グラフ理論　#5

第5回講義　5月21日

--- オイラー・グラフとハミルトン・グラフ ---

情報科学研究科　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題4 の解答例

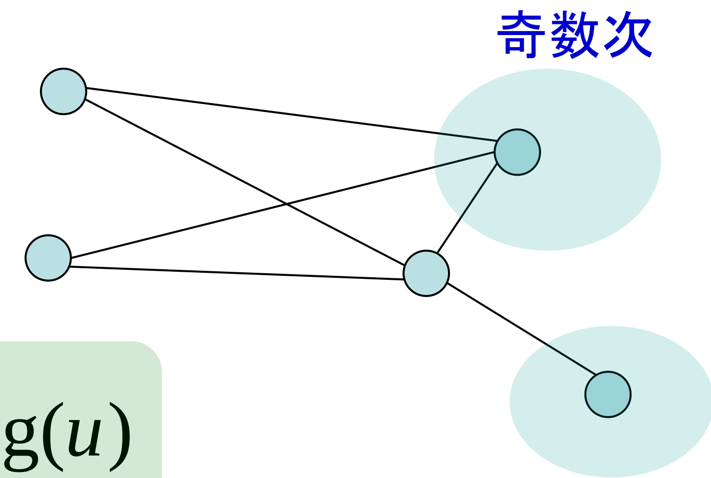
(1)

$$V_{odd} = \{u \mid \deg(u)\text{が奇数}\}$$

$$V_{even} = \{u \mid \deg(u)\text{が偶数}\}$$

$$|V| = |V_{odd}| + |V_{even}|$$

とわける



$$2\varepsilon(G) = \sum_{u \in V_{odd}} \deg(u) + \sum_{u \in V_{even}} \deg(u)$$

偶数　　　　偶数

両辺の偶奇が
等しくなるためには奇数次の点
の数が偶数個なければならない

(2)

グラフ G の点の数を n とする．このとき，G が単純グラフであれば，明らかに G の可能な最大次数は $n-1$ である．従って，もし，n 点すべての次数が異なると仮定すると，それらの次数は $0, 1, 2, \cdots, n-1$ となるが，明らかに次数 0 の点と可能な最大次数 $n-1$ の点がグラフ G 中に共存することはできない．従って，『単純グラフ G の点の個数が 2 以上ならば，G には必ず同じ次数を持つ 2 つの点が存在する』ことが示せた．

