



Title	2007年度 グラフ理論講義ノート
Author(s)	井上, 純一; Inoue, Jun-ichi
Description	http://www005.upp.so-net.ne.jp/j_inoue/index.html http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/
Issue Date	2007
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/28239
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	GraphTheory07_SLIDE9.pdf, 第9回講義スライド



グラフ理論 #9

第9回講義 6月18日

--- 双対グラフ、グラフの点彩色 ---

情報科学研究科 井上純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

演習問題8 の解答例

考える平面グラフの点数、次数と辺数の間には次の関係式が成り立つ

$$\sum_{k=3} n_k = n, \quad \sum_{k=3} kn_k = 2m$$

握手補題

三角形が最小の面 辺は必ず面を2分する

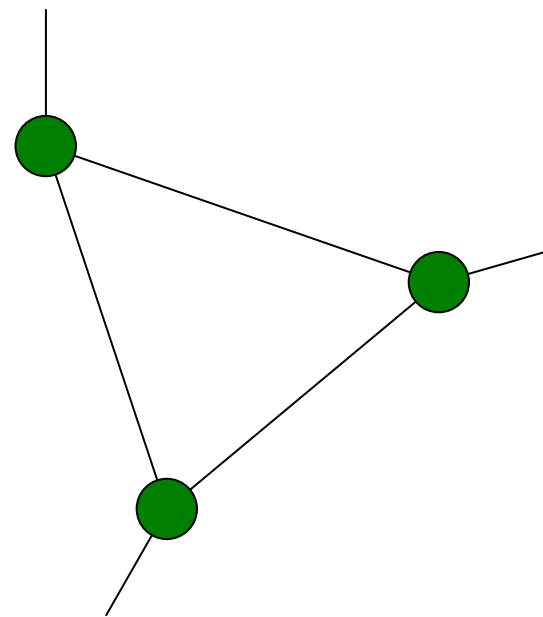
$$3f \leq 2m$$

オイラーの公式より

$$3n - m \leq 6$$

既に得られた関係式を代入して

$$3n_3 + 2n_4 + n_5 \geq 12 + n_7 + 2n_8 + 3n_9 + \dots$$

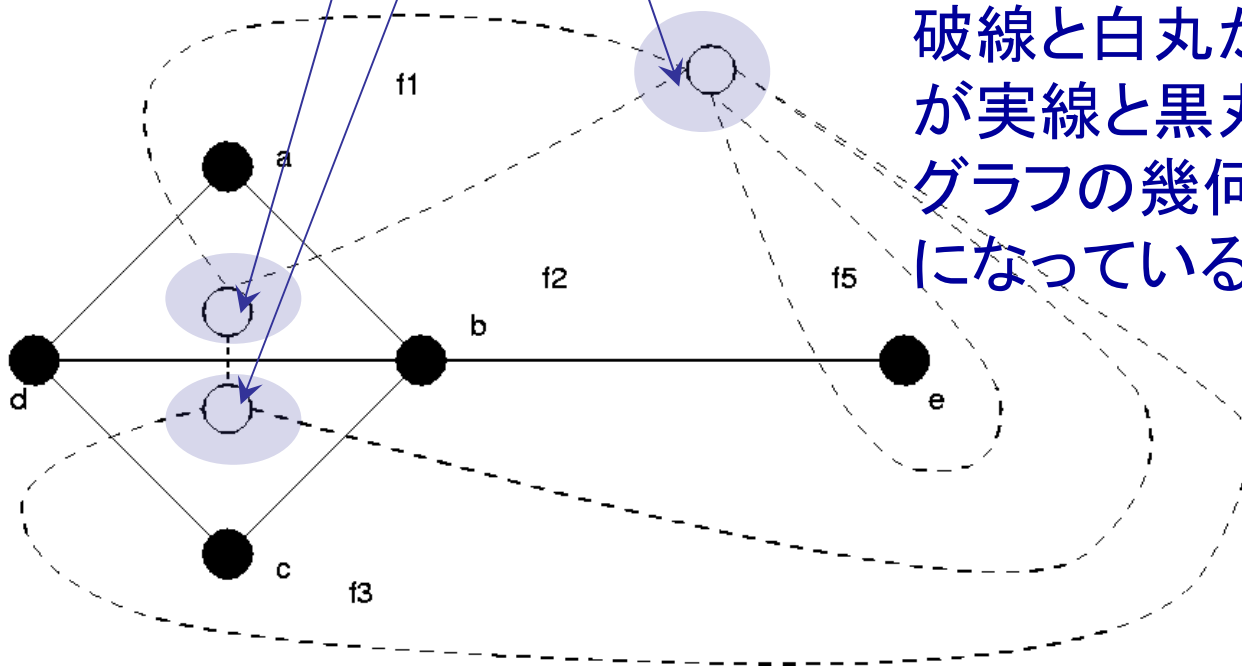


幾何学的双対グラフ

幾何学的双対グラフの作り方

- (1) グラフ G の各面 f の内側の点 v^* を選ぶ \Rightarrow 双対グラフ G^* の点となる
- (2) グラフ G の各辺 e に対応させて、 e に交差する線 e^* を描いて、 e に接する2つの面 f の点 v^* を結ぶようにする \Rightarrow 双対グラフ G^* の辺となる

