HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2007年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Issue Date	2007
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/28239
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	GraphTheory07_SLIDE2.pdf, 第2回講義スライド

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

グラフ理論　#2

第2回講義　4月23日

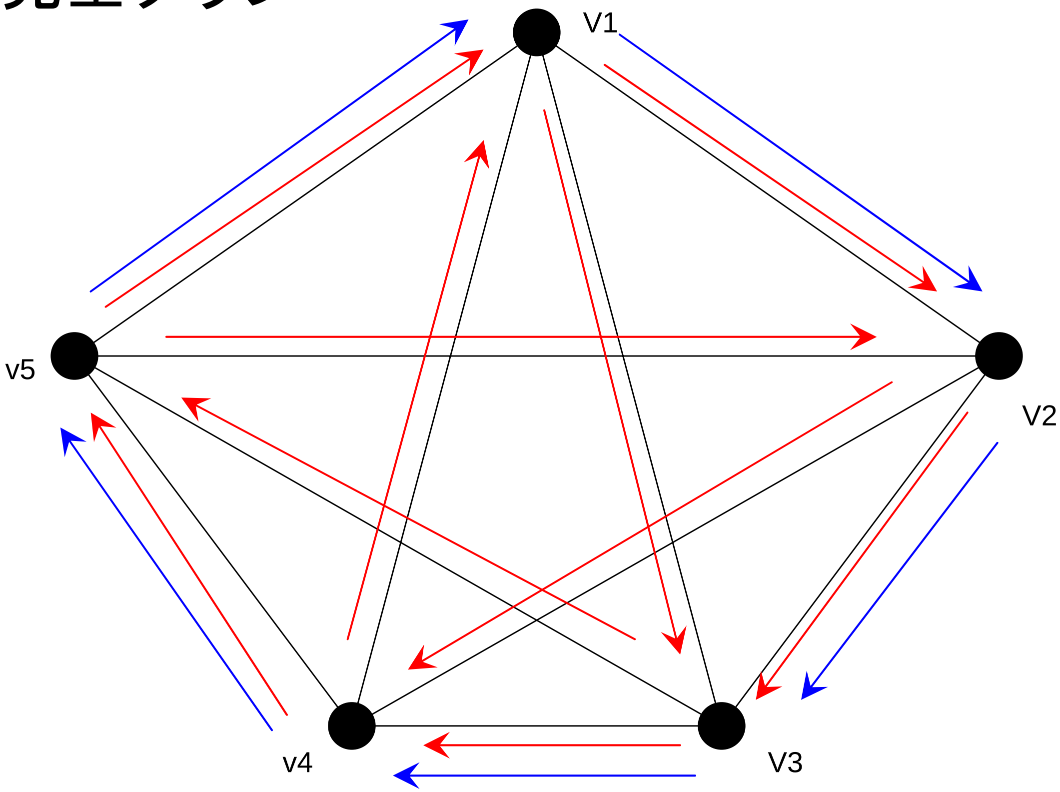
––– 定義と例 –––

情報科学研究科　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題1 (2)の解答例

完全グラフ



オイラーでもハミルトンでもある。

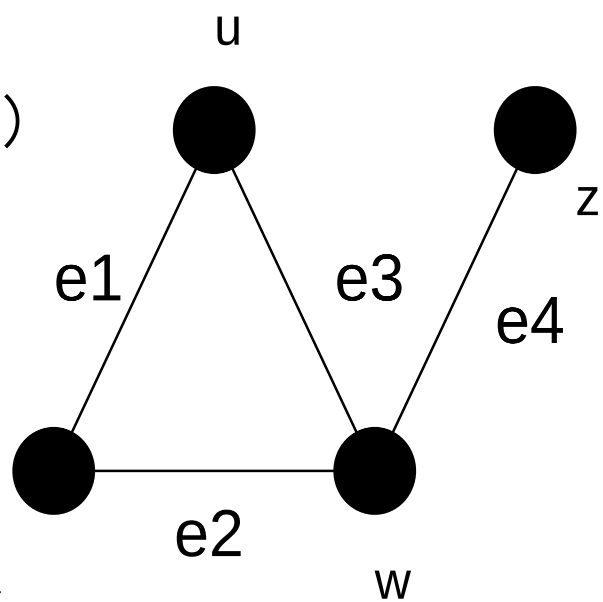
辺の数は一般に

$$_{n}C_{2} = \frac{n(n-1)}{2}$$

単純グラフ

単純グラフ：グラフにループが含まれず、頂点のどの対も高々1つのリンクで結ばれているグラフ

例）



