HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2007年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Issue Date	2007
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/28239
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	GraphTheory07_SLIDE3.pdf, 第3回講義スライド

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

グラフ理論　#3

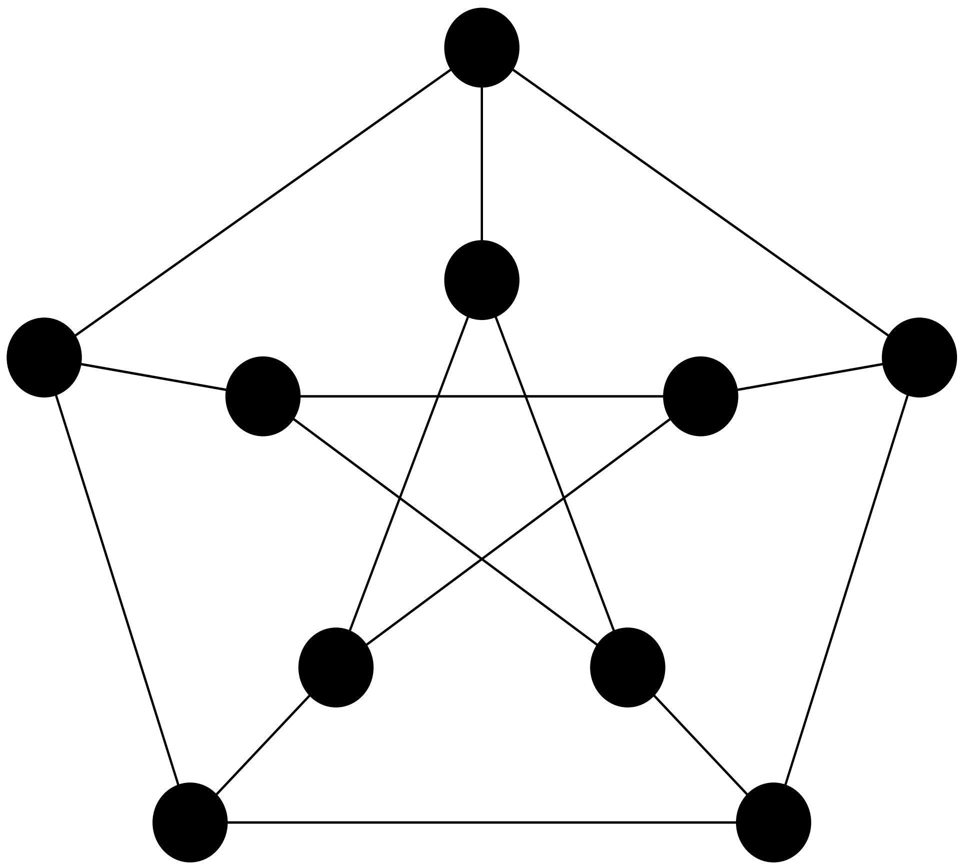
第3回講義　5月7日

--- いろいろなグラフの例とパズル ---

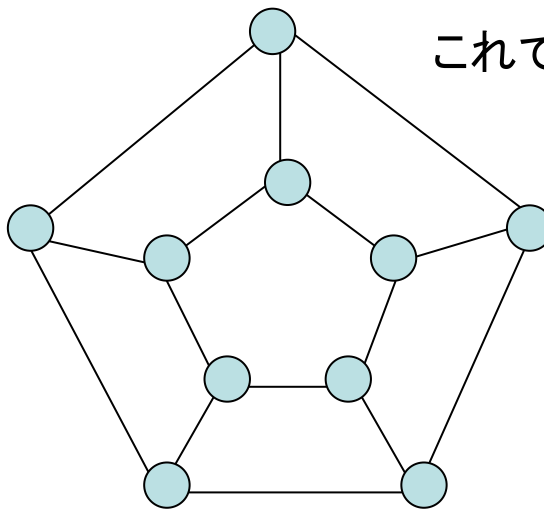
情報科学研究科　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題2 (1)の解答例



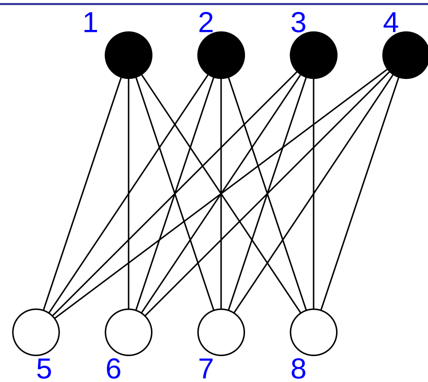
数列
(3,3,3,3,3,3,3,3,3,3)
はグラフ的であり、
右のようなグラフが描ける



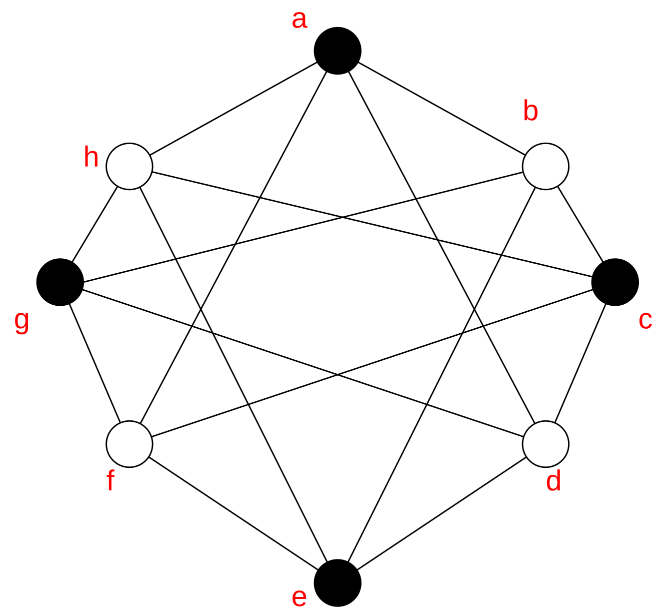
これでも良い

演習問題2 (2)の解答例

$K_{4,4}$



G1



G2

同型写像:

$\theta(1)=\mathrm{a}, \theta(2)=\mathrm{c}, \theta(3)=\mathrm{e}, \theta(4)=\mathrm{g}, \theta(5)=\mathrm{h}, \theta(6)=\mathrm{b}, \theta(7)=\mathrm{d}, \theta(8)=\mathrm{f}$

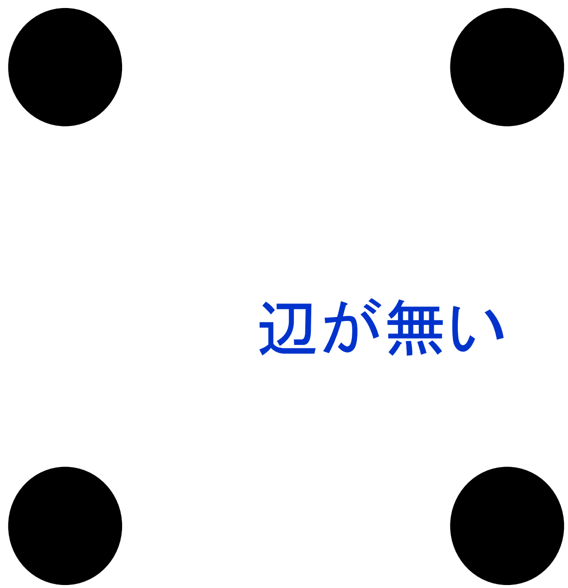
$$\phi(\overline{15})=\overline{\mathrm{ah}}, \phi(\overline{16})=\overline{\mathrm{ab}}, \phi(\overline{17})=\overline{\mathrm{ad}}, \phi(\overline{18})=\overline{\mathrm{af}}$$
$$\phi(\overline{25})=\overline{\mathrm{ch}}, \phi(\overline{26})=\overline{\mathrm{cb}}, \phi(\overline{27})=\overline{\mathrm{cd}}, \phi(\overline{28})=\overline{\mathrm{cf}}$$
$$\phi(\overline{35})=\overline{\mathrm{eh}}, \phi(\overline{36})=\overline{\mathrm{eb}}, \phi(\overline{37})=\overline{\mathrm{ed}}, \phi(\overline{38})=\overline{\mathrm{ef}}$$
$$\phi(\overline{45})=\overline{\mathrm{gh}}, \phi(\overline{46})=\overline{\mathrm{gb}}, \phi(\overline{47})=\overline{\mathrm{gd}}, \phi(\overline{48})=\overline{\mathrm{gf}}$$

このとき

$$\psi_{\mathrm{G}_1}(\overline{15})=15 \quad \Leftrightarrow \quad \psi_{\mathrm{G}_2}(\phi(\overline{15}))=\psi_{\mathrm{G}_2}(\overline{\mathrm{ah}})=\mathrm{ah}=\theta(1)\theta(5)$$

空グラフ

空グラフ (null graph) : 辺集合が空であるグラフ



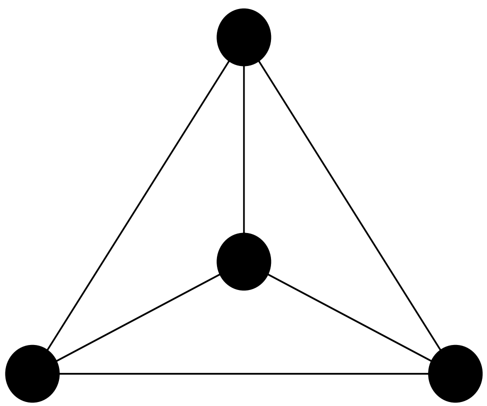
N_4

n 点からなる空グラフを N_n と書く

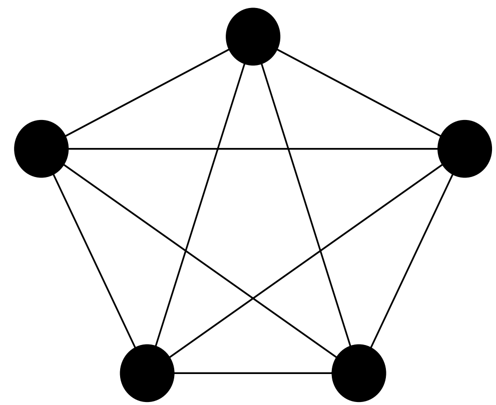
完全グラフ

完全グラフ (complete graph) :