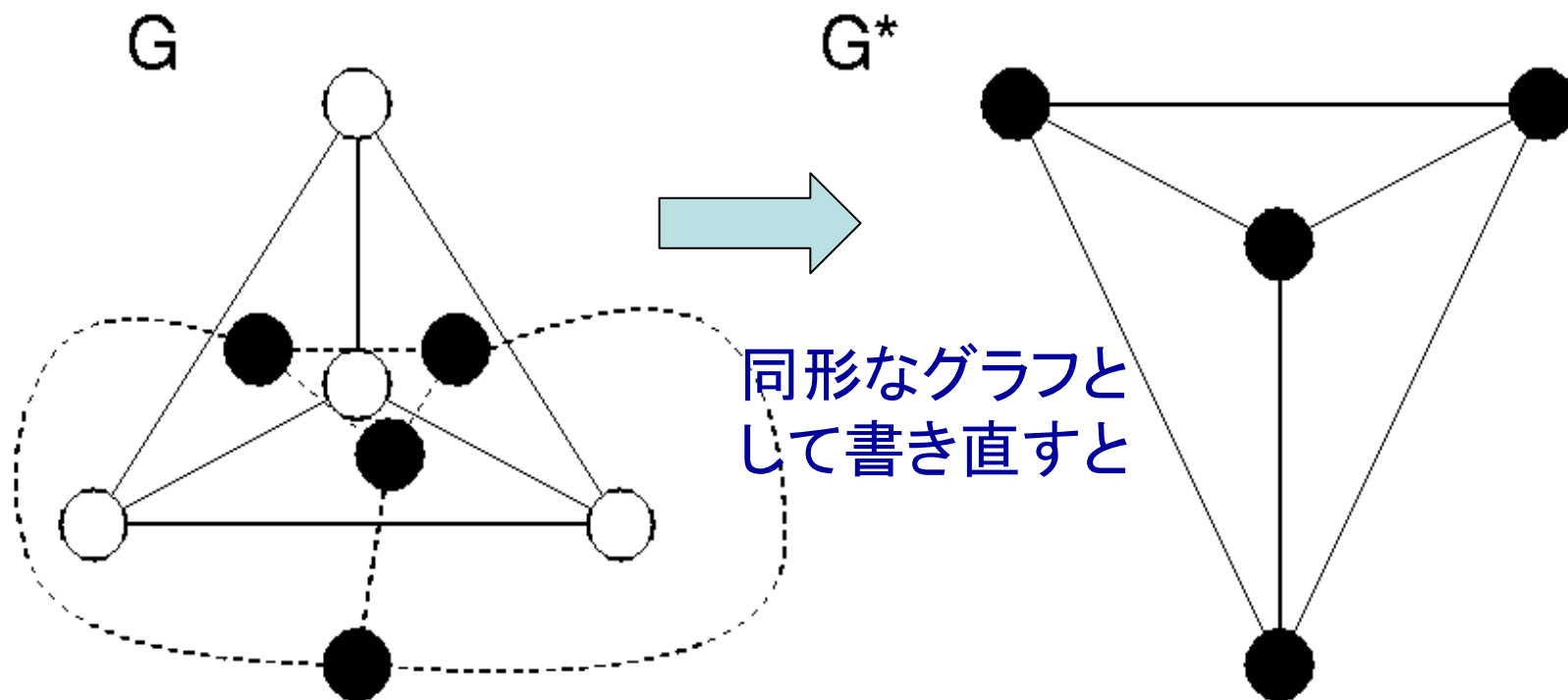
f4



破線と白丸からなるグラフ
が実線と黒丸からなる
グラフの幾何学的双対グラフ
になっている

幾何学的双対グラフの例

完全グラフ K_4 の幾何学的双対グラフは完全グラフ K_4 である



補題15・1とその証明

平面グラフ G には n 個の点、 m 本の点、 f 個の面がある。

幾何学的双対グラフ G^* には n^* 個の点、 m^* 本の辺、 f^* 個の面があるならば

$$n^* = f, m^* = m, f^* = n$$

が成り立つ

補題15.1

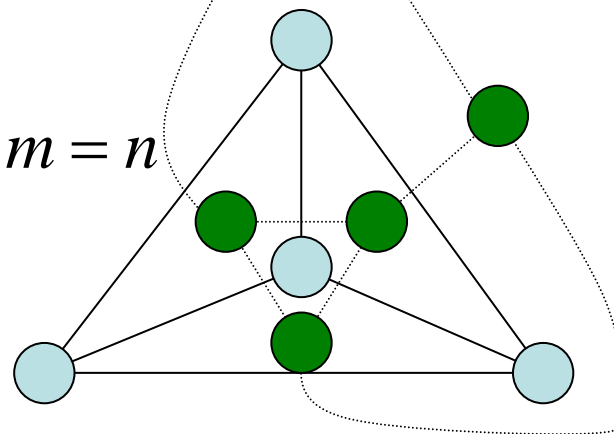
(証明)

双対グラフの作り方から、 $n^* = f, m^* = m$ は明らか。

オイラーの公式より

$$n^* - m^* + f^* = 2, f^* = 2 - n^* + m^* = 2 - f + m = n$$

従って、 $f^* = n$



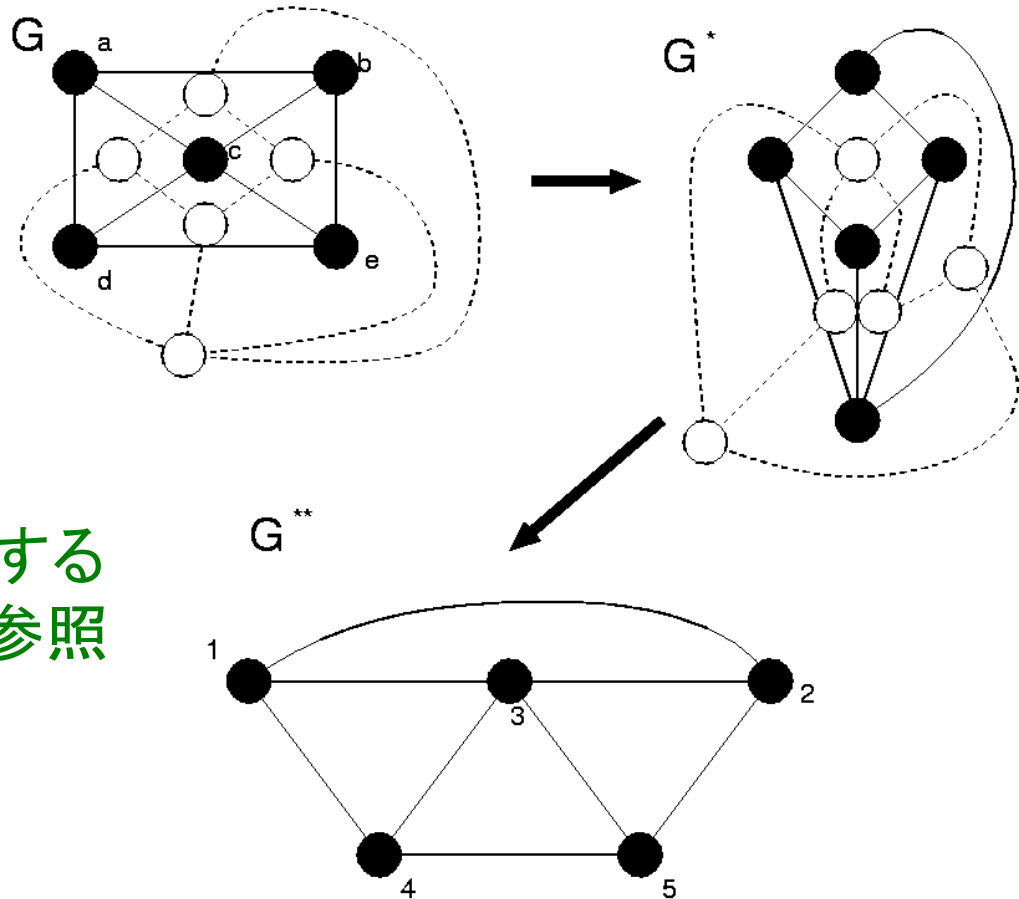
定理15・2

グラフ G が連結平面ならば、 G^{**} はグラフ G と同形である

(例)

