# グラフ理論　#4

第4回講義　5月14日

--- 道と閉路 ---

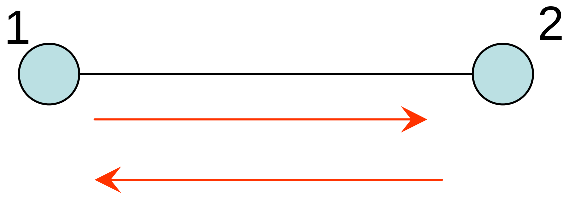
情報科学研究科　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

# 演習問題3（1）の解答例

隣接行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$




歩道生成行列

$$(I - xA)^{-1} = \frac{1}{1-x^2}\begin{pmatrix} 1 & x \\ x & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{1-x^2} & \frac{x}{1-x^2} \\ \frac{x}{1-x^2} & \frac{1}{1-x^2} \end{pmatrix}$$

各成分を冪で展開すると

$$[(I - xA)^{-1}]_{1,1} = 1 + x^2 + x^4 + \cdots + x^{2n} + \cdots = [(I - xA)^{-1}]_{2,2}$$

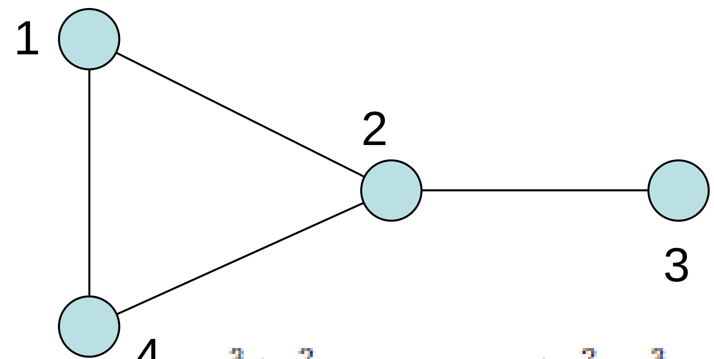
$$[(I - xA)^{-1}]_{1,2} = x + x^3 + x^5 + \cdots + x^{2n+1} + \cdots = [(I - xA)^{-1}]_{2,1}$$

自分自身に戻る場合には偶数次、他点に移動する場合には奇数次の冪のみが展開に現れ、その展開係数は全て1である

# 演習問題3 (2)の解答例

隣接行列

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$




歩道生成行列

$$(I - xA)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1-2x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^2+x}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^3+x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x+x^2-x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} \\ \frac{x^2+x}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{1-x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x-x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^2+x}{1-4x^2-2x^3+x^4} \\ \frac{x^3+x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x-x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{1-3x^2-2x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^3+x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} \\ \frac{x-x^2-x^3}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^2+x}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{x^3+x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} & \frac{1-2x^2}{1-4x^2-2x^3+x^4} \end{pmatrix}$$

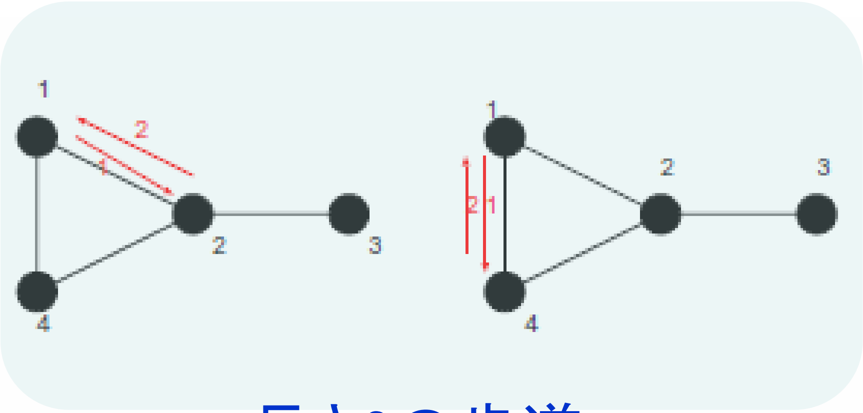
4次まで展開すると

$$(I - xA)^{-1}_{x\text{ の 4 次まで}}$$

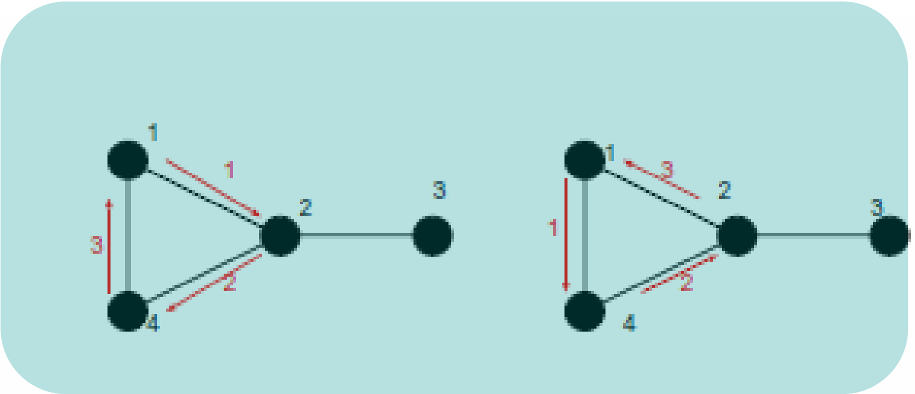
$$= \begin{pmatrix} 1+2x^2+2x^3+7x^4 & x+x^2+4x^3+6x^4 & x^2+x^3+4x^4 & x+x^2+3x^3+6x^4 \\ x+x^2+4x^3+6x^4 & 1+3x^2+2x^3+11x^4 & x+3x^3+2x^4 & x+x^2+4x^3+6x^4 \\ x^2+x^3+4x^4 & x+3x^3+2x^4 & 1+x^2+3x^4 & x^2+x^3+4x^4 \\ x+x^2+3x^3+6x^4 & x+x^2+4x^3+6x^4 & x^2+x^3+4x^4 & 1+2x^2+2x^3+7x^4 \end{pmatrix}$$

# (1,1)成分の確認

$$
\begin{aligned}
[(\boldsymbol{I}-x\boldsymbol{A})^{-1}]_{1,1} &\simeq (1-2x^2)\{1+(4x^2+2x^3-x^4)+(4x^2+2x^3-x^4)^2+\cdots\} \\
&= 1+(4x^2-2x^2)+2x^3+(-8x^4-x^4+16x^4)+\mathcal{O}(x^5) \\
&= x^0+2x^2+2x^3+7x^4+\mathcal{O}(x^5)
\end{aligned}
$$