相違なる2つの点が全て隣接しているグラフ



K_4



K_5

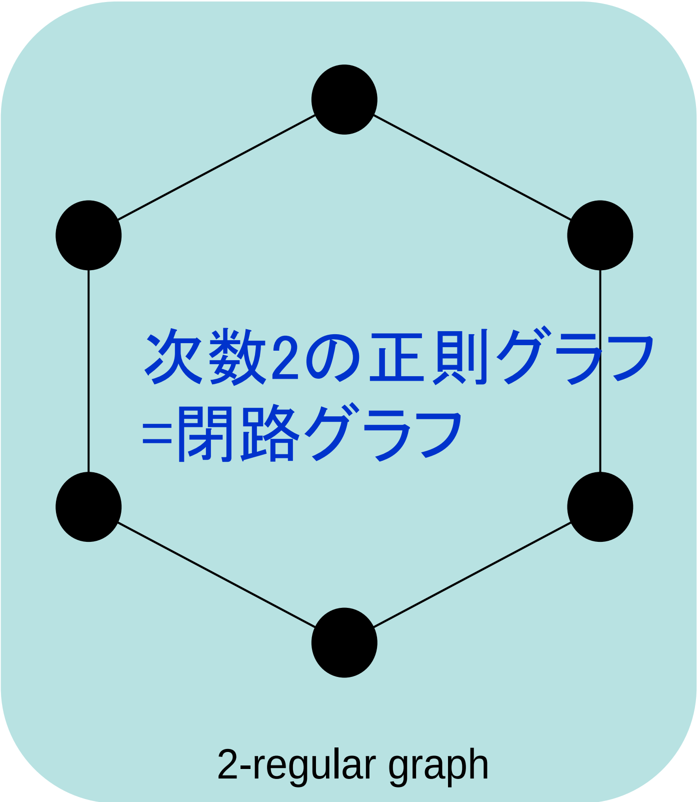
K_n の辺の本数

$$\boxed{{}_nC_2 = \frac{n(n-1)}{2}}$$

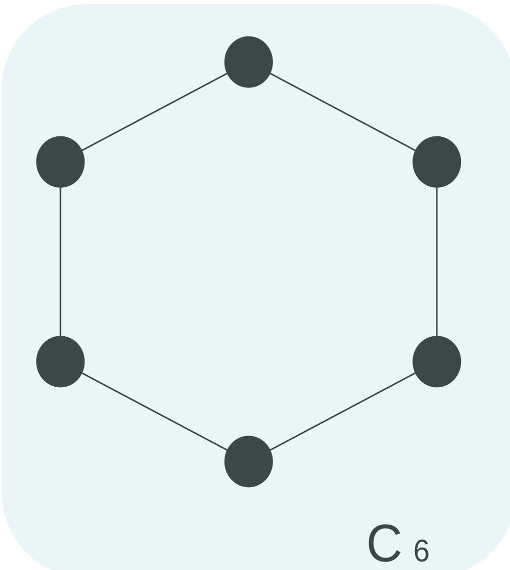
正則グラフ

r−正則グラフ（regular graph）：

どの点の次数も全て共通にrであるグラフ



閉路グラフと道グラフ

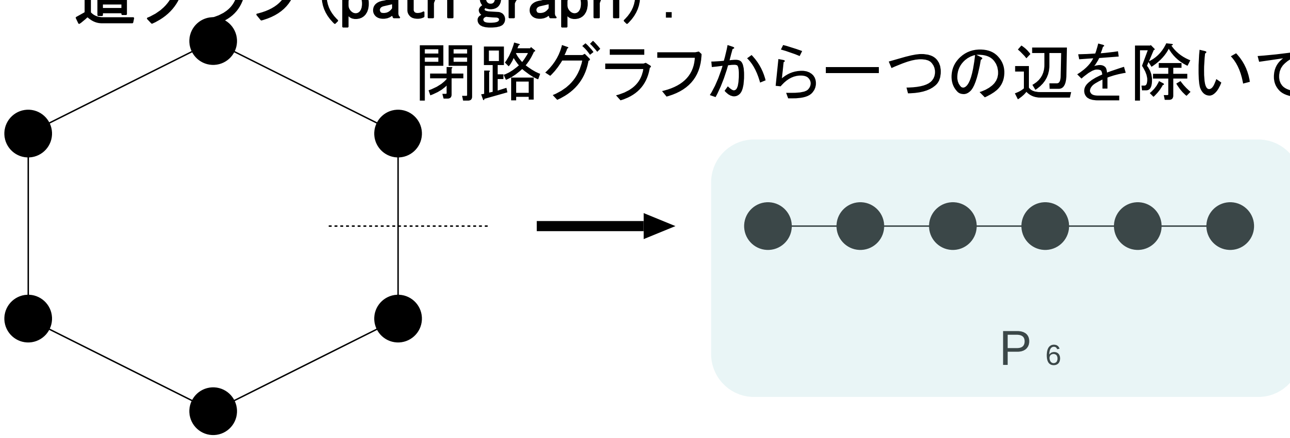


閉路グラフ（cycle graph）：

次数2の正則連結グラフ

道グラフ（path graph）：

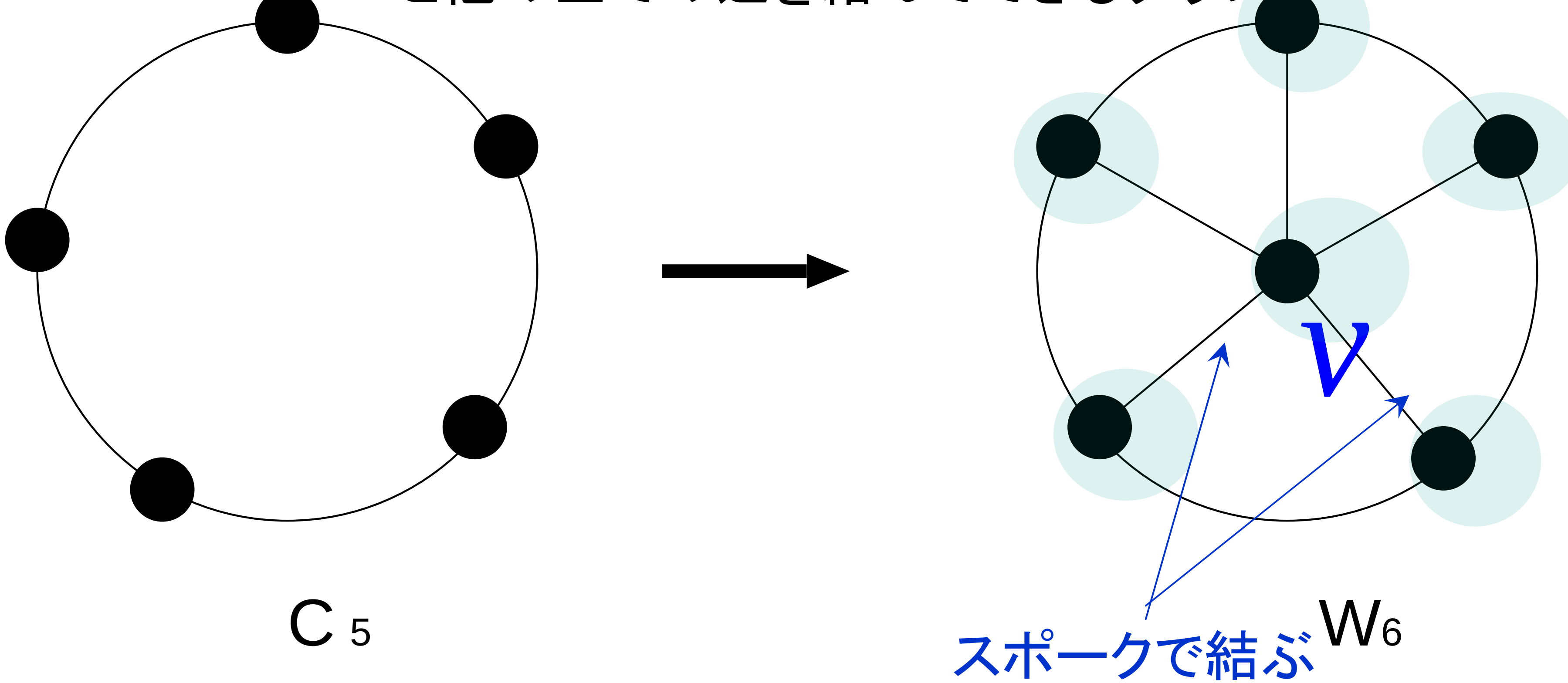
閉路グラフから一つの辺を除いて得られるグラフ



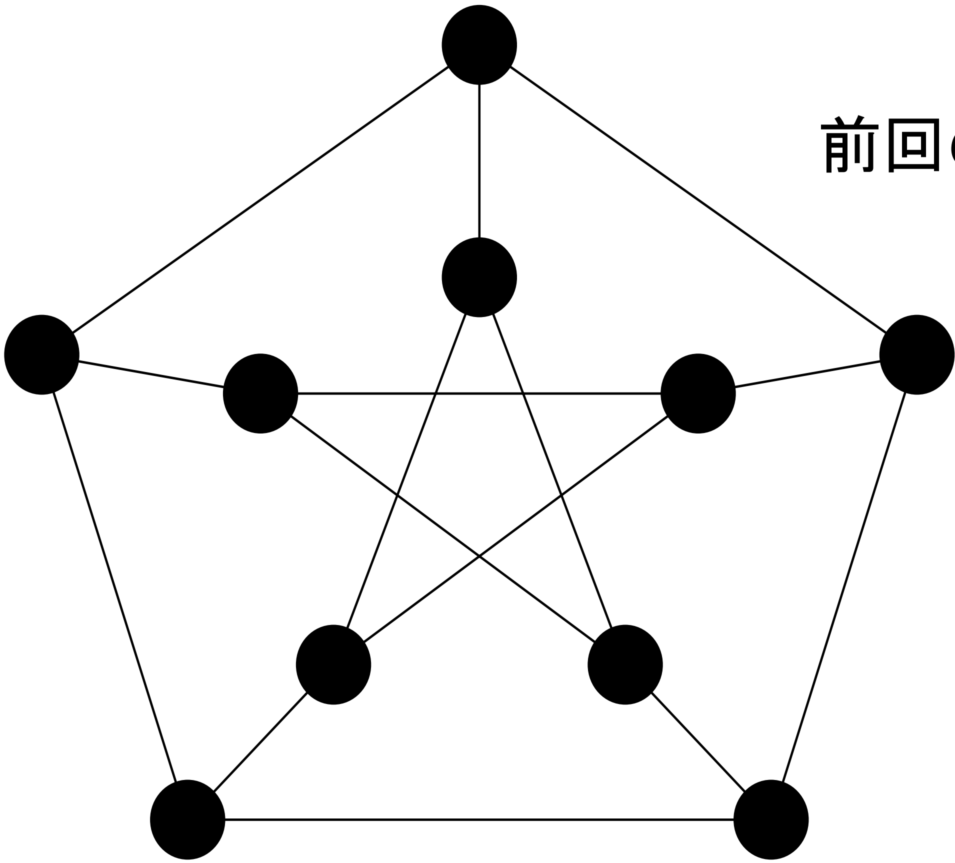
C_6

車輪

車輪（wheel）:　C_{n-1} に新しい点 v を加え、 v と他の全ての辺を結んでできるグラフ



ピータースン・グラフ



前回の$\boxed{\text{演習問題2}}$（1）

全ての次数が3である
10点からなるグラフ

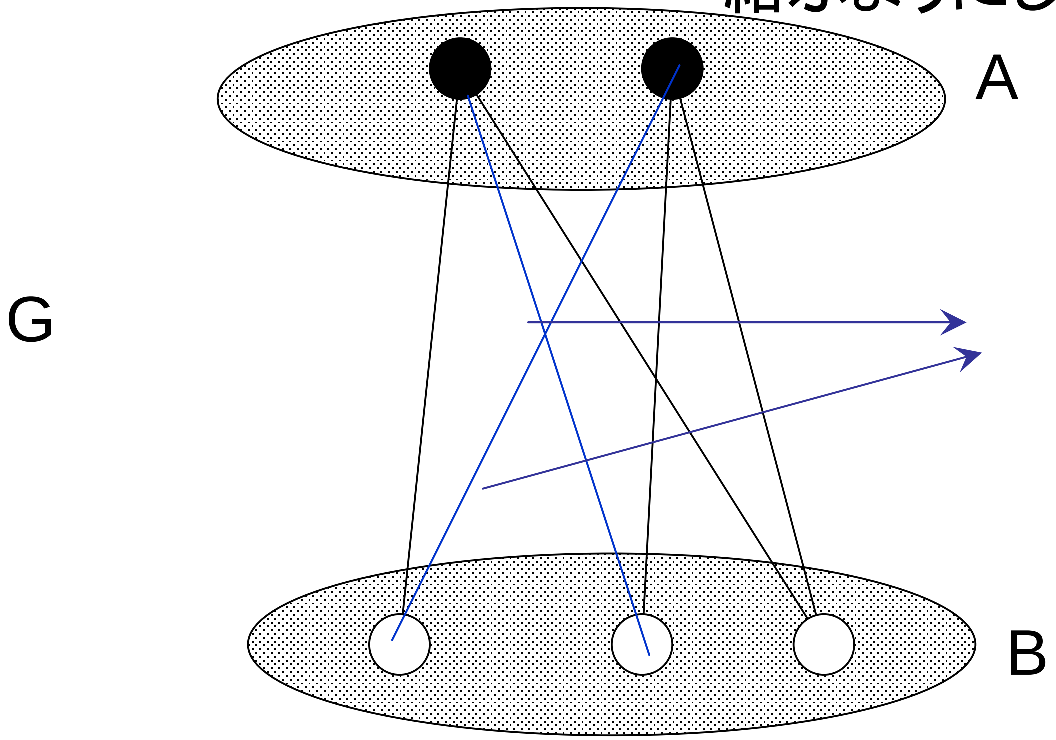