$$G \cong G^{**}$$

同形写像が存在する
ことは講義ノート参照



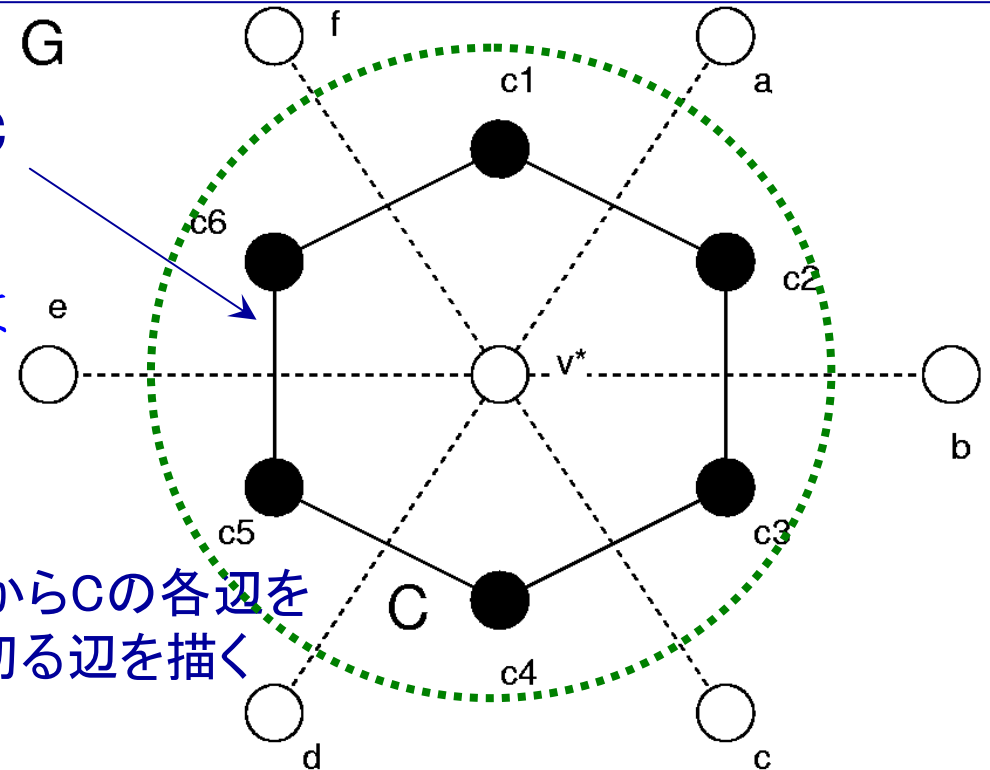
定理15・3

平面グラフ G の幾何学的双対を G^* とする。グラフ G の各辺のある集合がグラフ G において閉路であるための必要十分条件は、それに対応する双対グラフ G^* の辺集合が、グラフ G^* においてカットセットになっていることである

閉路C

$\{v^*a, v^*b, v^*c, v^*d, v^*e, v^*f\}$ は
 G^* においてカットセット
になっている

v^* からCの各辺を
横切る辺を描く



系15・4

グラフ G のある辺集合が G のカットセットであるための必要十分条件は、対応する幾何学的双対グラフ G^* の辺集合が G^* の閉路となることである

G のカットセット: $\{\overline{17}, \overline{28}, \overline{39}, \overline{410}, \overline{511}, \overline{612}\}_G$

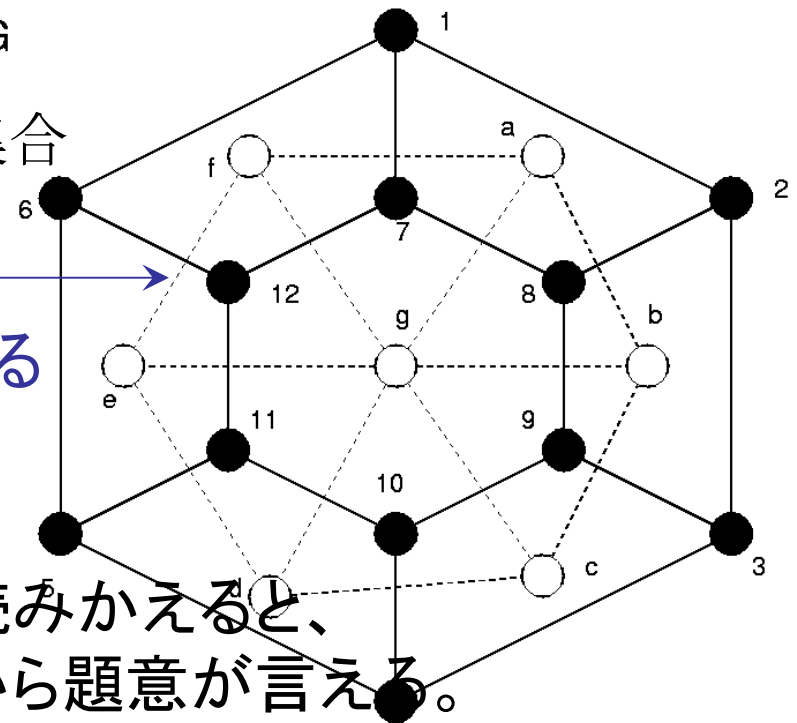
対応する幾何学的双対グラフ G^* の辺集合

$\{\overline{fa}, \overline{ab}, \overline{bc}, \overline{cd}, \overline{de}, \overline{ef}\}$