グラフGの点集合（vertex set）

V(G)={u,v,w,z}

グラフGの辺集合（edge set）

E(G)={uv,vw,vw,wz}

ψ_G **グラフGの接続関数** ⇒ Gの各辺にGの頂点の対を対応させる関数

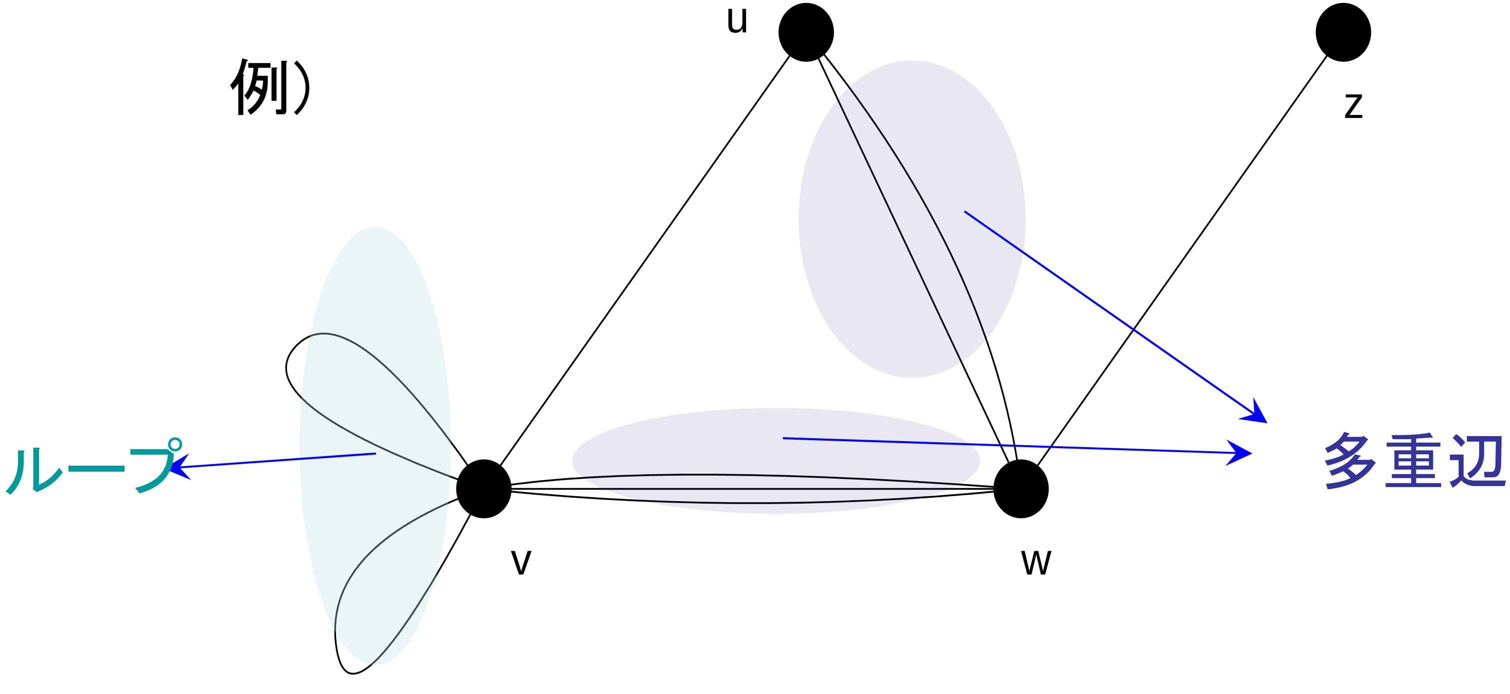
$$\psi_G(e_1) = uv,\ \ \psi_G(e_2) = vw$$
$$\psi_G(e_3) = wu,\ \ \psi_G(e_4) = wz$$

例)の場合の接続関数

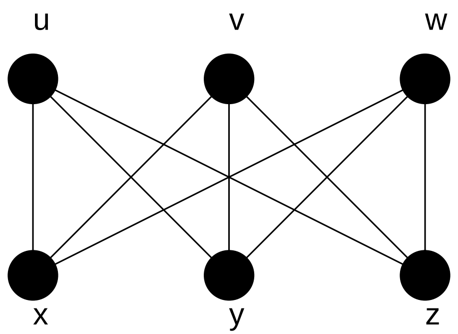
一般グラフ（⇔単純グラフ）

一般グラフ（general graph）: ループや多重辺も許されたグラフ

例）



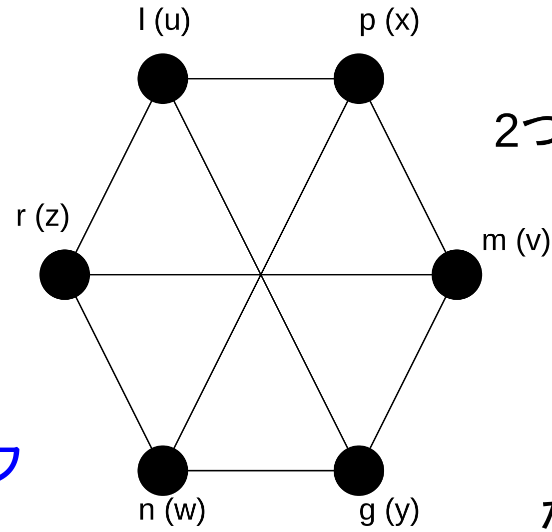
同形と同形写像



G1

完全二部グラフ

$K_{3,3}$



G2

2つのグラフ G_1, G_2 が同形であるとき

1対1写像：

$$\theta : V(G_1) \to V(G_2)$$

$$\phi : E(G_1) \to E(G_2)$$

が次を満たす

$$\boxed{\psi_{G_1}(e) = uv \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(e)) = \theta(u)\theta(v)}$$