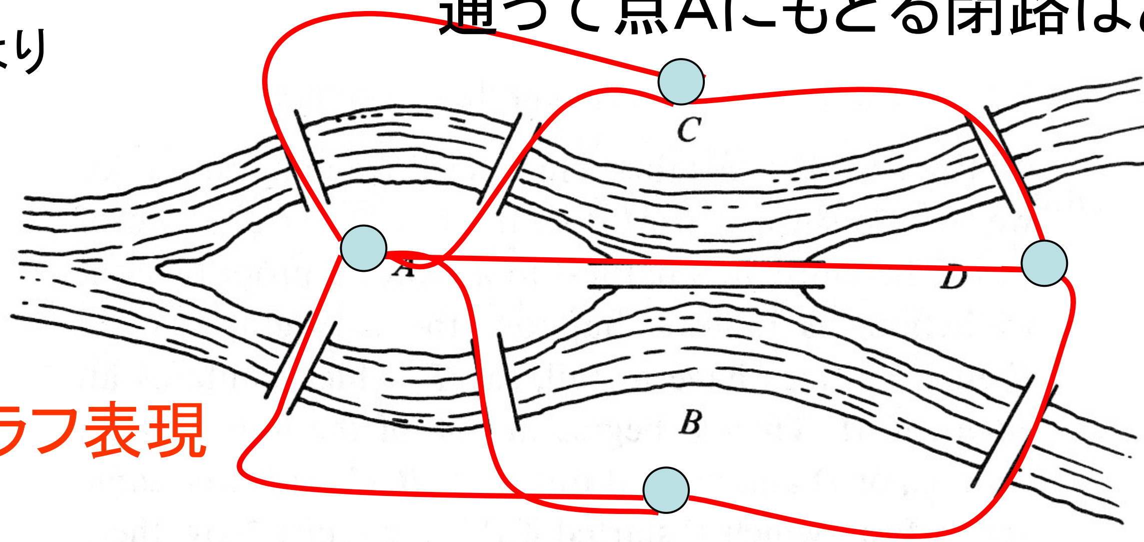
ケーニヒスベルグ橋の問題

“Introductory Graph Theory” G. Chartrandより

全ての橋を1回ずつ通ってもとにもどる閉路が存在するか？

グラフ理論の言葉で言い換えると

点Aから出発し、全ての辺を1度ずつ通って点Aにもどる閉路はあるか？



問題のグラフ表現

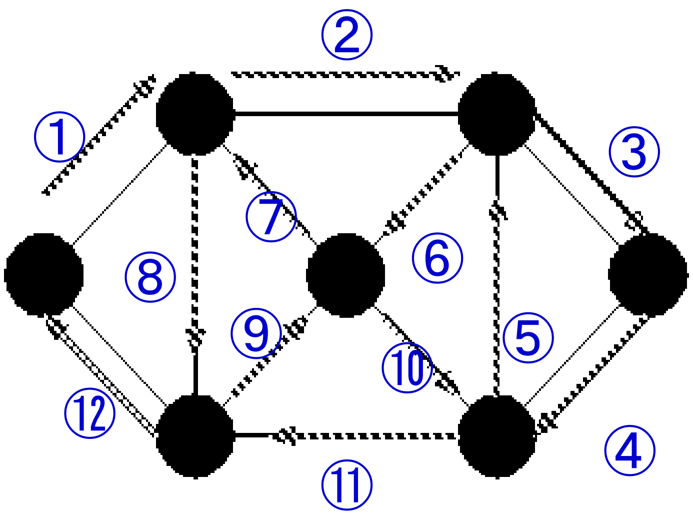
オイラー・グラフ

オイラー・グラフ（Eulerian graph）

全ての辺を含む閉じた小道がある連結グラフ

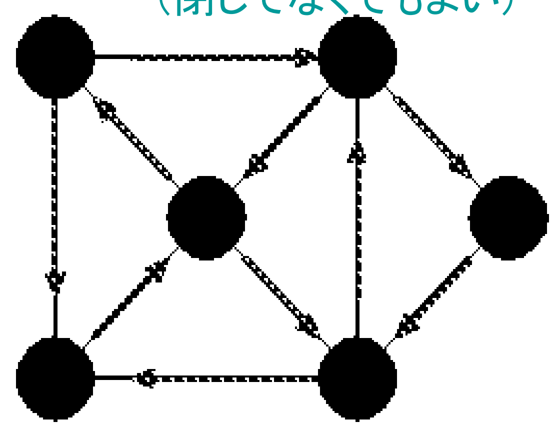
半オイラー・グラフ（semi-Eulerian graph）

：全ての辺を含む小道がある連結グラフ



Eulerian graph

（閉じてなくてもよい）

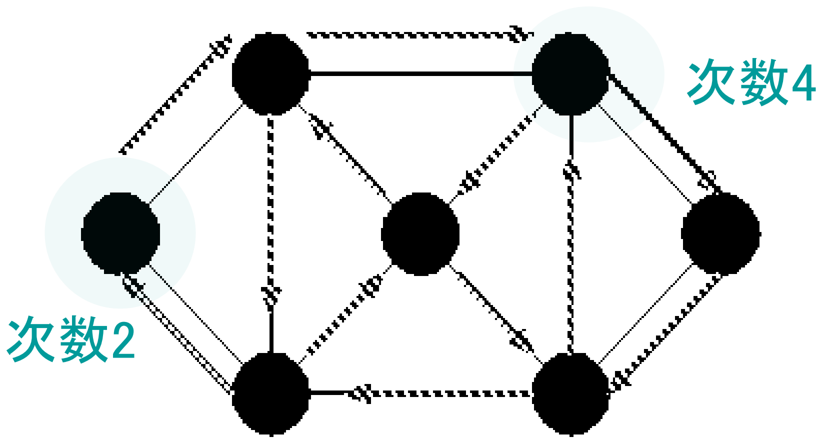


Semi-Eulerian graph

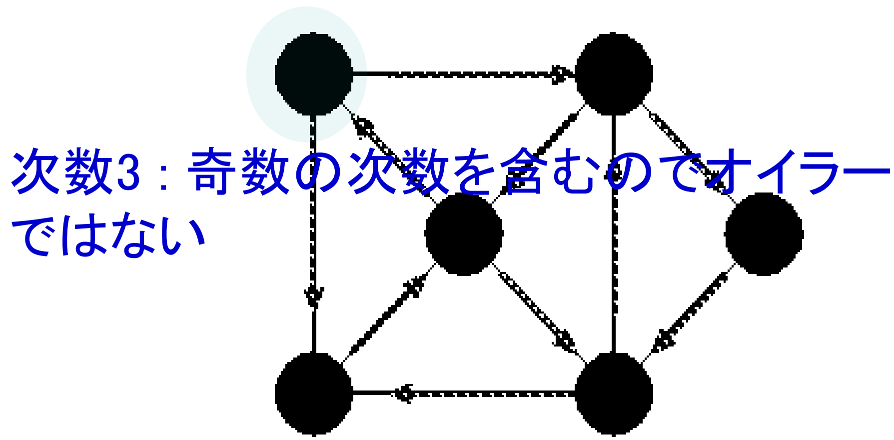
⇒　オイラー・グラフである条件は何か？

定理6・2とその証明 #1

連結グラフGがオイラー・グラフであるための必要条件はGの各点の次数が全て偶数であることである。



Eulerian graph



Semi-Eulerian graph

（証明）

必要性 ⇒　Gのオイラー小道がある点を通過する毎に2を加えていくと、全ての辺はちょうど1回ずつ含まれるので、各点でこの和はその点の次数に等しく、それは偶数。

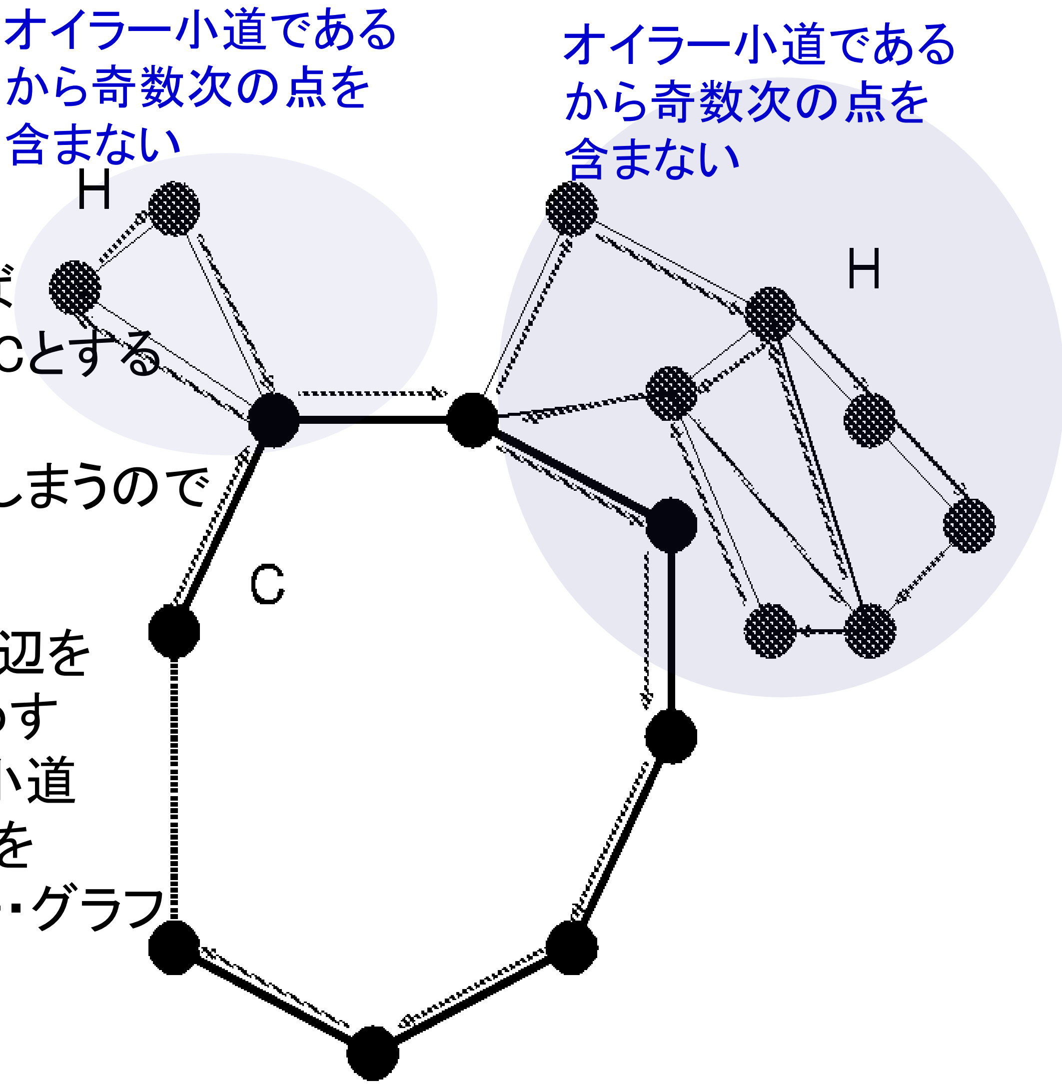
定理6･2とその証明 #2

（証明）

十分性 （アウトライン）←

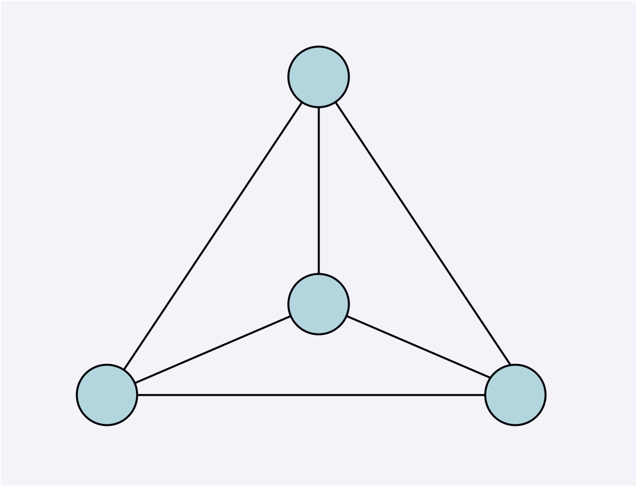
各点の次数が偶数であり、連結ならば必ず閉路を含む（補題 6･1）。これをCとする

