グラフ理論　#7

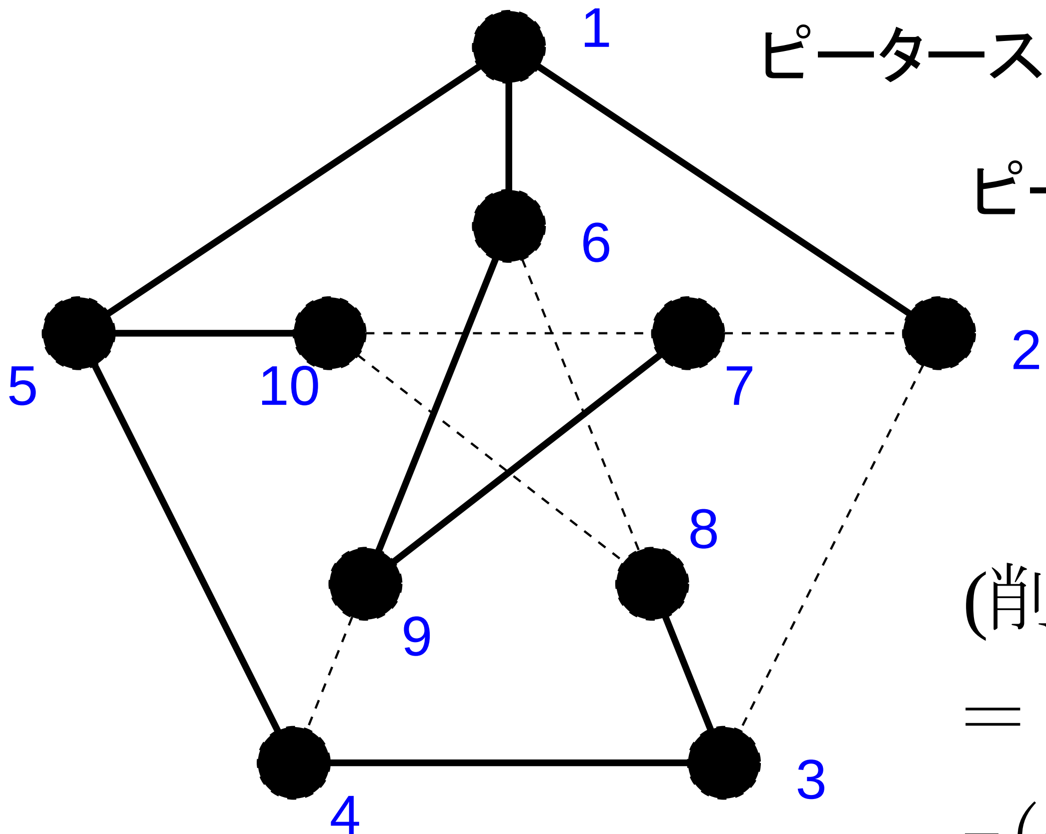
第7回講義　6月4日

--- 木の数え上げ ---

情報科学研究科　井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題6 の解答例



ピータースン・グラフとその全域木の例

ピータースン・グラフの場合

$$\varepsilon = 15, \ |G| = 10$$

$$\therefore \varepsilon - |G| + 1 = 6$$

(削除する辺数)

＝（Gに含まれる辺数) ε

−(全域木の辺数) $|G|-1$

これは基本閉路の個数と等しい

ケイリーの定理とその証明 #1

ケイリーの定理

n点の異なるラベル付き木の総数はn^{n-2}個である

（証明）

準備：

$\deg(v)=k-1$の点vを含むラベル付き木：A

$\deg(v)=k$の点vを含むラベル付き木：B

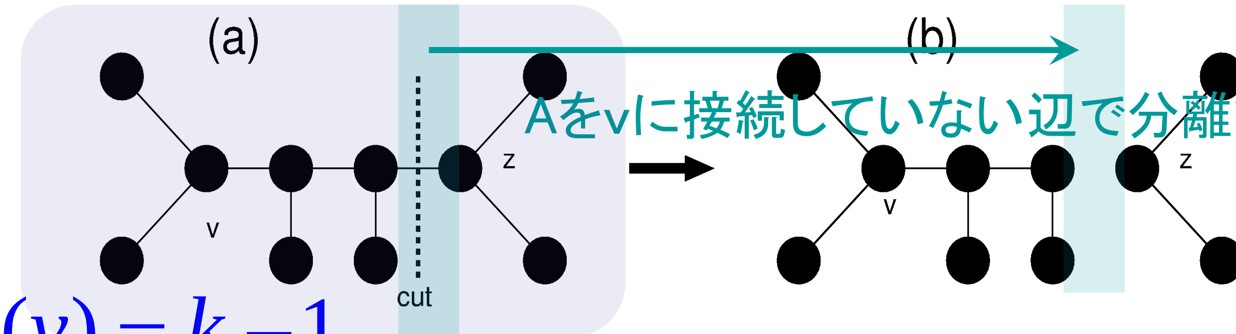
n個の点からなるラベル付き木のある点の次数がkであるものの総数を$T(n,k)$とする