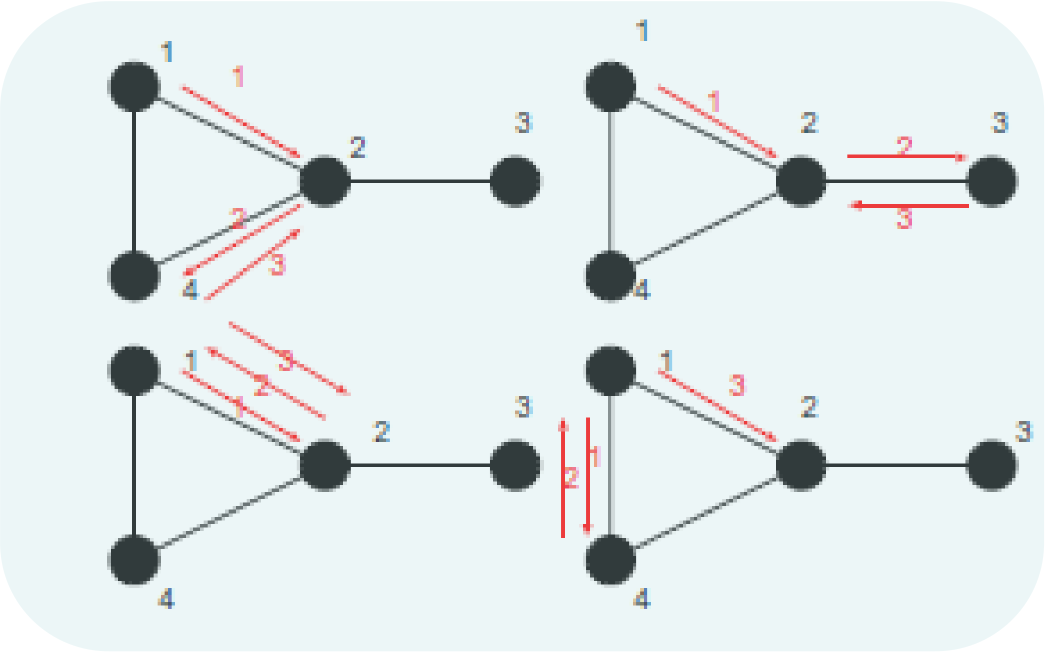
長さ2の歩道



長さ3の歩道

# (1,2)成分の確認

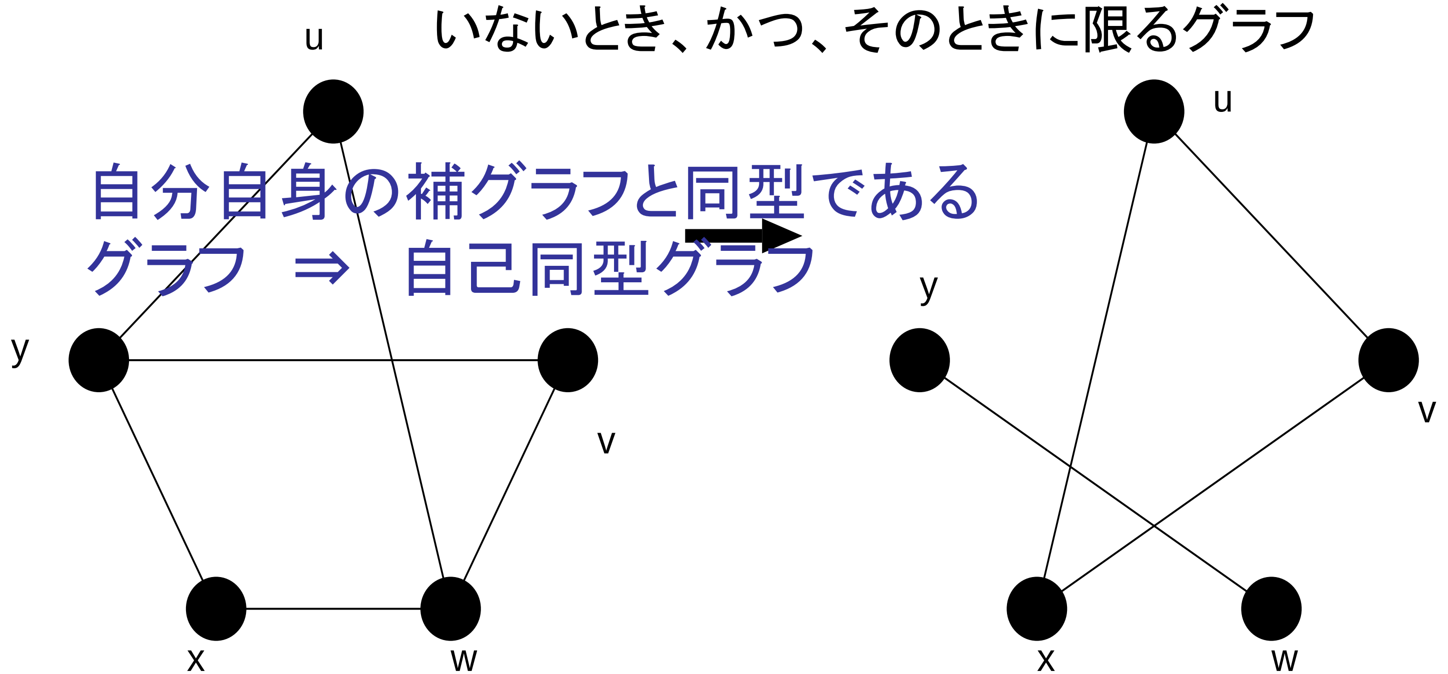
$$
\begin{aligned}
[(\boldsymbol{I} - x\boldsymbol{A})^{-1}]_{1,2} &\simeq (x^2 + x)\{1 + (4x^2 + 2x^3 - x^4) + (4x^2 + 2x^3 - x^4)^2 + \cdots\} \\
&= x + x^2 + 4x^3 + (4x^4 + 2x^4) + \mathcal{O}(x^5) \\
&= x + x^2 + 4x^3 + 6x^4 + \mathcal{O}(x^5)
\end{aligned}
$$



# 単純グラフの補グラフ

**単純グラフGの補グラフ（complement）：**

単純グラフGの点集合を持ち、2点が隣接するのは、Gにおけるそれらの2点が隣接していないとき、かつ、そのときに限るグラフ




自分自身の補グラフと同型であるグラフ　⇒　自己同型グラフ

例）

☆　完全グラフの補グラフは空グラフ

☆　完全二部グラフの補グラフは2つの完全グラフの和である

# 例題3.4の2.(1)

問題となるグラフとその補グラフの和は完全グラフとなるべきである

問題のグラフの辺数は

$$m = \frac{n(n-1)}{4}$$

$$\therefore n = 4k,\ \ 4k+1$$

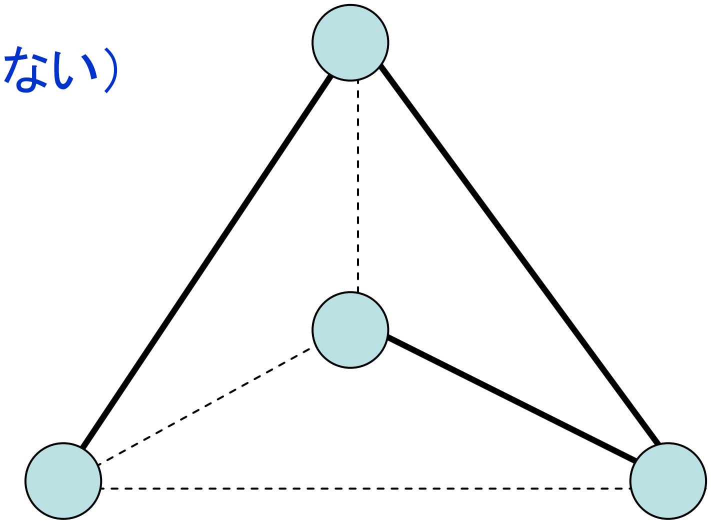
（辺数は整数でなくてはいけない）

k=1のとき, n=4

$$\underbrace{L}_{\text{次数1の点数}} + 2\underbrace{M}_{\text{次数2の点数}} = 6$$

$$L + M = 4$$

この解は $(L, M) = (2, 2)$



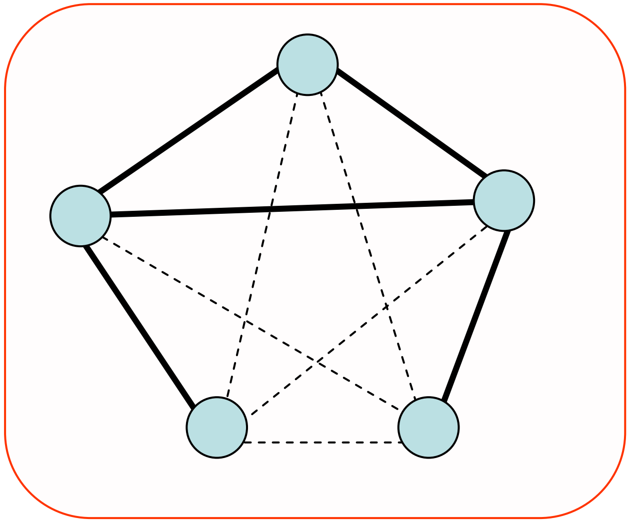
破線と実線のグラフが
それぞれ自己補対

# 例題3.4の2.(1) #2

k=1, n=4k+1=5の場合には

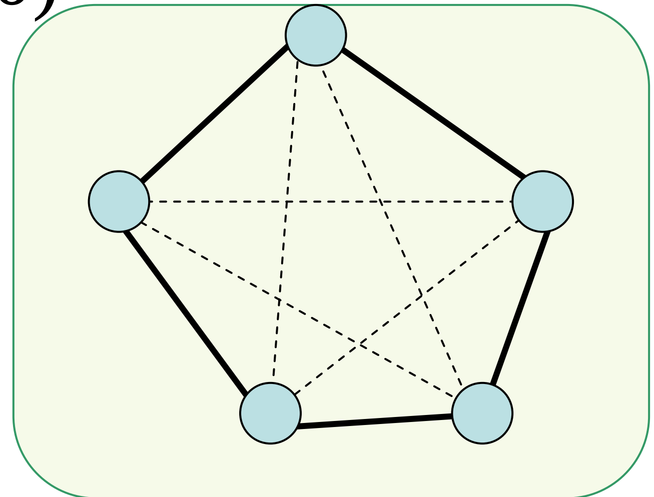
$$L + 2M + 3\underbrace{N}_{\text{次数3の点数}} = 10$$