次数列は
（3,3,3,3,3,3,3,3,3,3）

ピータースン・グラフはハミルトン・グラフであろうか？

二部グラフ

二部グラフ (bipartite graph) :

グラフGの点集合を素な2つの集合A、Bに分割し、Gの全ての辺はAの点とBの点を結ぶようにしてできあがるグラフ



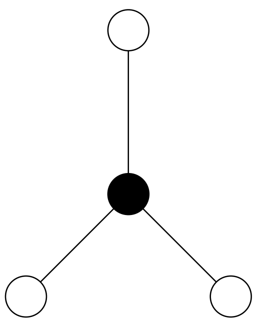
この2本の辺を加えことにより、Aの各点がBの各点とちょうど1本の辺で結ばれるようになる

⇒ 完全二部グラフ

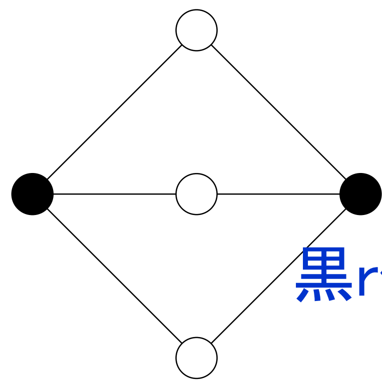
完全二部グラフ

完全二部グラフ（complete bipartite graph）

：　Aの各点がBの各点とちょうど
１本の辺で結ばれた二部グラフ



K 1,3

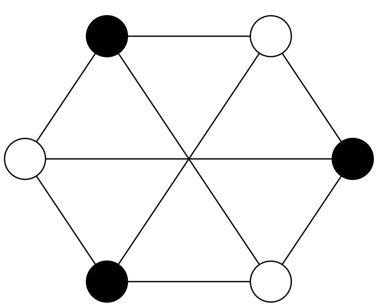


K 2,3

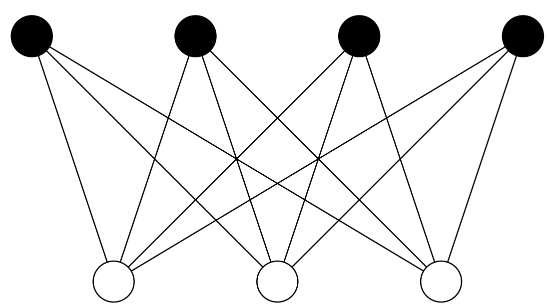
黒r個、白s個からなる完全二部グラフ

$$K_{r,s}$$

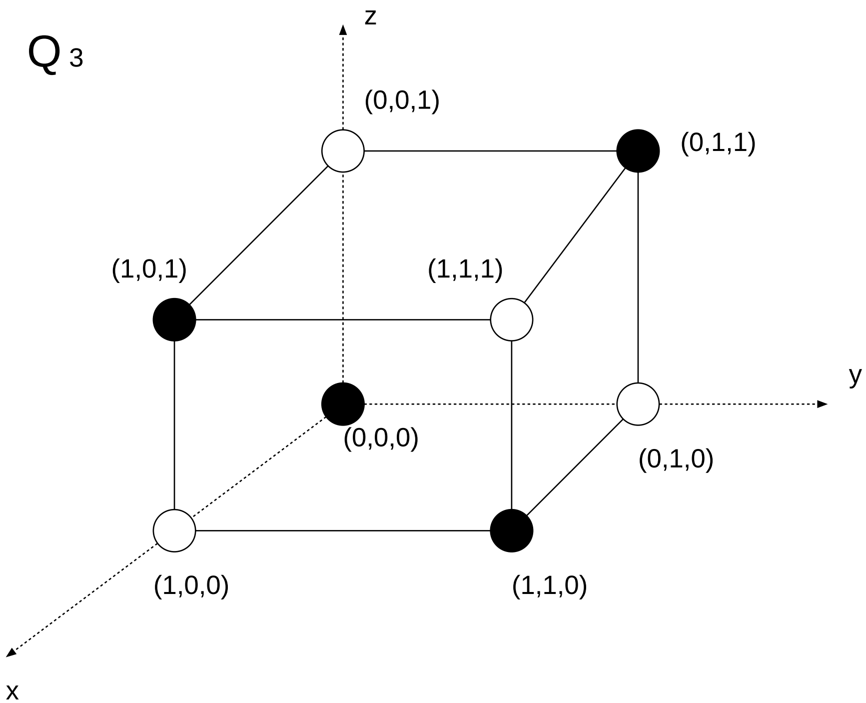
と表記する



K 3,3



K 4,3



k−立方体

k−立方体 (K−cube)

