グラフ理論　#6

第6回講義　5月28日

--- 木とその性質 ---

情報科学研究科　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題5の1の解答例

$$\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\},\ k = 1, 2, .., n$$ を確認する

まずは点数の少ない簡単な $D_1 = (3,2,2,1)$ に対して条件式の成立を確かめてみる．$d_1 = 3, d_2 = 2, d_3 = 2, d_4 = 1$ であるから，$\sum_{i=1}^{4} d_i = 8$ であり偶数．また，$k = 1$ の場合には $i = 2,3,4$ に対して $\min\{1, d_i\} = 1$ であるから

$$\sum_{i=1}^{1} d_1 = 3 \quad \le \quad 1 \cdot (1-1) + 1 + 1 + 1 = 3$$

となり，成立．$k = 2,3,4$ の場合も同様にして

$$\sum_{i=1}^{2} d_i = 5 \quad \le \quad 2 \cdot (2-1) + 2 + 1 = 5$$

$$\sum_{i=1}^{3} d_i = 7 \quad \le \quad 3 \cdot (3-1) + 1 = 7$$

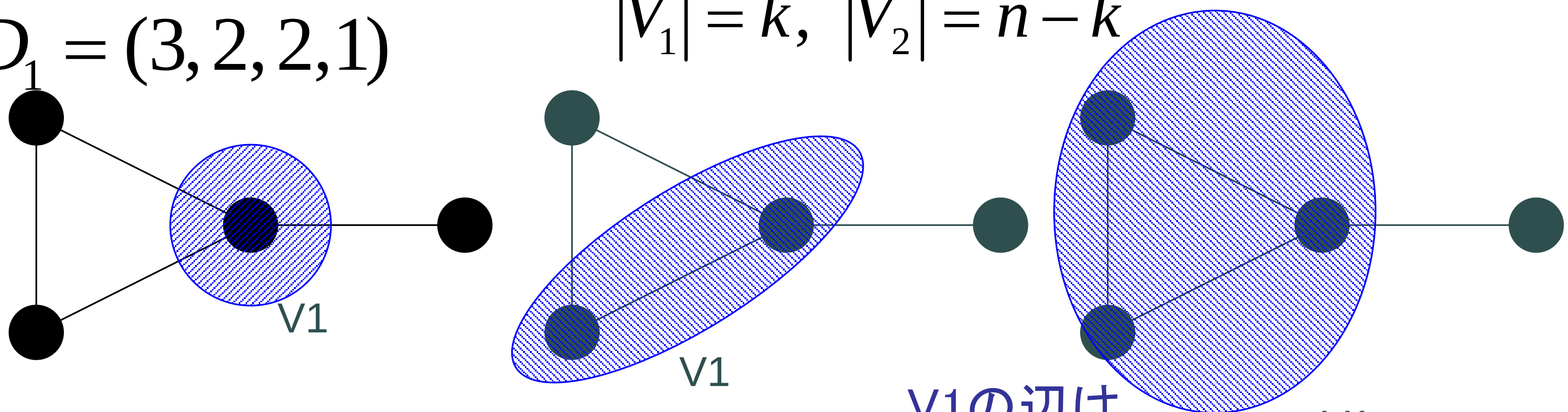
$$\sum_{i=1}^{4} d_i = 8 \quad \le \quad 4 \cdot (4-1) = 12$$

不等式が成立

演習問題5 の1の解答例

$$D_1 = (3,2,2,1)$$

$$|V_1| = k,\ |V_2| = n-k$$



V1の辺は
完全グラフになるとき最大

V1の次数は

握手補題より

$$\sum_{i=1}^{k} d_i = 2\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \qquad \varepsilon_1 \le {}_k C_2 = \frac{k(k-1)}{2},\ \varepsilon_2 = \sum_{k=k+1}^{\mathrm{n}} \min\{k, d_i\}$$

従って

$$\boxed{\sum_{i=1}^{k} d_i \le k(k-1) + \sum_{i=k+1}^{n} \min\{k, d_i\},\ k = 1,2,..,n}$$

演習問題5 の2の解答例

問題のようにに各グラフがつながっているとすれば

$$\begin{aligned}\varepsilon(C_{m,n}) &= m^2 + \frac{m(m-1)}{2} + m(n-2m) + \frac{(n-2m)(n-2m-1)}{2} \\ &= \frac{3}{2}\left\{m + \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2} - n\right)\right\}^2 - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{2} - n\right)^2 + \frac{n(n-1)}{2} \qquad (79)\end{aligned}$$