$$L + M + N = 5$$



その解は

$$(L, M, N) = (1,3,1), (2,1,2), (0,5,0)$$



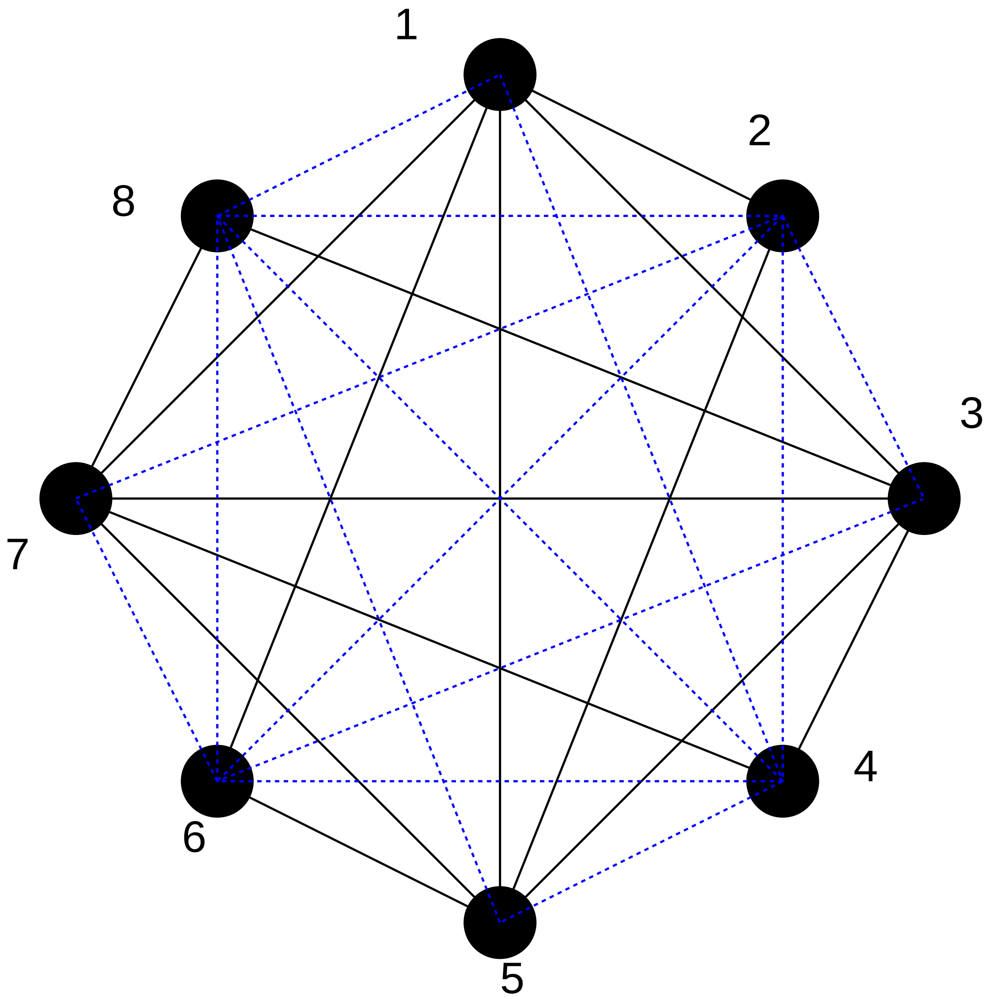
対応する次数列は

(3,2,2,2,1), (3,3,2,1,1), (2,2,2,2,2)

これは
描けない

# 例題3.4の2.(2)

k=2, n = 4k=8 の自己補対グラフの例




(1) 8個の点を時計回りに並べる

(2) 8個の点のうち奇数番の点に
関して完全グラフを作る

(3) 奇数番目の点とその点の番号+1
番目の点どうしを結ぶ

(4) 偶数番目の点とその点+3番目の
点を結ぶ

自己補対グラフの探し方

上のアルゴリズムで奇数番目と
偶数版目の点の役割を交換したグラフ
が自己補対

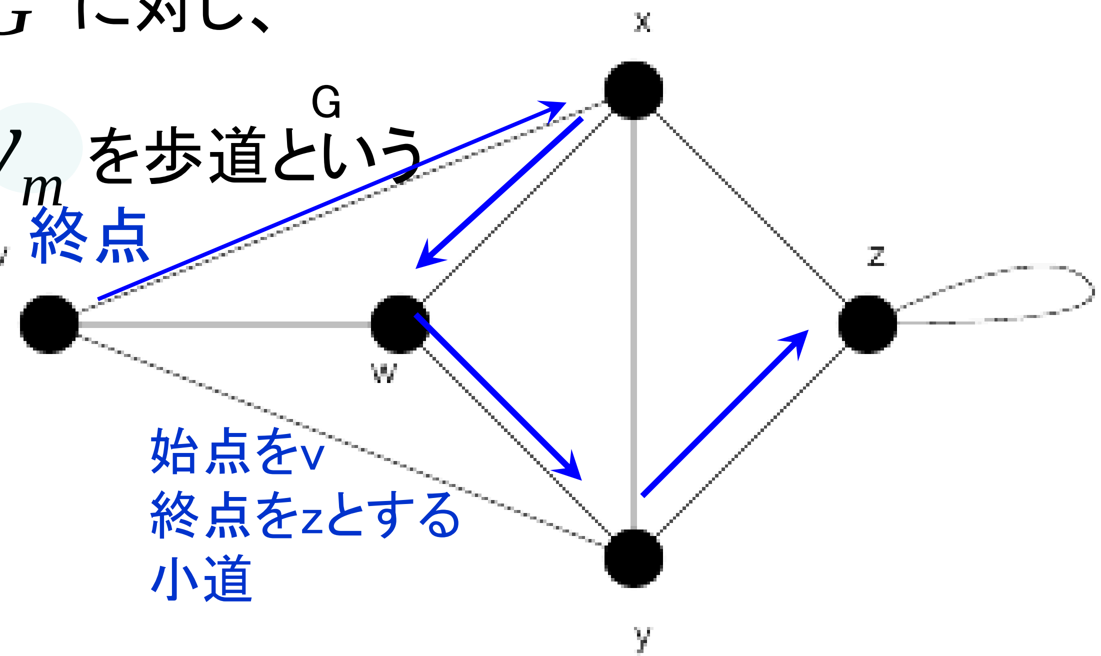
# 歩道・小道・道・閉路

**歩道**：$v_i (i = 1,..,m) \in G$ に対し、

$v_0 v_1, v_1 v_2, \ldots, v_{m-1} v_m$ を歩道という

始点　終点

（※重複する辺があってもよい）




**小道**：　全ての辺 $v_0 v_1, v_1 v_2, \ldots, v_{m-1} v_m$ が異なる歩道

**道**：　点 $v_0, v_1, \ldots, v_m$ が全て異なる歩道

**閉路**：　少なくとも1本辺を持つ閉じた道

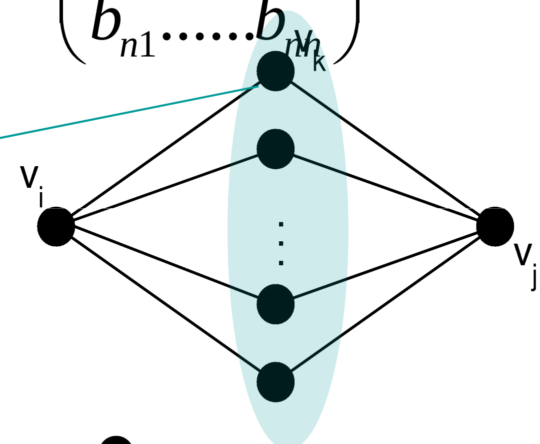
# 例題4.1　#1

連結単純グラフ$G:\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$, $m$本の辺, $t$個の三角形

(1) $A = \begin{pmatrix} a_{11} \ldots\ldots a_{1n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ a_{n1} \ldots\ldots a_{nn} \end{pmatrix}$ と置くと、この2乗は $A^2 = \begin{pmatrix} b_{11} \ldots\ldots b_{1n} \\ \ldots\ \ldots\ \ldots \\ b_{n1} \ldots\ldots b_{nn} \end{pmatrix} = B$

第 ij 要素 $b_{ij} = \underline{\sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{kj}}$

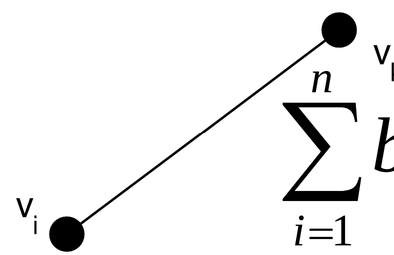
点vi から点vkを経由してvjに至る長さ2の歩道の数




経由点vkに関する全ての可能性について足しあげたものはvi とvj間の歩道の総数に等しい

(2) $b_{ii} = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} a_{ki}$

viからvkを経由してviに戻る歩道数Viとvkを結ぶ辺の2倍




$\sum_{i=1}^{n} b_{ii}$ はGの総辺数の2倍

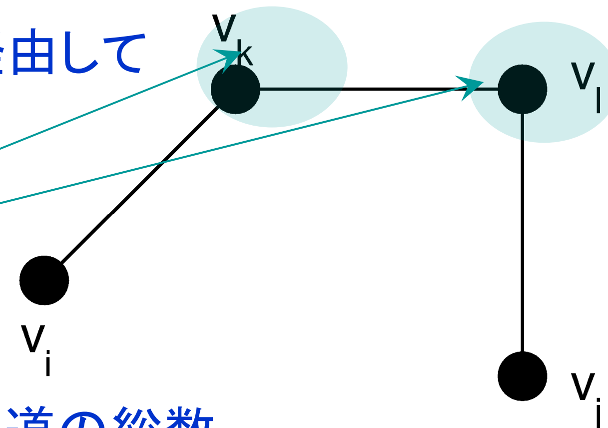
# 例題4.1　#2

(3)

$$A^3 = \begin{pmatrix} c_{11}\cdots\cdots c_{1n} \\ \cdots\cdots\ \ \cdots\cdots\ \ \cdots \\ c_{n1}\cdots\cdots c_{nn} \end{pmatrix} = C$$

点viから点vkとvlを経由して
点vjへ至る辺の本数

$$c_{ij} = \underline{\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}a_{kl}a_{lj}}$$

