グラフ理論　#12

第12回（最終回）講義　7月23日

--- マルコフ連鎖---

情報科学研究科　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

一次元酔歩

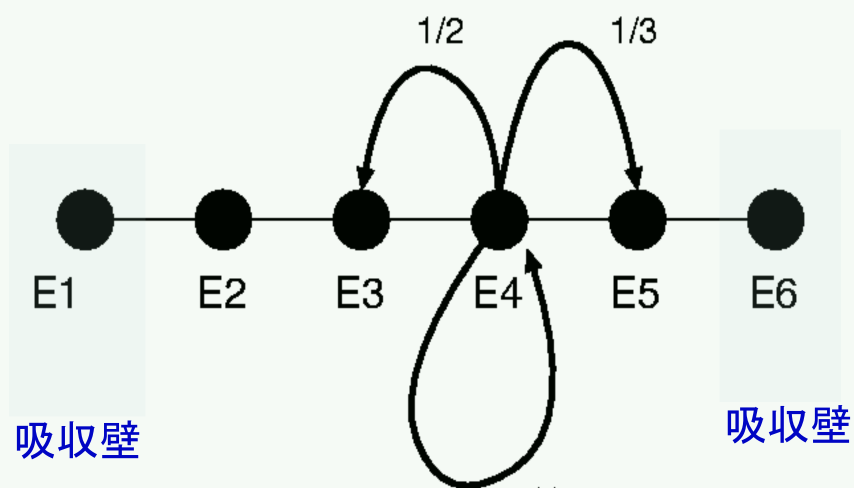
酔っ払いが各時刻で左右にそれぞれ確率1/3, 1/2で動き確率1/6で現在の位置にとどまる

はじめ酔っ払いはE4にいたとすると、状態ベクトルは

$$\mathbf{x}_0 = (0,0,0,1,0,0)$$

時刻t=0にE4にいる確率が1

酔っ払いの動きの有向グラフ表現



1，2分後には

$$\mathbf{x}_1 = \left(0,0,\frac{1}{2},\frac{1}{6},\frac{1}{3},0\right)$$

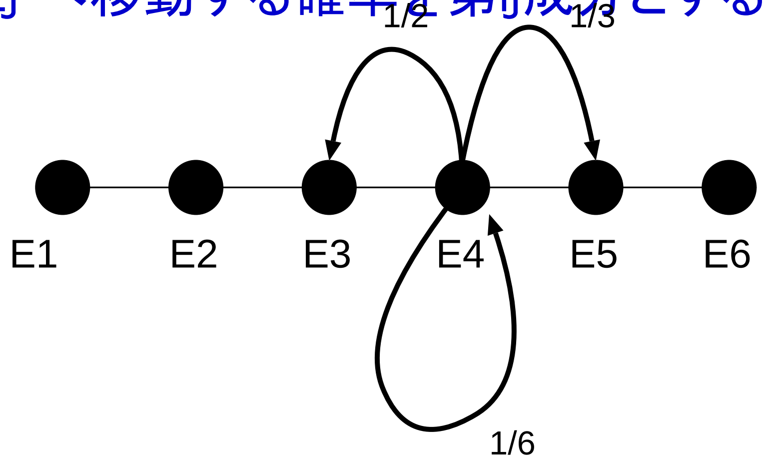
$$\mathbf{x}_2 = \left(0,\frac{1}{4},\frac{1}{6},\frac{13}{36},\frac{1}{9},\frac{1}{9}\right)$$