従って, $\varepsilon(C_{m,n})$ を最小にする m の値は

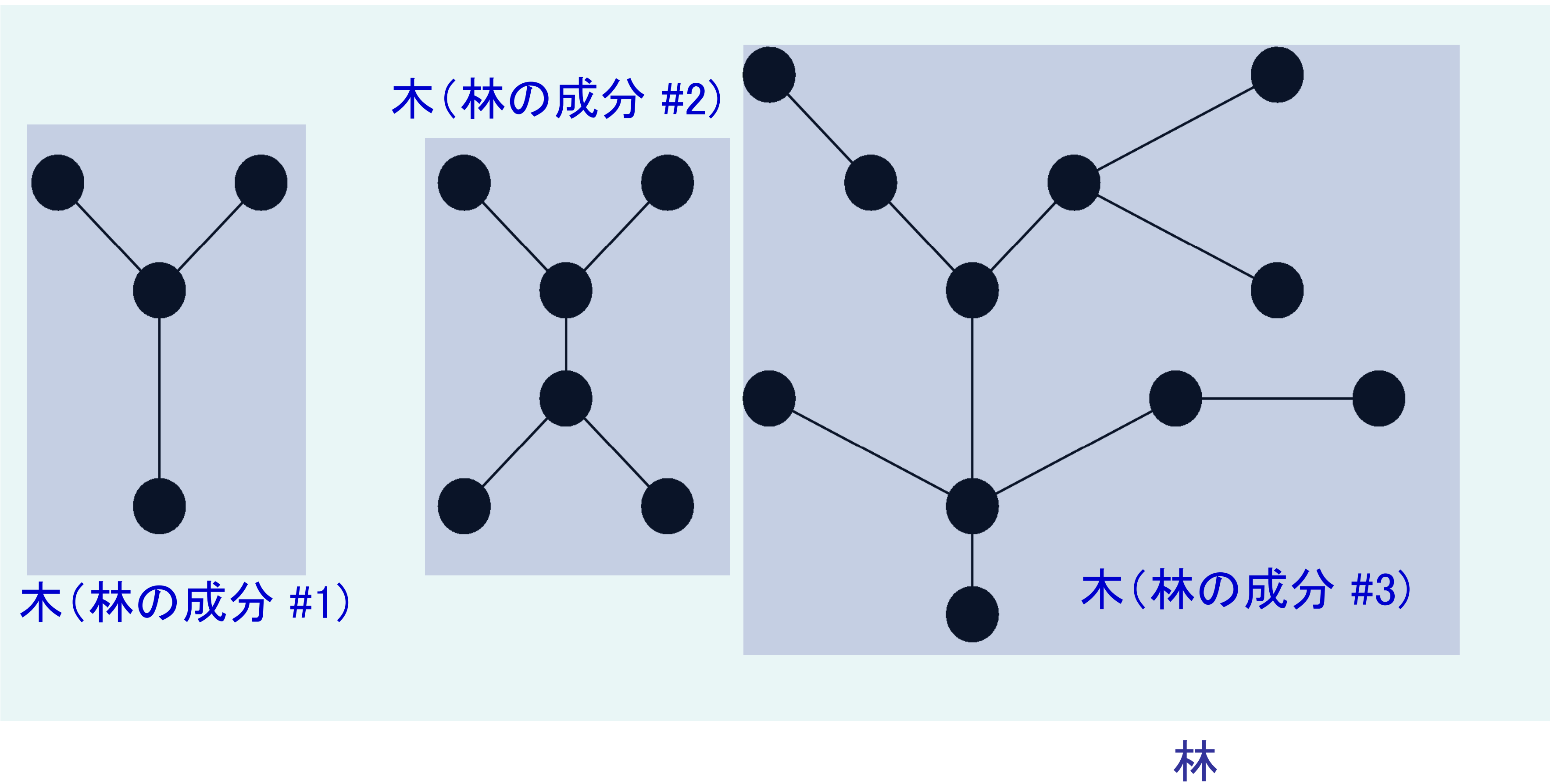
$$m = \frac{n}{3} - \frac{1}{6} \qquad (80)$$

であり, そのときの最小値は $n(n-1)/3 - 1/24$ となる. ただし, m, n は整数であるべきなので, n が与えられた場合の最小値を与える m は (80) に最も近い整数値となる.

木と林

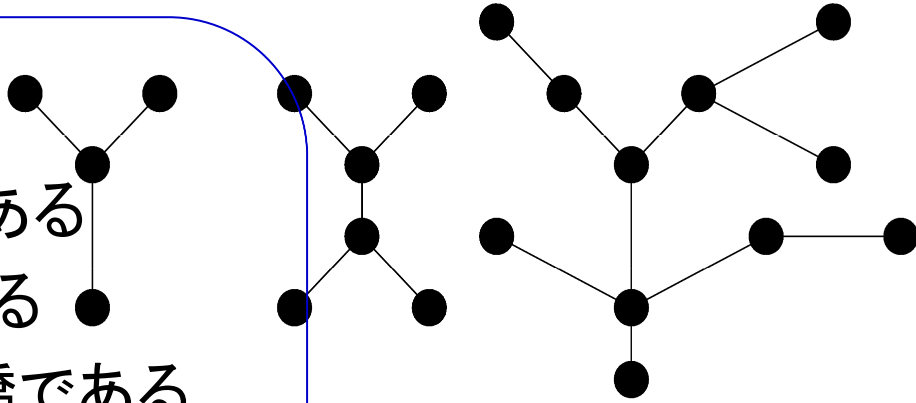
林(forest) ： 閉路を含まないグラフ

木(tree) ： 連結な林



定理9・1

点n個からなるグラフTに対し、次の各命題は同値である



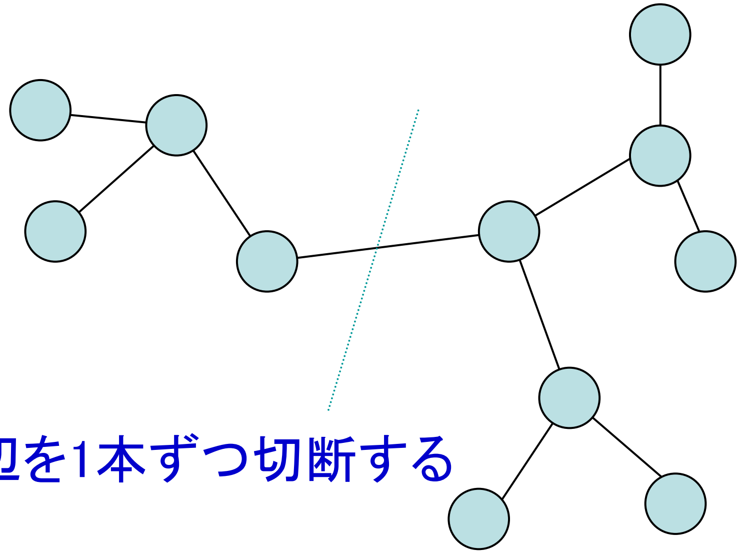
(i) Tは木である
(ii) Tには閉路が無く、辺がn−1本ある
(iii) Tは連結であり、辺がn−1本ある
(iv) Tは連結であり、全ての辺は橋である
(v) Tの任意の2点を結ぶ道は丁度1本である
(iv) Tに閉路は無いが
新しい辺をどのように加えても
閉路ができ、しかも、1個の閉路である