接続関数

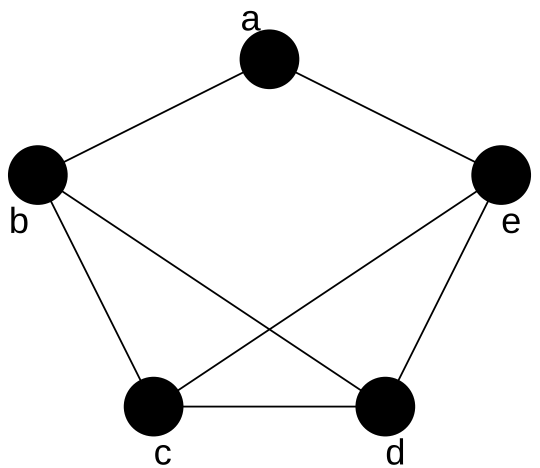
上の例では

$$\theta(u) = l, \theta(v) = m, \theta(w) = n, \theta(x) = p, \theta(y) = q, \theta(z) = r$$

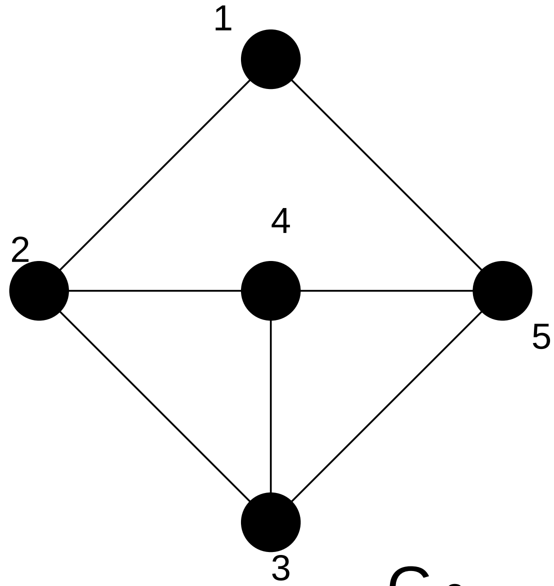
$$\phi(\overline{ux}) = \overline{lp} = \overline{\theta(u)\theta(x)}, \phi(\overline{uz}) = \overline{lr} = \overline{\theta(u)\theta(x)}, \ldots\ldots$$

となり、次が成立 ⇒ $\psi_{G_1}(\overline{ux}) = ux \Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{ux})) = lp = \theta(u)\theta(x), \ldots.$

例題2.2の1



G1



G2

点について $\theta(a)=1, \theta(b)=2, \theta(c)=3, \theta(d)=4, \theta(e)=5$

辺について $\phi(\overline{ab})=\overline{12}, \phi(\overline{bc})=\overline{23}, \phi(\overline{cd})=\overline{34}, \phi(\overline{bd})=\overline{24}$

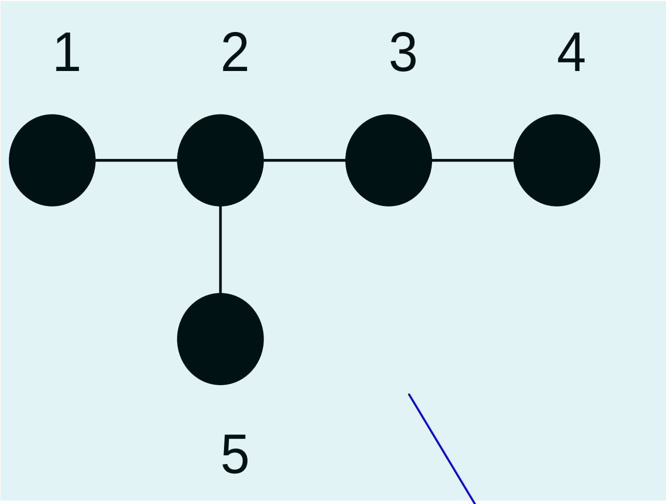
$\phi(\overline{de})=\overline{45}, \phi(\overline{ce})=\overline{35}, \phi(\overline{ea})=\overline{51}$

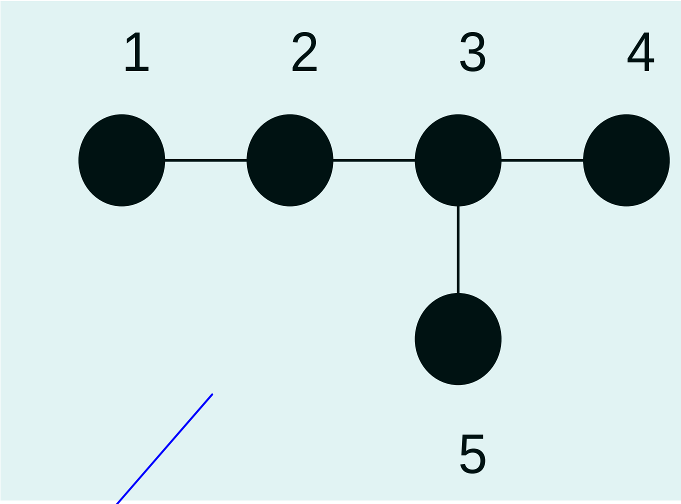
$$\psi_{G_1}\left(\overline{ab}\right)=ab \Leftrightarrow \psi_{G_2}\left(\phi\left(\overline{ab}\right)\right)=\psi_{G_2}\left(\overline{12}\right)=\theta(a)\theta(b)$$