$G \subset C$ なら証明が終わってしまうのでこれは考えない。

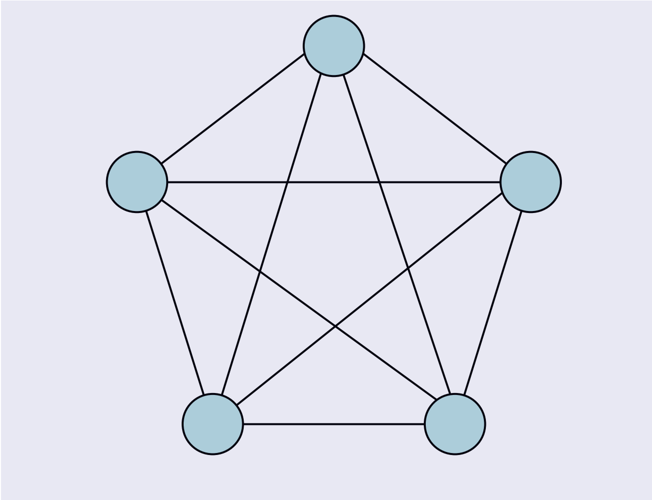


C上の任意の点からスタートし、Cの辺をたどり、Hの孤立点でない点に出くわすたびに、その点を含むHのオイラー小道をたどり、その点に戻る･･･とう操作を行い、スタート点に戻れば、オイラー・グラフが得られる。

例題 6.1 (1)



オイラー・グラフでない



オイラー・グラフである

完全グラフの場合には

$$n-1=\text{偶数}$$

つまり、点数が奇数の場合に限り、オイラー・グラフとなる。

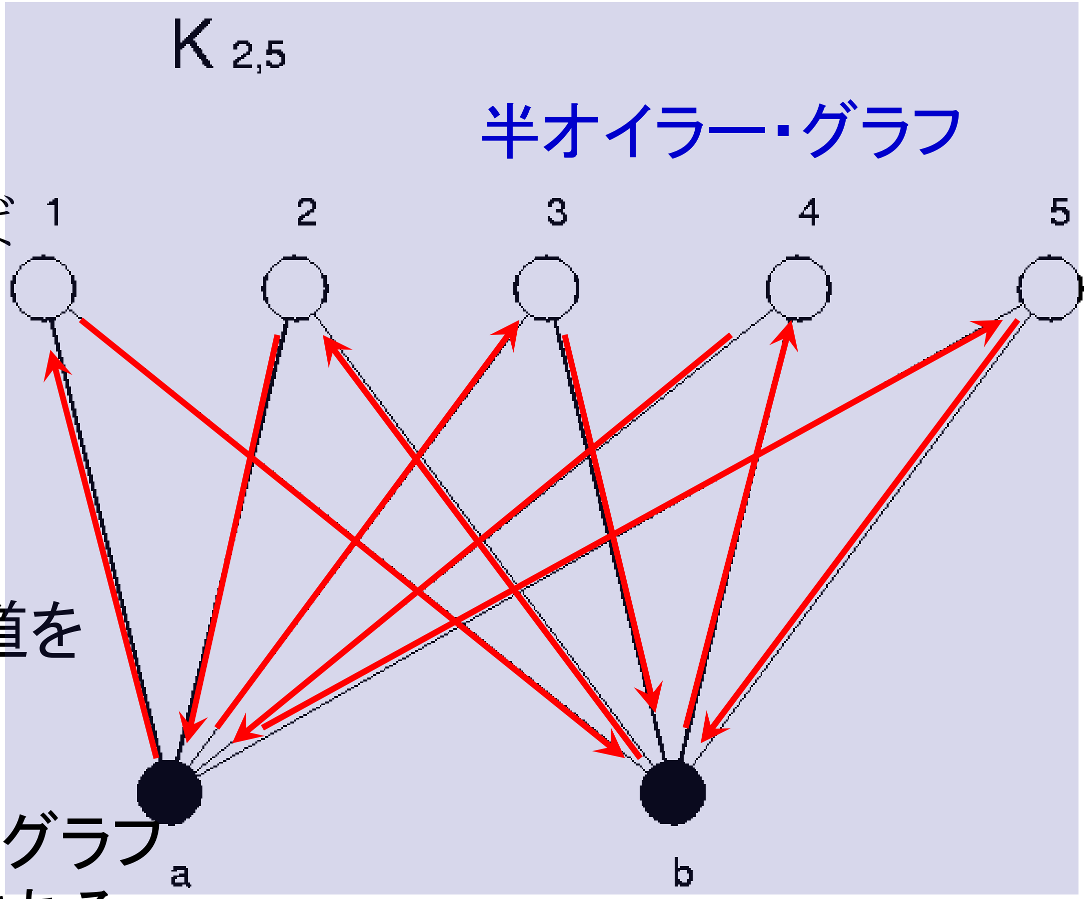
例題 6.1（2）

$K_{s,\,t}$ に関しては

$s \geq 2$, かつ, t が奇数ならば

a→1→b→2→a→3→b
→4→a→5→b

のような経路でオイラー小道を
作ることは可能。



オイラー閉路をもつオイラーグラフ
になるためには、t が偶数である
ことが必要になる

ハミルトン・グラフ

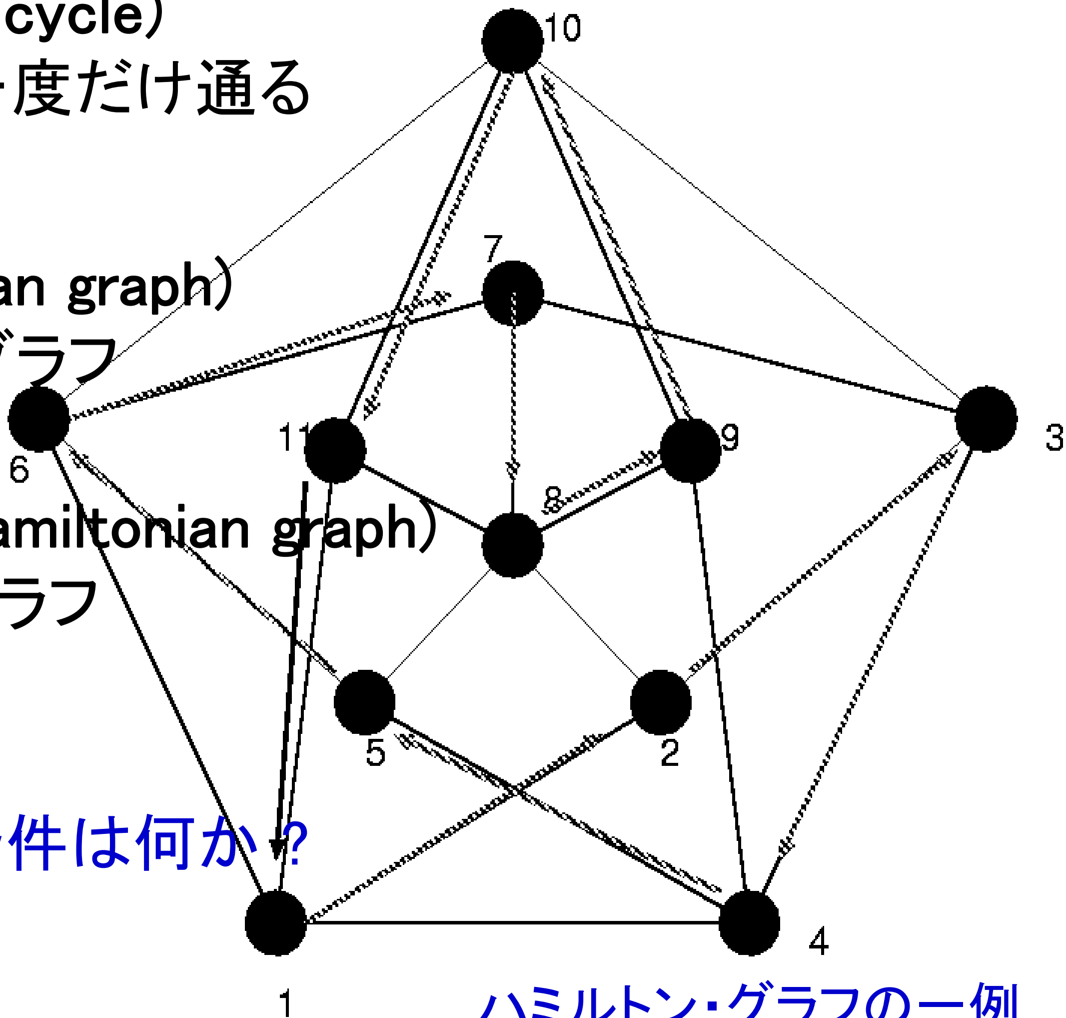
ハミルトン閉路 (Hamiltonian cycle)
: グラフGの各点をちょうど一度だけ通る
　閉じた小道