系9・2

林Gにはn個の点とk個の成分があるとする。
このとき、林Gにはn−k本の辺がある

（証明）

閉路が無く連結であるとすると、n−1本の辺がある。これから辺を1本ずつ切断する操作を進めると



1本辺を切断 ⇒ 成分 2、辺数 n−2

2本辺を切断 ⇒ 成分 3、辺数 n−3

…………

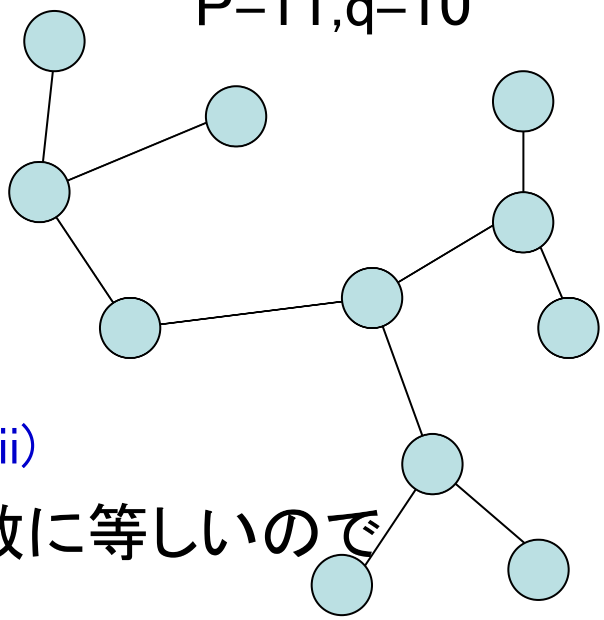
K−1 本辺を切断 ⇒ 成分 k、辺数 n−k

系9・3

単点でない木は、少なくとも2点の端点を含む

（証明）

P=11,q=10



木T ： $V(T)=\{v_1,v_2,\ldots,v_p\},$ 点数

$p\geq 2, E(T)=\{e_1,e_2,\ldots,e_q\}$

辺数

木の辺の本数は

$$q=p-1$$

定理9.1（iii）

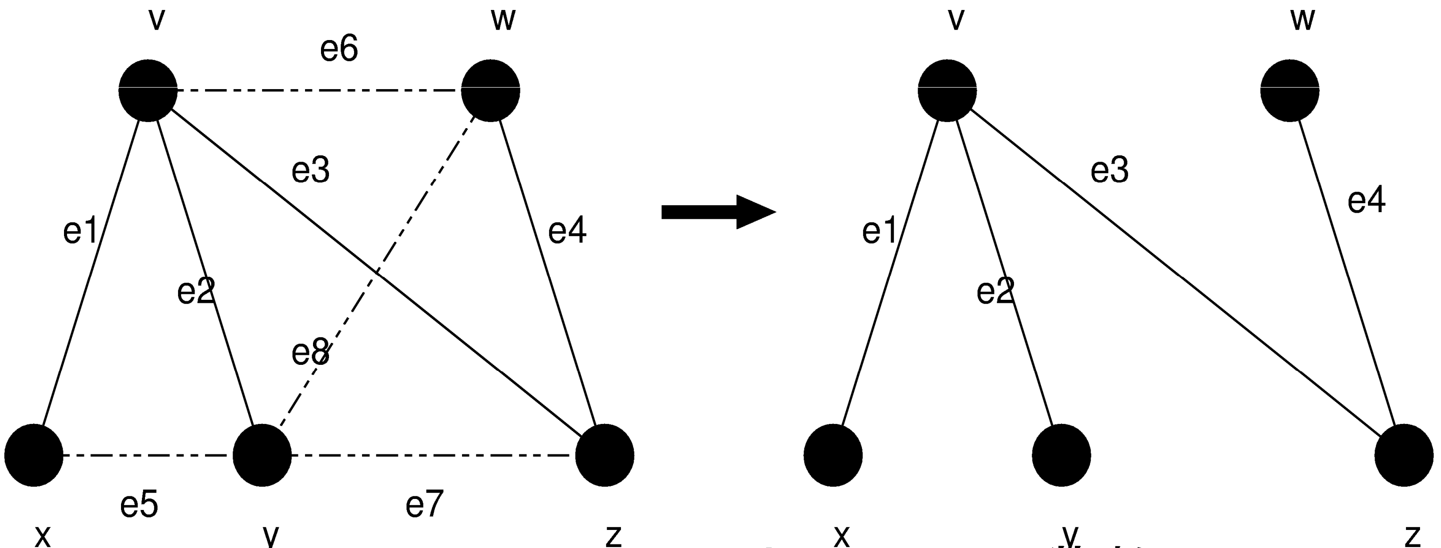