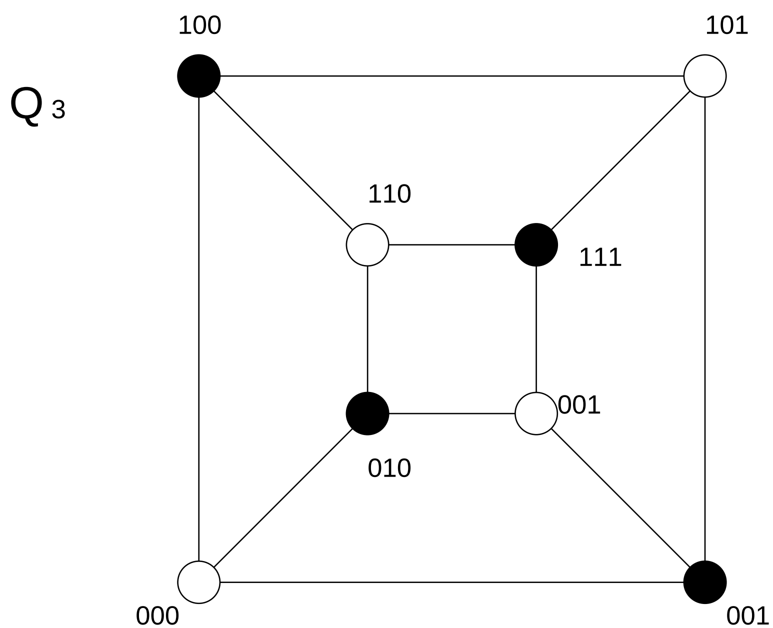
$a_i = 0,1$ であるような1つの列ベクトル
$(a_1, a_2, \ldots, a_k)$ に一つの点を対応させ、

一つだけ異なる成分を持つ二つのベクトル
に対応する二つの点が辺で結ばれるような
正則二部グラフ

$$Q_k$$

2^k 個の点と $k2^{k-1}$ 本の辺を持つ

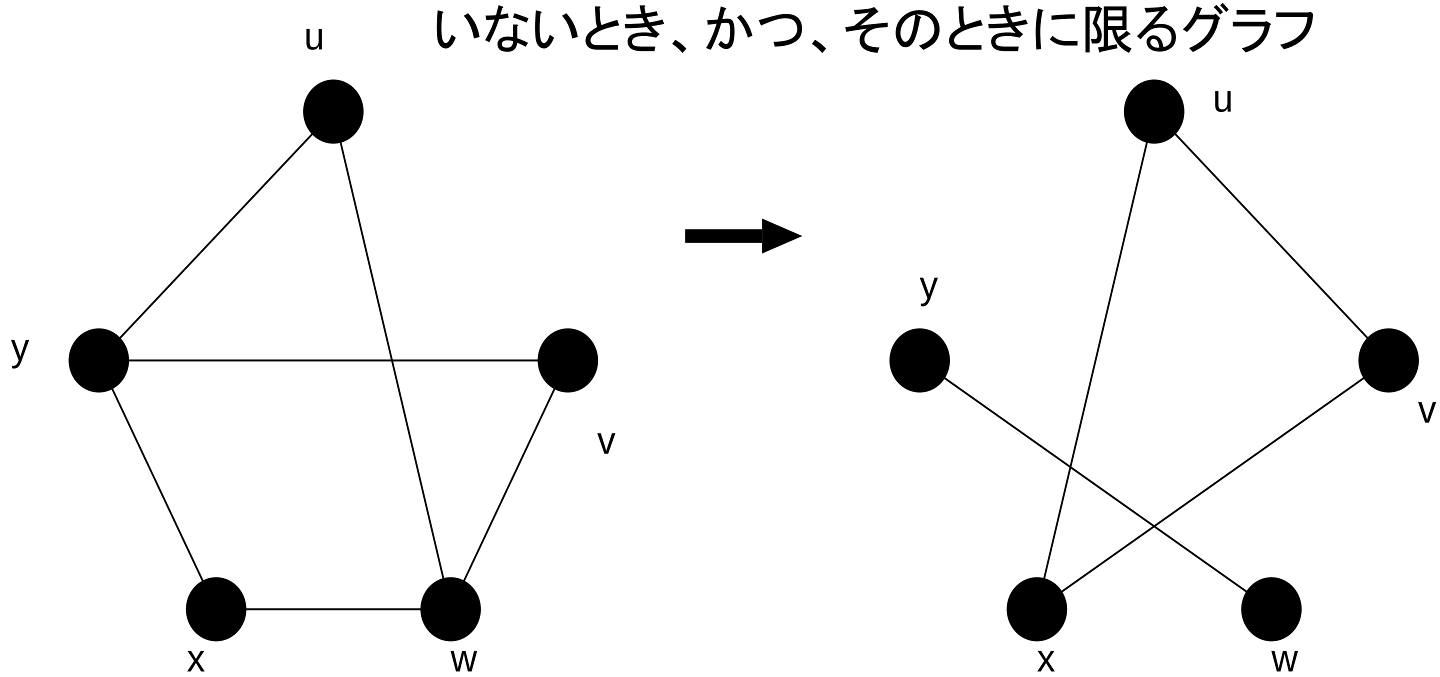
食い違う位置を指定した
場合に一つだけ成分の
異なるベクトルを選ぶ場合の数



単純グラフの補グラフ

単純グラフGの補グラフ（complement）:

単純グラフGの点集合を持ち、2点が隣接するのは、Gにおけるそれらの2点が隣接していないとき、かつ、そのときに限るグラフ

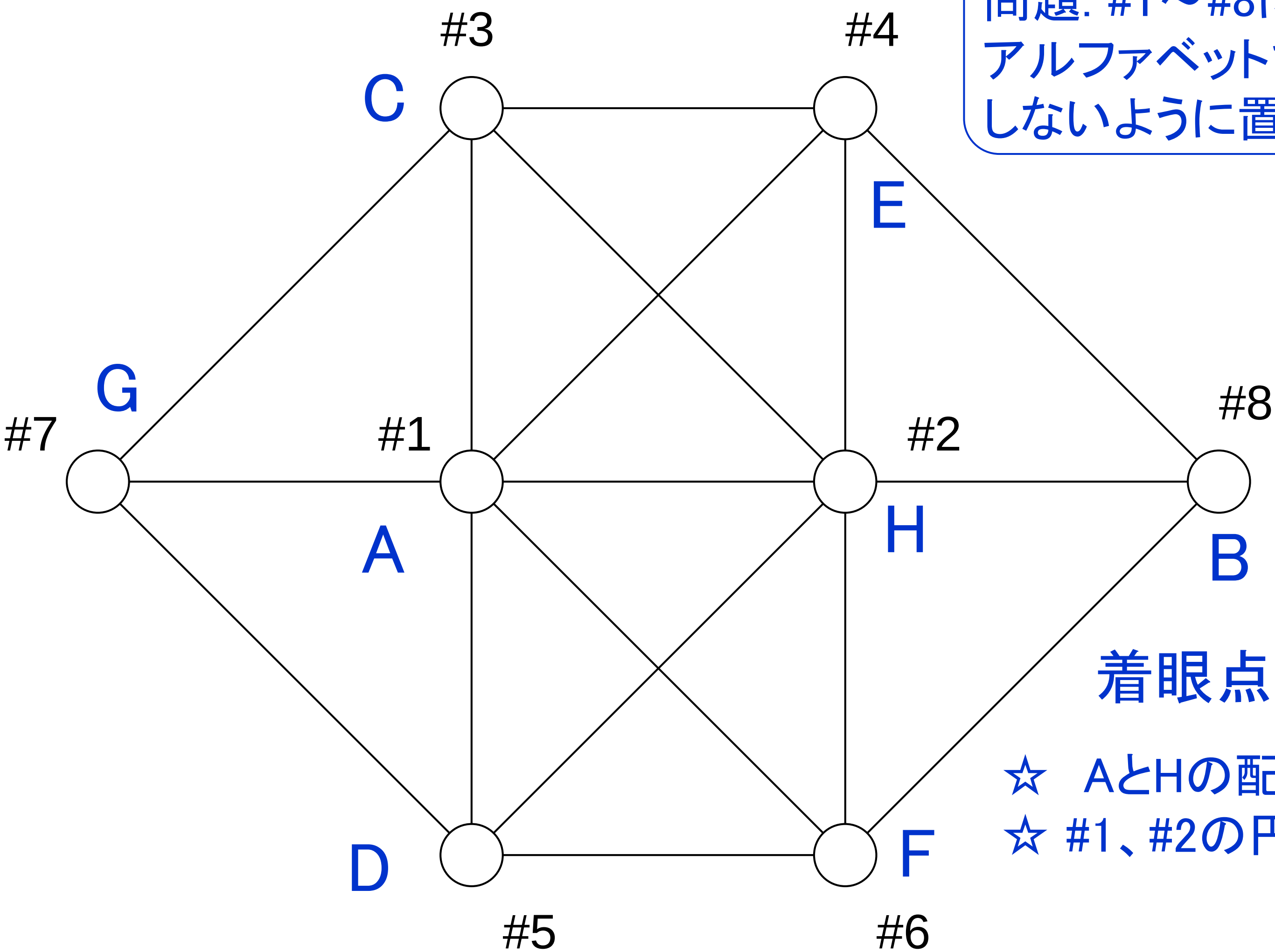


例）

☆　完全グラフの補グラフは空グラフ

☆　完全二部グラフの補グラフは2つの完全グラフの和である

8つの円の配置問題



問題: #1～#8にA～Hの8つの文字をアルファベットで隣り合う文字が隣接しないように置け

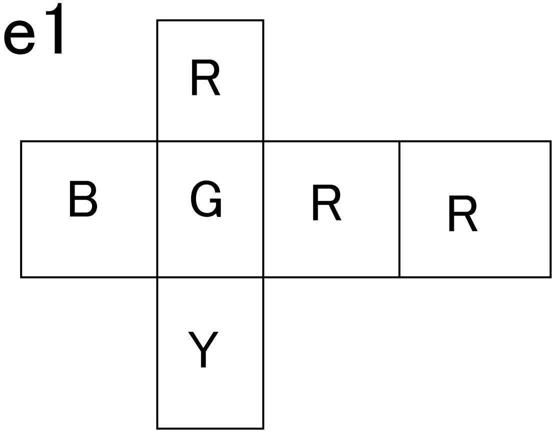
着眼点

☆ AとHの配置の仕方は易しい

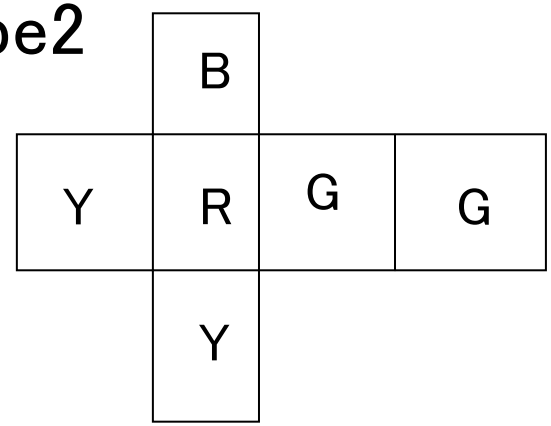
☆ #1、#2の円への配置が最も難しい

4つの立方体パズル

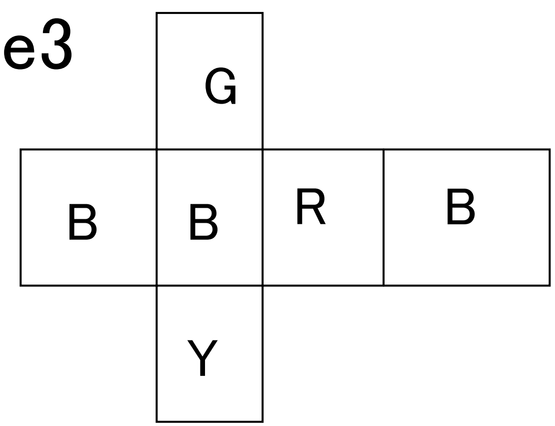
cube1



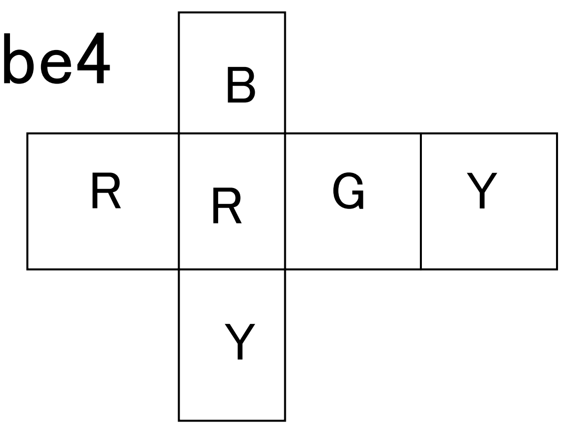
cube2



cube3

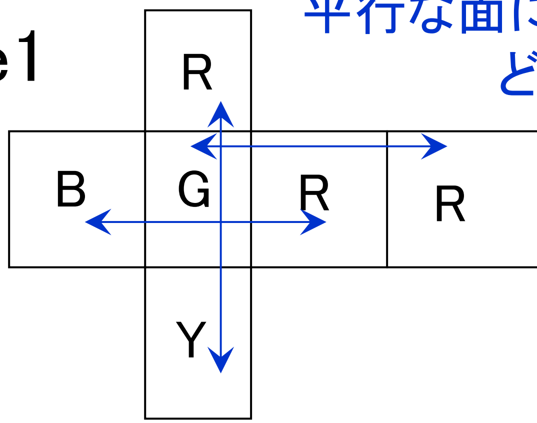


cube4



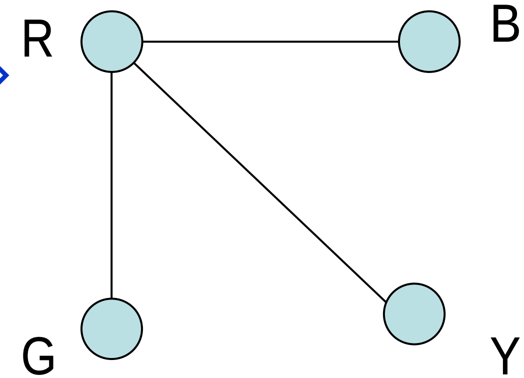
解法のステップ　#1