ハミルトン・グラフ(Hamiltonian graph)
: ハミルトン閉路によりなるグラフ

半ハミルトン・グラフ(semi-Hamiltonian graph)
: 全ての点を通る道があるグラフ

（閉じなくてよい）

⇒ ハミルトン・グラフである条件は何か？



ハミルトン・グラフの一例

Ore (オーレ)の定理

単純グラフGには $n \geq 3$ 個の点があるとする。隣接していない任意の2点 v, w に対し

$$\deg(v) + \deg(w) \geq n$$

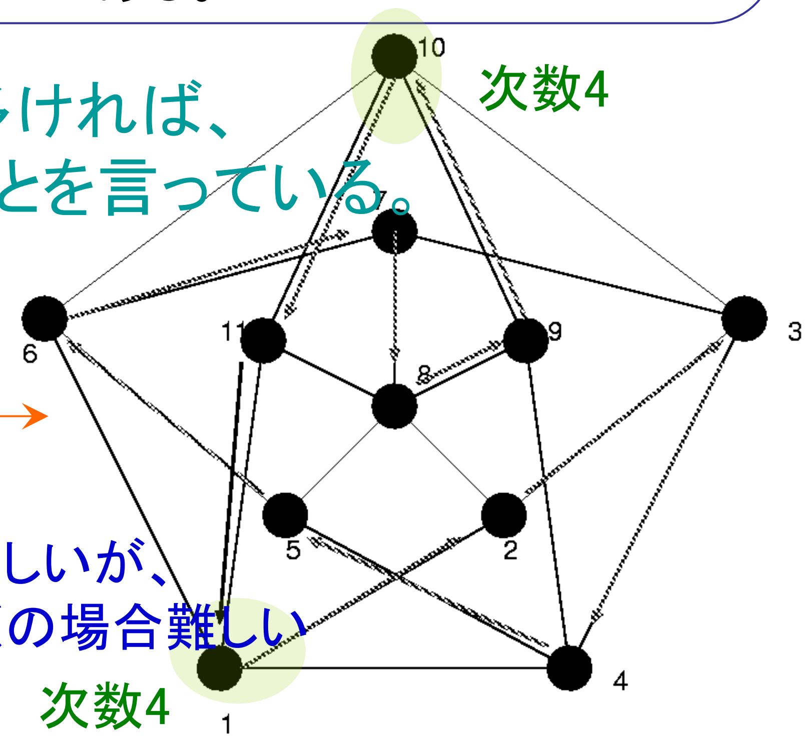
が成立するとき、Gはハミルトン・グラフである。

Oreの定理

直観的には各点への接続辺が十分多ければ、ハミルトン閉路があるであろうということを言っている。
これは**十分条件**であることに注意。

このグラフはOreの定理を満たさないが、ハミルトン・グラフである

「ハミルトン・グラフであることを示す」ことは易しいが、
「ハミルトン・グラフでないことを示す」のは多くの場合難しい



Oreの定理の証明(アウトライン)

（証明）「グラフGはハミルトンではないが、条件式を満たす」として矛盾を引き出す。

Gがぎりぎりハミルトンでない、とすると、全ての点を含む道：

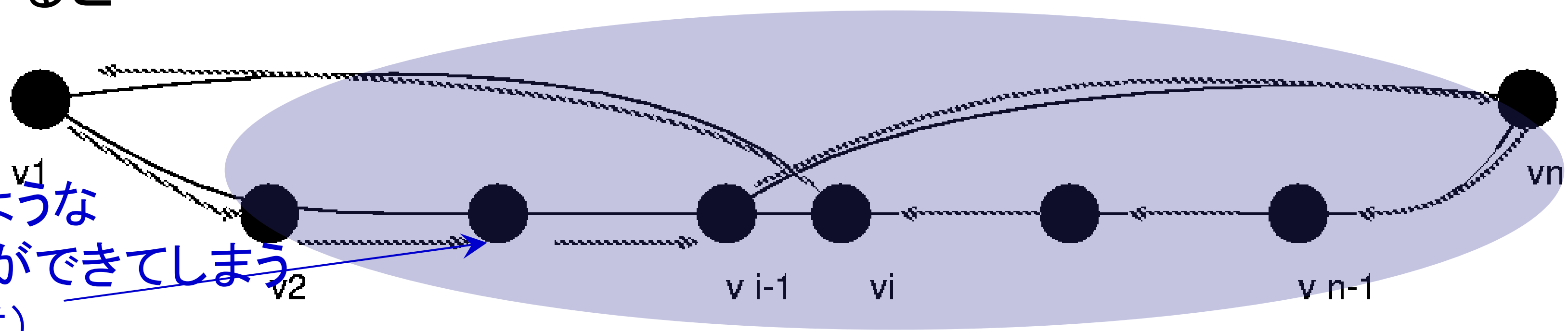
$$v_1 \to v_2 \to v_3 \to \cdots \to v_n$$

仮定より隣接しない

がある。

$$\deg(v_1) + \deg(v_n) \geq n$$

とすると



このような閉路ができてしまう（矛盾）

例題6.2

図のようなグラフの辺数は問題に与えられた

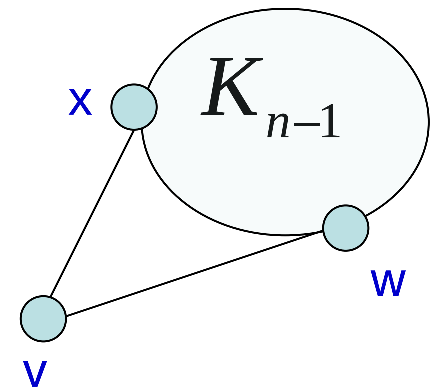
$$\frac{1}{2}(n-1)(n-2)+2$$

となる。

K_{n-1}を構成する任意の点u_1と点vの次数和は

$$\deg(u_1)+\deg(v)=n-2+2=n$$

で定理を満たす.