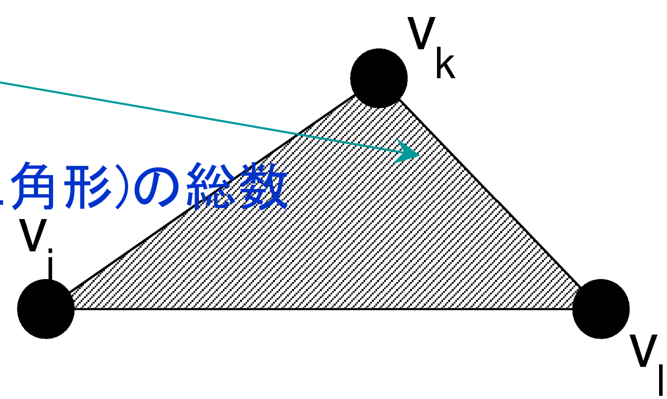



点viから点vjへ至る歩道の総数

対角要素：

$$c_{ii} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} a_{ik}a_{kl}a_{li}$$

このような閉路（三角形）の総数




従って

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} c_{ii} = \underline{6}t}$$

点 i, k, l の並べ方の3!=6通りからくる

# 定理5・2 #1

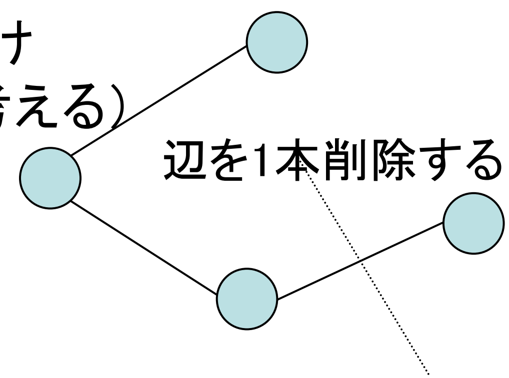
グラフGはn個の点をもつ単純グラフであり
k個の成分がある場合Gの辺数mは

$$n-k \le m \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$ を満たす

（証明）

$m \ge n-k$ について

辺数の下限に関して、であるから、グラフGはできるだけ少ない辺数を持つものとする（極端な場合として木を考える）




Gから辺を1本削除すると

$$k \to k+1,\ n \to n,\ m_0 \to m_0-1$$

$$m_0-1 \ge n-(k+1)$$

$m_0-1$本の辺に関して不等式の成立を仮定

（帰納法の仮定。m0=0の場合は自明）

$$m_0 \ge n-k$$

$m_0$ 本の辺について成立

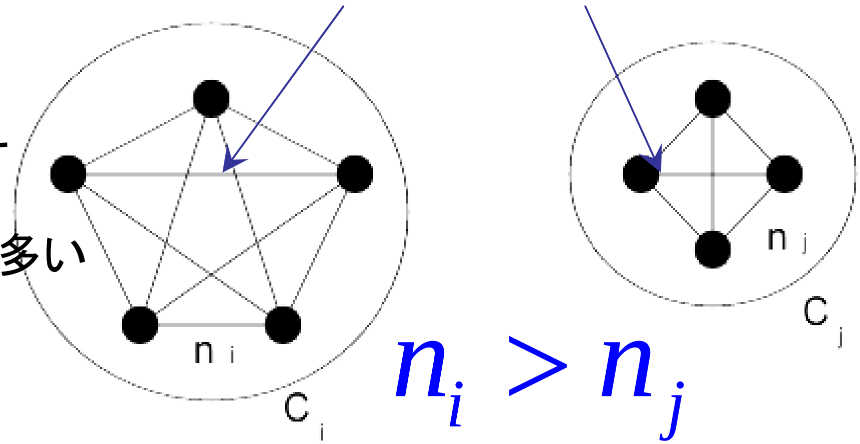
⇒全ての辺数について成立

# 定理5・2　#2

$$m \le (n-k)(n-k+1)/2$$

の成立について示す

グラフGの中の任意の2成分

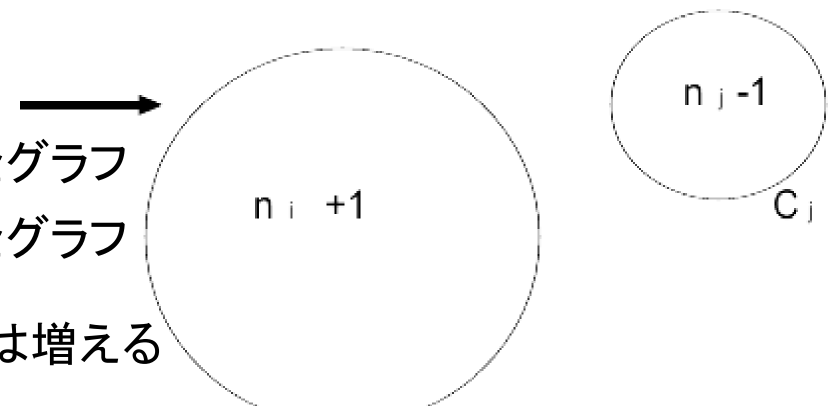



$$n_i > n_j$$

辺数の上界を示すので、グラフGは辺数の最も多い完全グラフとして考える

$C_i + C_j$　の辺の総数

$$N_{ij} = \frac{1}{2} n_i (n_i - 1) + \frac{1}{2} n_j (n_j - 1)$$




次の操作を行う

$C_i \Rightarrow n_i + 1$　個の点をもつ完全グラフ