握手補題より、辺の総数の2倍はグラフの次数に等しいので

$$\sum_{i=1}^{p}\deg(v_i)=2q=2(p-1)$$

木の端点が2つ、つまり、p=0,1であるとすると
点の数が2以上であるグラフの次数（＞0）の定義に反する。

全域木と全域林

全域木（spanning tree）：
連結グラフGに対し、閉路が無くなるまで辺を除去して残るグラフ



閉路階数　：

$$\gamma(G) = m - n + k = 4$$

（全域林（木）を得るために切断すべき辺の本数）

カットセット階数：

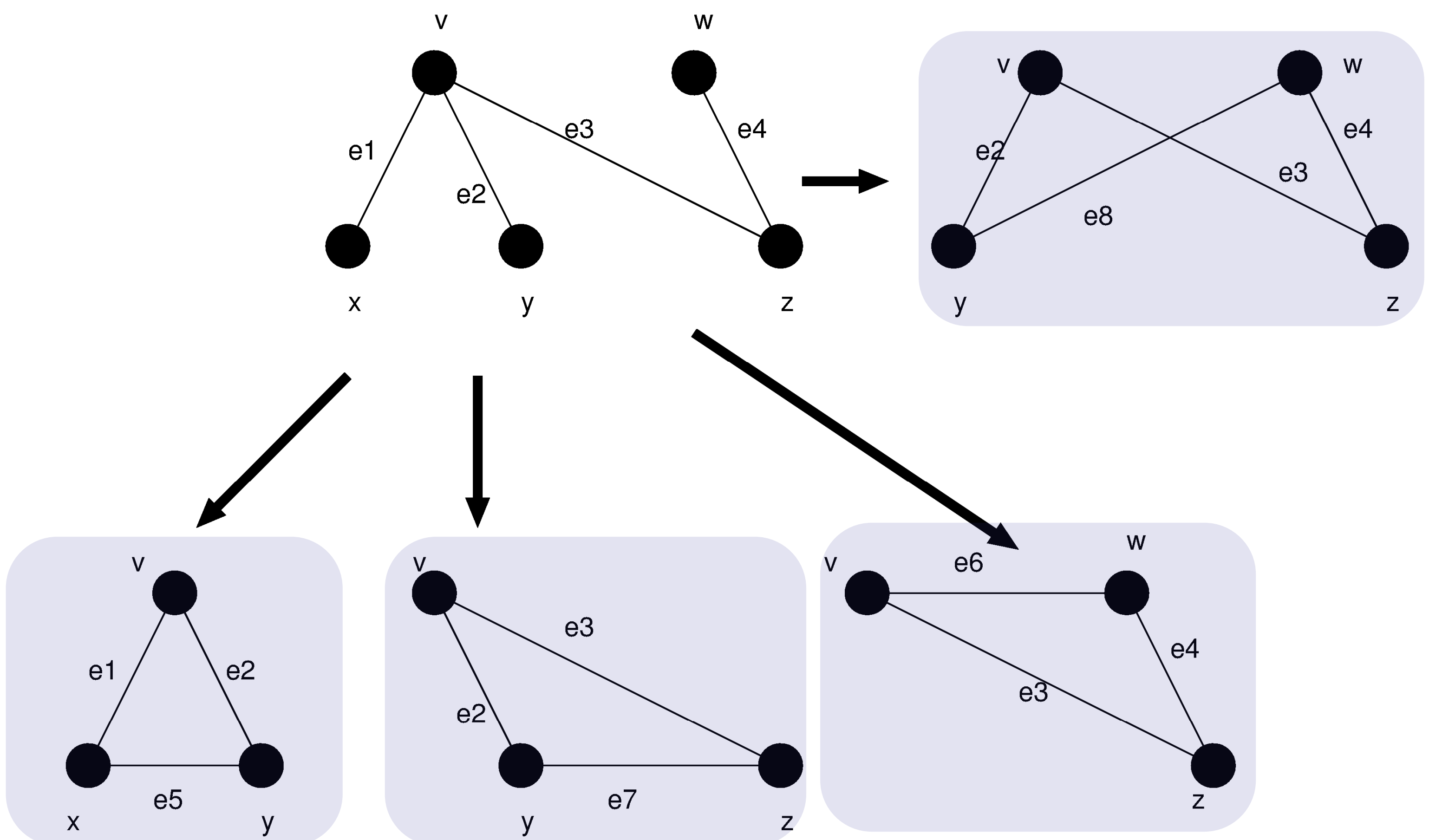
$$\xi(G) = n - k = 4$$

（全域木の辺数）

全域林（spanning forest）：n個の点とm本の辺、k個の成分があるとし、
Gの各成分に対し、閉路が無くなるまで辺を除去する操作を繰り返し得られるグラフ

