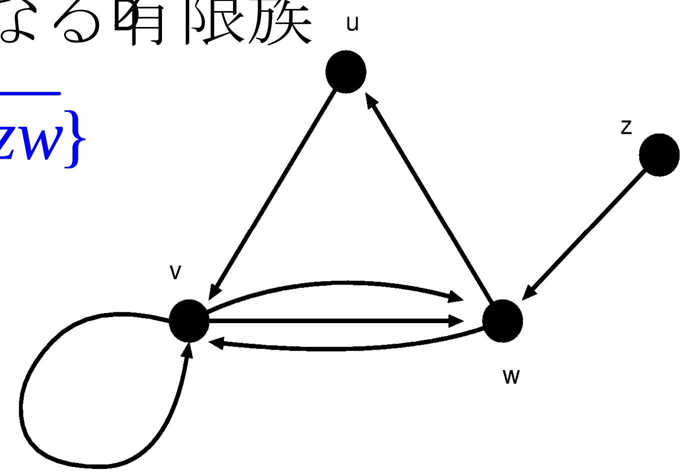
$$P_G\left(k\right)=k^2(k-1)(k^3-5k^2+6k-1)$$

有向グラフ：定義･性質 #1

弧集合:

$A(D)$:点集合$V(D)$の元の順序対からなる有限族

$$A(D)=\{\overline{uw},\overline{vv},\overline{vw},\overline{vw},\overline{wv},\overline{wu},\overline{zw}\}$$

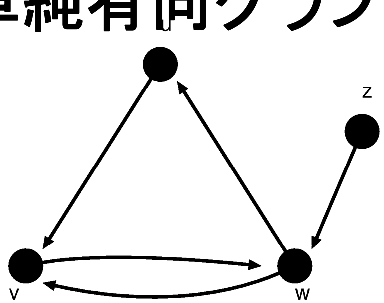


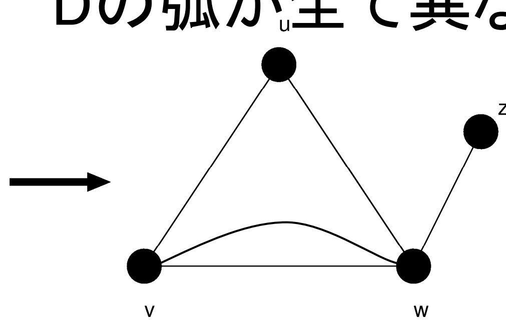
有向グラフ:

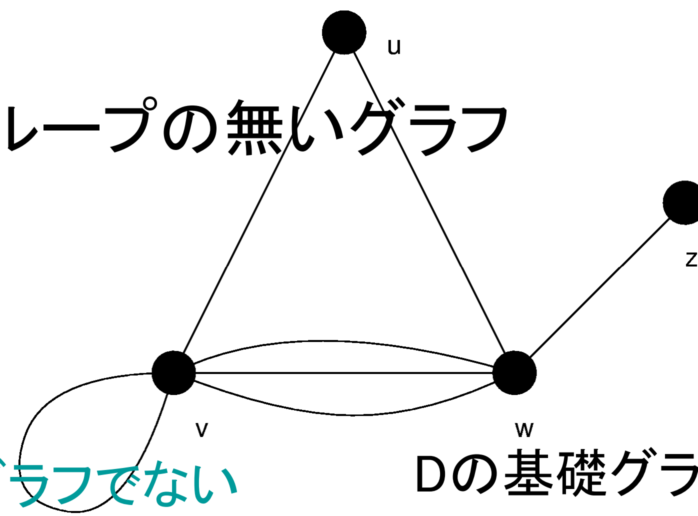
$D:V(D)$と$A(D)$からなるグラフ

Dの基礎グラフ：有向グラフDの矢印を取り除いたグラフ

単純有向グラフ： Dの弧が全て異なり、ループの無いグラフ





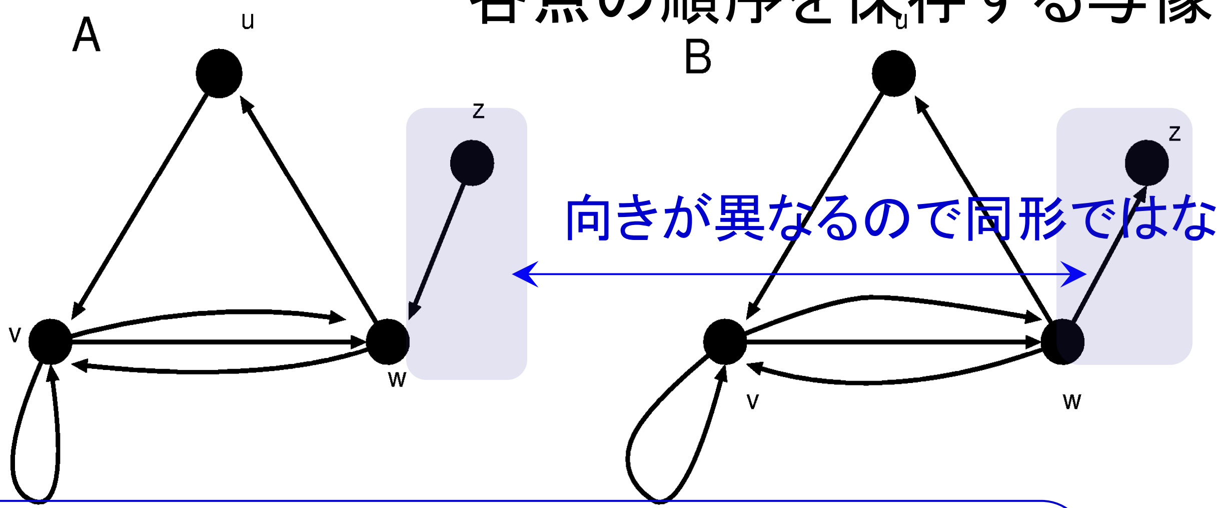


Dの基礎グラフ

単純有向グラフの基礎グラフは必ずしも単純グラフでない

有向グラフ：定義･性質 #2

有向グラフの同形：基本グラフの間に同形写像があり、
各点の順序を保存する写像になっているとき

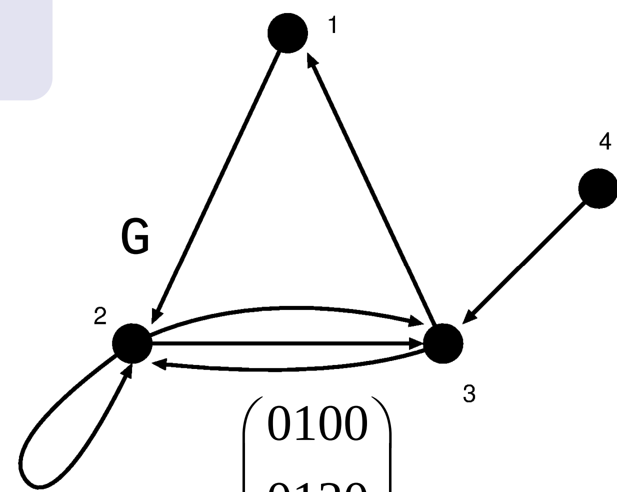


向きが異なるので同形ではない

有向グラフの隣接行列：

$\mathbf{A}=(a_{ij})$：要素a_{ij}がv_iからv_jへの「弧」の本数を表す。

点数nのグラフに対して$n\times n$の行列



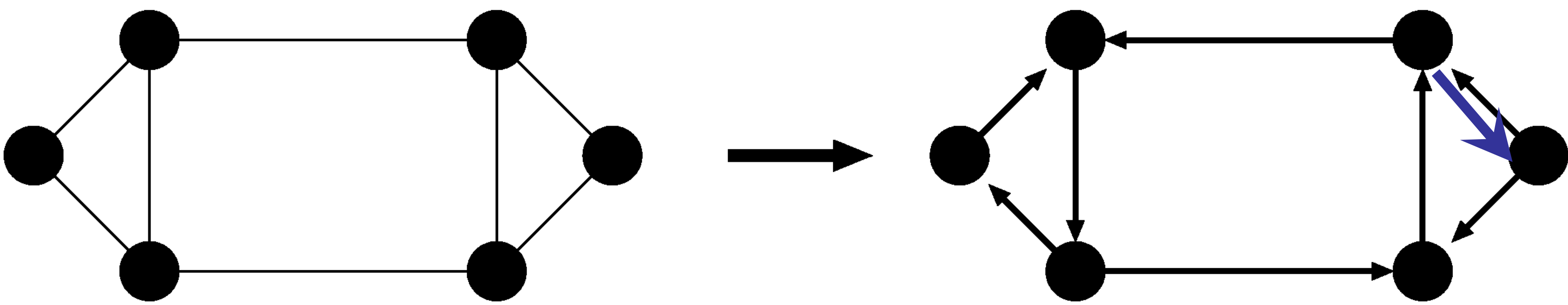
$$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&1&2&0\\1&1&0&0\\0&0&1&0\end{pmatrix}$$