遷移行列

遷移行列

$$\mathbf{P} = \left(P_{ij} \right)$$

単位時間間隔で酔っ払いが状態 Ei から
Ej へ移動する確率を第ij成分とする行列



いまの例の場合には

各行の和は1

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

各単位時間間隔の状態は遷移行列で結ばれる

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 \mathbf{P}$$

成分のひとつを書き出してみると

$$p_1^1 = p_0^1 + \frac{1}{2} p_0^2$$

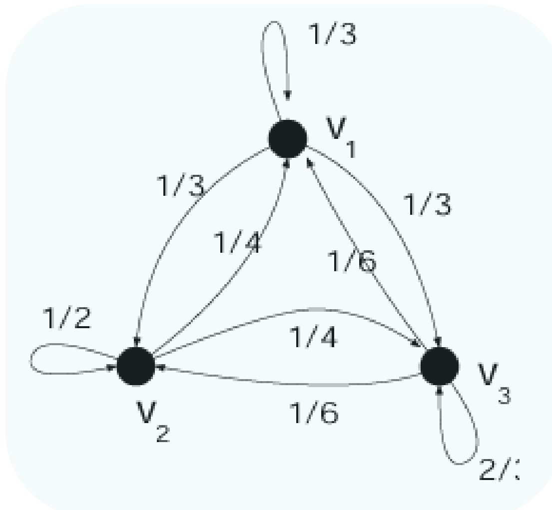
E2にいた場合には確率1/2でE1に移る

E1にいた場合には確率1でE1に留まる

具体例を例題を通じて見ていく

例題10.5

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



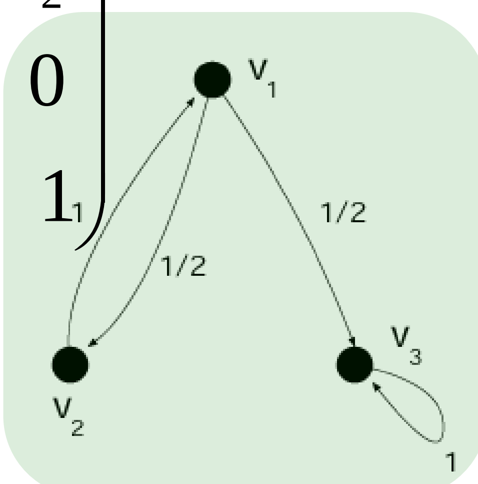
$$(p_{v_1}(1), p_{v_2}(1), p_{v_3}(1))$$

$$= (1,0,0) \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)$$

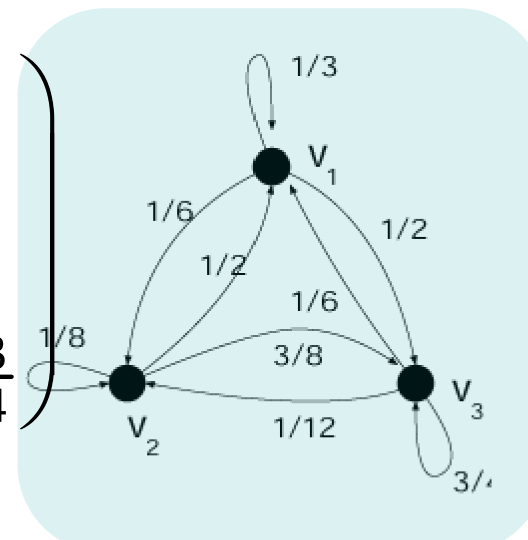
はじめ
v1にいる

次ステップで各点
にいる確率

$$\mathbf{Q} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

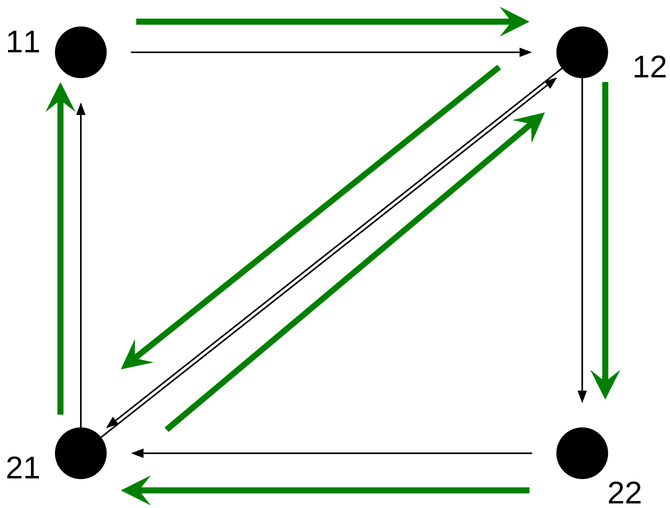


$$\mathbf{PQ} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{3}{8} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{3}{4} \end{pmatrix}$$