オーレの定理をぎりぎり満たす

K_{n-1}の辺を削除し,代わりにこの辺でvとK_{n-1}の1辺を結ぶと,辺を削除した点をzとすれば

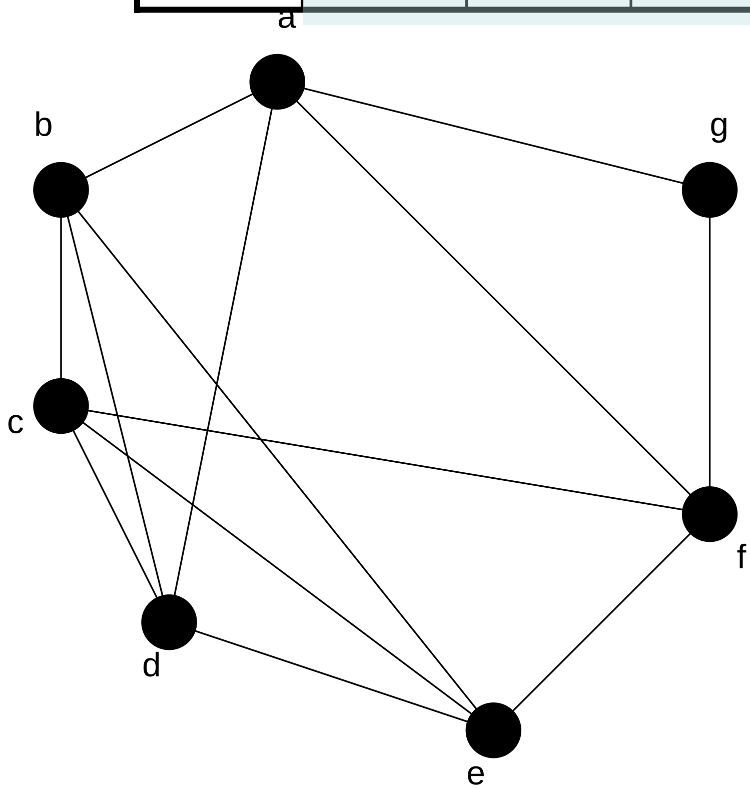
$$\deg(v)+\deg(z)=3+(n-3)=n$$ で定理を満たす.