等が成り立ち、同形写像が存在する。

ラベル付き・なしグラフ

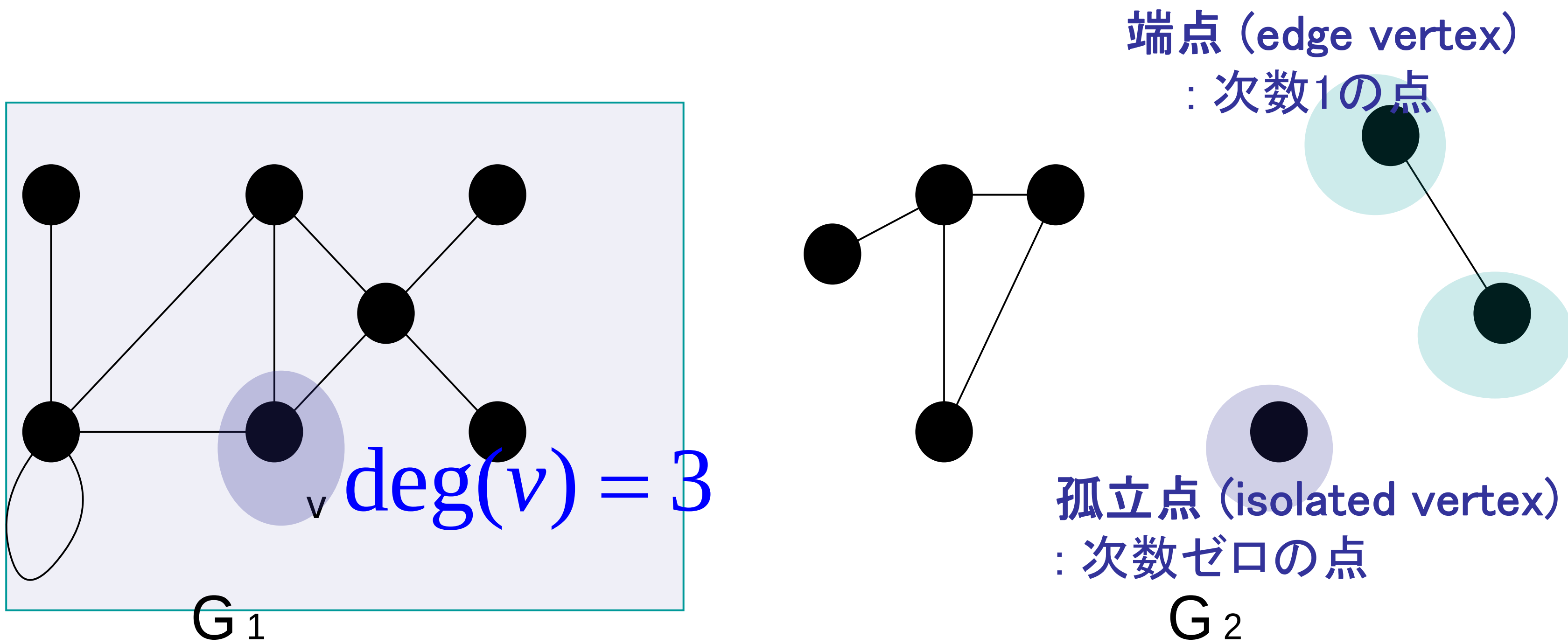
ラベル付きグラフ : 各点に名前のついたグラフ





ラベル付きグラフとして扱う場合には
これら2つの木は別個の木となる

次数および次数列



グラフの次数列： 次数を増加順に記したもの

次数列は

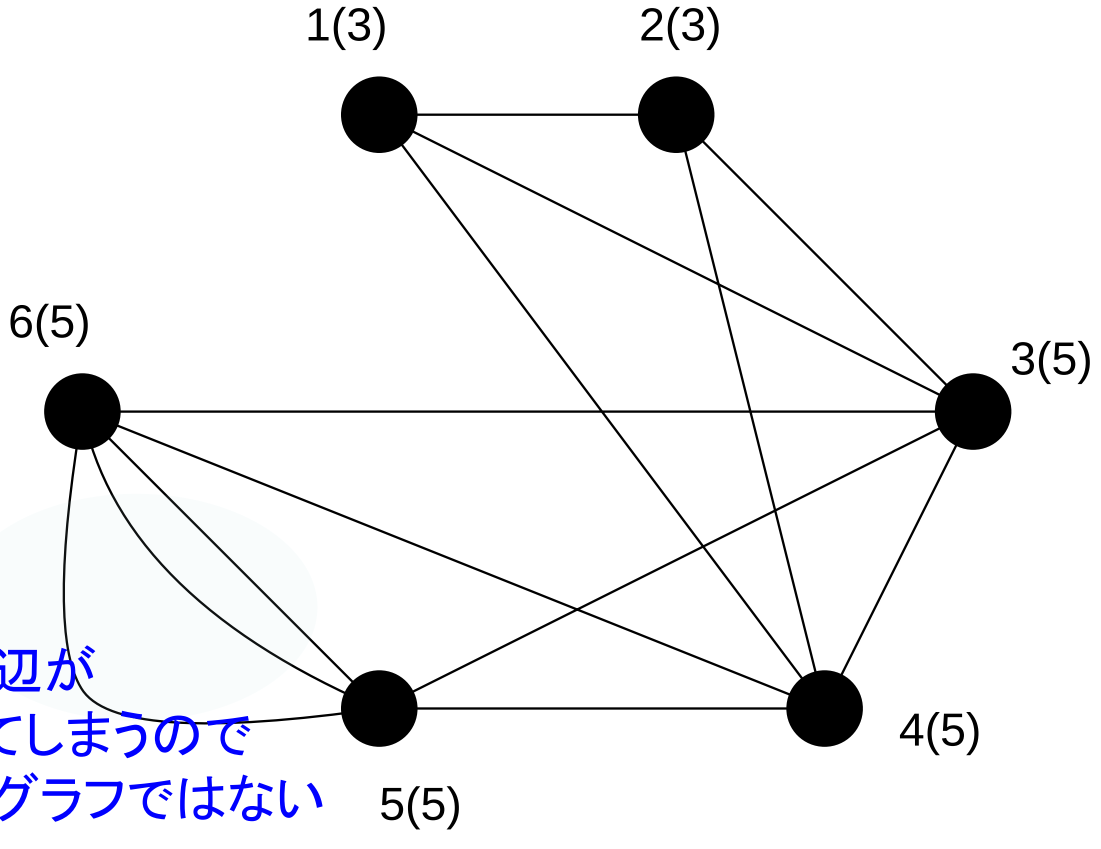
$$\boxed{(1,1,1,3,3,4,5)}$$

⇒ 逆にグラフが描けるような数列のことを、
その数列は「**グラフ的**」であると言う

例題2.3の(3)