例題10.6の1

$\{11,12,21,22\}$が$j=k$のときのみ、点ijと点klが結ばれる



具体的なオイラー小道

$$\mathrm{outdeg}(11)=1=\mathrm{indeg}(11)$$
$$\mathrm{outdeg}(12)=2=\mathrm{indeg}(12)$$
$$\mathrm{outdeg}(21)=2=\mathrm{indeg}(21)$$
$$\mathrm{outdeg}(22)=1=\mathrm{indeg}(22)$$

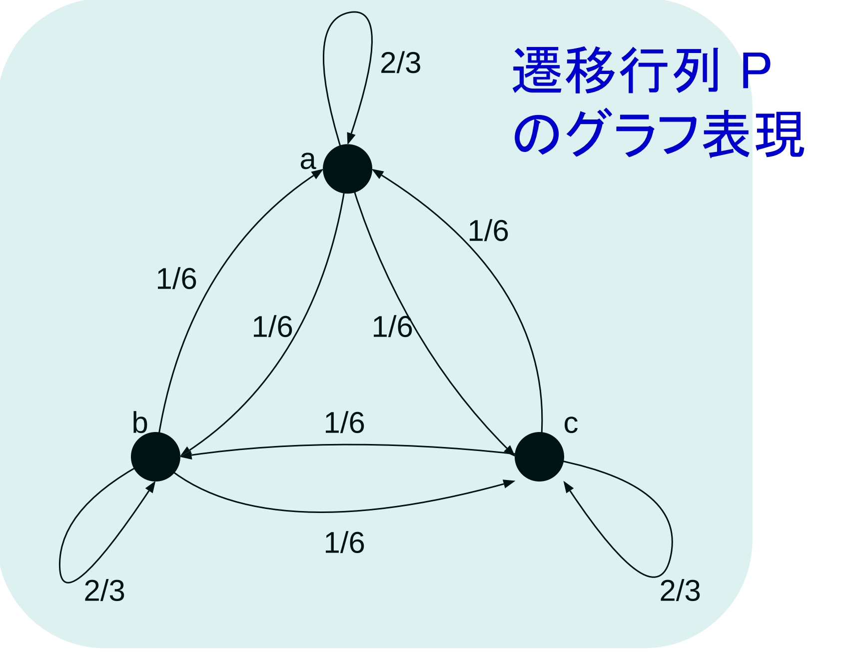
オイラー小道が存在する

定理23.1

例題10.6の2

遷移行列

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{2}{3} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$



状態ベクトル

$$\mathbf{x}^n = \left(p_a(n), p_b(n), p_c(n) \right)$$

$$\mathbf{x}^{n+1} = \mathbf{x}^n \mathbf{P}$$

状態方程式

状態ベクトルの一般項

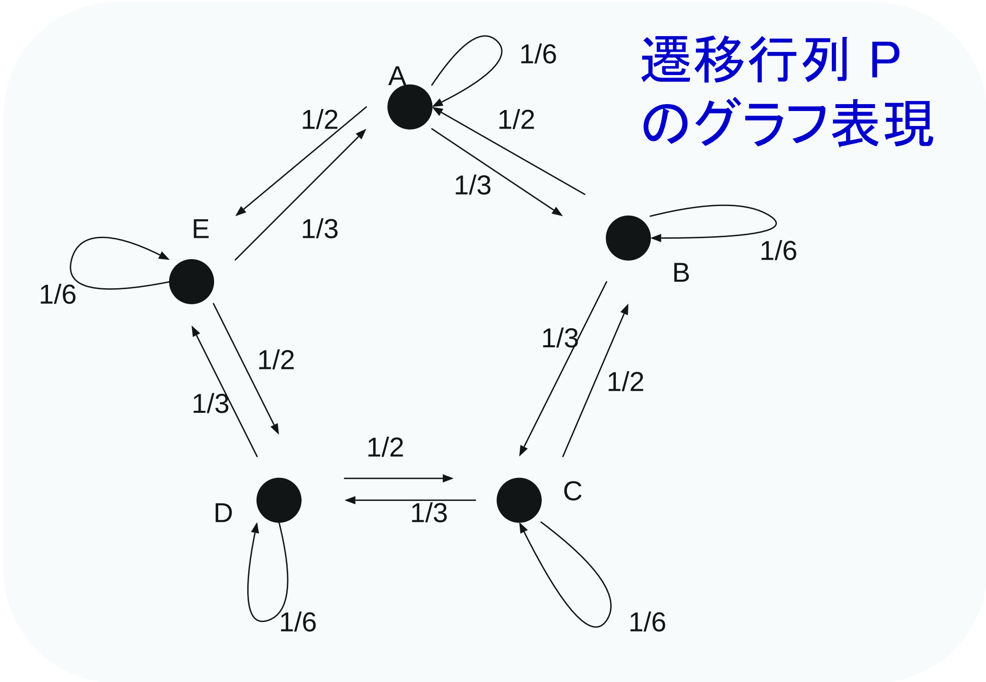
$$\left(p_a(n), p_b(n), p_c(n) \right) = \left(\tfrac{1}{3}(1-2^{-n}), \tfrac{1}{3}(1+2^{1-n}), \tfrac{1}{3}(1-2^{-n}) \right)$$