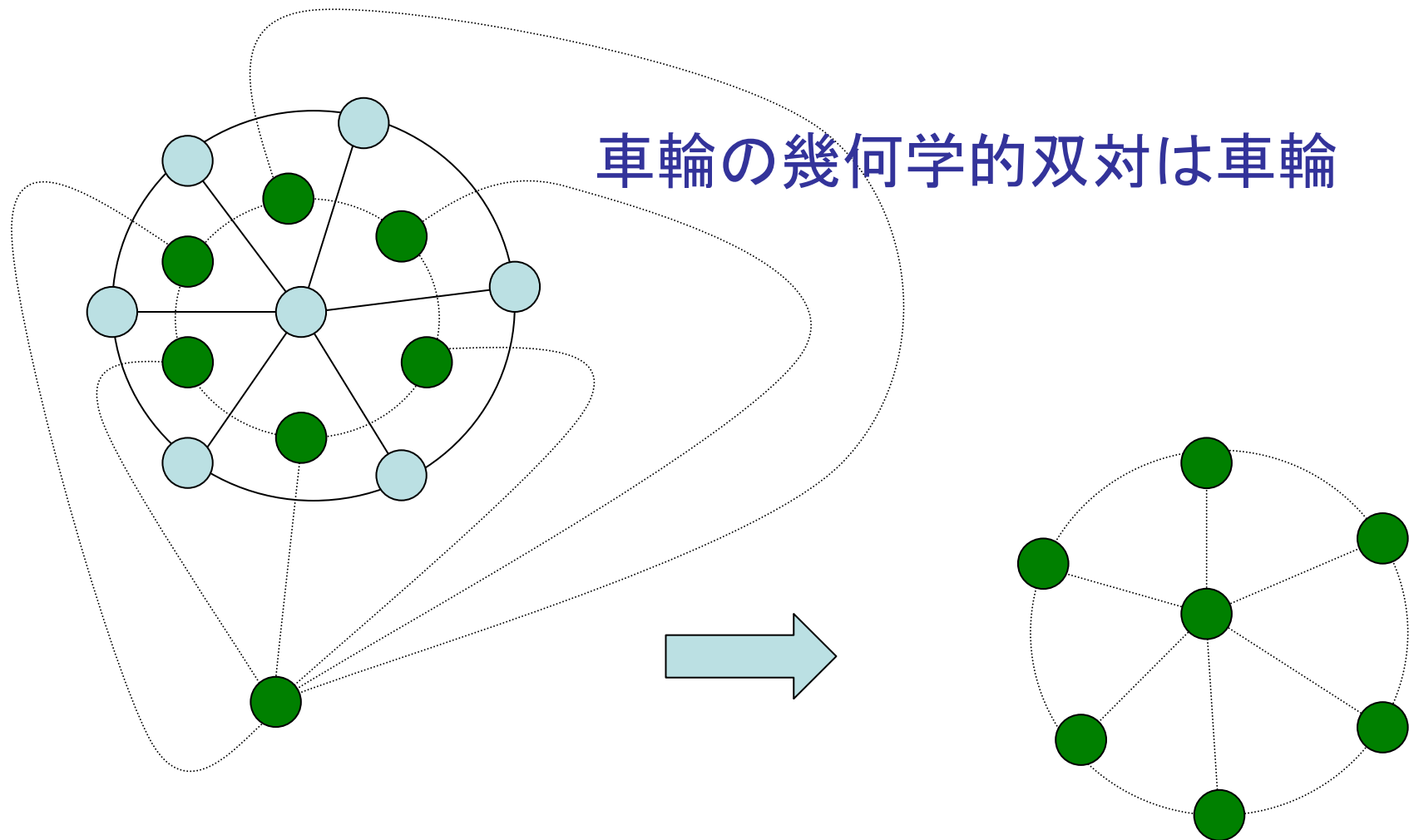
G^* においては閉路となっている

(証明のアウトライン)

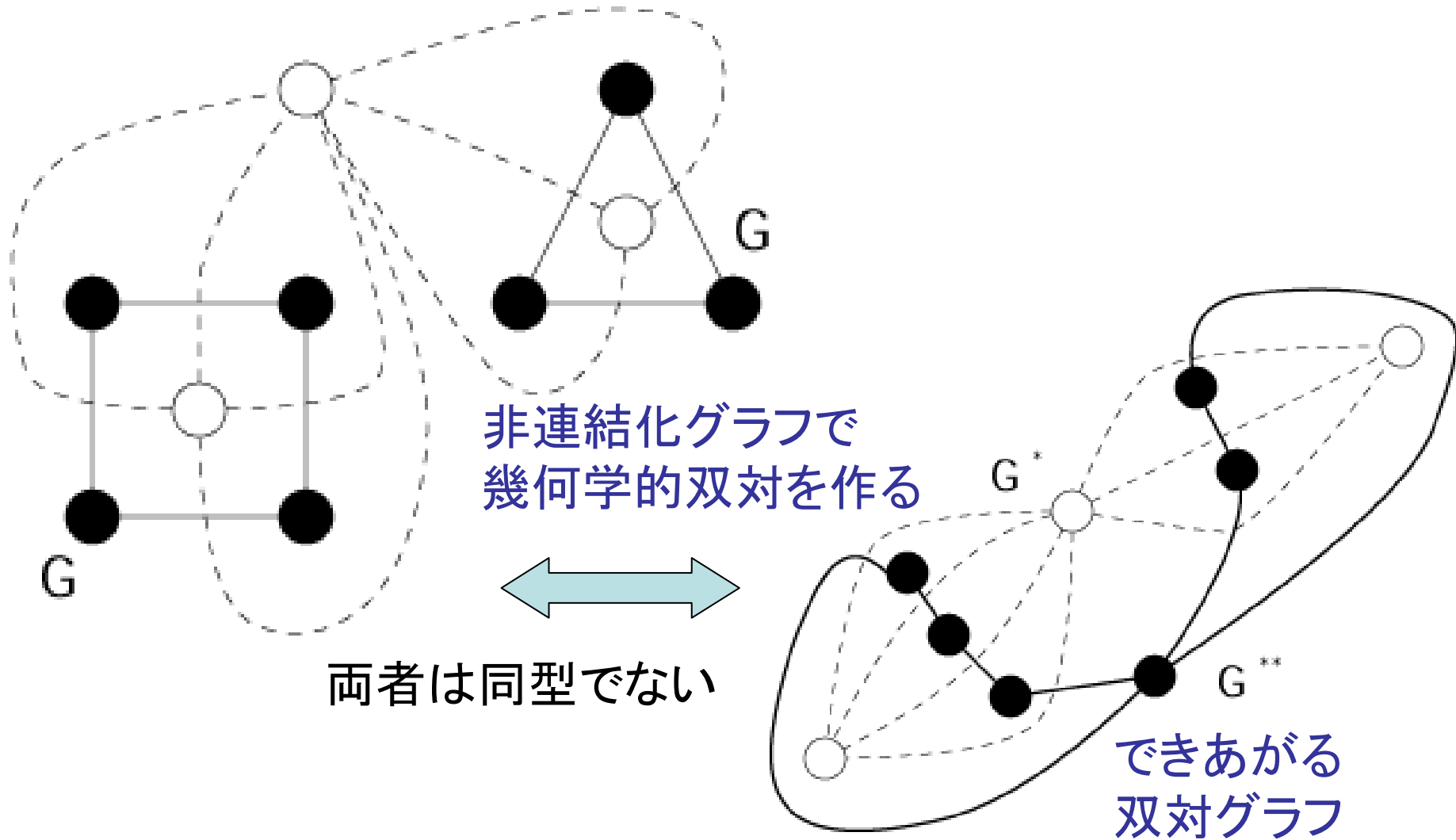
定理15・3を $G \rightarrow G^*$ 、 $G^* \rightarrow G^{**}$ として読みかえると、
定理15・2から G^{**} と G は同形であるから題意が言える。