各点の次数列が(3,3,5,5,5,5)であるものを描け

「ベクトル」の成分が6個なので6点からなるグラフ

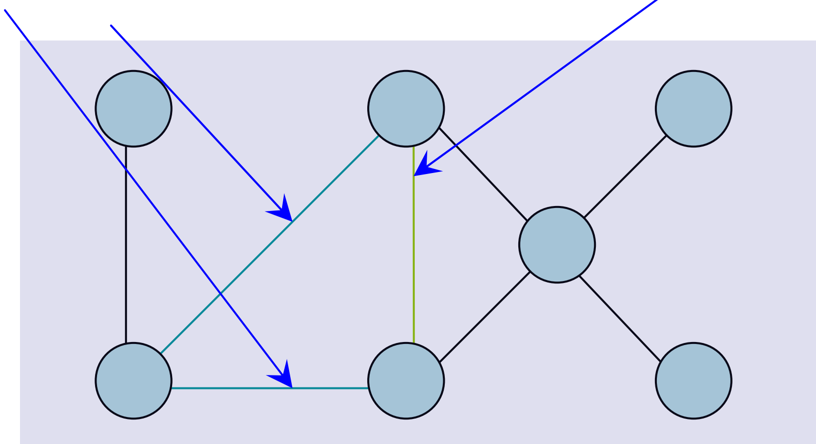


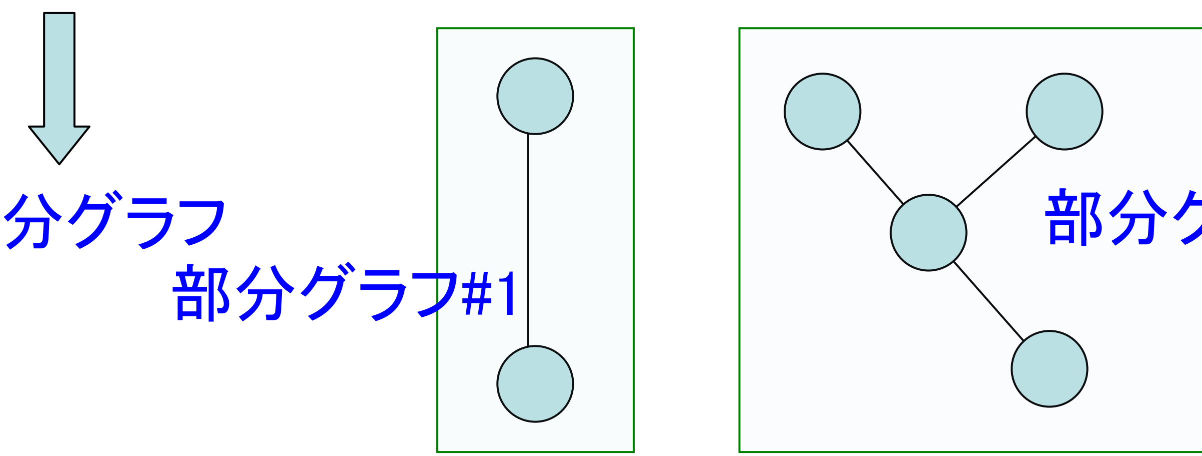
多重辺が
できてしまうので
単純グラフではない

部分グラフ

この２辺を除去する

この辺を縮約する





右の２つの部分グラフ
が得られる

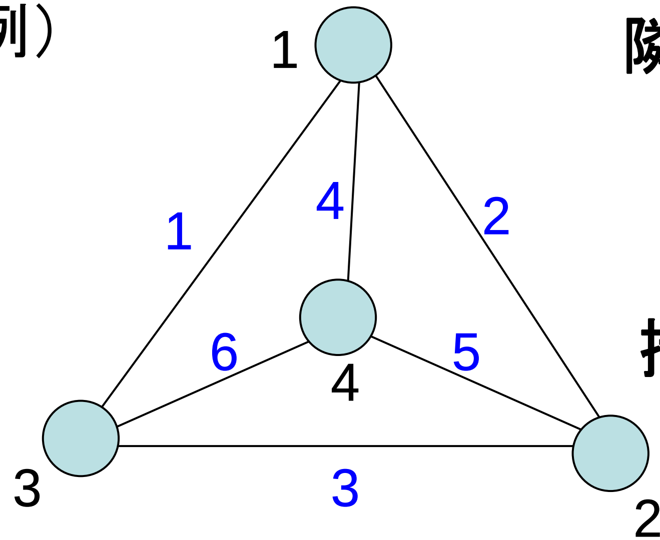
グラフの行列表現

点数 n 変数 m のグラフに対して

隣接行列：点 i と点 j を結ぶ辺の本数を第 ij 要素とする n x n の行列

接続行列：点 i が辺 j に接続している場合、第 ij 要素が1であり、
接続していなければ0である n x m の行列

例）



次数列は(3,3,3,3)

隣接行列

ループが無いので対角要素はゼロ

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,1 \\ 1\,1\,0\,1 \\ 1\,1\,1\,0 \end{pmatrix}$$