$C_j \Rightarrow n_j - 1$　個の点をもつ完全グラフ

$\Delta N_{ij} = n_i - n_j + 1 > 0$　だけ点の総数は増える

この操作を繰り返すとn−k+1個の点からなる1つの完全グラフとk−1個の孤立点が得られる

$$\Rightarrow \quad m \le \frac{1}{2}(n-k)(n-k+1)$$　が成立する

# 例題4.2（1）

$d(v,w)$はvからwへの最短路の長さ

$d(v,w) \geq 2$ならば, $d(v,z)+d(z,w)=d(v,w)$なる点zが存在する

（証明のアウトライン）

点vと点w間の最短路C上の任意の点

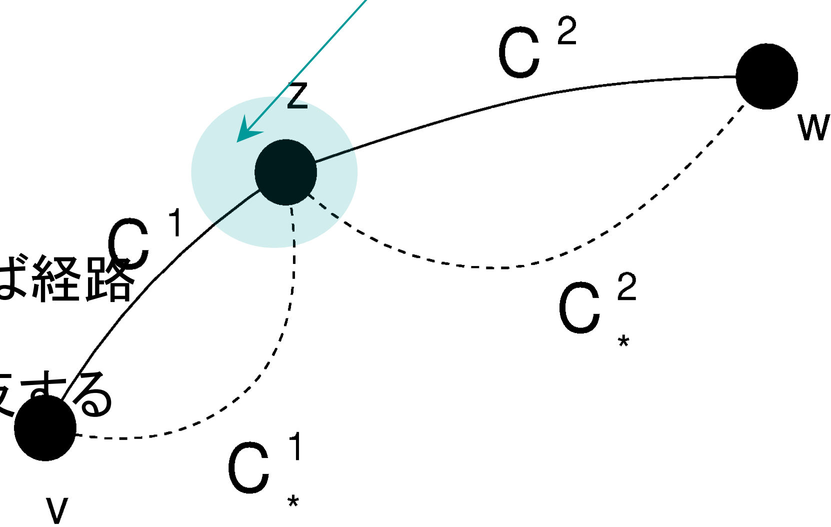
図において

$C^1$ は点vと点zを結ぶ最短路である

仮定

もし、これ以外に最短路 $C_*^1$ があるとすれば経路

$C_*^1+C^2$ がvとwを結ぶ最短路となり仮定に反する

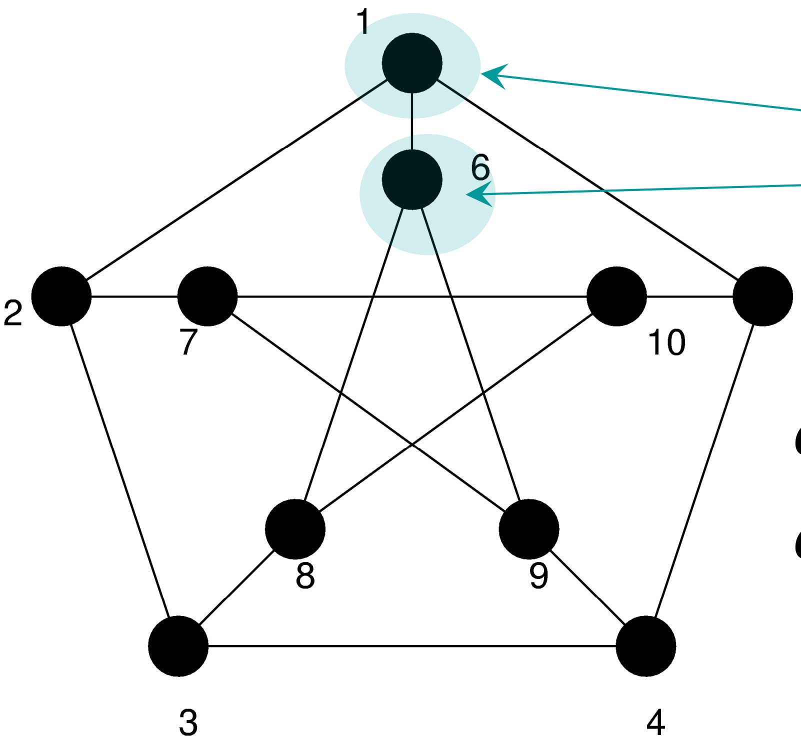



$C^2$ に関しても同様の議論ができる

考えるグラフは連結であるから、いつでもC上にzをとることができる

# 例題4.2（2）

ピーターソン・グラフにおいて、任意の2点$v, w$に対し
$d(v,w)=1$ または $d(v,w)=2$ である




ピーターソン・グラフの対称性から

$$v=1, v=6$$

をスタート点を選んだときの可能な経路の長さを調べればよい。実際に調べてみると

$$d(1,2)=1, d(1,3)=2, \ldots, d(1,10)=2,$$
$$d(6,1)=1, \ldots, d(6,10)=2$$

となり、満たす。

詳細は講義ノート

# 非連結化集合とカットセット

**非連結化集合：**

それを除去するとグラフが
非連結となる辺の集合

**カットセット：**

そのどのような部分集合も
非連結化集合ではない非連結化集合

**辺連結度：** $\lambda(G)$

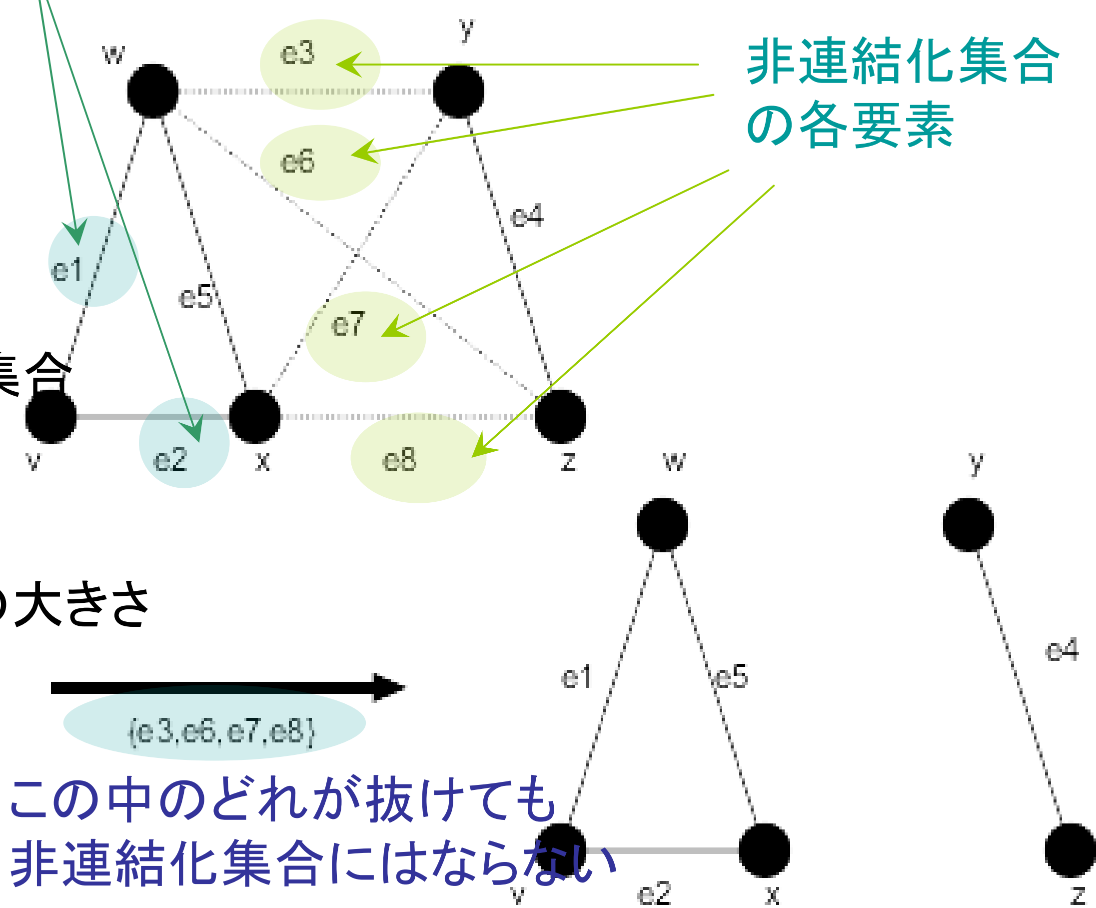
連結グラフの最小なカットセットの大きさ

例に挙げた右図では

$$\lambda(G) = 2$$

要素数最小のカットセット

非連結化集合
の各要素

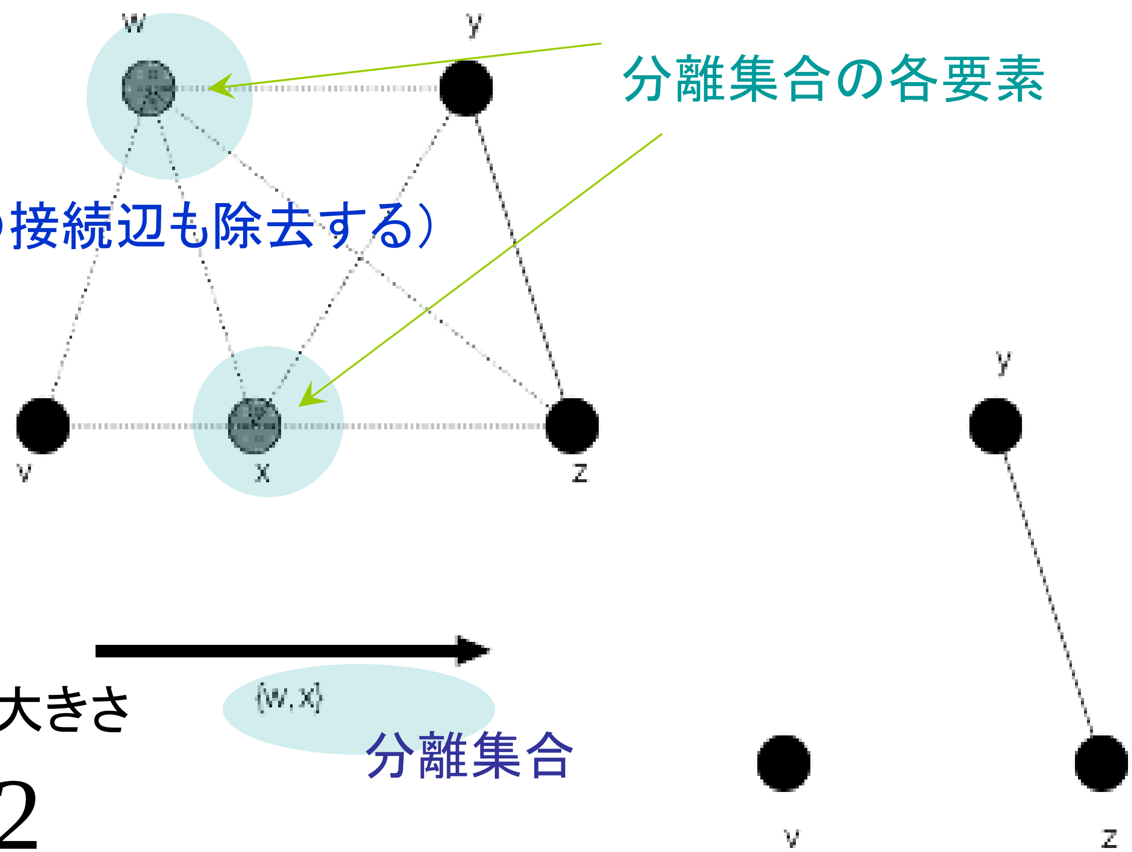