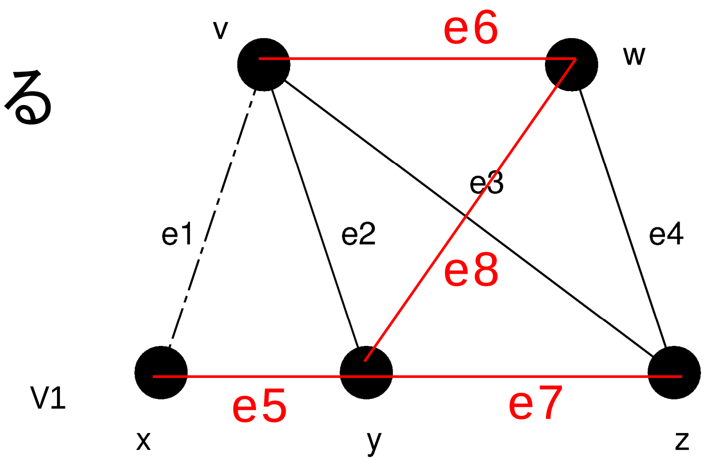
基本閉路集合

基本閉路集合：Tに含まれないGの任意の辺を一つTに付加すると一つずつできる閉路の集合



基本カットセット集合

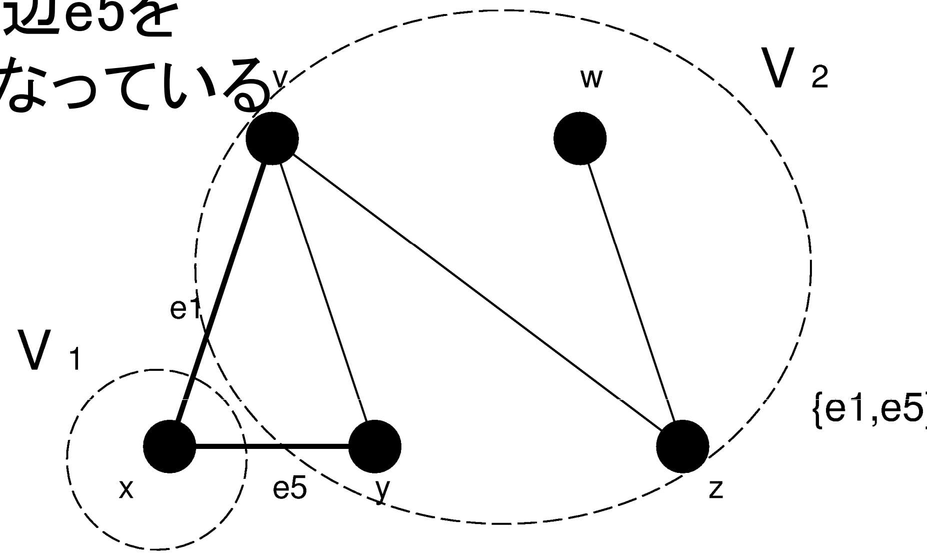
基本カットセット集合
：Tの各辺を除去して得られる
　カットセット集合



黒色がT
黒＋赤がG

e1で木を切断するとV1とV2
に分離する。

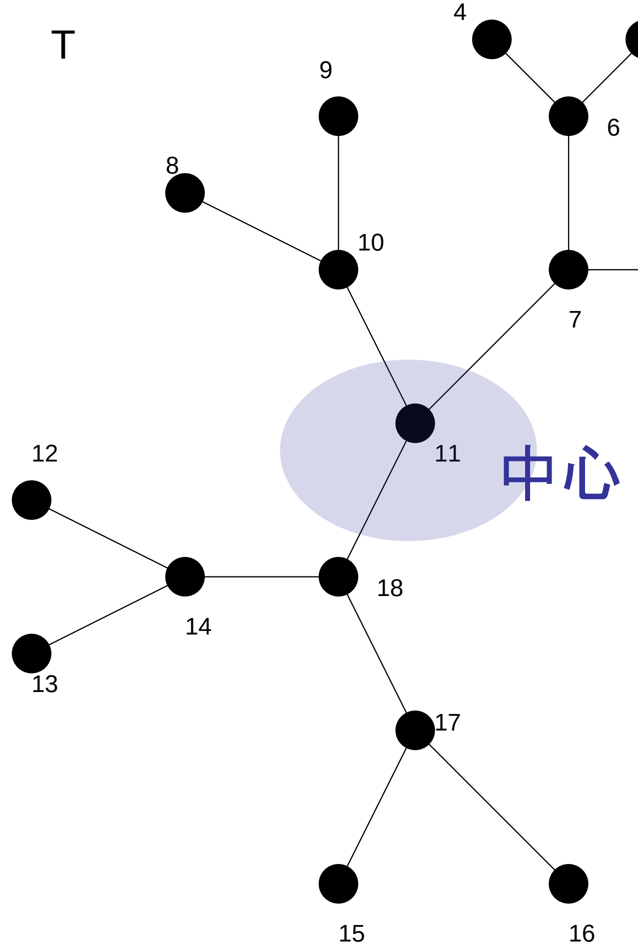
このe1とGでV1に接続していた辺e5を
組んだものはGのカットセットとなっている



この他にも
(e2,e5,e7,e8)
などがある。

例題7.1（1）

グラフGの中心：他点との間の距離の最大値ができるだけ小さい点v



端点を削除していく

1回目に削除される点
{1,2,4,5,8,9,12,13,15,16}

2回目に削除される点
{3,6,10,14,17}

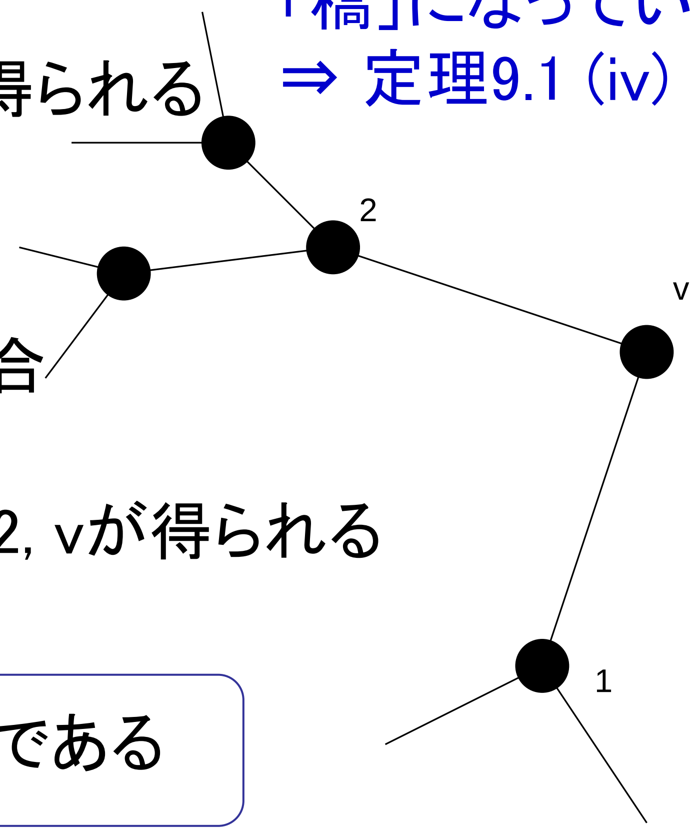
最後に削除される点
{7,18}

例題7.1 (2)

(I) 点1に接続している成分と
点2に接続している成分が等しい場合

木の全ての辺は
「橋」になっている
⇒ 定理9.1 (iv)

辺2v, v1を削除して中心vが得られる



(II) 点2に接続している成分
＞ 点1に接続している成分の場合

辺v1を削除して、2つの中心2, vが得られる

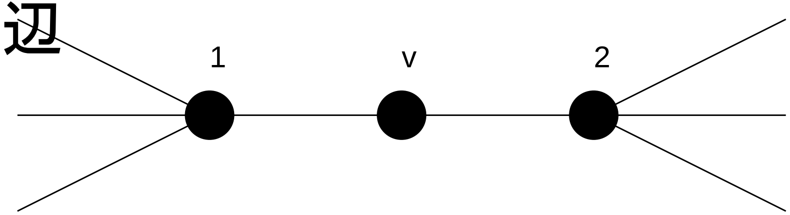
どんな木でも中心は1つか2つである

例題7.1 (3)(4)