和3は点1の次数

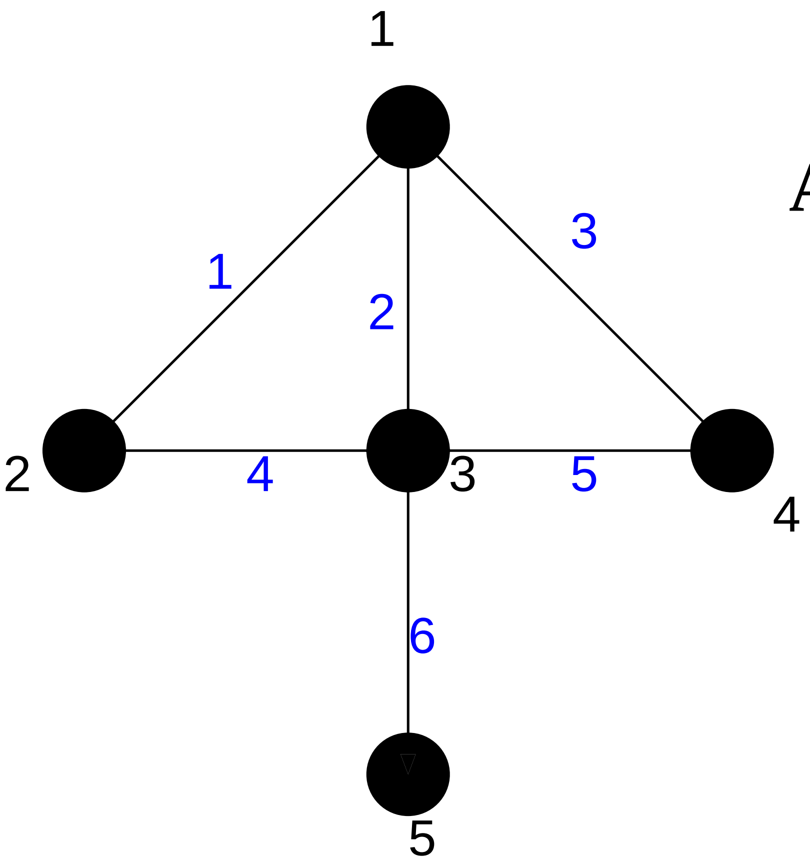
対称行列

接続行列

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1\,1\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,1\,0\,1\,0 \\ 1\,0\,1\,0\,0\,1 \\ 0\,0\,0\,1\,1\,1 \end{pmatrix}$$

握手補題から
この和は必ず2

例題2.3の（2）



$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0\,1\,1\,1\,0 \\ 1\,0\,1\,0\,0 \\ 1\,1\,0\,1\,1 \\ 1\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,0\,1\,0\,0 \end{pmatrix}$$