グラフGの隣接行列
一般に対称ではない

強連結と向き付け可能性

強連結 ： 任意の2点 v,w の間に点vから点 w への道がある

向き付け可能 ：
Gの全ての辺を方向付けて強連結有向グラフが得られるとき



向き付け可能なグラフの一例

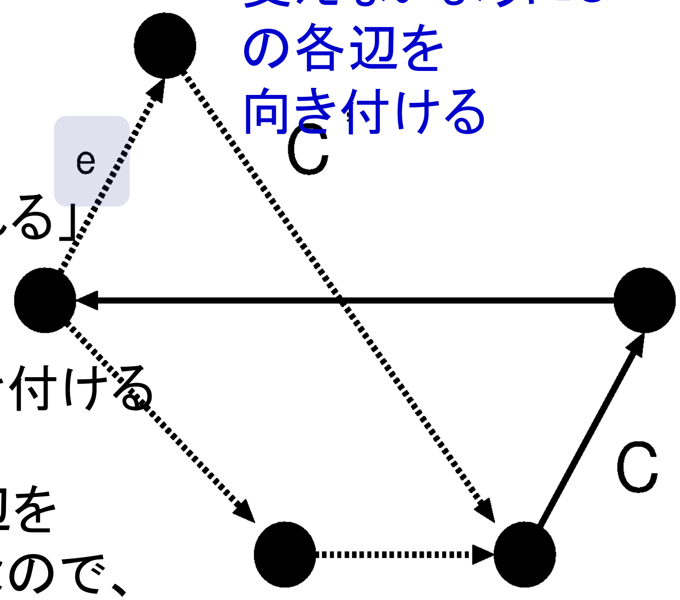
定理22・1とその証明

連結グラフGが向き付け可能であるための必要十分条件は
グラフGの各辺が少なくとも一つの閉路に含まれていることである

(証明)必要性はあきらかなので、十分性を示す。

閉路Cには含まれないが、
Cの各辺に隣接している辺 e を選ぶ

Cの各辺の向きを
変えないようにC’
の各辺を
向き付ける

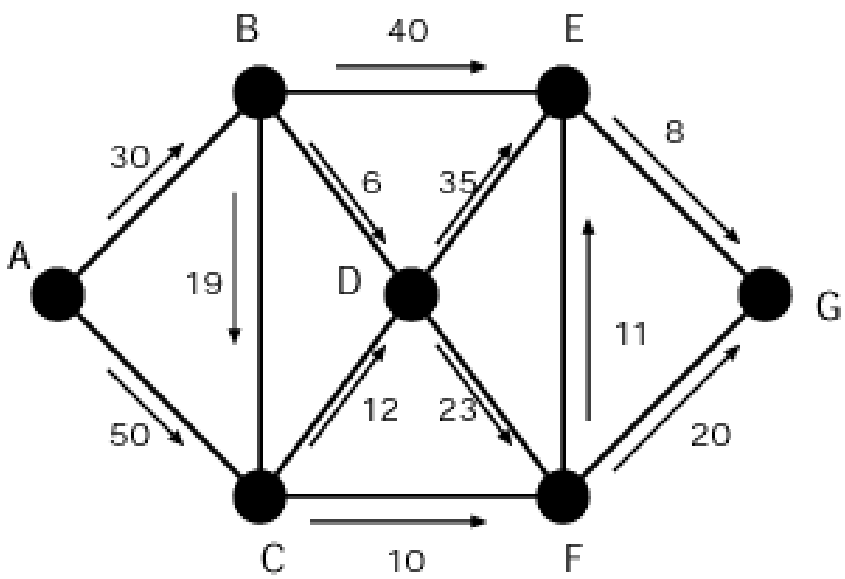


「グラフ G の各辺は少なくとも一つの閉路に含まれる」
ので、辺 e は C 以外の閉路 C’ に含まれる

Cの各辺の向きを変えないように、C’ の各辺を向き付ける

この操作を続けて、各ステップで少なくとも1つの辺を
向き付けると、各ステップで有向グラフは強連結なので、
グラフ全体を向き付けたのちにできるグラフは強連結である。