詳細は講義ノート

例題10.7

遷移行列

$$\mathbf{P}=\begin{pmatrix} \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$$



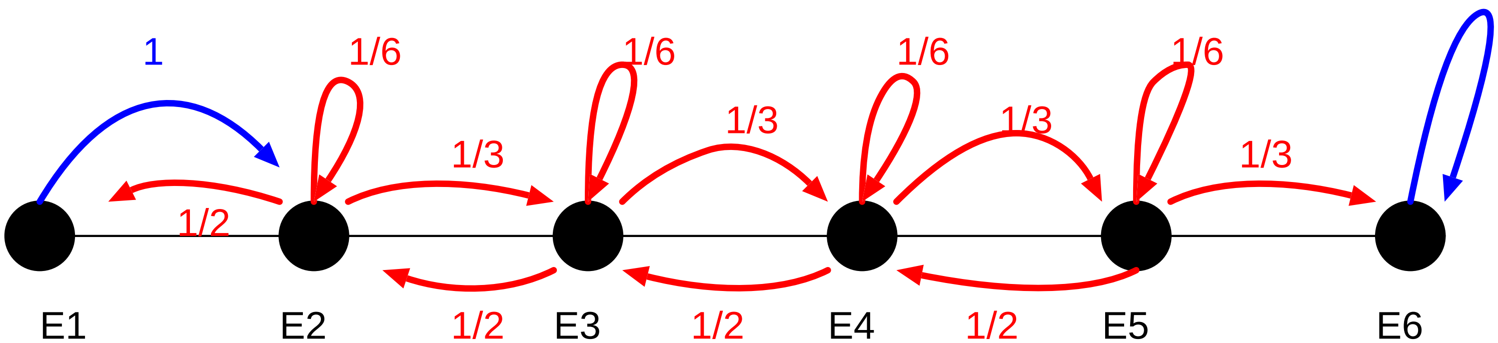
$$\mathbf{P}^2=\begin{pmatrix} \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} & \frac{1}{9} \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} & \frac{13}{36} \end{pmatrix}$$

$\lim_{n\to\infty}\mathbf{P}^n$の行列要素は全て正

各状態は永続的かつ非周期的なので
このマルコフ連鎖はエルゴード的である

例題10.8

酔っ払いの動きの有向グラフ表現



対応する遷移行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{x}^n = \mathbf{x}^0 \mathbf{A}^n$$

状態更新式

$$\mathbf{x}^0 = (0,1,0,0,0,0)$$

$p(1) = 0.149756$

$p(2) = 0.457583$

$p(3) = 0.189558$

$p(4) = 0.129372$

$p(5) = 0.037380$

$p(6) = 0.036351$

6時間後に
各バーに居る確率

演習問題12

G は点数 n, 辺数 m の単純グラフであるものとする. このとき, 彩色多項式: $P_{\mathrm{G}}(k)$ の

(i) 主要項は k^n である.
(ii) k^{n-1} の係数は $-m$ である.
(iii) 各係数の符号は正負が交互に表れる.

をそれぞれ辺数 m に関する数学的帰納法によりそれぞれ証明せよ.