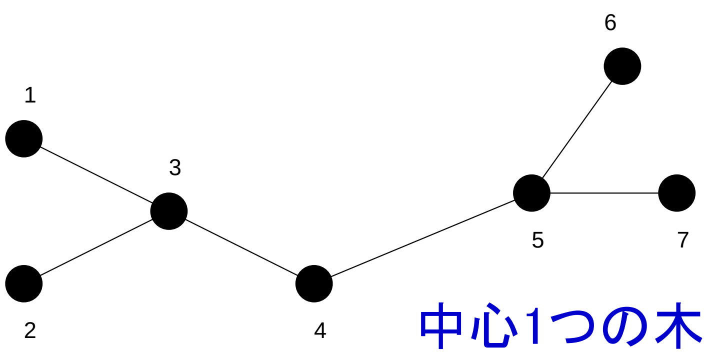
木の中心が2つあり、それらが隣接していないと仮定する。

このとき、中心1,2は点vを介して接続している

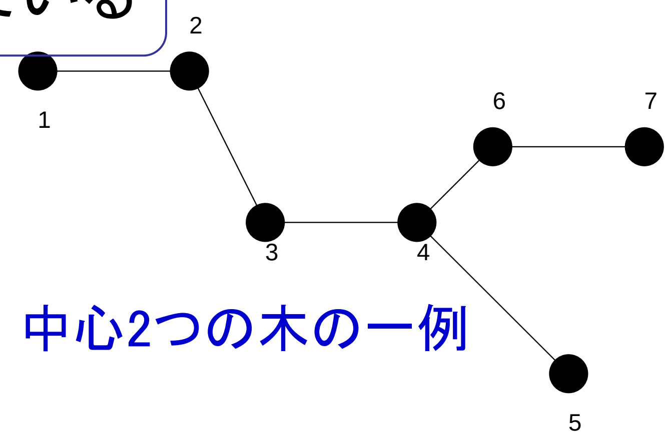
このとき、点1,2とこの中心vの接続辺を除去すると、中心がvの1つになるので仮定に反する。



木の中心が2つある場合、それは隣接している

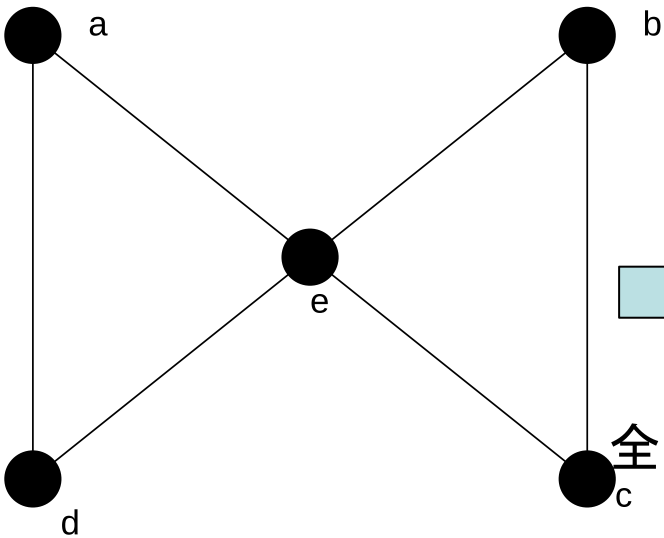


中心1つの木の一例

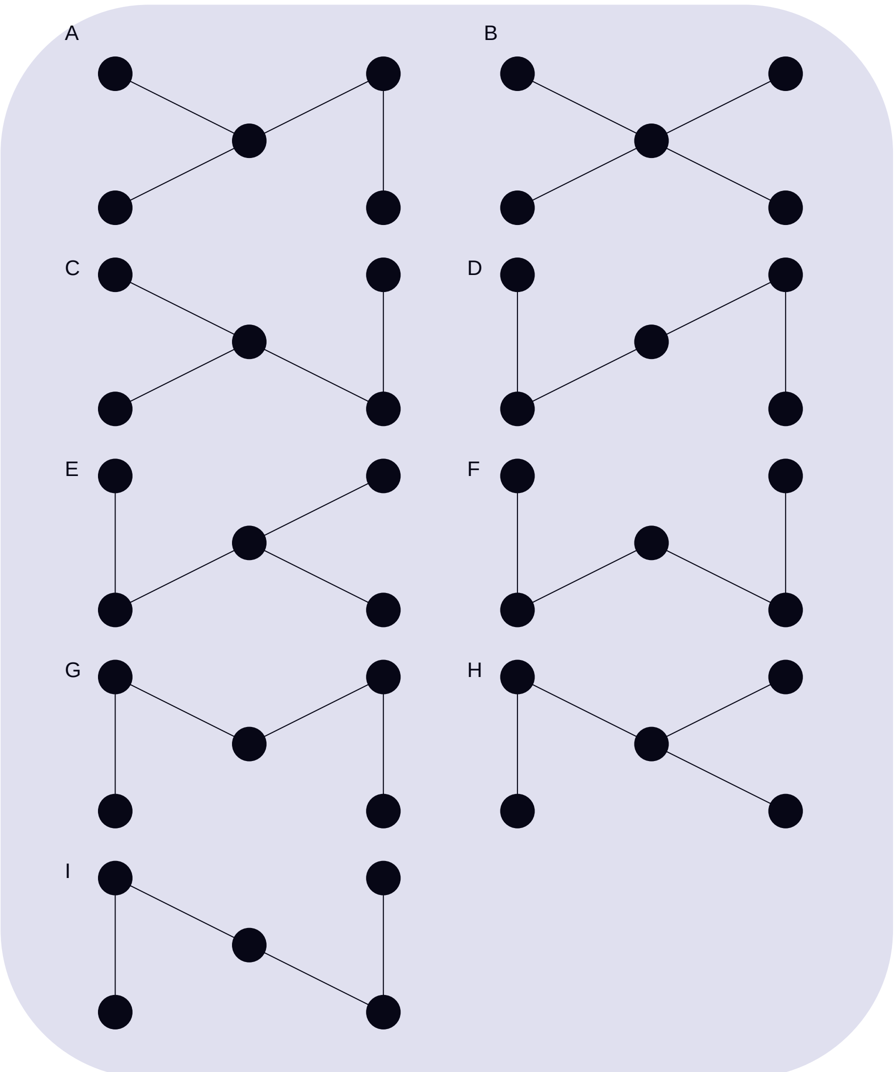


中心2つの木の一例

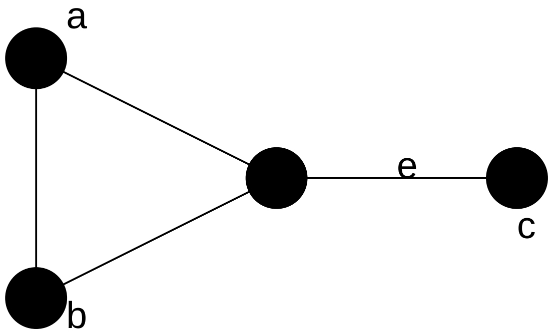
例題7.2 (1)