この中のどれが抜けても
非連結化集合にはならない

# 分離集合とカット点

**分離集合：**

それを除去するとグラフが
非連結となる点の集合
（※点を除去する際にはその接続辺も除去する）




**カット点：**

1個の点からなる分離集合

**連結度：**

グラフの最小な分離集合の大きさ

図の例では $\kappa(G) = 2$

$\kappa(G) \geq k$ のときグラフGは**k連結**であるとい

# 例題4.4（タイセット行列）

タイセット行列

$$\mathbf{B} = (b_{ij})$$

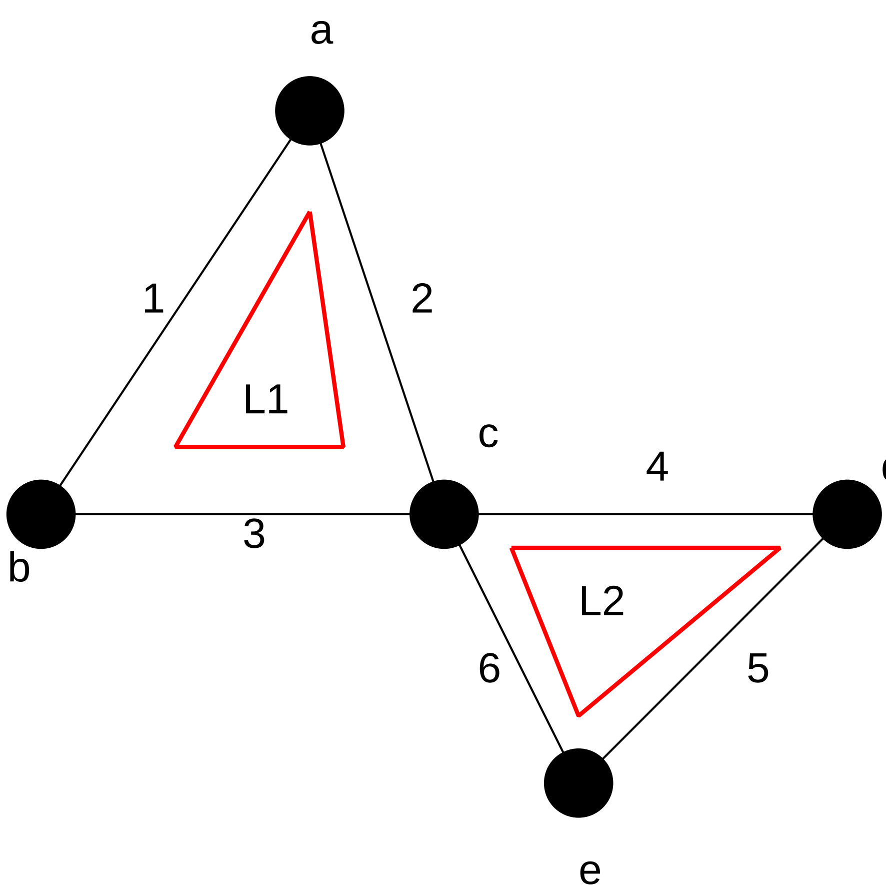
$$b_{ij} = \begin{cases} 1 & (L_i\text{が枝}j\text{を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

右図の例では

閉路L1を構成する辺

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 1 \end{pmatrix}$$

閉路L2を構成する辺



# 例題4.4 #2（カットセット行列）

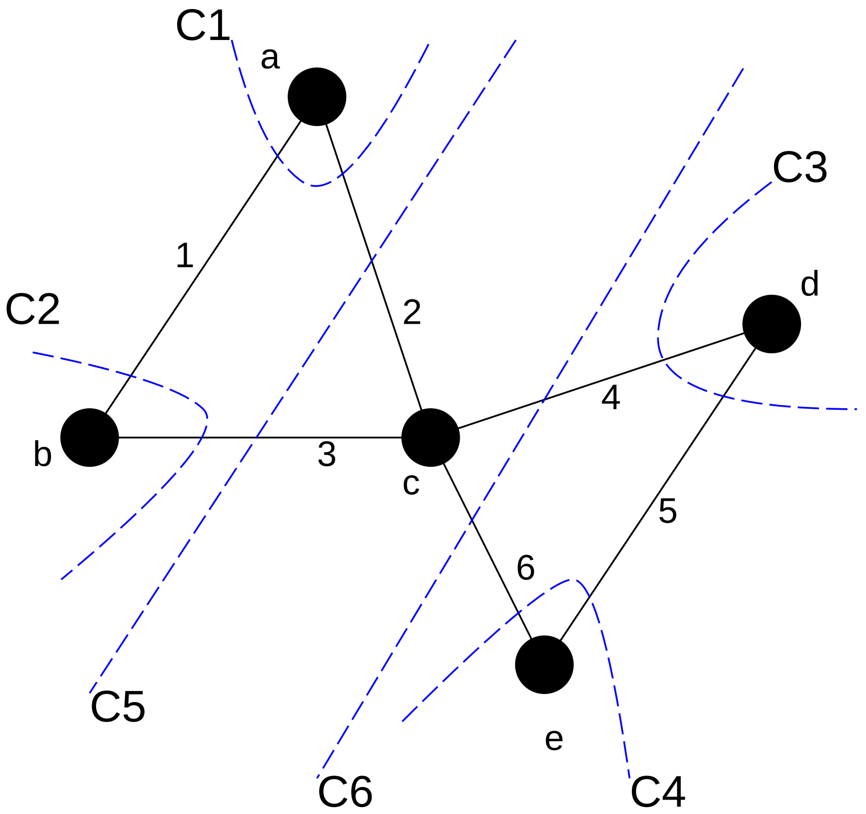
**カットセット行列**

$$\mathbf{C} = (c_{ij})$$

$$c_{ij} = \begin{cases} 1 & (C_i\text{が枝}j\text{を含む}) \\ 0 & (\text{それ以外}) \end{cases}$$

**右図の例では**

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1\ 1\ 0\ 0\ 0\ 0 \\ 1\ 0\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 0\ 1\ 1 \\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 0 \\ 0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1 \end{pmatrix}$$



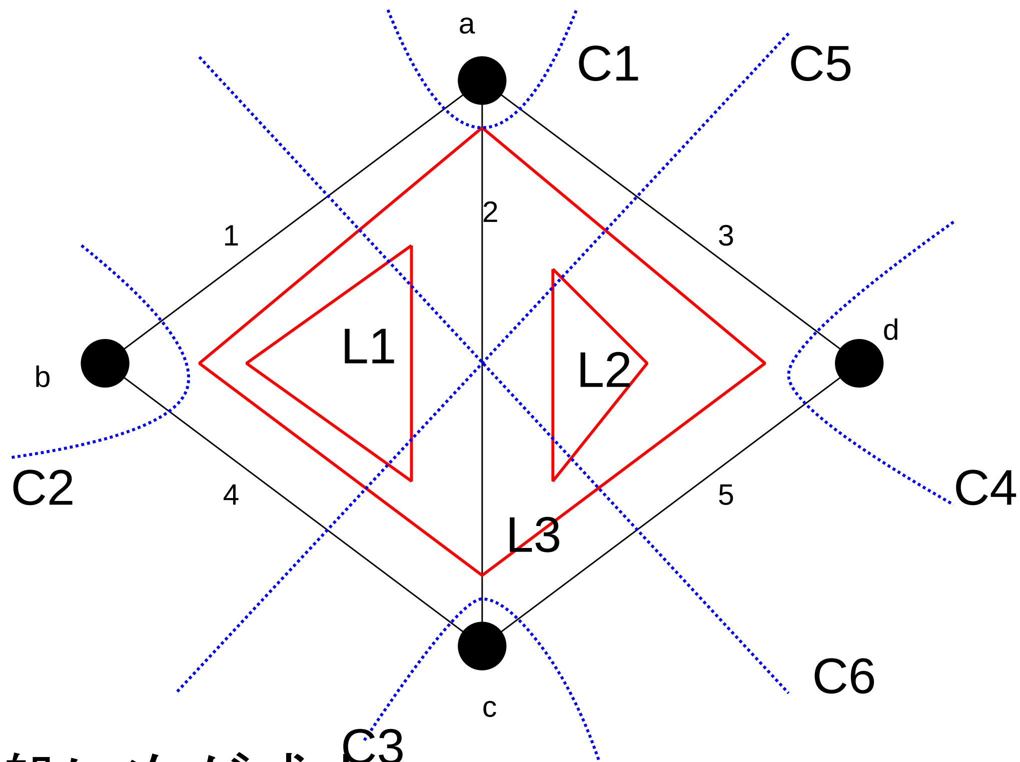
# 例題4.4 (1)–(3)