例題10.1（最長路を求める）



$$A:0$$

$$B: l(A)+30=30$$

$$C: l(A)+50=50$$

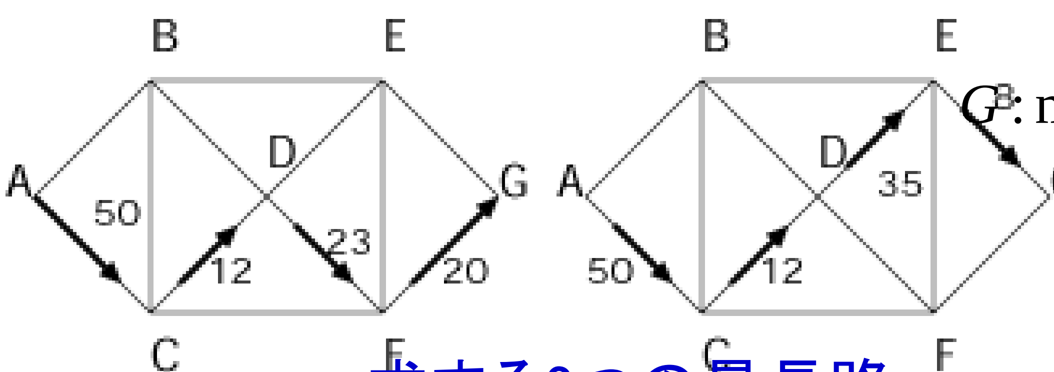
$$D: \max\{l(B)+6, l(C)+12\}$$
$$=\max\{36,62\}=62$$

$$F: \max\{l(D)+23, l(C)+10\}$$
$$=\max\{85,60\}=85$$

$$E: \max\{l(B)+8, l(B)+35, l(F)+11\}$$
$$=\max\{70,97,96\}=97$$

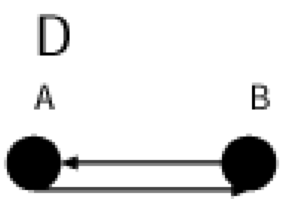
$$G: \max\{l(E)+8, l(F)+20\}$$
$$=\max\{105,105\}=105$$

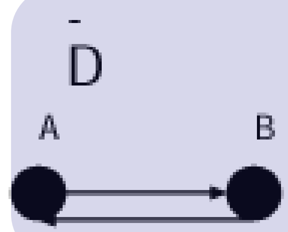
最長路の長さ



求まる2つの最長路

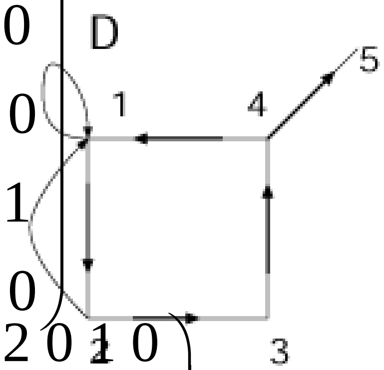
例題10.2 (有向グラフの逆)

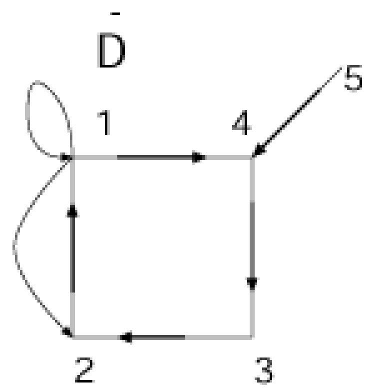




有向グラフDの逆 ：
Dの向きを反転してできるグラフ

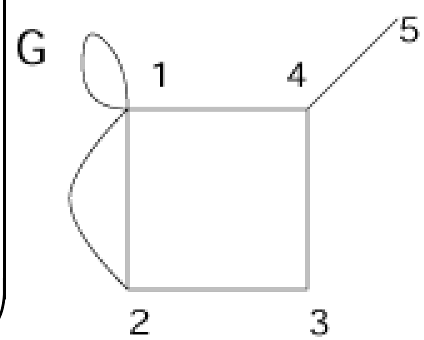
$$\mathbf{A}_D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$





$$\mathbf{A}_{\widetilde{D}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}_G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$



$$\left[\mathbf{A}_G\right]_{vw} = \left[\mathbf{A}_D + \mathbf{A}_{\widetilde{D}}\right]_{vw}$$

$$2\left[\mathbf{A}_G\right]_{vv} = \left[\mathbf{A}_D + \mathbf{A}_{\widetilde{D}}\right]_{vv}$$