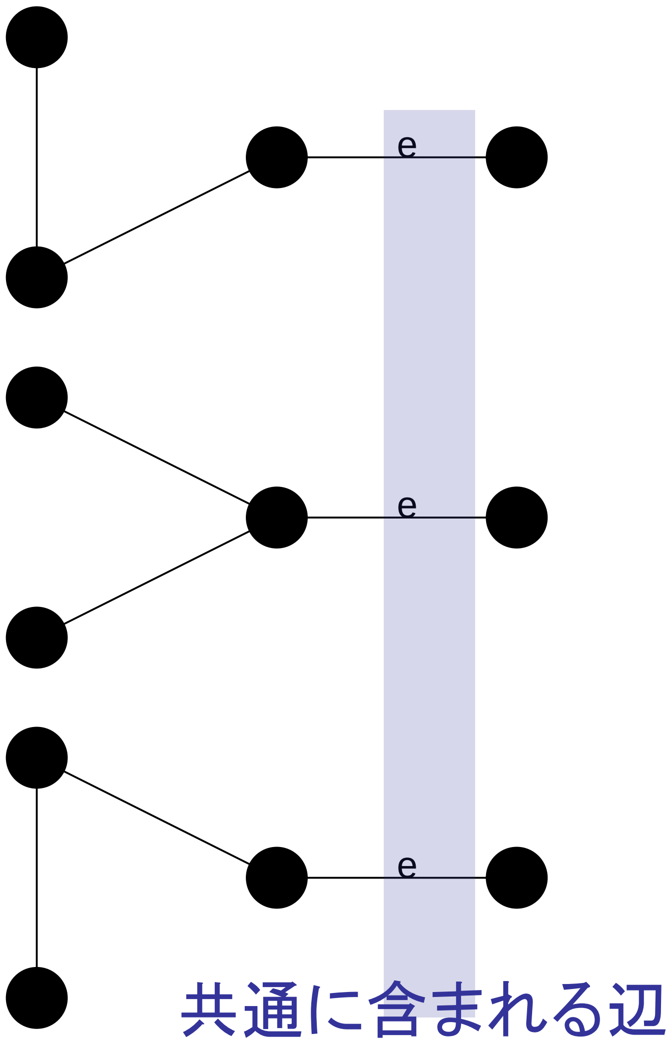
全ての全域木



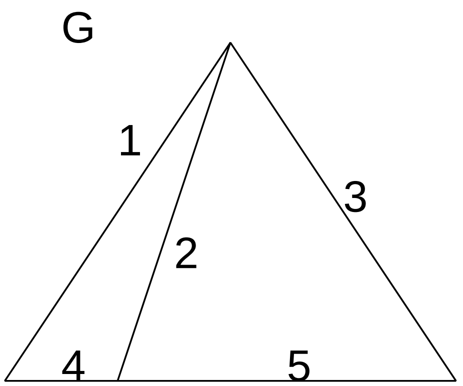
例題7.2 (2)



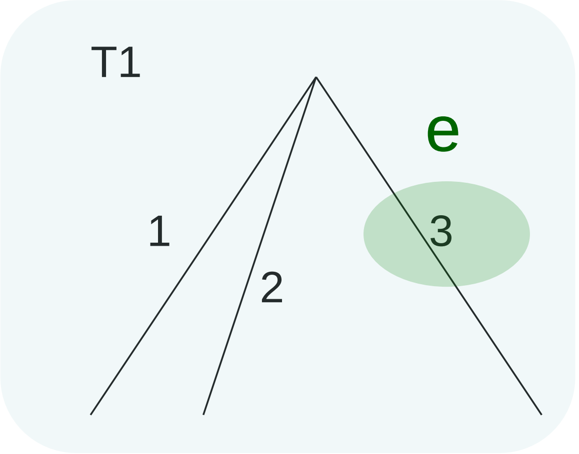
グラフGの辺集合C* が、Gのどの全域木にも共通するならば、C* はカットセットである