証明のポイント：

「ラベル付き木Aからラベル付き木Bを作る連鎖の総数」
＝「ラベル付き木Bからラベル付き木Aを作る連鎖の総数」

という条件式から $T(n,k)$ を導く

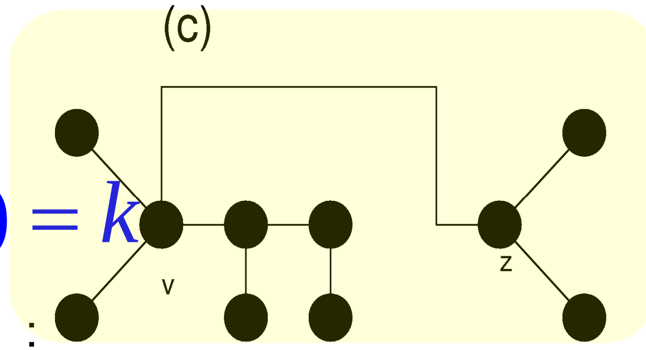
ケイリーの定理とその証明 #2



Aをvに接続していない辺で分離する

連鎖：A→B

$$A: \deg(v) = k-1$$



分離した端点のうち、
点vを含まない方の点z
を点vとつなげる

$$B: \deg(v) = k$$

切断する辺の選び方　：

$$(\text{点}v\text{に接続しない辺の選び方}) = (\text{木}A\text{の辺数}) - (\text{点}v\text{の次数})$$

$$= (n-1) - (k-1) = n-k$$

$$(\text{連鎖}\ : A \to B\text{の総数}) = \boxed{T(n,k-1)}(n-k)$$

Aの総数

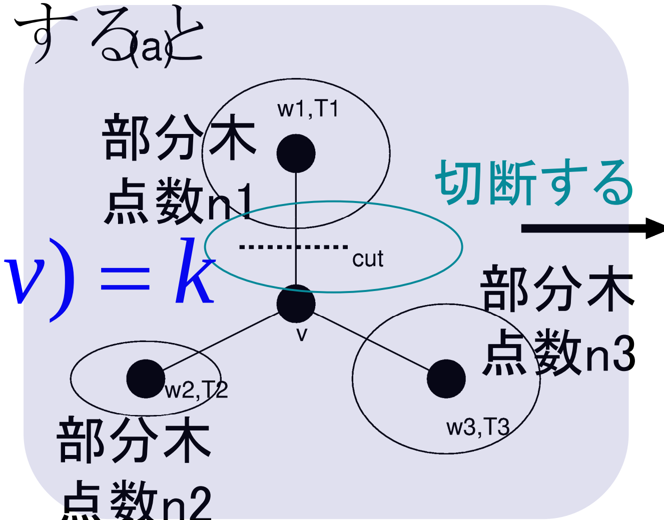
ケイリーの定理とその証明 #3

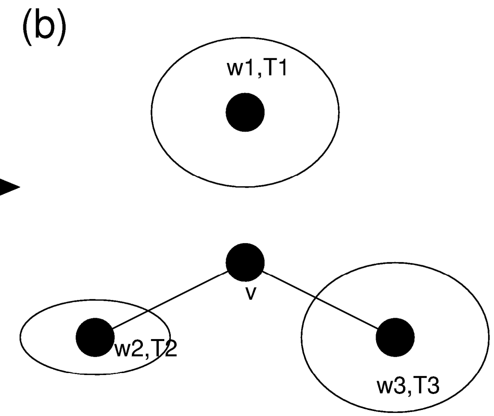
連鎖:

部分木T_iの点数をn_iとすると

$$n-1=\sum_{i=1}^{k} n_i$$

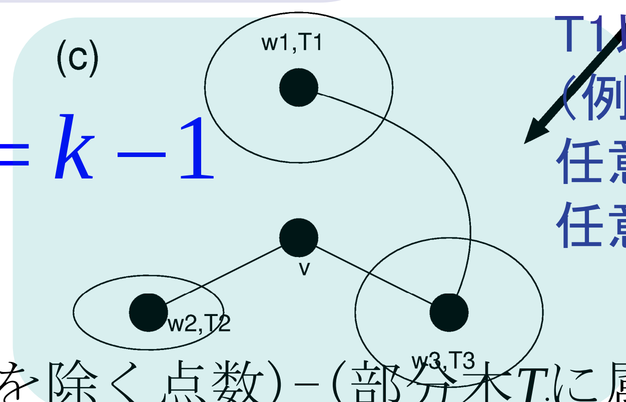
$$B:\deg(v)=k$$





連鎖B→Aの総数

$$A:\deg(v)=k-1$$



T1以外の部分木（例えば、T3内の任意の点uとT1内の任意点wiを結ぶ）

$$T(n,k)\sum_{i=1}^{k}(n-1-n_i)$$

$$=T(n,k)(n-1)(k-1)$$

(点vを除く点数)−(部分木T_iに属する点数)

$=(n-1)-n_i$ （通り）

ケイリーの定理とその証明 #4

[連鎖：A→Bの総数] ＝ [連鎖：B→Aの総数]とおくと

$$(n-k)T(n,k-1)=(n-1)(k-1)T(n,k)$$

k=n−1,n−2,n−3,･･･.を書き出してみると

定義より1である

$$T(n,n-2)=T(n,n-1)(n-1)(n-2)$$

$$T(n,n-3)=\tfrac{1}{2}(n-1)^2(n-2)(n-3)$$

$$T(n,n-4)=\tfrac{1}{3!}(n-1)^3(n-2)(n-3)(n-4)$$

これを一般化し、k=k+1のとき

$$\boxed{T(n,k)=\frac{(n-1)^{n-k+1}(n-2)}{(k-1)(k-2)\cdots}={}_{n-2}C_{k-1}(n-1)^{n-k-1}}$$

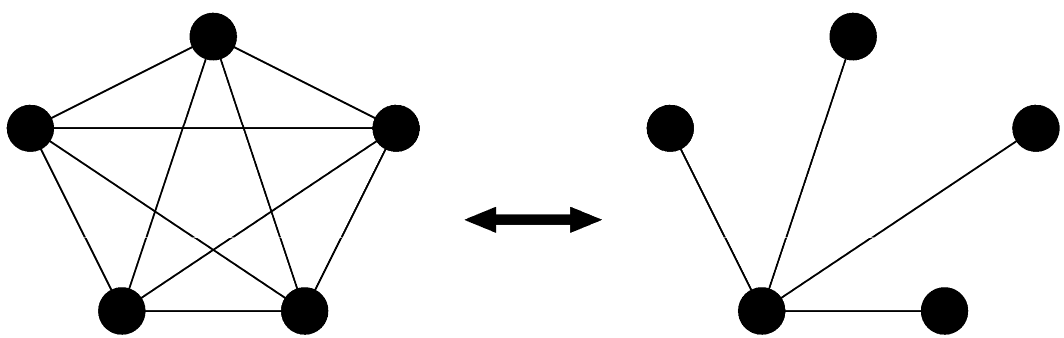
ケイリーの定理とその証明 #5

求めるラベル付き木の総数は

$$T(n) = \sum_{k=1}^{n-1} T(n,k) = \sum_{k=1}^{n-1} {}_{n-2}C_{k-1} 1^{k-1} (n-1)^{(n-2)-(k-1)}$$

$$= \left\{(n-1)+1\right\}^{n-2} = n^{n-2}$$ （証明終わり）

系：完全グラフK_nの全域木の総数はn^{n-2}である



点数nのラベル付き木は完全グラフKnに一対一に対応する

点行列と行列木定理

グラフGの点行列 : $\mathbf{D}$

$$D_{ij} = \begin{cases} 点 v_i の次数 & (i = j のとき) \\ -(点 v_i と点 v_j を結ぶ辺数) & (i \neq j のとき) \end{cases}$$

グラフGの全域木の本数は点行列の任意の余因子で与えられる

$$\boxed{\tau(G) = (-1)^{i+j} \left| \mathbf{D}(\overline{i}, \overline{j}) \right|}$$