一般に成り立つ

オイラー有向グラフ

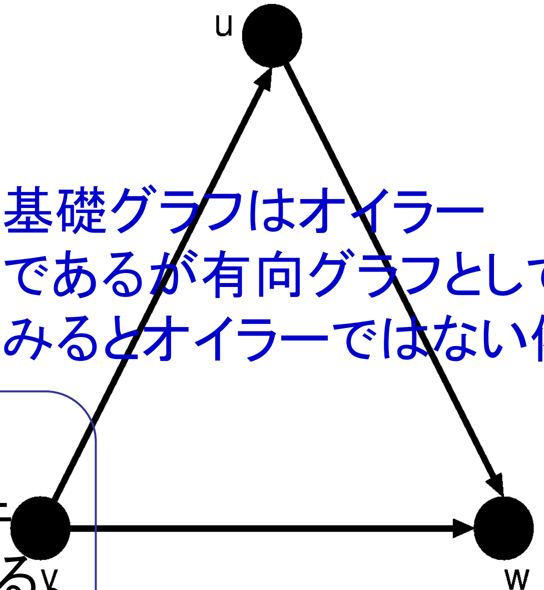
オイラー有向グラフ：
全ての弧を含む閉じた小道が存在する連結有向グラフ

入次数 indeg(v) : wv の形をした有向グラフD の弧数

出次数 outdeg(v) : vw の形をした有向グラフD の弧数

握手有向補題
有向きグラフDの全点について
入次数の合計と出次数の合計は等しい

定理23・1
連結有向グラフDがオイラーであるための必要十分条件はDの各点で outdeg (v) = indeg (v)が成立することである。



基礎グラフはオイラーであるが有向グラフとしてみるとオイラーではない例

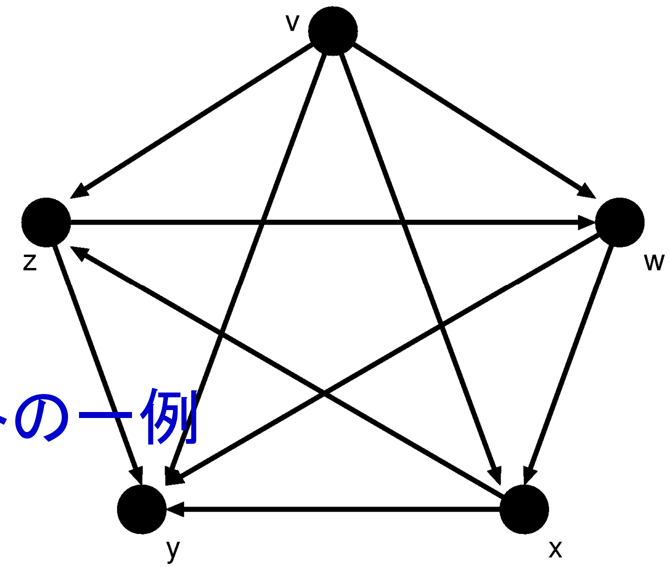
ハミルトン有向グラフ

ハミルトン有向グラフ：全ての点を含む閉路がある有向グラフ

半ハミルトン有向グラフ：全ての点を通る道がある有向グラフ

D は強連結有向グラフであり、点が n 個あるとする。各点 v に対し $\operatorname{out deg}(v) \geq n/2$ かつ $\operatorname{in deg}(v) \geq n/2$ ならば D はハミルトン有向グラフである。