この操作を繰り返しても、オーレの定理が破れることはない。

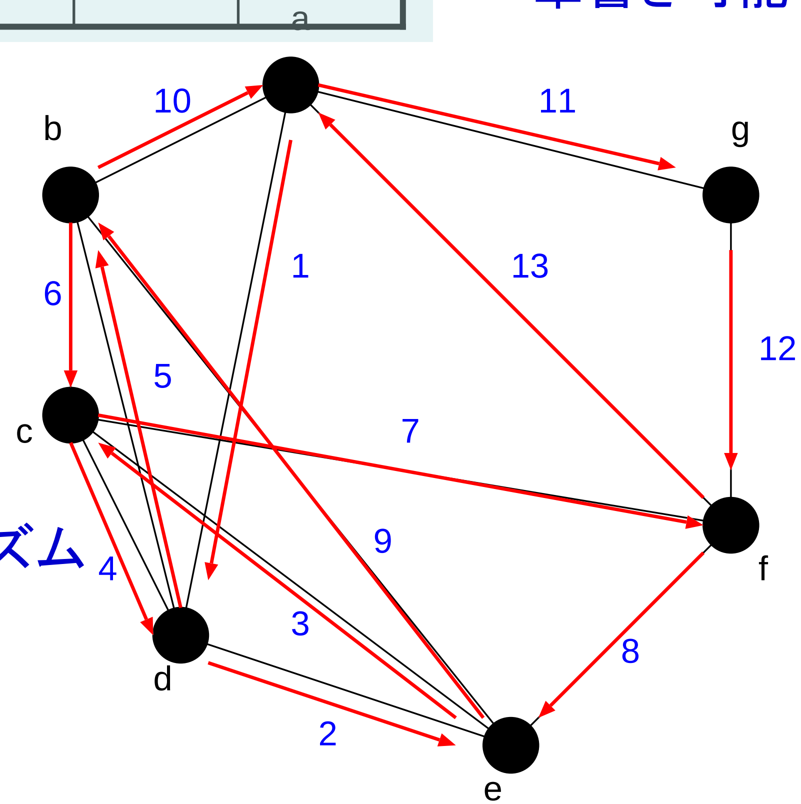
例題6.3の1

会場	a	b	c	d	e	f	g
道数	4	4	4	4	4	4	2

全ての次数が偶数なので一筆書き可能



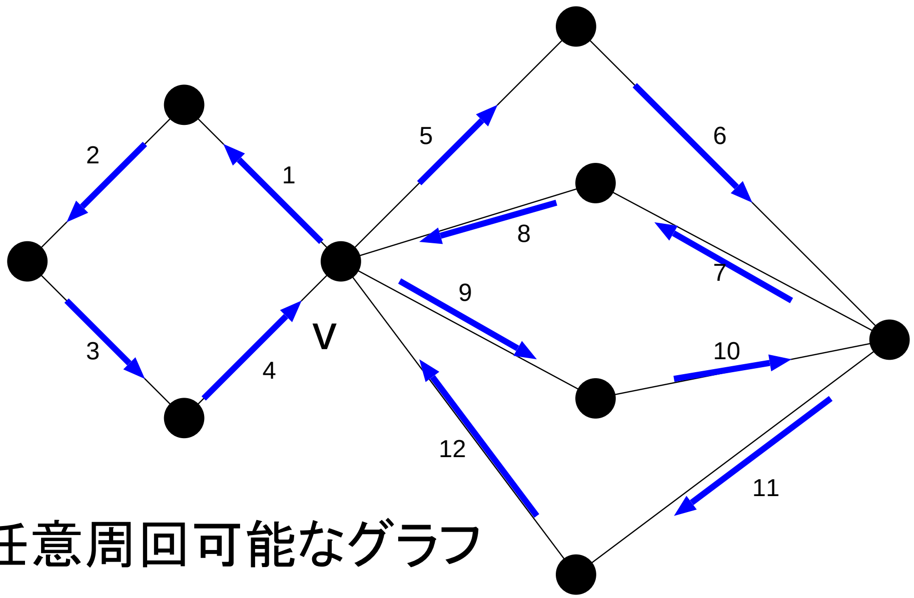
フラーリーのアルゴリズムより



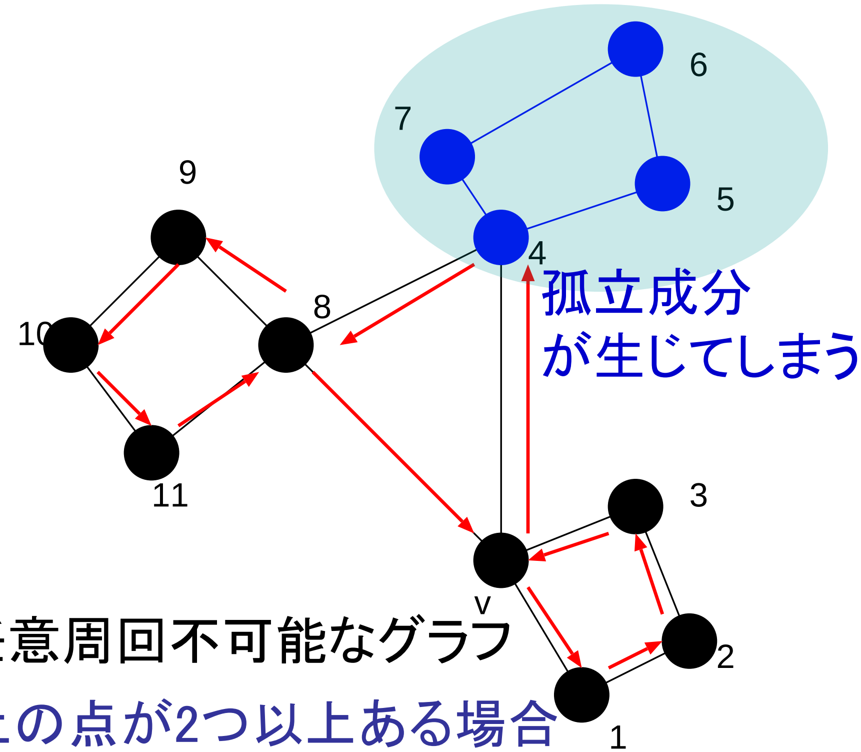
例題6.3の2(任意周回可能性)