点1につながっている点は2,3,4なので1x2,1x3,1x4成分に1が立っている

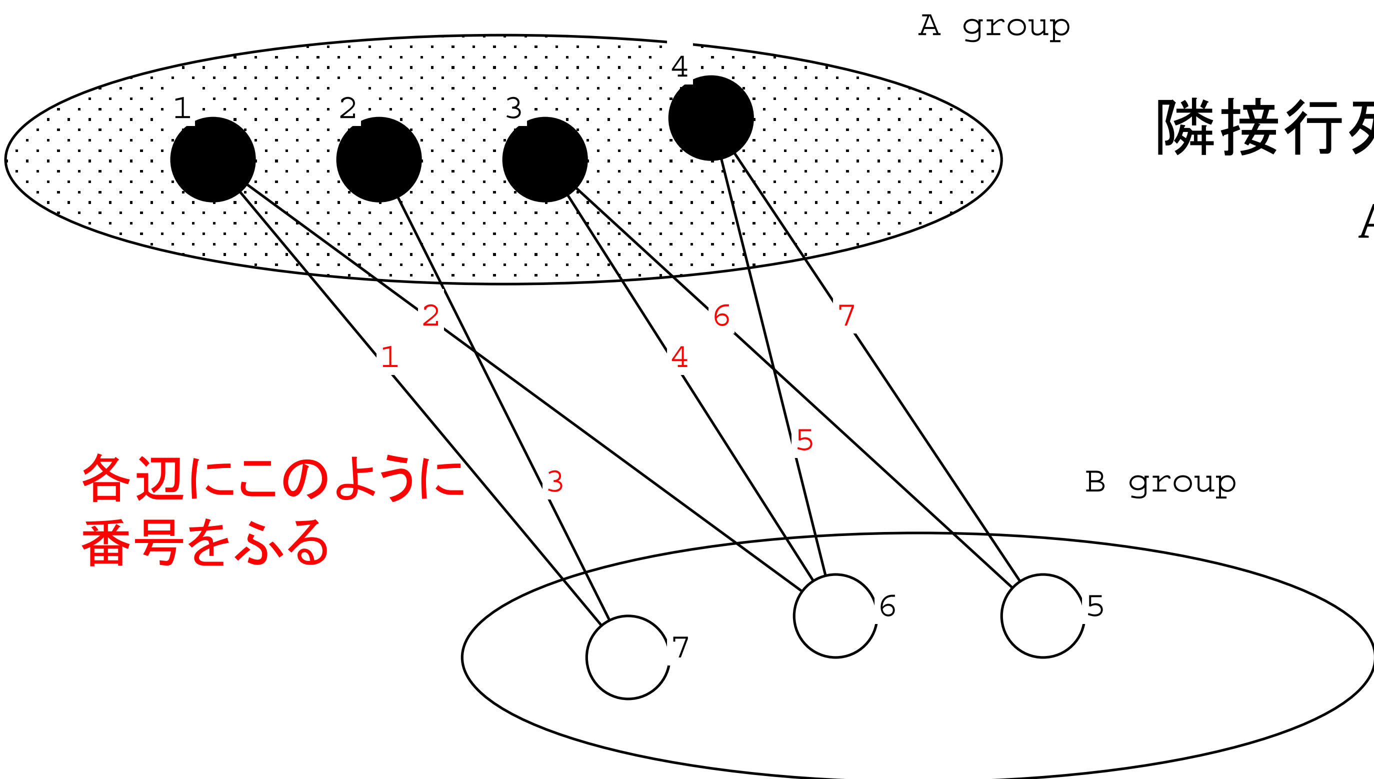
隣接行列

点1につながっている辺は1,2,3なので1x1,1x2,1x3に1が立っている

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1\,1\,1\,0\,0\,0 \\ 1\,0\,0\,1\,0\,0 \\ 0\,1\,0\,1\,1\,1 \\ 0\,0\,1\,0\,1\,0 \\ 0\,0\,0\,0\,0\,1 \end{pmatrix}$$

接続行列

例題2.4 (1)



隣接行列

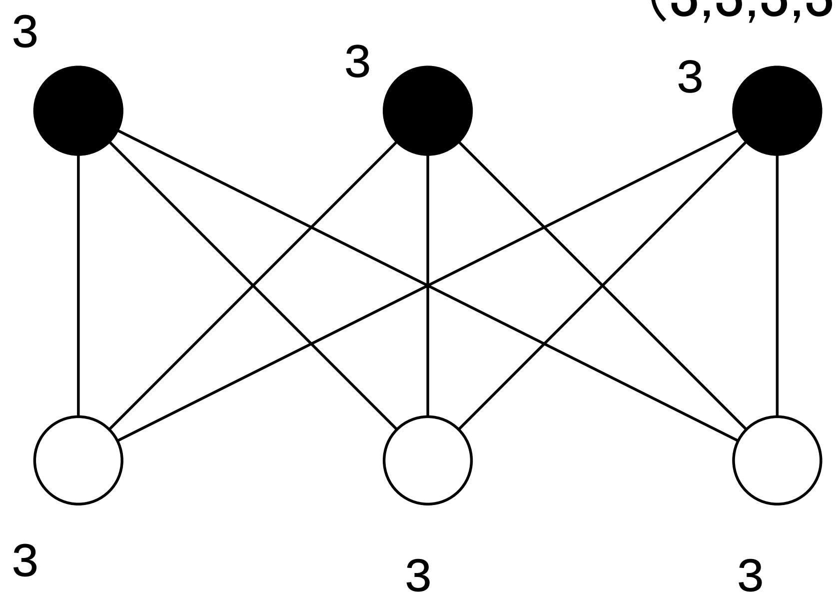
$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&0&0&1&1&0 \\ 0&0&1&1&0&0&0 \\ 1&0&1&1&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