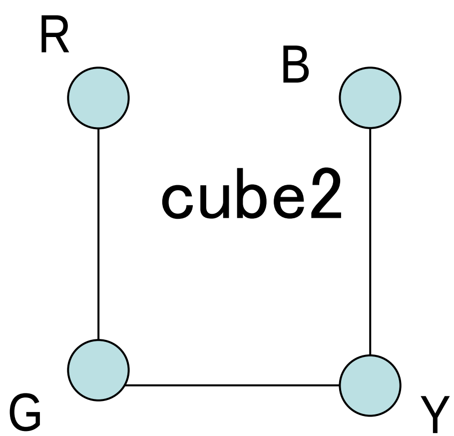
cube1

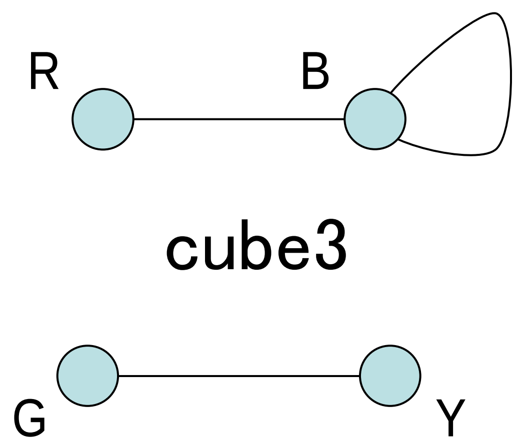


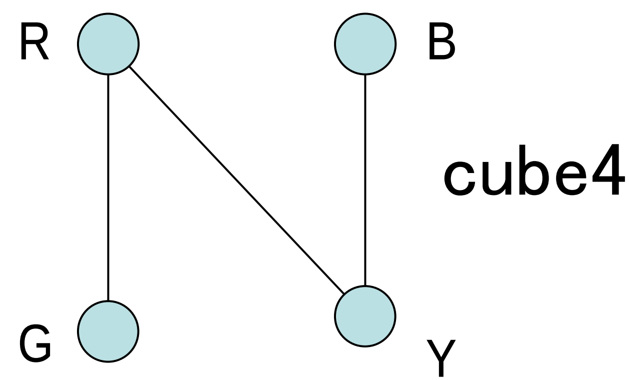
平行な面に塗られた色
どうしを結ぶ　⇒

cube1

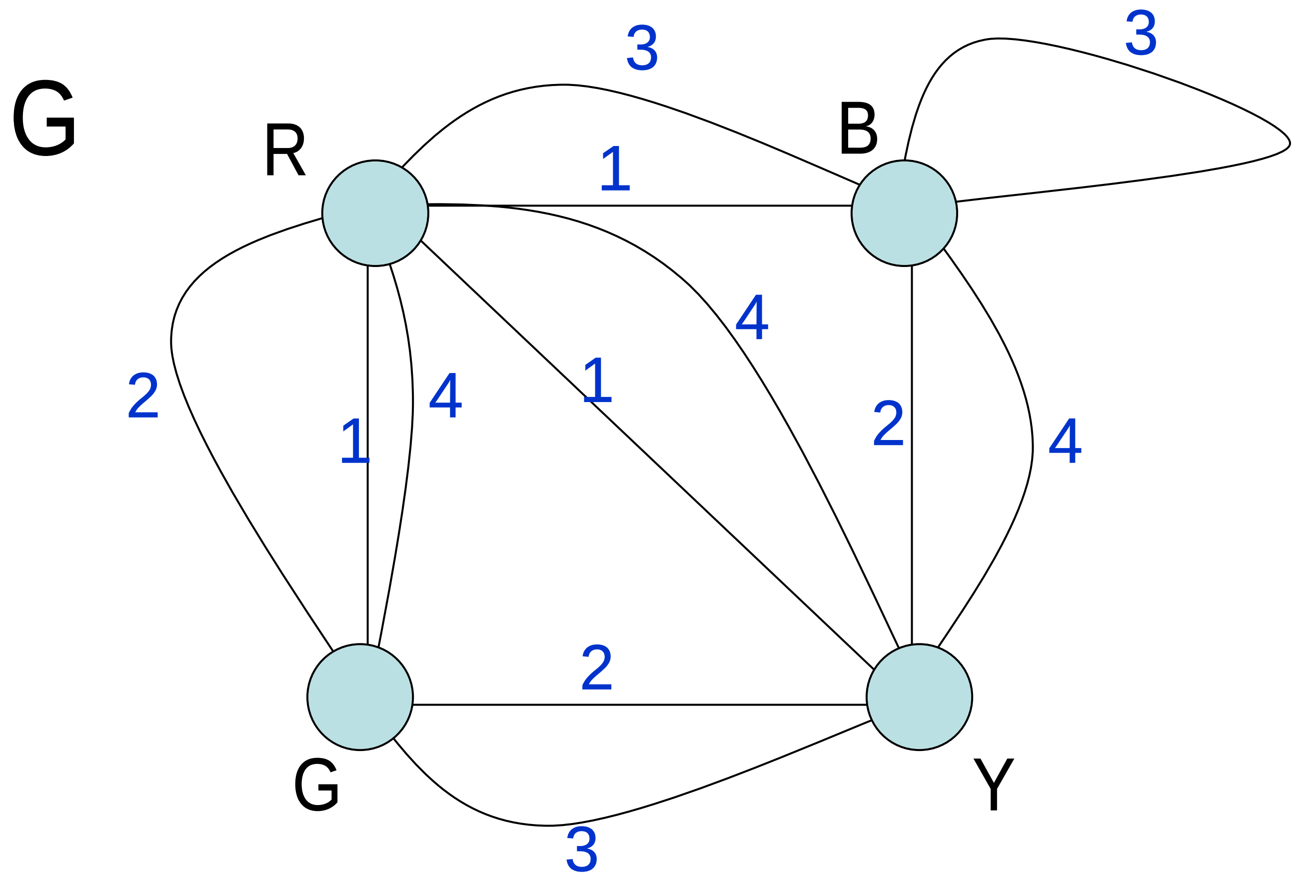








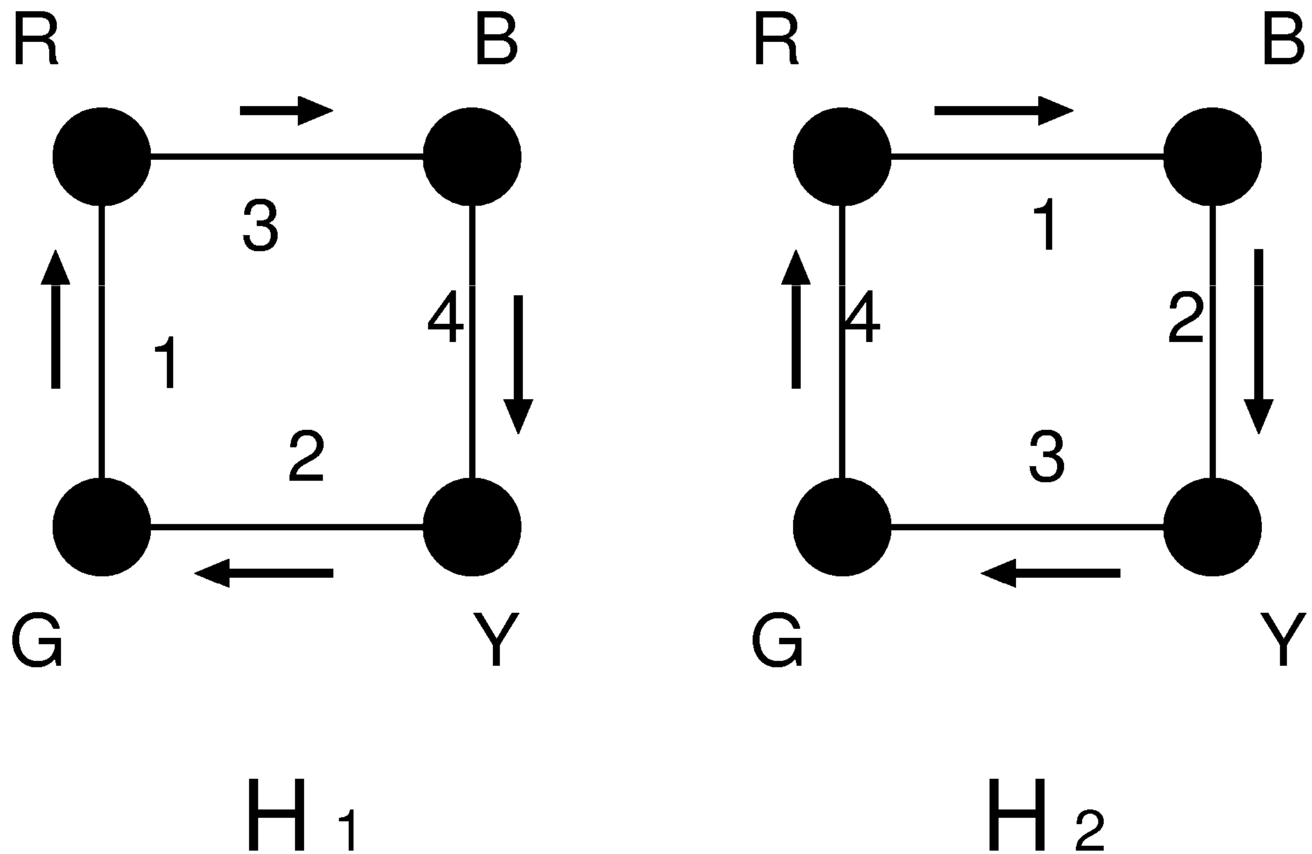
解法のステップ #2



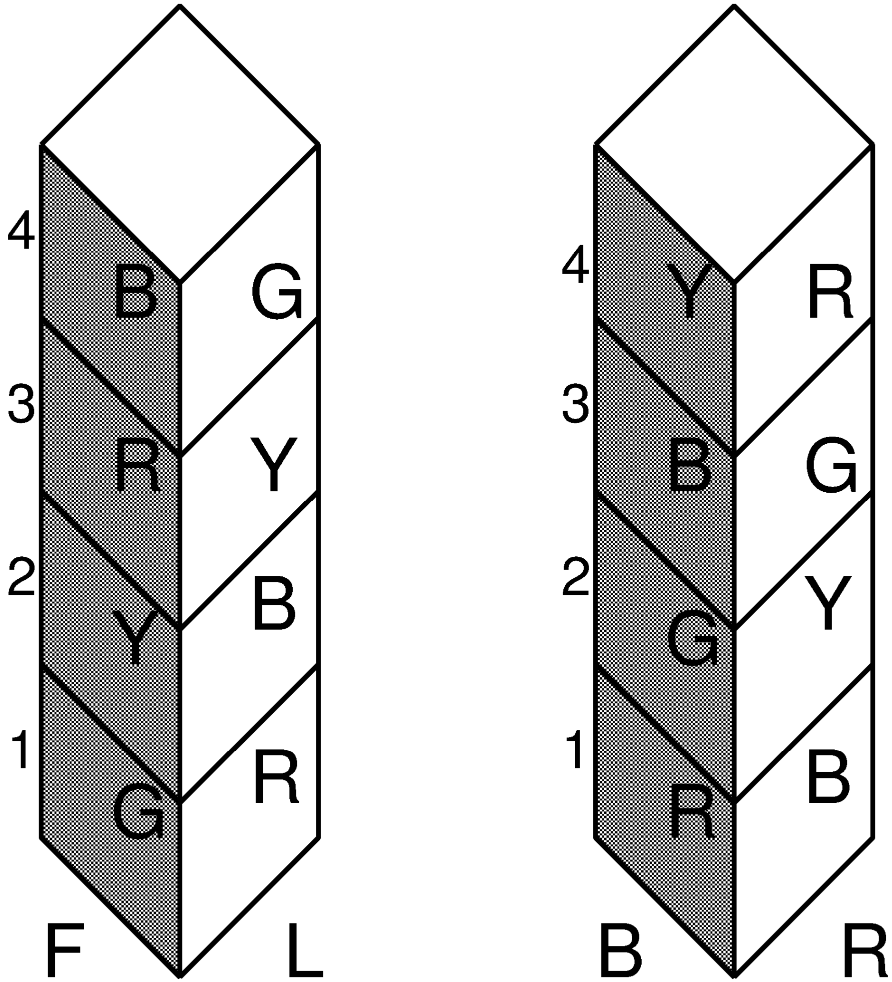
ステップ #1で求めた4つのグラフを重ね合わせる

解法のステップ　#3

各cubeの辺を1本ずつ含み、共通な辺が無く、次数2の正則グラフとしてGの部分グラフH1、H2を選ぶ



解法の最終ステップ

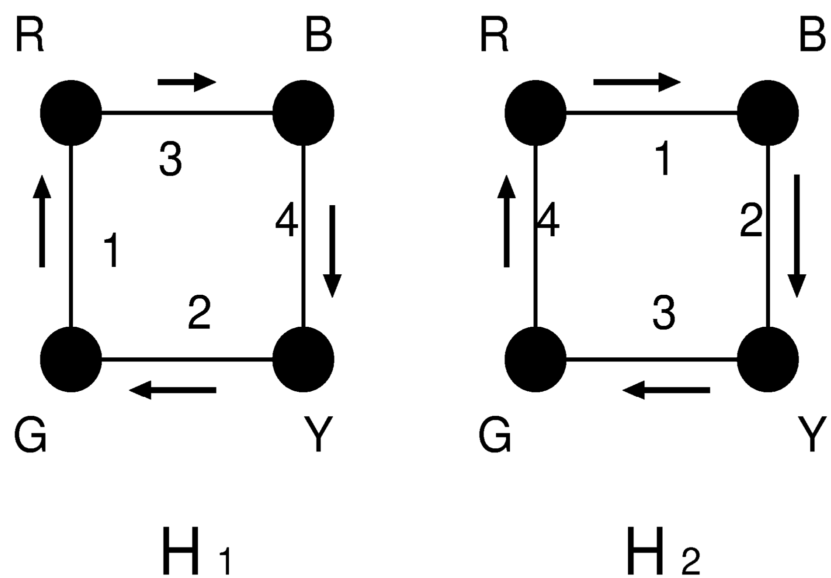


$H_1(FB), H_2(LR)$

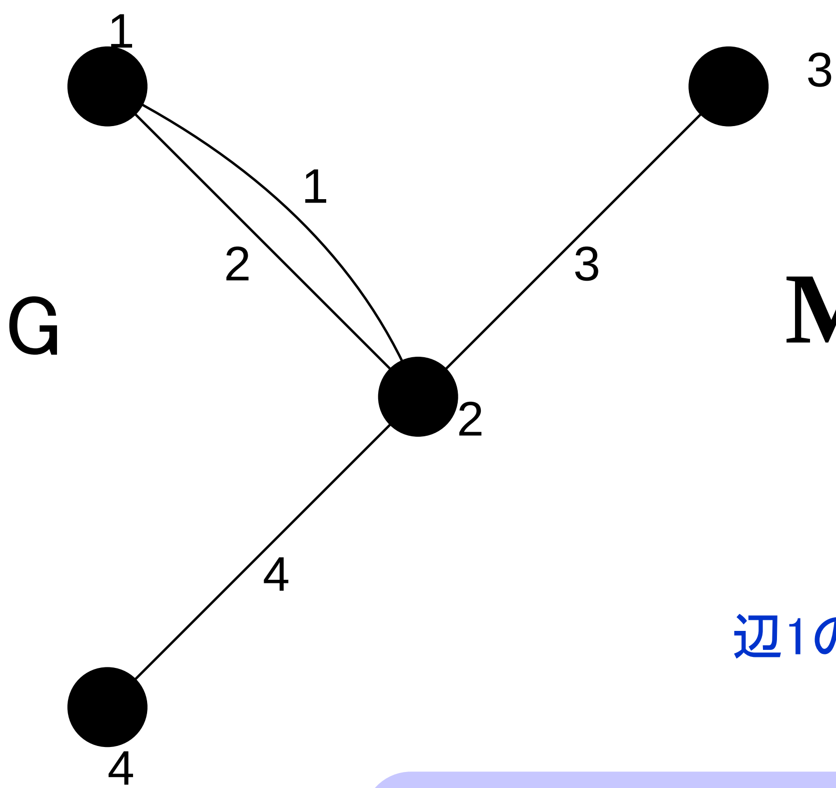
を用いて、

cube1、cube2、cube3、cube4

を積み上げる



例題3.1



点1に接続してる辺の=1+1=2(次数)