ある点vからスタートする限りは、同じ辺を2度と通らないようにして勝手な方向をたどればオイラー小道が得られる

任意周回可能



任意周回可能なグラフ

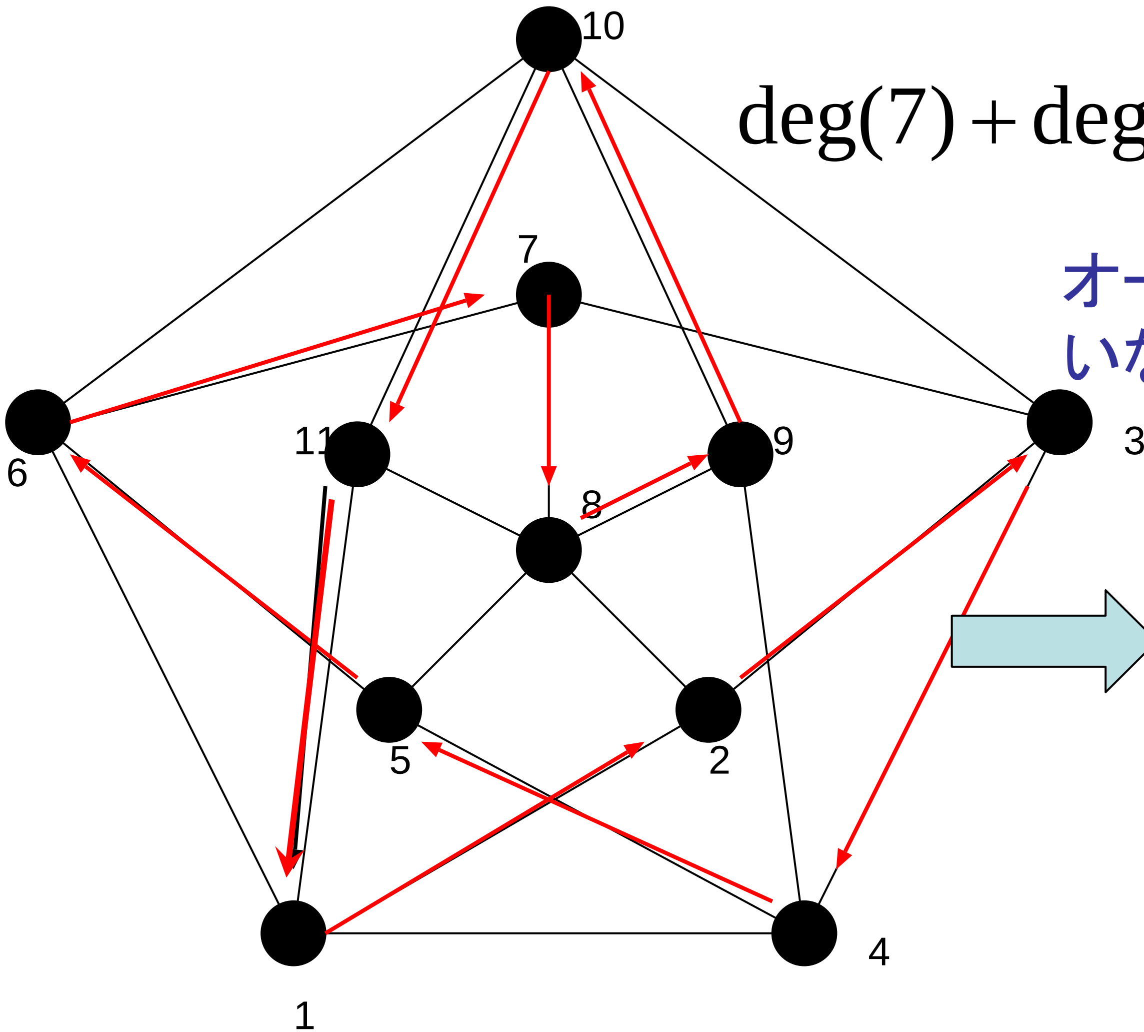


任意周回不可能なグラフ

次数4以上の点が2つ以上ある場合に孤立成分が生じてしまう

例題6.3の3

（オーレの定理を満たさないハミルトングラフの例）



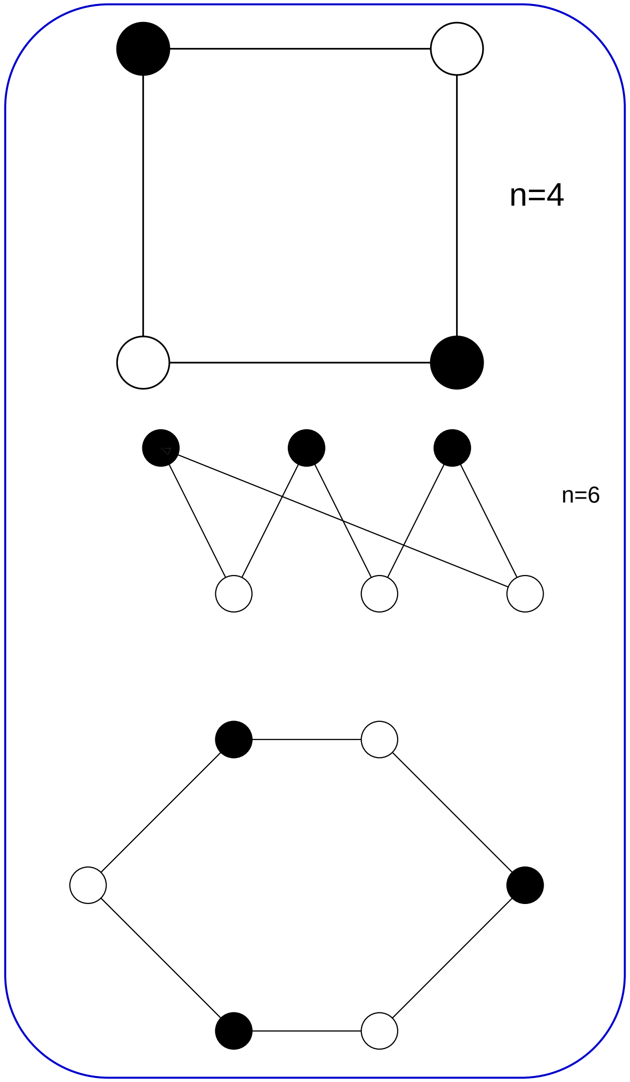
$$\deg(7)+\deg(10)=3+4=7<11$$

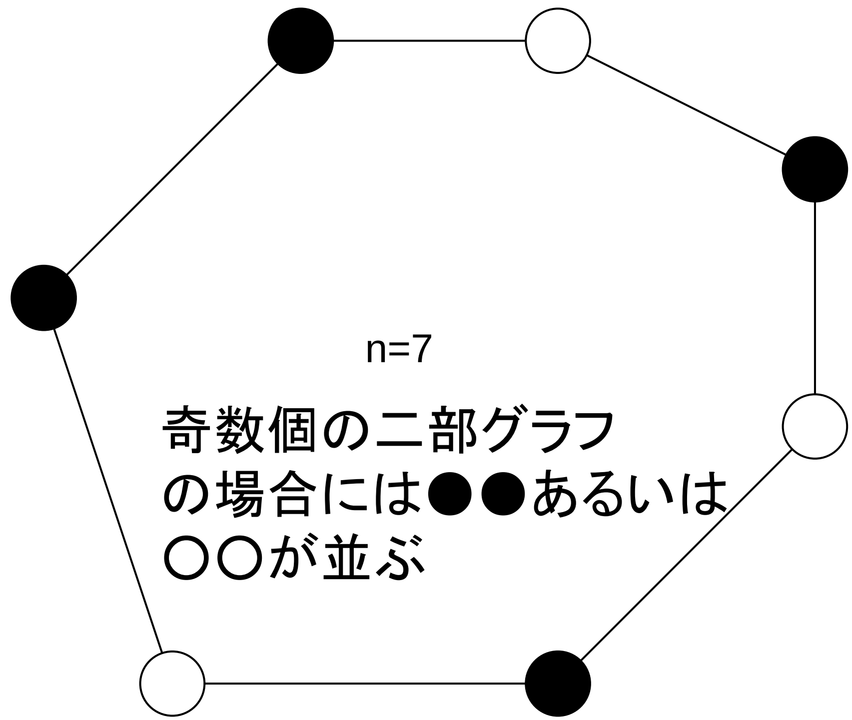
オーレの定理を満たしてはいないが、ハミルトンである

オーレの定理は
ハミルトンであるための
十分条件

例題6.4の1

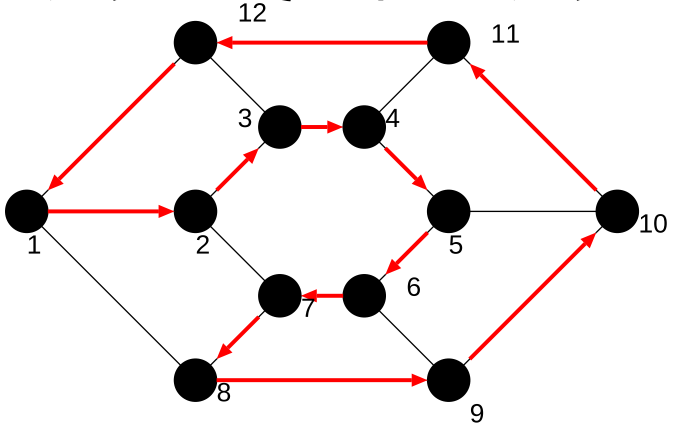
偶数個の点からなる二部グラフは○●を交互に並べることができて、ハミルトン

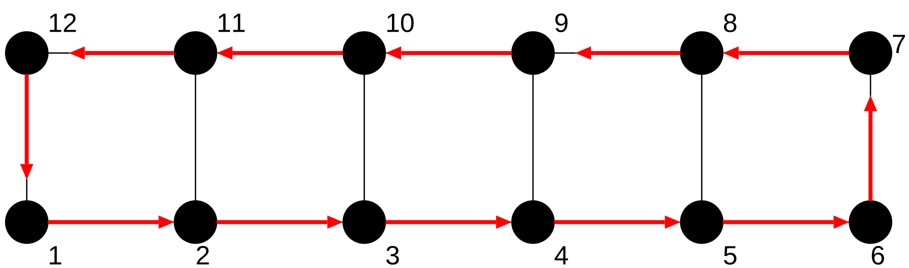




例題6.4の2

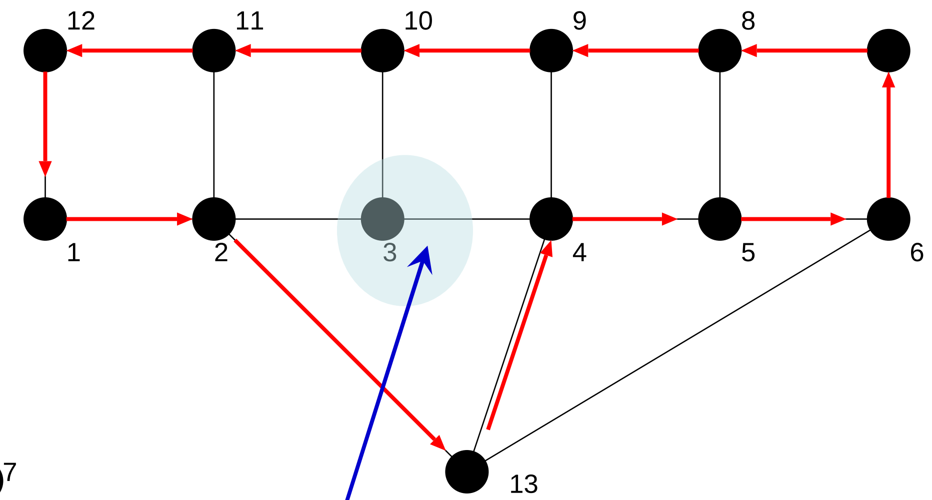
問題に与えられた中央の●を抜いたグラフとその同形グラフ





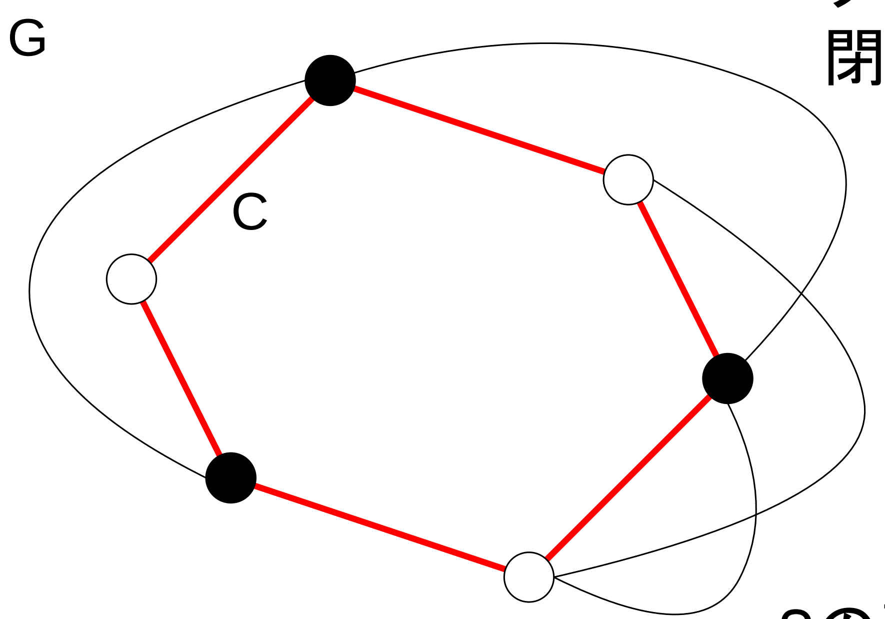
明らかにハミルトンである

問題に与えられたグラフ

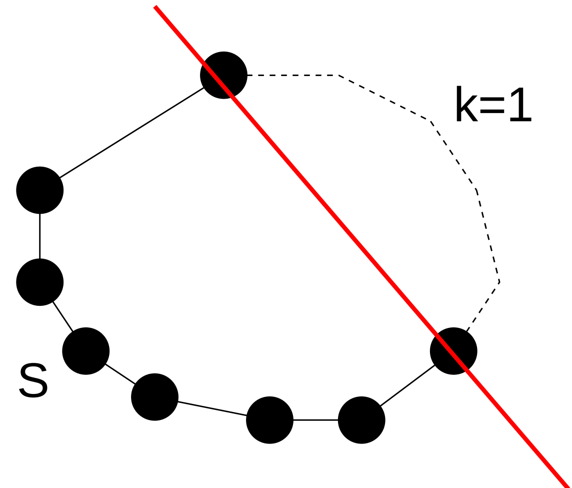


例えば赤矢印の経路をとるとこの点を訪れることはできない。

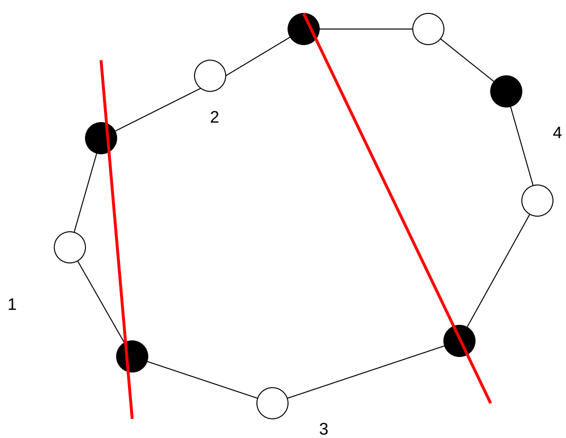
例題6.5



グラフGはハミルトンであるから
閉路Cを含む



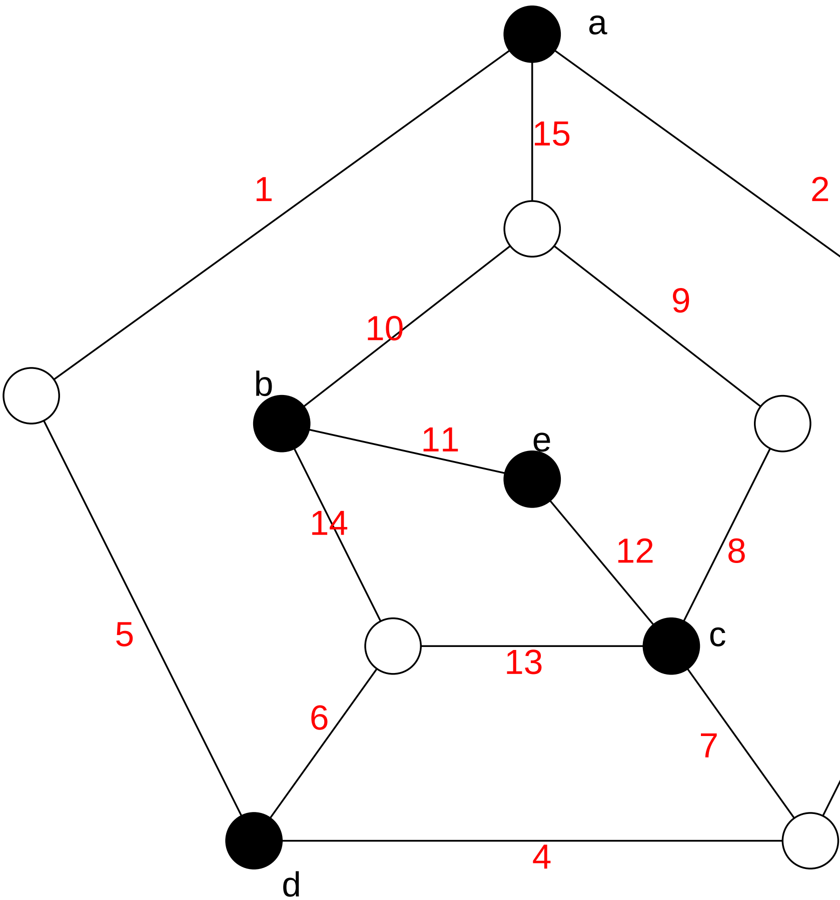
Sの要素が全て隣接している場合
G−Sの成分は1



Sの要素が全て隣接していない場合
G−Sの成分はkである

従って、G−Sの成分数は k 以下

非ハミルトン性の示し方
（辺数に関して矛盾を引き出すやり方）



可能な限り互いに隣接していない点を選び出し、その次数を勘定する
(3,3,4,3,2)