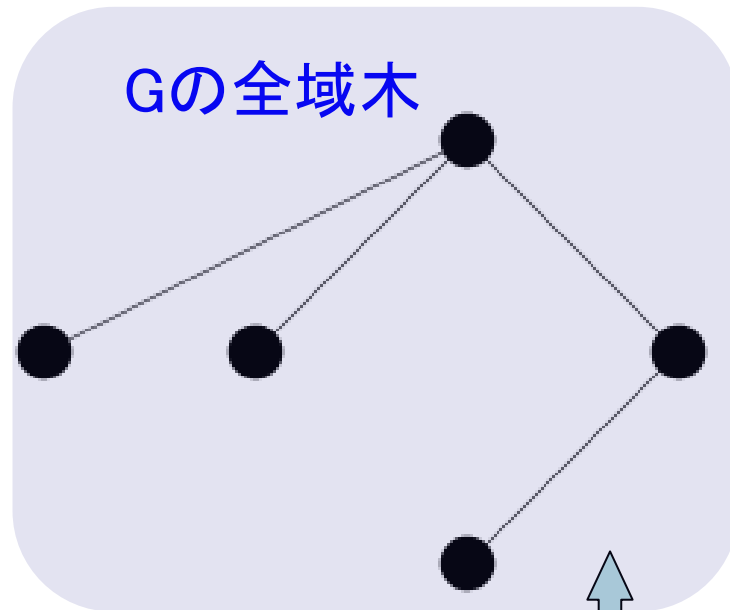
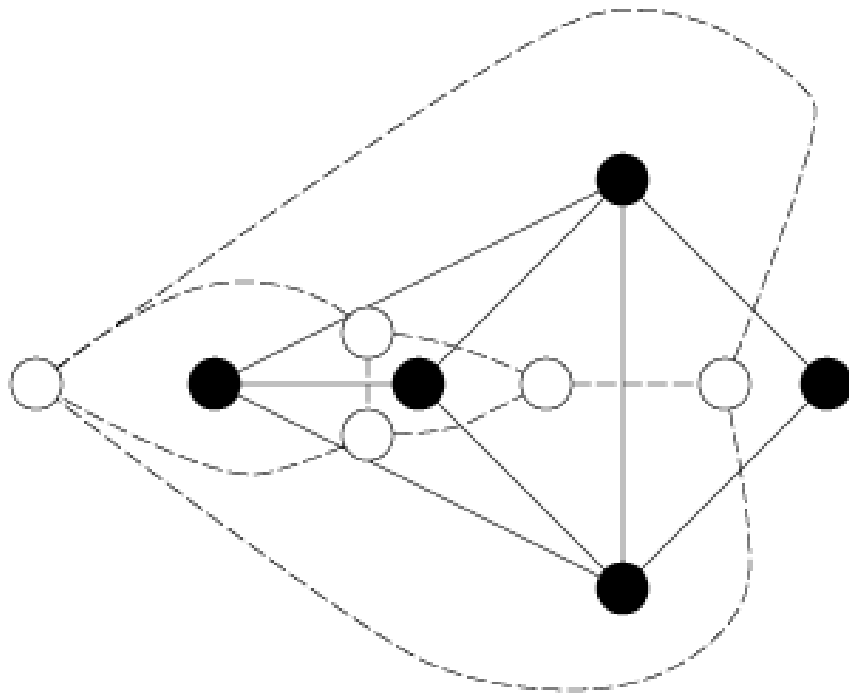
例題8.8の(1)



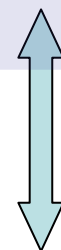
例題8.8の(2)



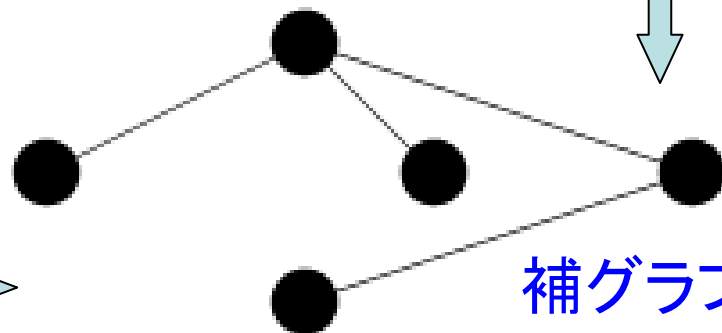
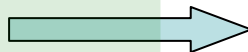
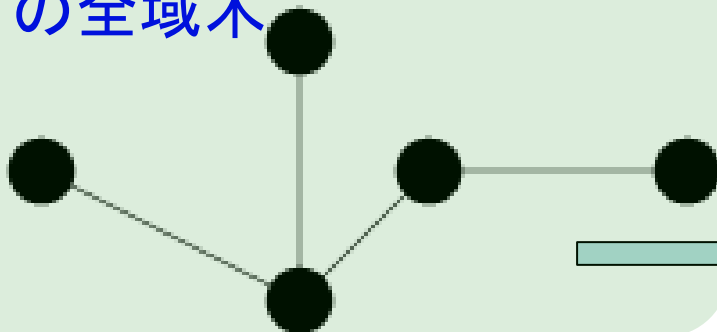
例題8.8の(3)