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

辺1の両端の点の個数= 2 (握手補題より)

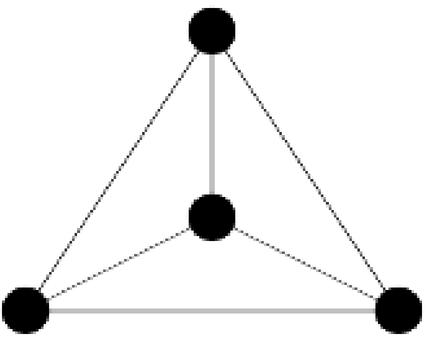
両辺は接続行列の成分の総和を表している

$$\sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2\varepsilon(G)$$

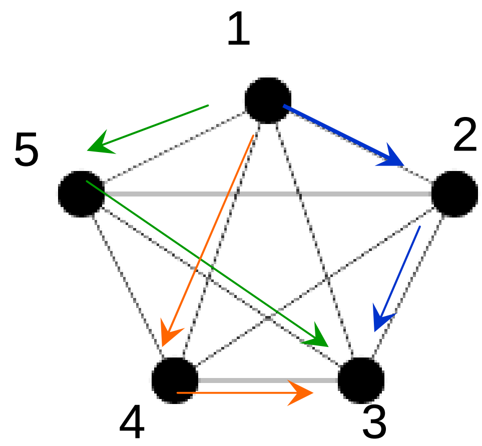
グラフGの次数和

辺の数=接続行列の列の数

例題3.2



K_4



K_5

隣接行列

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 4 & 3 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 4 & 3 \\ 3 & 3 & 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$$

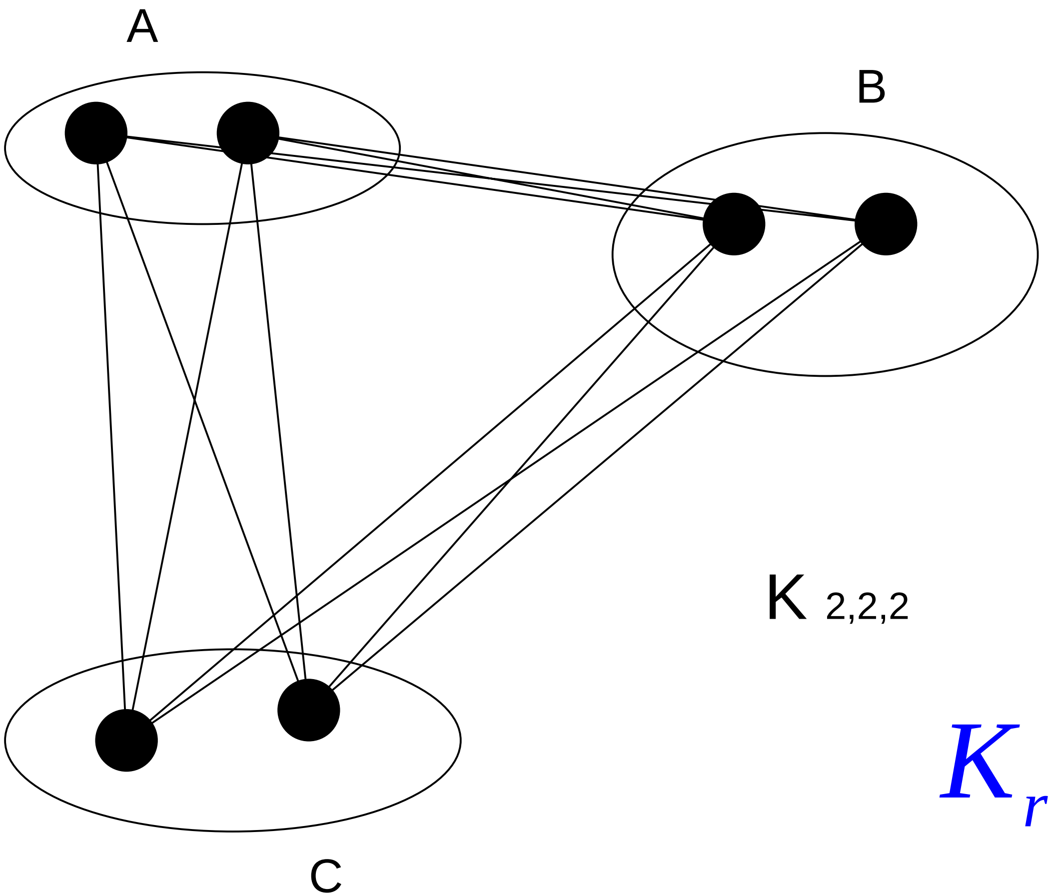
点1と点3を結ぶ長さ2の歩道の数

これを一般化すると

今週の $\boxed{\text{演習問題3}}$ 参照

$\left[\mathbf{A}^K\right]_{ij}$ は点 i と点 j を結ぶ長さKの歩道の数に等しい

例題3.3（完全三部グラフ）

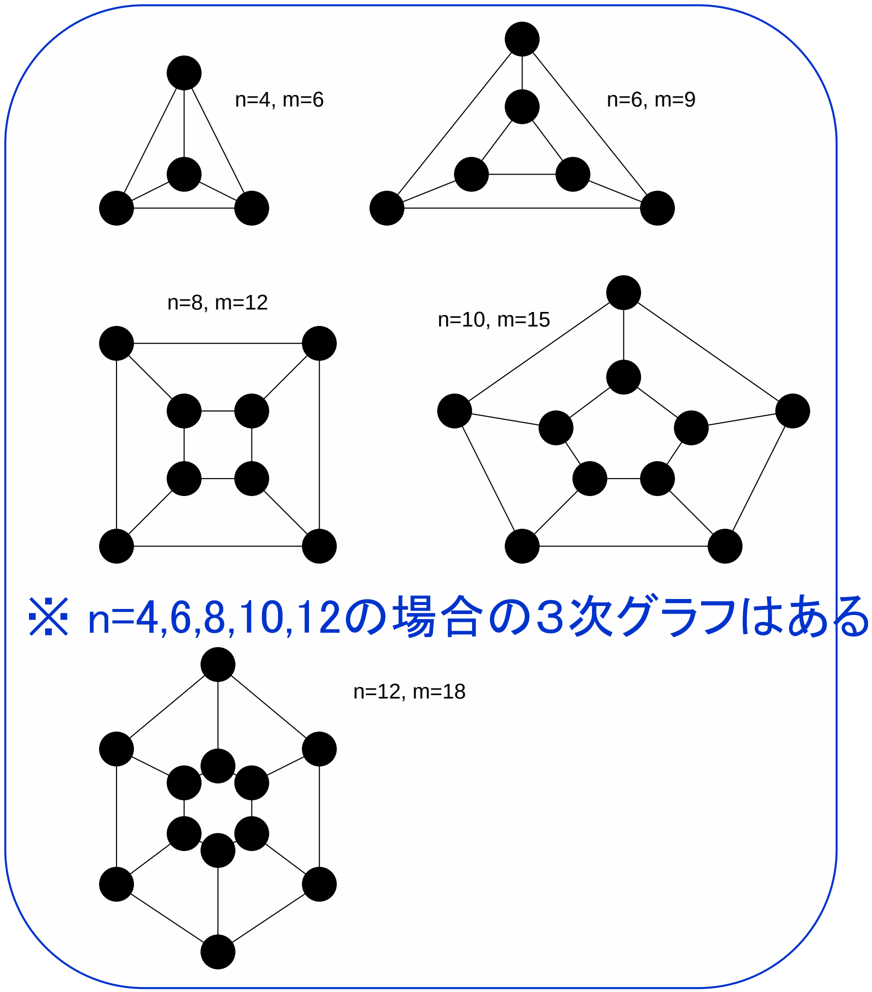


$K_{r,s,t}$ の辺数は

$rs + st + tr$

例題3.4の1.