ハミルトン閉路を構成しない辺数
(3−2)+(3−2)+(4−2)+(3−2)
+(2−2)=5(本)

(A) ハミルトン閉路の辺数
=15−5=10(本)

(B) 11個の点からなるハミルトン閉路の辺数=11（本）

(A)＜(B) となりハミルトン閉路はできない

演習問題5

1. 数列: $D=(d_1,d_2,\cdots,d_n)$, $d_1\geq d_2\geq\cdots\geq d_n$ が与えられた際, この数列 D がグラフ的であるか否かの判定条件として次が知られている. すなわち
『数列 D がグラフ的であるのは, この数列の総和: $\sum_{i=1}^{n} d_i$ が偶数であり, $k=1,2,\cdots,n$ に対し

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \quad\leq\quad k(k-1)+\sum_{i=k+1}^{n}\min(k,d_i) \tag{74}$$

が成立するとき, かつ, このときに限る.』
ここで, 記号: $\min(a,b)$ は a,b のうちで小さい方を意味するものとする.
この判定条件を用いて次の数列:

- $D_1=(3,2,2,1)$
- $D_2=(4,3,3,3,3)$
- $D_3=(7,6,6,6,5,5,2,1)$

のそれぞれがグラフ的か否かを判定せよ.
(※ 上記判定条件の証明は余裕のある者は考えてみると良い. レポートに書いてくれた場合には, その分加点する. 証明例は次回 (5/28) 配布の講義ノートで解説する.)

演習問題5

2. 完全グラフ K_m の点と K_{n-2m} の点を全て結び, K_m の点と $\overline{K_m}$ の点を全て結ぶことによってできるグラフを $C_{m,n}$ と名づけよう. ($n > 2m$ であり, $\overline{K_m}$ は K_m の補グラフである.)
このとき

- $C_{m,n}$ の辺数 $\varepsilon(C_{m,n})$ を m, n で表せ.
- $\varepsilon(C_{m,n})$ を最小とする m の値を n を用いて表し, その最小値を n の関数として求めよ.