同型



G^* の全域木



補グラフ

グラフの彩色：点彩色

k-彩色可能：

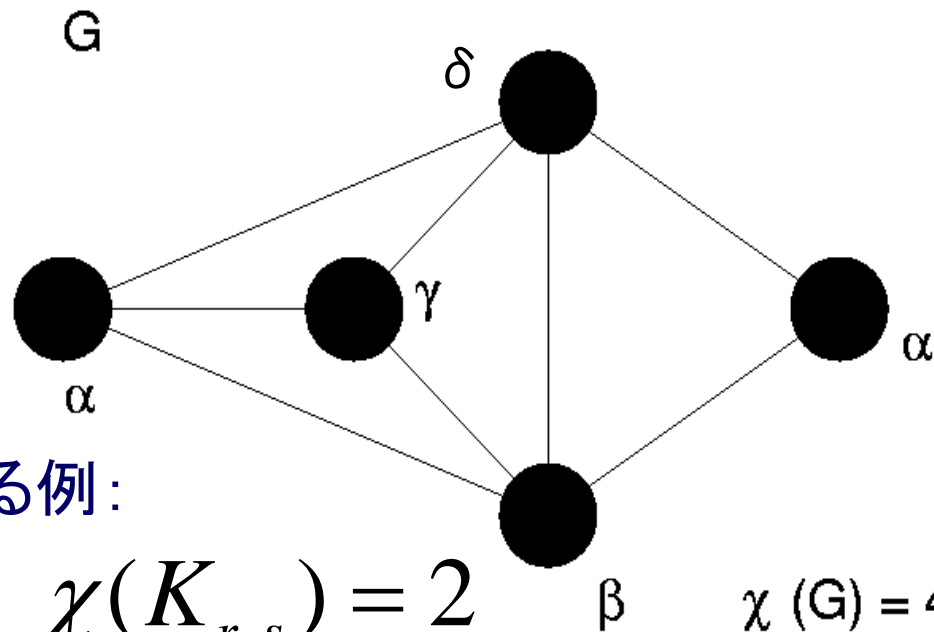
k個の色の一つをGの各点に割り当て、隣接するどの2つの点も異色にできること

k-彩色的：

グラフGがk彩色可能であるが、(k-1)彩色不可能であるとき
⇒ グラフGの彩色数はkである

$$\chi(G) = k$$

「彩色数はkである」、というのをこのように表記する



いくつかの代表的グラフに対する例：

$$\chi(K_n) = n, \chi(N_n) = 1, \chi(K_{r,s}) = 2$$

定理17・1

単純グラフ G の最大次数が Δ ならば、グラフ G は $(\Delta+1)$ 彩色可能である

(証明)

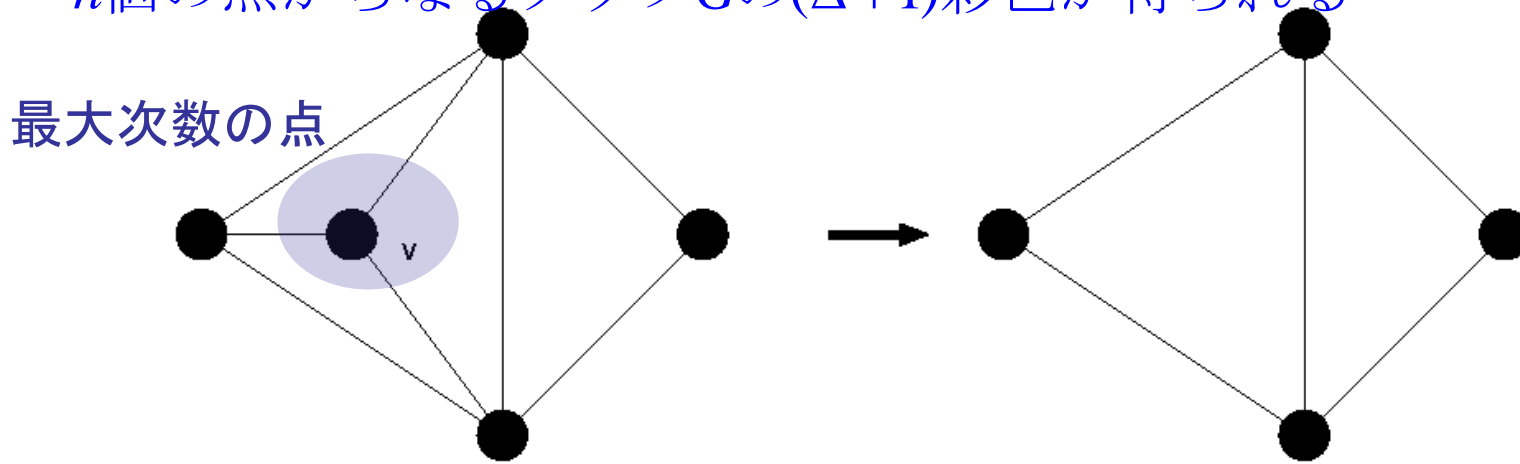
点数に関する帰納法で示す。

任意の点 v とその接続辺を除去してできる $n-1$ 個の点、

最大次数 Δ のグラフは $(\Delta+1)$ 彩色可能であると仮定する

v を元に戻し、 v に隣接する Δ 個以下の点と異なる色で v を彩色すれば、

n 個の点からなるグラフ G の $(\Delta+1)$ 彩色が得られる



定理17・3

全ての単純平面グラフは6彩色可能である

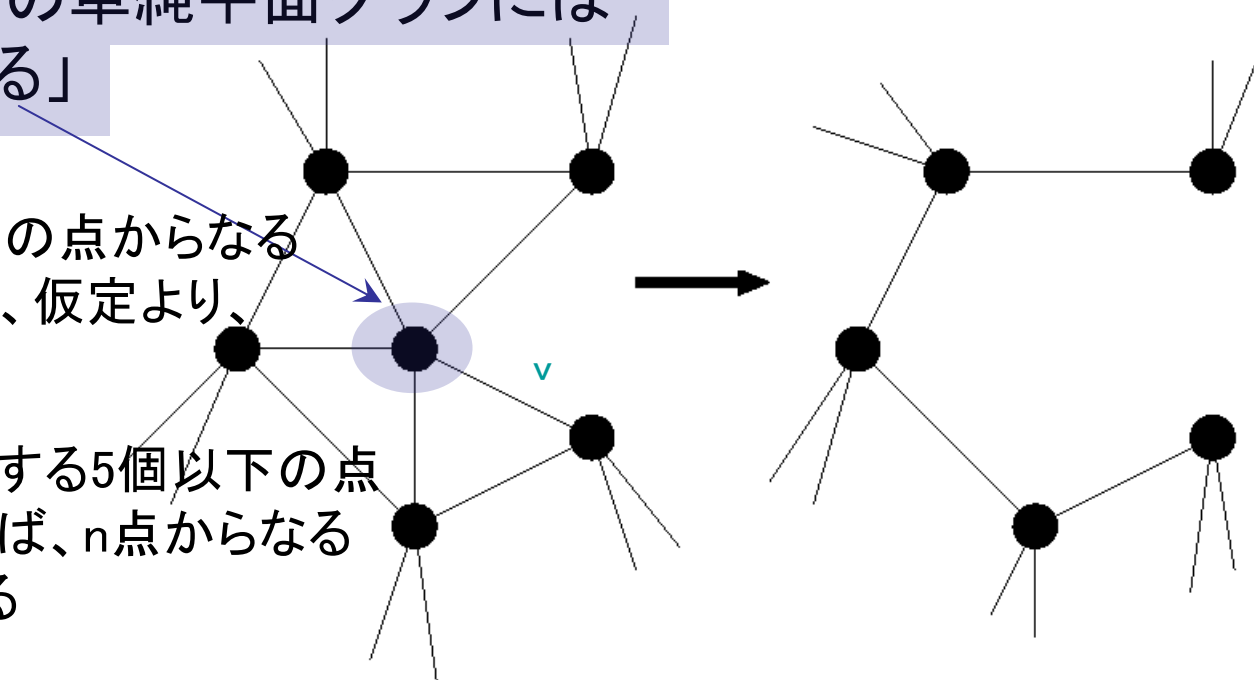
(証明)