トーナメント：
任意の2点がちょうど1本の弧で結ばれる有向グラフ

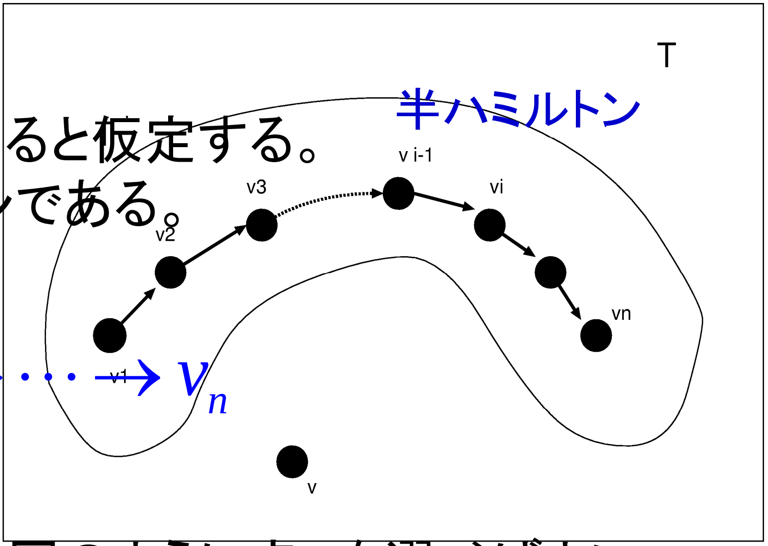


トーナメントの一例

定理23・3

(i) ハミルトンでないトーナメントは全て半ハミルトンである。
(ii) 強連結なトーナメントは全てハミルトンである。

((i)の証明：点数nに関す帰納法)



点n個のトーナメントは全て半ハミルトンであると仮定する。
図のT' にはn個の点があるので半ハミルトンである。

これに点vを加える状況(T)を考える

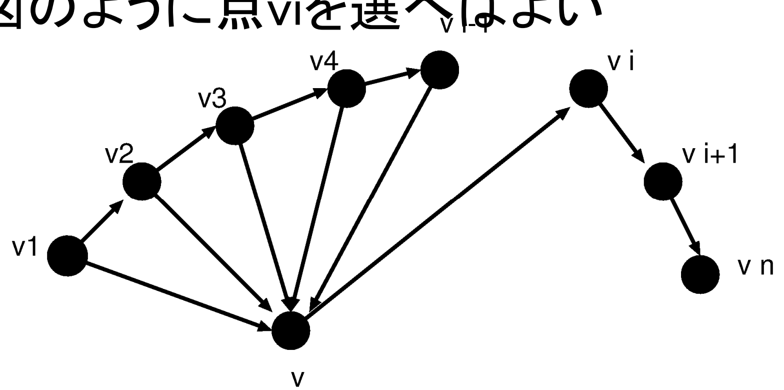
(1) vv1がTの弧ならば $v \to v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n$
が所望の道である。