行列木定理の応用例

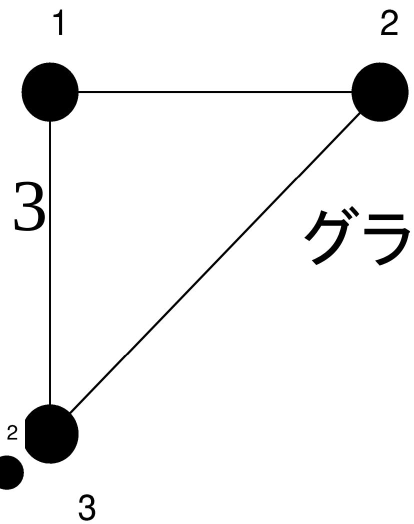
隣接行列$\mathbf{A}$が

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$ で与えられるグラフGの全域木の総数$\tau(G)$を求めよ

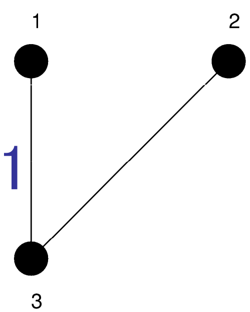
このグラフGの点行列は

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$ なので

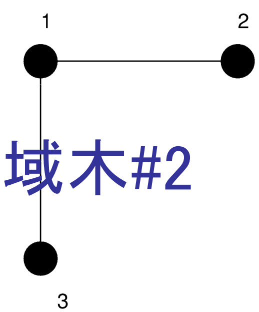
$$\tau(G) = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 4 - 1 = 3$$



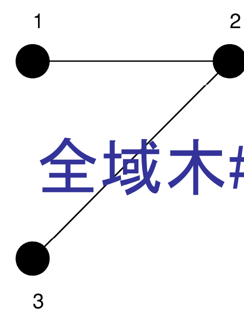
グラフG



全域木#1



全域木#2



全域木#3

例題7.5 の1

$$T(n,k) = {}_{n-2}C_{k-1}(n-1)^{n-k-1} \quad \text{より}$$

与えられた点が木の端点になっている場合の数はk=1とおいて

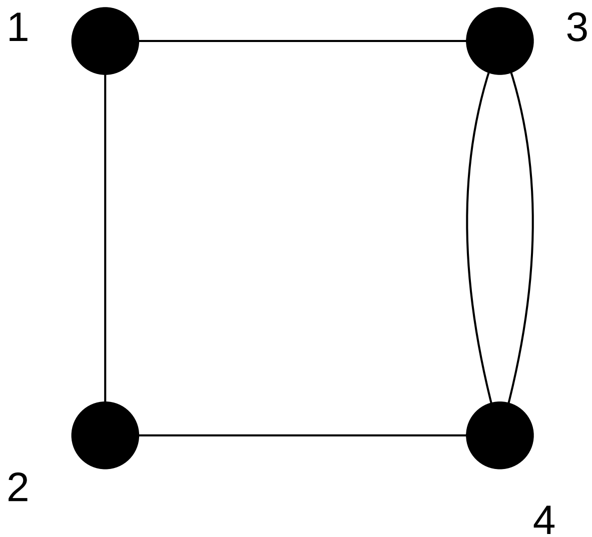
$$T(n,1) = (n-1)^{n-2}$$

従って、与えられた点が端点となっている確率は

$$\boxed{P(n) = \frac{(n-1)^{n-2}}{n^{n-2}} = \left(1 - \frac{1}{n}\right)^{n-2} = e^{-1}}$$