「 $n-1$ 個の点をもつ全ての単純平面グラフは6彩色可能である」と仮定

定理13・6より、「全ての単純平面グラフには
次数5以下の点がある」

点 v を除去すると、 $n-1$ 個の点からなる
グラフができあがるので、仮定より、
これは6彩色可能。

点 v を元に戻し、 v に接続する5個以下の点
以外の色で v を彩色すれば、 n 点からなる
グラフの6彩色が得られる



定理17・4

全ての単純平面グラフは5彩色可能である

(証明)

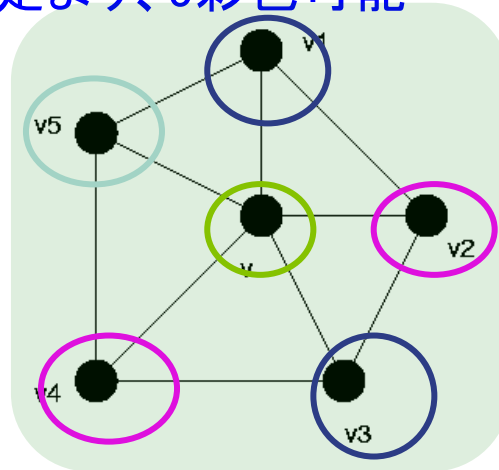
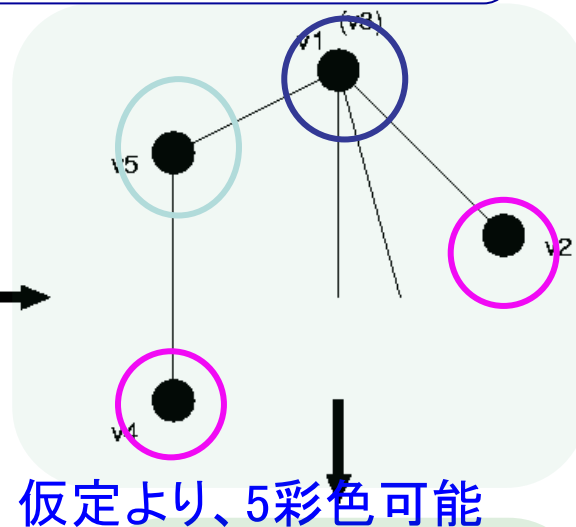
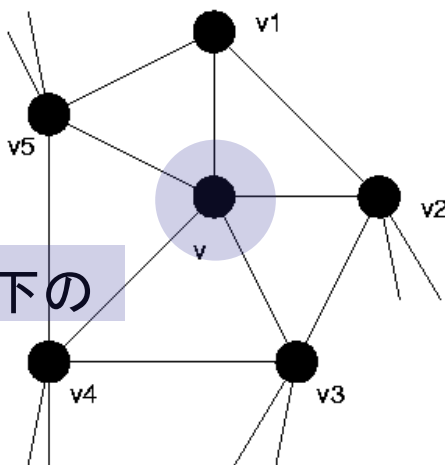
「 $n-1$ 個以下の点をもつ全ての単純平面グラフは5彩色可能である」と仮定する

定理13・6より、 G には次数5以下の点がある

2本の辺 vv_1 、 vv_3 を縮約する

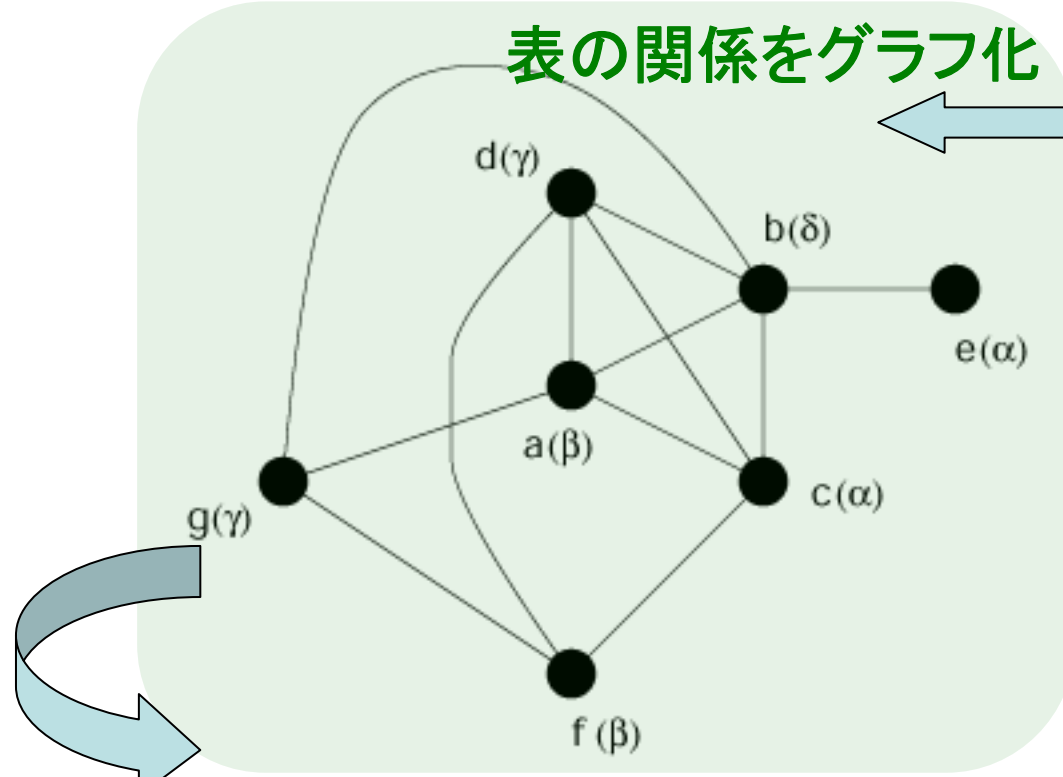
点 v に当てられた色で v_1 、 v_3 を彩色し、点 v を元々割り当てられた色以外で彩色しなおせば G の5彩色が完成する