接続行列

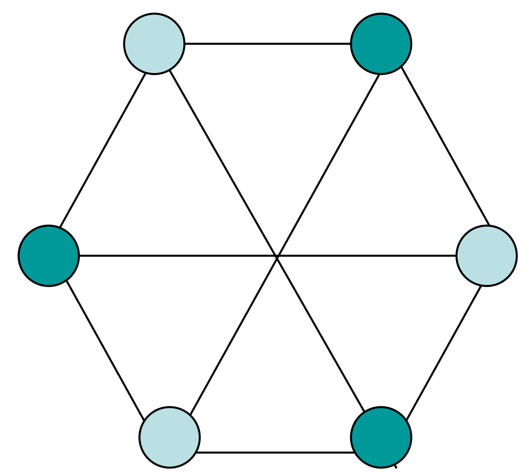
$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1&1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&1&0&1&0 \\ 0&0&0&0&1&0&1 \\ 0&0&0&0&0&1&1 \\ 0&1&0&1&1&0&0 \\ 1&0&1&0&0&0&0 \end{pmatrix}$$

例題2.4 (2)

(3,3,3,3,3,3)はグラフ的である。

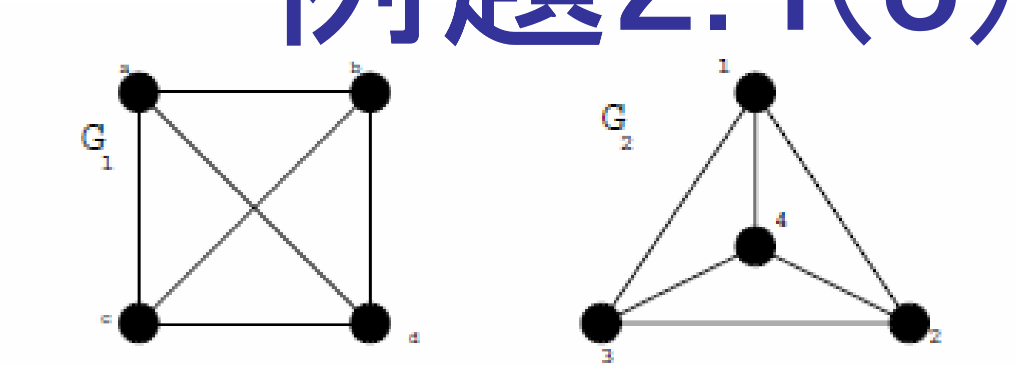


完全二部グラフであれば良い



これを描いても正解

例題2.4(3)



写像 θ, ϕ を

$$\begin{aligned} \theta(\mathsf{a}) &= 1, \theta(\mathsf{b}) = 2, \theta(\mathsf{c}) = 3, \theta(\mathsf{d}) = 4 \qquad (9) \\ \phi(\overline{\mathsf{ab}}) &= \overline{12}, \phi(\overline{\mathsf{ac}}) = \overline{13}, \phi(\overline{\mathsf{ad}}) = \overline{14}, \phi(\overline{\mathsf{bd}}) = \overline{24}, \phi(\overline{\mathsf{cd}}) = \overline{34}, \phi(\overline{\mathsf{bc}}) = \overline{23} \qquad (10) \end{aligned}$$

とすれば，接続関数 ψ_{G_1}, ψ_{G_2} に対して

$$\begin{aligned} \psi_{G_1}(\overline{\mathsf{ab}}) = \mathsf{ab} &\Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{\mathsf{ab}})) = \psi_{G_2}(\overline{12}) = 12 = \theta(\mathsf{a})\theta(\mathsf{b}) \qquad (11) \\ \psi_{G_1}(\overline{\mathsf{ac}}) = \mathsf{ac} &\Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{\mathsf{ac}})) = \psi_{G_2}(\overline{13}) = 13 = \theta(\mathsf{a})\theta(\mathsf{c}) \qquad (12) \\ \psi_{G_1}(\overline{\mathsf{ad}}) = \mathsf{ad} &\Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{\mathsf{ad}})) = \psi_{G_2}(\overline{14}) = 14 = \theta(\mathsf{a})\theta(\mathsf{d}) \qquad (13) \\ \psi_{G_1}(\overline{\mathsf{bd}}) = \mathsf{bd} &\Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{\mathsf{bd}})) = \psi_{G_2}(\overline{24}) = 24 = \theta(\mathsf{b})\theta(\mathsf{d}) \qquad (14) \\ \psi_{G_1}(\overline{\mathsf{cd}}) = \mathsf{cd} &\Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{\mathsf{cd}})) = \psi_{G_2}(\overline{34}) = 34 = \theta(\mathsf{c})\theta(\mathsf{d}) \qquad (15) \\ \psi_{G_1}(\overline{\mathsf{bc}}) = \mathsf{bc} &\Leftrightarrow \psi_{G_2}(\phi(\overline{\mathsf{bc}})) = \psi_{G_2}(\overline{23}) = 23 = \theta(\mathsf{b})\theta(\mathsf{c}) \qquad (16) \end{aligned}$$

が成り立つ．従って，グラフ G_1, G_2 は同形である．

演習問題2

次の問い (1)(2) に答えよ.

(1) $(3,3,3,3,3,3,3,3,3,3)$ はグラフ的か? 理由とともに示せ. また, このグラフの隣接行列, 接続行列を書け.

(2) 完全2部グラフ $K_{3,3}$ を異なる2通りに描き, その両者が同型であることを**例題 2.2** の 1. に従って示せ.

(1) グラフの点と辺に番号をふり、隣接、接続行列を書くこと。

レポート締め切りは5月7日 （次回は祭日で休講）