例題7.5 の2

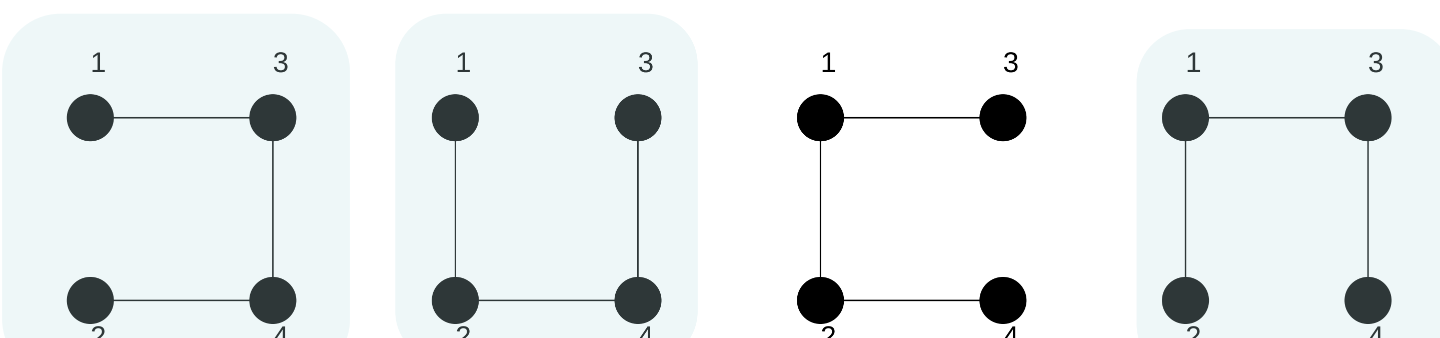
G



点行列

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \end{pmatrix}$$

具体的な計算は講義ノート



2通り　2通り　2通り

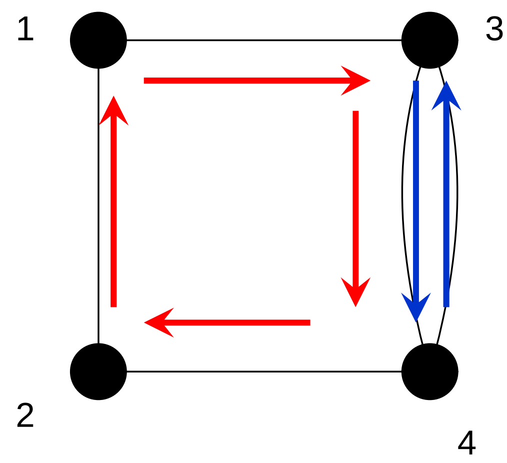
閉路行列と閉路行列法

$$R_{ij} = \begin{cases} \text{閉路}c_i\text{を構成する辺数} & (i = j) \\ \pm(\text{閉路}c_i\text{と閉路}c_j\text{に共通な辺数}) & (i \neq j) \end{cases}$$

$$\tau(G) = \left|\mathbf{R}\right|$$ 全域木の個数

G

（例）



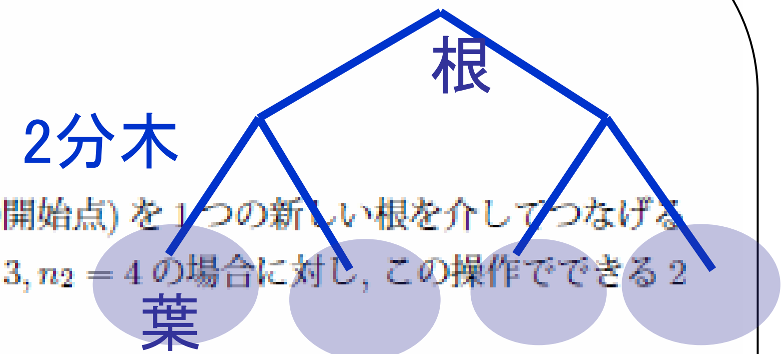
$$R = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\tau(G) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7$$

例題7.5の2と一致

演習問題7

葉 (末端) の数が n である 2 分木 (一つの枝から 2 つの枝が伸びる木) の総数を p_n としよう．すると明らかに $p_0 = 0, p_1 = p_2 = 1$ である．このとき以下の問いに答えよ．



(1) $p_3 = 2$ である．この 2 つの 2 分木を描け．

(2) p_4 を求め，その全ての 2 分木を描け．

(3) 葉数 n_1 の 2 分木と葉数 n_2 の 2 分木の互いの根 (2 分木の開始点) を 1 つの新しい根を介してつなげる操作で葉数 $n_1 + n_2$ の 2 分木が $p_{n_1} p_{n_2}$ 通りできる．$n_1 = 3, n_2 = 4$ の場合に対し，この操作でできる 2 分木を全て描け．

(4) x を任意の実数とする．x の n 次の冪係数が葉数 n の 2 分木の総数 p_n になるようにして作られる次の多項式:

$$P(x) = p_0 + p_1 x + p_2 x^2 + \cdots + p_n x^n + \cdots$$

を「2 分木生成多項式」と名づけることにしよう．すると，前問 (3) で与えた操作でできる 2 分木の総数 $p_{n_1} p_{n_2}$ は 2 分木生成多項式の 2 乗，つまり，$\{P(x)\}^2$ における $x^{n_1+n_2}$ の係数の一部分として現れる (同じ $n_1 + n_2$ を与える n_1 と n_2 の組み合わせは複数あるので「一部分」である)．この事実をふまえた考察により

$$P(x) = x + \{P(x)\}^2 \tag{132}$$

が成り立つことを示せ．

(5) (4) で示した関係式 (132) から p_n を n の関数として求めよ．