(iv) 11個の点を持つ正則グラフはあるか？



数列（3,3,3,3,3,3,3,3,3,3,3）
はグラフ的か？

握手補題より

$$\underbrace{m}_{\text{辺数}} = \frac{3n}{2}$$

辺数mは整数でなければならないので
n=11の場合には不可能

例題3.4の2.(1)

問題となるグラフとその補グラフの和は完全グラフとなるべきである

問題のグラフの辺数は

$$m = \frac{n(n-1)}{4}$$

$$\therefore n = 4k,\ \ 4k+1$$

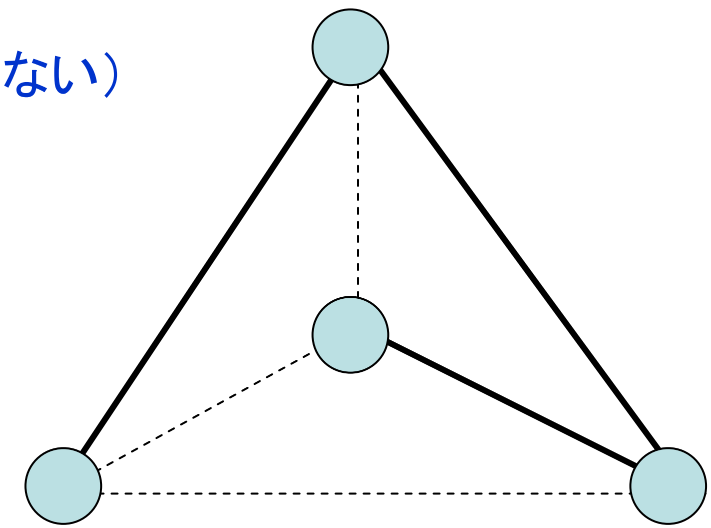
（辺数は整数でなくてはいけない）

k=1のとき, n=4

$$\underbrace{L}_{\text{次数1の点数}} + 2\underbrace{M}_{\text{次数2の点数}} = 6$$

$$L + M = 4$$

この解は $(L, M) = (2, 2)$



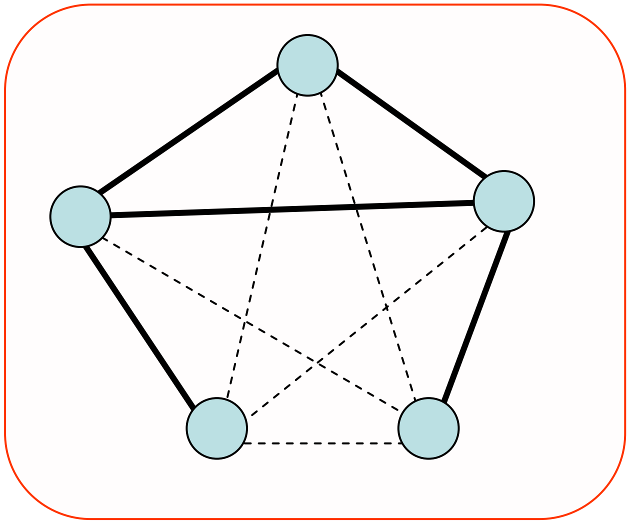
破線と実線のグラフが
それぞれ自己補対

例題3.4の2.(1) #2

k=1, n=4k+1=5の場合には

$$L+2M+\underbrace{3N}_{\text{次数3の点数}}=10$$

$$L+M+N=5$$



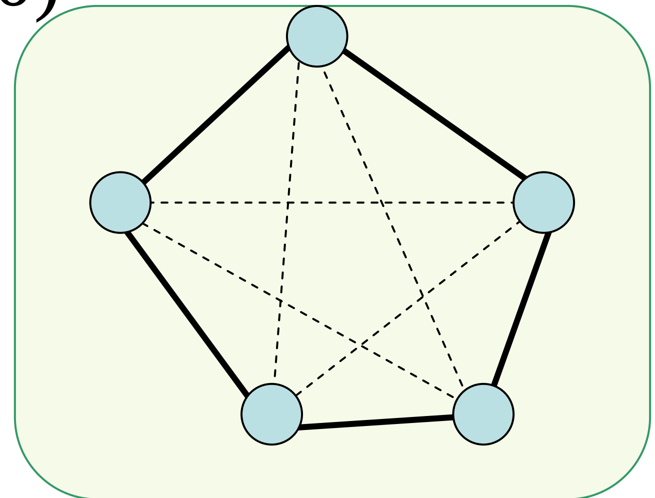
その解は

$$(L,M,N)=(1,3,1),(2,1,2),(0,5,0)$$

対応する次数列は

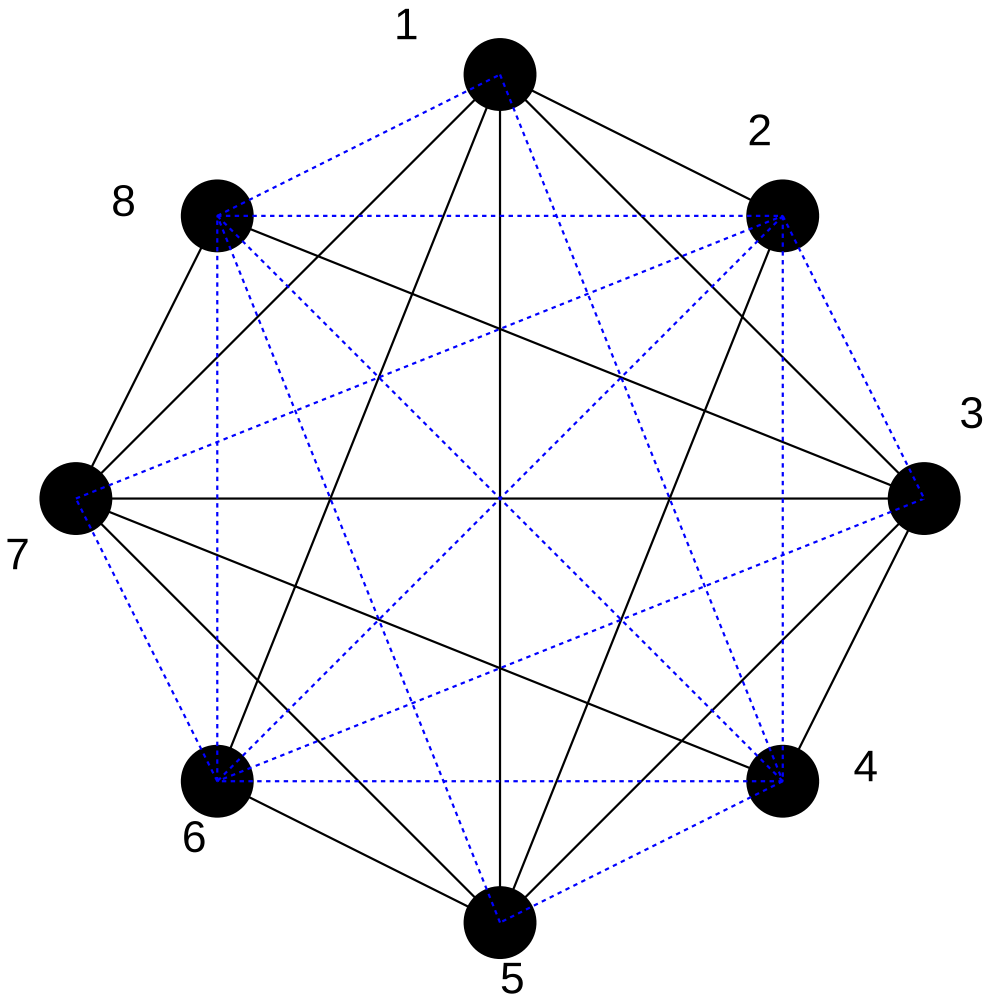
(3,2,2,2,1), (3,3,2,1,1), (2,2,2,2,2)

これは
描けない



例題3.4の2.(2)

k=2, n = 4k=8 の自己補対グラフの例



(1) 8個の点を時計回りに並べる

(2) 8個の点のうち奇数番の点に関して完全グラフを作る

(3) 奇数番目の点とその点の番号+1番目の点どうしを結ぶ

(4) 偶数番目の点とその点+3番目の点を結ぶ

自己補対グラフの探し方

演習問題3

例題 3.2 で見たように, 隣接行列の k 乗, すなわち, $\boldsymbol{A}^k$ の第 (i,j) 成分は, 点 i,j を結ぶ長さ k の歩道の本数に等しい. これをふまえて, 任意のスカラー変数 x に対し, 次の行列:

$$\boldsymbol{I} + x\boldsymbol{A} + x^2\boldsymbol{A}^2 + \cdots + x^k\boldsymbol{A}^k + \cdots \tag{22}$$

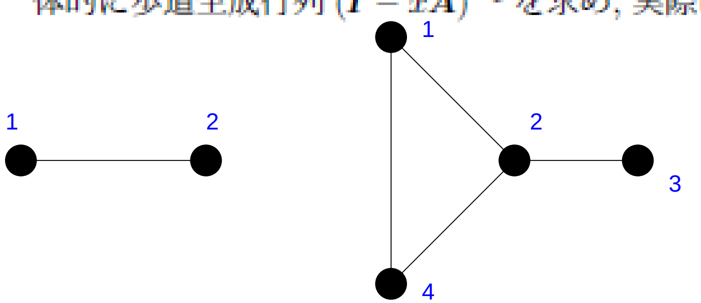
を考えよう ($\boldsymbol{I}$ は単位行列). 明らかに, この行列 (22) の第 (i,j) 成分を x の冪関数とみなしたとき, x^k の係数は点 i,j を結ぶ長さ k の歩道の本数を表す. そこで, スカラー a に対して次のテーラー展開:

$$(1-a)^{-1} \quad = \quad 1 + a^2 + a^3 + \cdots + a^k + \cdots \tag{23}$$

が成り立ったことを思い出せば, 行列 $\boldsymbol{A}$ に対しても同様に

$$(\boldsymbol{I} - x\boldsymbol{A})^{-1} \quad = \quad \boldsymbol{I} + x\boldsymbol{A} + x^2\boldsymbol{A}^2 + \cdots + x^k\boldsymbol{A}^k + \cdots \tag{24}$$

の成立が期待できる. このとき, 行列 $(\boldsymbol{I} - x\boldsymbol{A})^{-1}$ を「歩道生成行列」と名づけることにしょう. つまり, (24) 式の成立より, 行列 $(\boldsymbol{I} - x\boldsymbol{A})^{-1}$ の第 (i,j) 成分を x の冪関数で表したとき, x^k の係数を見さえすれば, 点 i,j を結ぶ長さ k の歩道の本数を知ることができる. このとき, 図 54 に与える 2 つのグラフに対し, 具体的に歩道生成行列 $(\boldsymbol{I} - x\boldsymbol{A})^{-1}$ を求め, 実際に上記の事実を確かめよ.



黒板でヒント＆簡単な解説を与えます。