(2) vv1がTの弧でなく、v1vがTの弧ならば、図のように点viを選べばよい

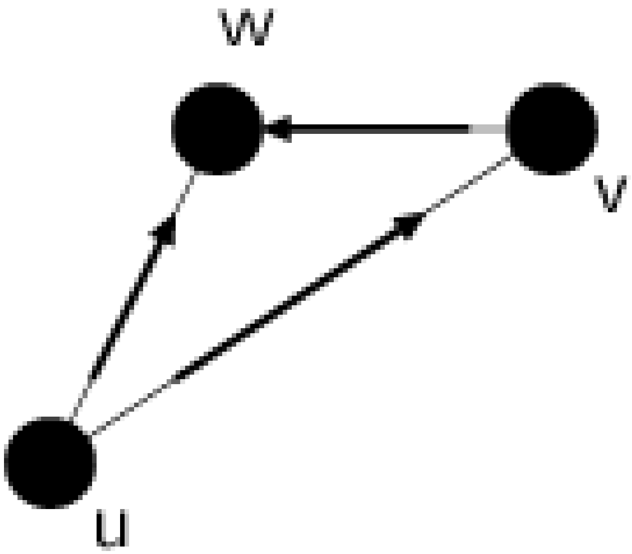
(3) vviの形をした弧がTに無ければ

$$v_1 \to v_2 \to \cdots \to v_n \to v$$

が所望の道である。



例題10.3（推移的トーナメント）



推移的トーナメントの一例

弧uvとvwがあれば必ず弧uwがある

$$1\text{位}: \mathrm{outdeg}(u) = 2, \mathrm{indeg}(u) = 0$$

$$2\text{位}: \mathrm{outdeg}(v) = 1, \mathrm{indeg}(v) = 1$$

$$3\text{位}: \mathrm{outdeg}(w) = 0, \mathrm{indeg}(w) = 2$$

outdegの多い順に強い

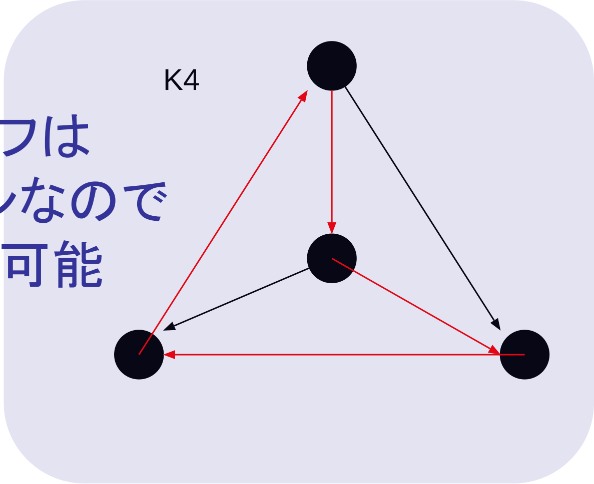
indegの少ない順に強い

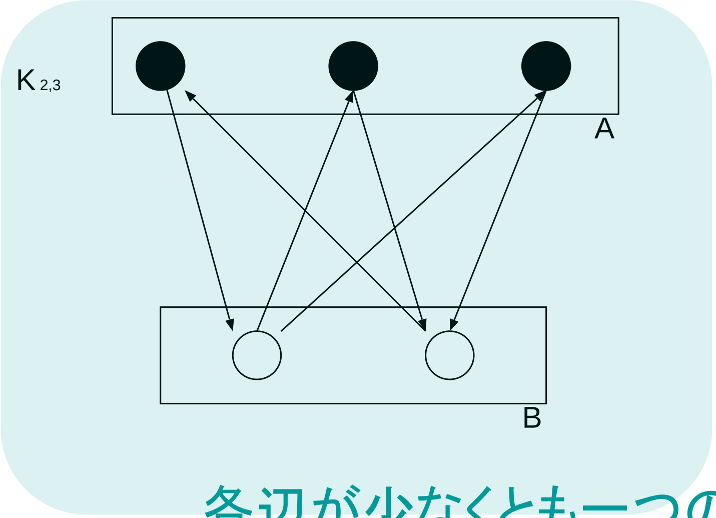
推移的トーナメントであれば必ず
$\mathrm{outdeg}(k) = 0$　となる点がある。

推移的トーナメントは強連結にはなり得ない

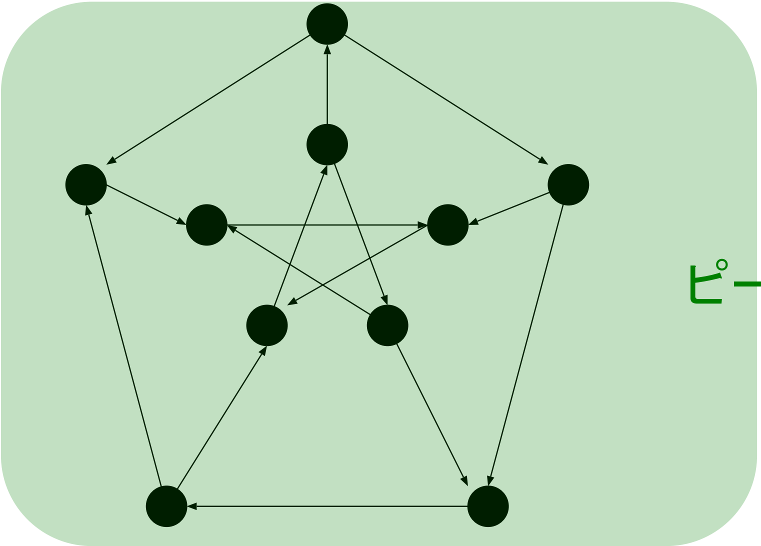
例題10.4 (グラフの向付け)

完全グラフは
ハミルトンなので
向き付け可能





各辺が少なくとも一つの閉路に含まれるので向き付け可能
⇒ **定理 22.1**



ピータースン・グラフの向き付け

演習問題11

隣接行列 (あるいはグラフを特徴付ける他の行列を使っても良い), および, 始点と終点を与えれば自動的にその最短路と最短路長を出力するようなプログラムを作成し, 具体的に図 200 に与えたグラフ (始点 S, 終点 T) に対する動作結果を示せ (プログラムを添付すること).