タイセット行列

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

カットセット行列

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$



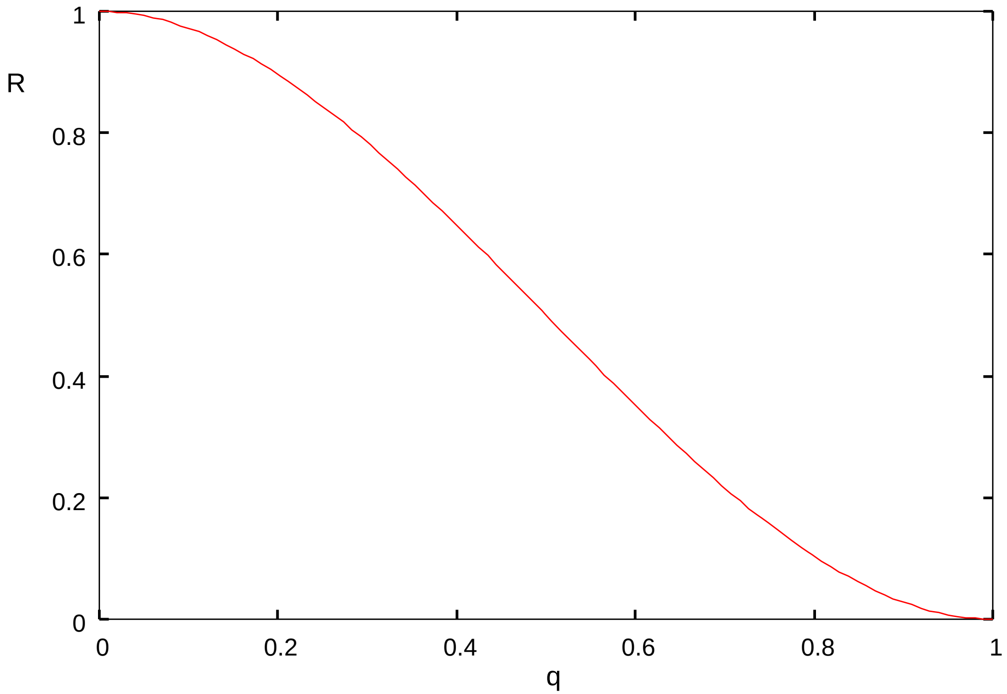

一般に次が成立

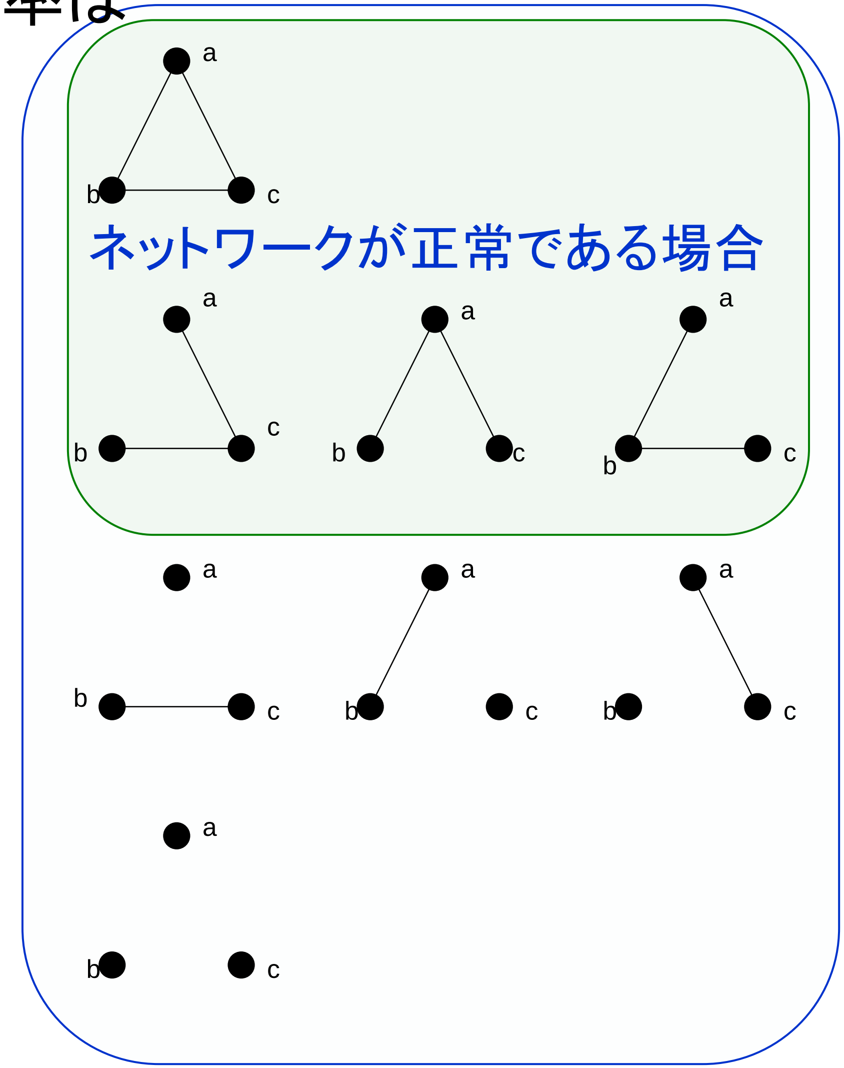
$$\mathbf{B}\mathbf{C}^T = \mathbf{0} \pmod 2$$

# 例題4.5の1

右図より、ネットワークが正常である確率は

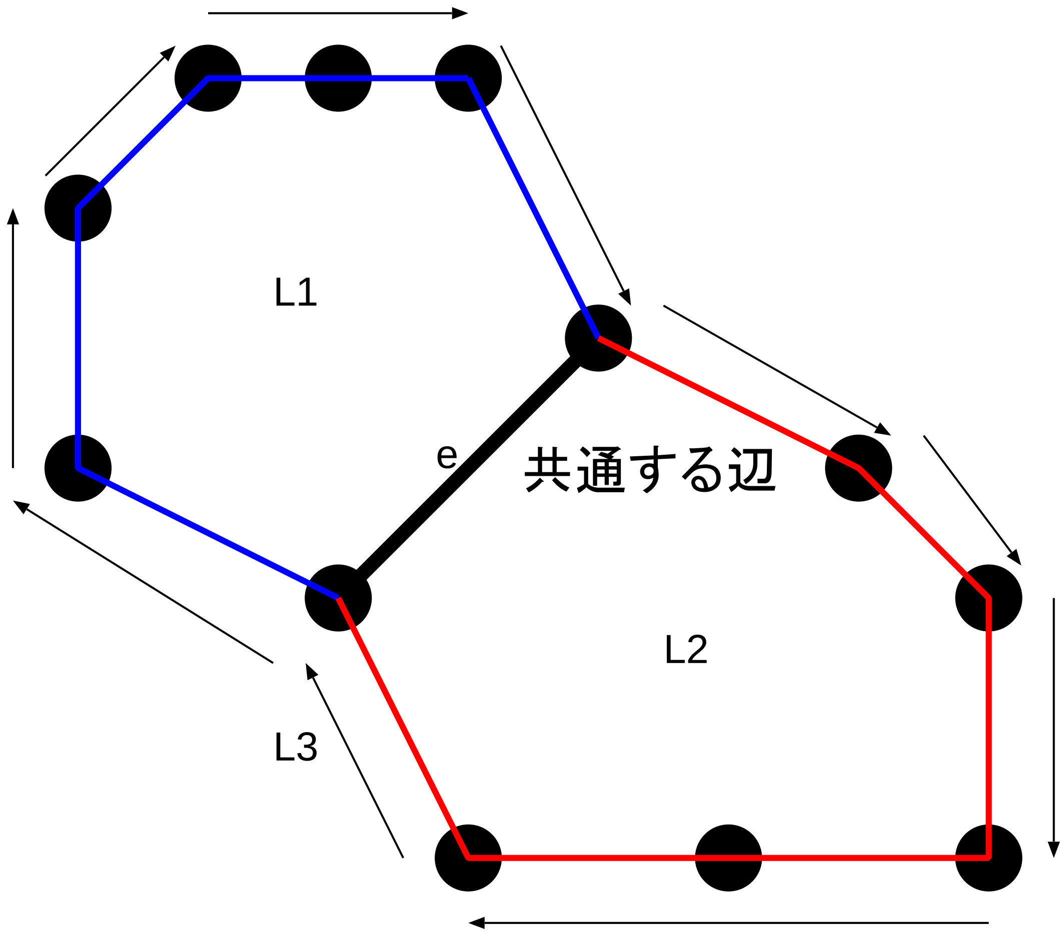
$$R(q) = (1-q)^3 + 3q\left(1-q\right)^2$$