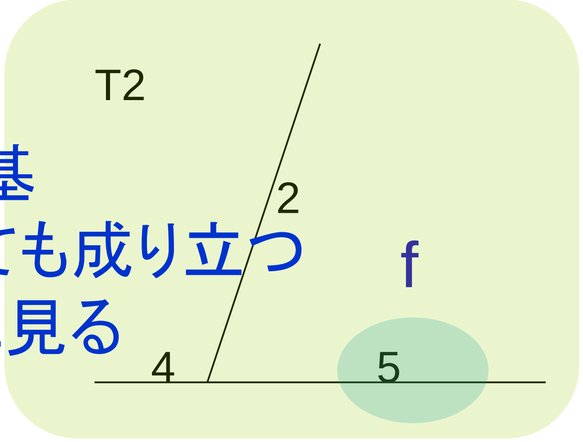
例題7.3（1）



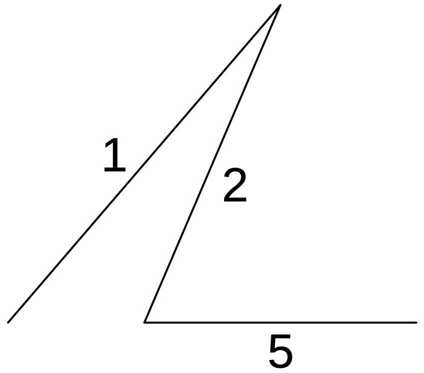
ここで考えるグラフG



$$T_1 - e \cup f$$



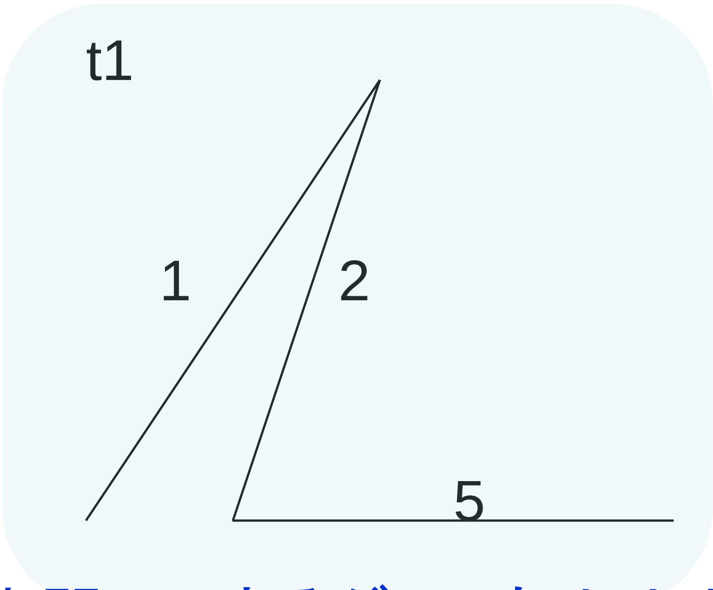
T1,T2 : ベクトル空間の基
T1,T2の元を　e, f　としても成り立つ
⇒ マトロイド理論で後に見る

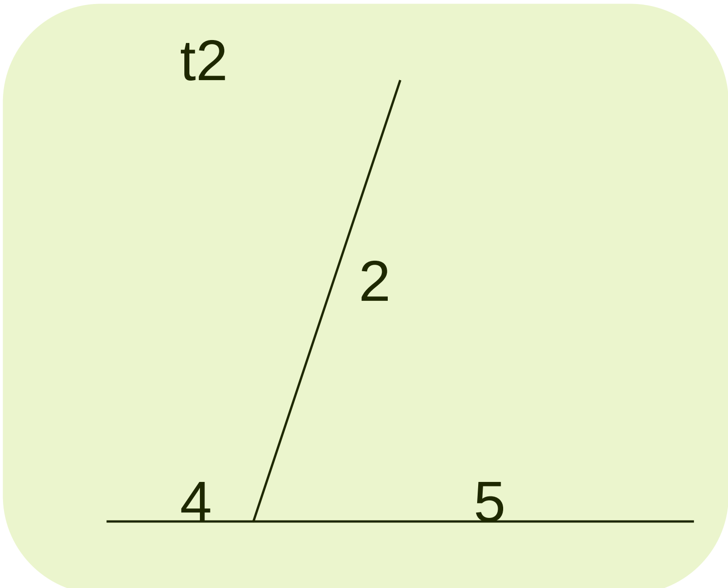


これもグラフGの
全域木である

例題7.3（2）

$$T_1 - \{e = 3\} \cup \{f = 5\} \simeq t_1$$





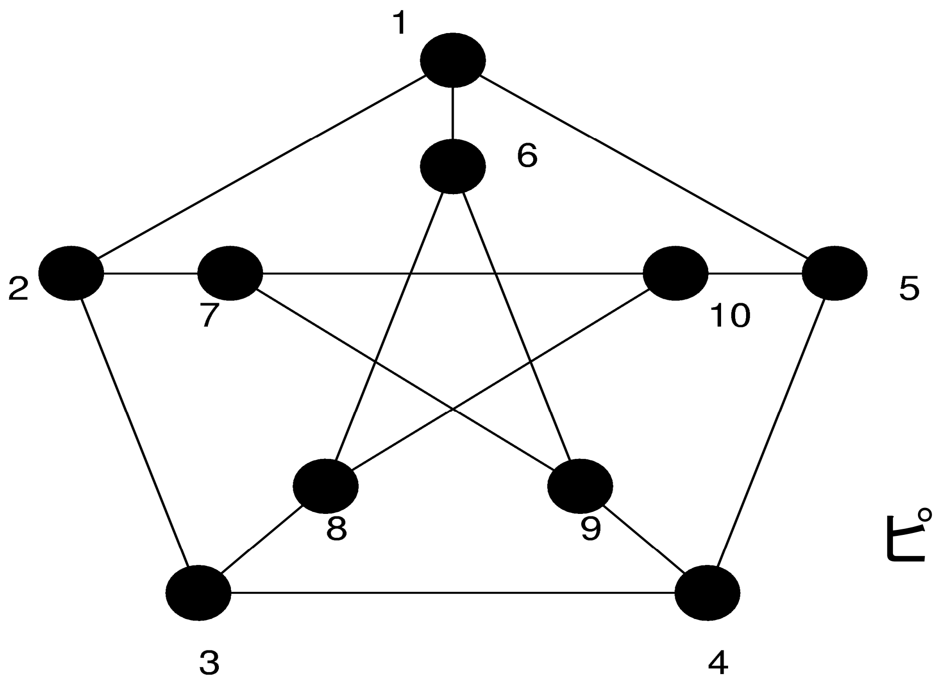
中間にできるグラフもやはり
グラフGの全域木になっている

$$t_1 - \{e = 1\} \cup \{f = 4\} \simeq t_2 = T_2$$

演習問題6

(1) ピータースン・グラフの全域木を一つ描け.

(2) グラフ G は ε の辺数と $|G|$ 個の点を含むとする. このとき, G の任意の全域木に対し, $\varepsilon - |G| + 1$ 個の基本閉路が存在することを (1) の G $\equiv$ ピータースン・グラフ に関して示し, 次いで, 任意のグラフ G に対して示せ.



ピータースン・グラフ