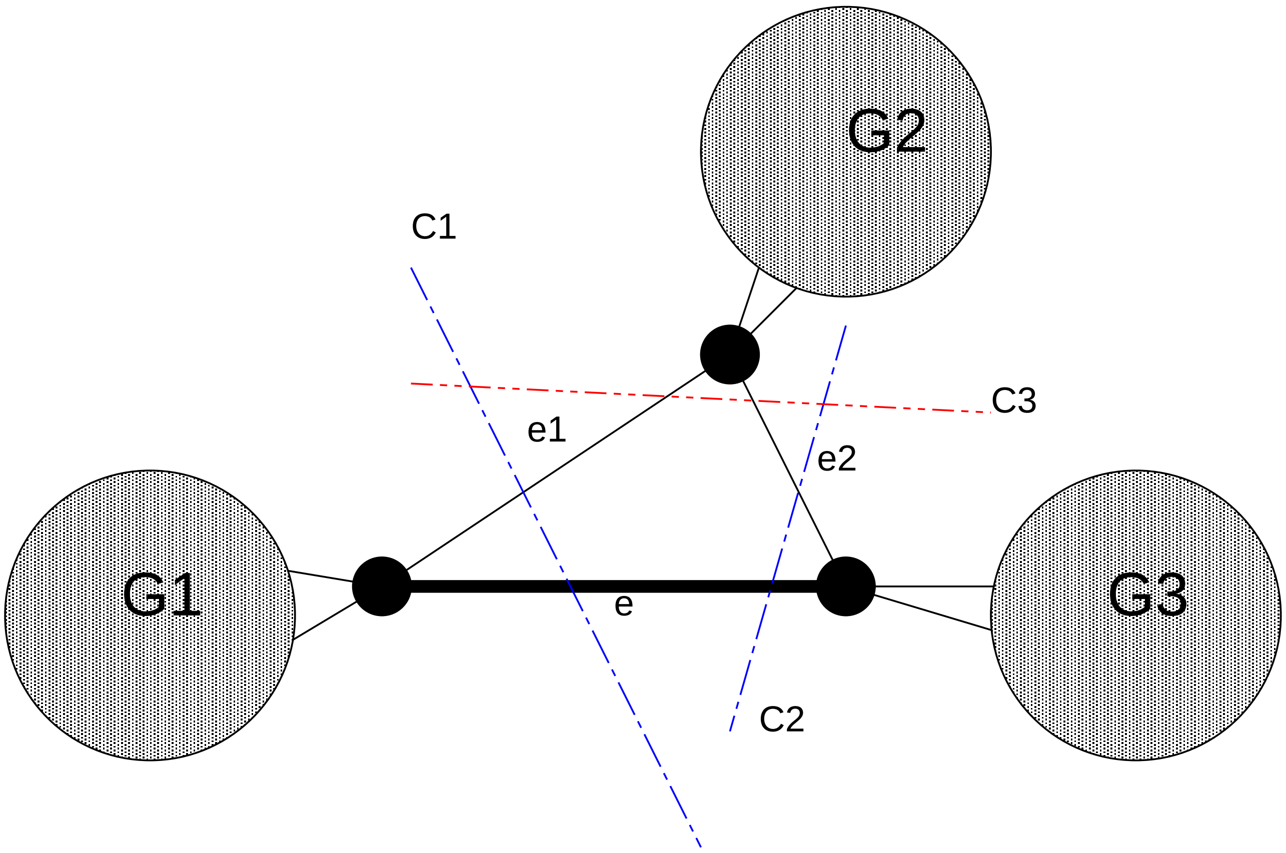
# 例題4.5の2（1）

辺eを含まない閉路として
L1,L2の和からeを削除してできる閉路L3を選べる

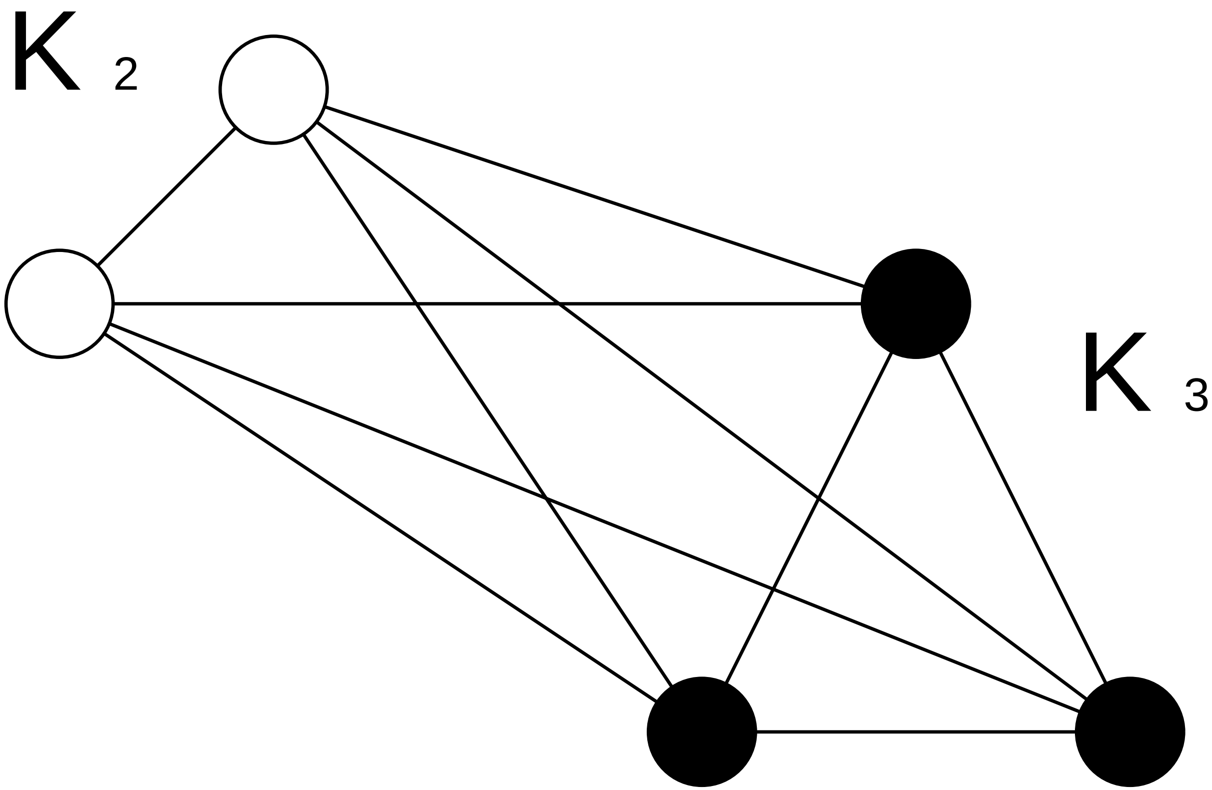


# 例題4.5の2 (2)

辺 e, e1,e2が三角形をなしている場合にはカットセットとして{e,e1}, {e,e2} 以外に必ず {e1,e2} を選ぶことができる

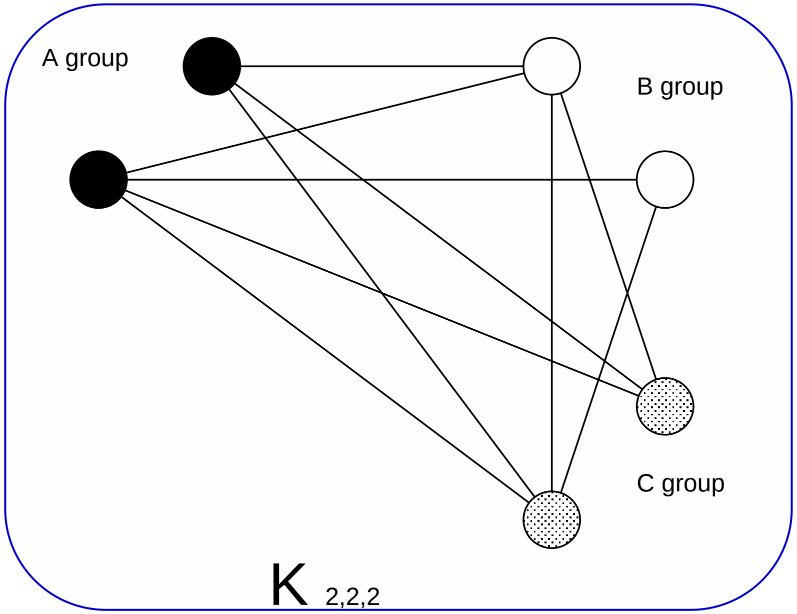


# 例題4.6 (1)

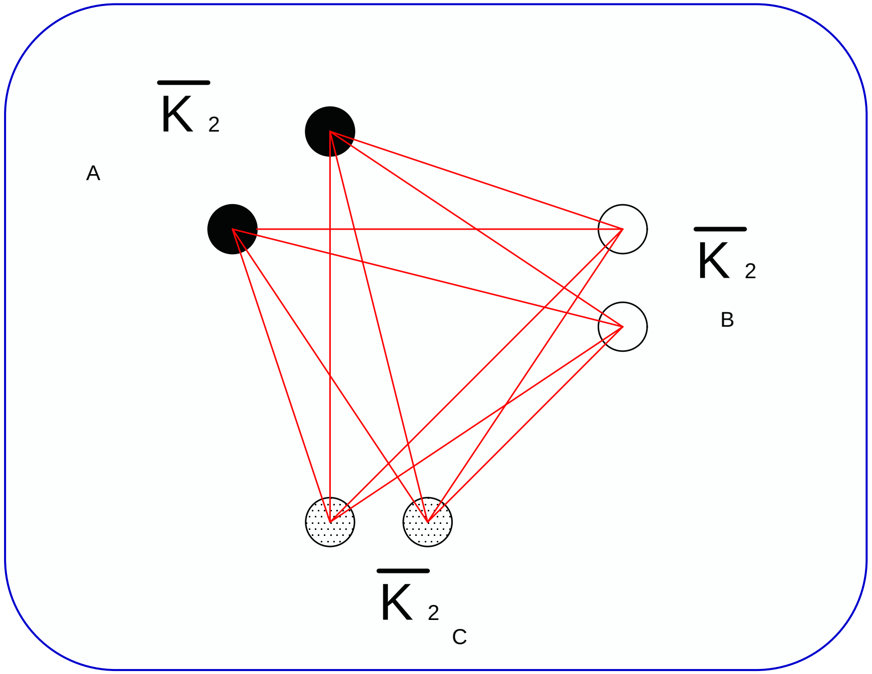



$K_2$と$K_3$の結び$K_2+K_3$

# 例題4.6（2）




この両者は同形である




$$E\left(\overline{K_2}+\overline{K_2}+\overline{K_2}\right)$$

$$=\{u_A u_B \mid u_A \in V(A) \cap u_B \in V(B)\}$$

$$\cup \{u_B u_C \mid u_B \in V(B) \cap u_C \in V(C)\}$$

$$\cup \{u_C u_A \mid u_C \in V(C) \cap u_A \in V(A)\}$$

# 演習問題4

(1) 任意のグラフ G において, 次数が奇数である点の個数は必ず偶数個あることを関係式:

$$\sum_{u \in V(\mathsf{G})} \deg(u) = 2\epsilon(\mathsf{G})$$

を用いて示せ.

(2) 単純グラフ G の点の個数が 2 以上ならば, G には必ず同じ次数を持つ 2 つの点が存在することを示せ.

完全に証明できなくても、考察過程を全てレポートに書くこと