点 v_1, v_3 は同色だから、 v_1-v_5 の中にはまだ使われていない色が存在する



例題9.1 (点彩色の応用例)

表の関係をグラフ化

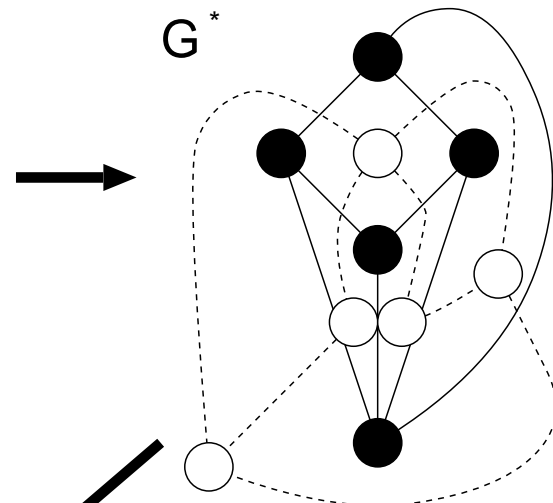
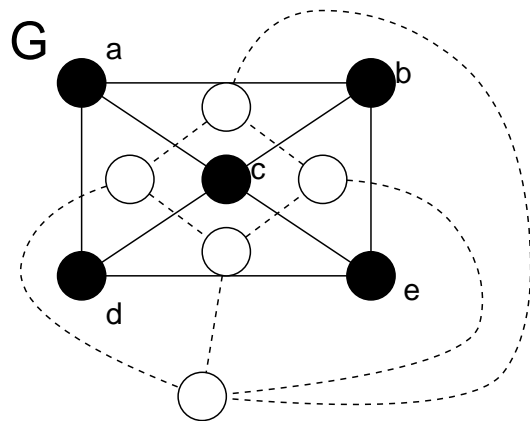
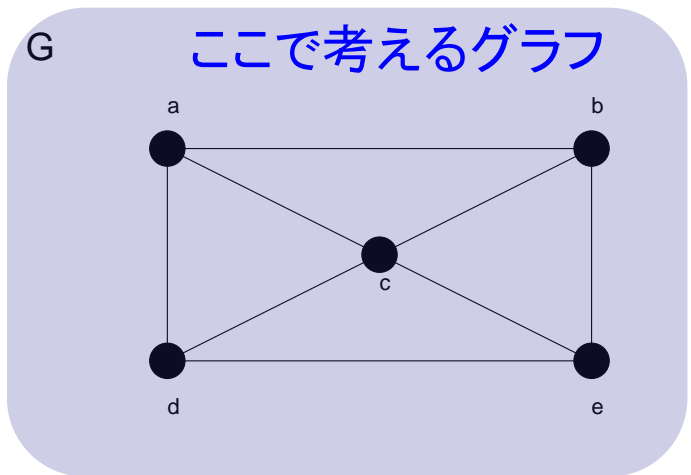


	a	b	c	d	e	f	g
a	-	*	*	*	-	-	*
b	*	-	*	*	*	-	*
c	*	*	-	*	-	*	-
d	*	*	*	-	-	*	-
e	-	*	-	-	-	-	-
f	-	-	*	*	-	-	*
g	*	*	-	-	-	*	-

- 講義 c, e は α 講時に開講
- 講義 a, f は β 講時に開講
- 講義 d, g は γ 講時に開講
- 講義 b だけは δ 講時に開講

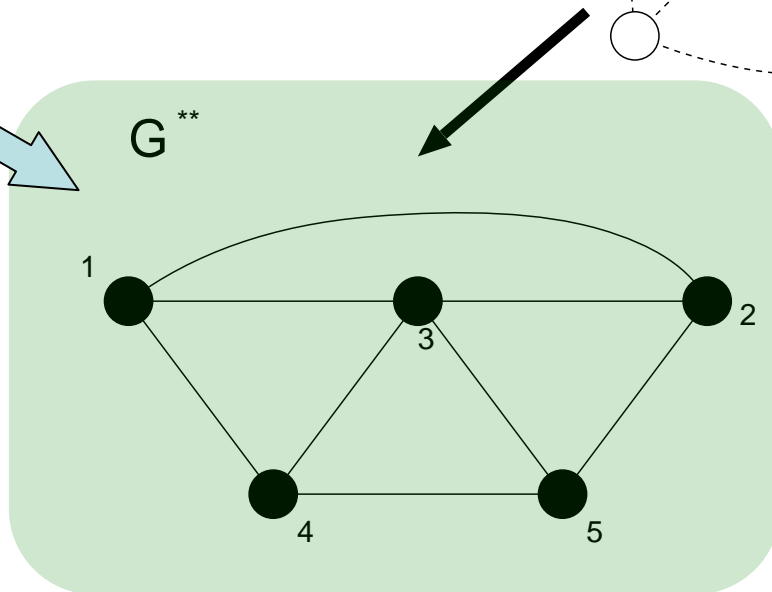
* は同じ時間帯にあってはならない講義

例題9.2の1



グラフGとG**は同型
同型写像の存在については
講義ノートを参照

定理15.2



例題9.2の1の(1)

G に含まれる任意の点 v について

$$\delta \leq \deg(v) \text{ と仮定すると } n\delta \leq \sum_{v \in V(G)} \deg(v) = 2m$$

ぎりぎり次数 δ の点が含まれると仮定する

G には三角形はないので

$$4 \leq \deg(F) \therefore 4f \leq \sum_{F \in \mathcal{F}(G)} \deg(F) = 2m$$

オイラーの公式: $f = 2 - n + m$ より f を消去して $m \leq 2n - 4$

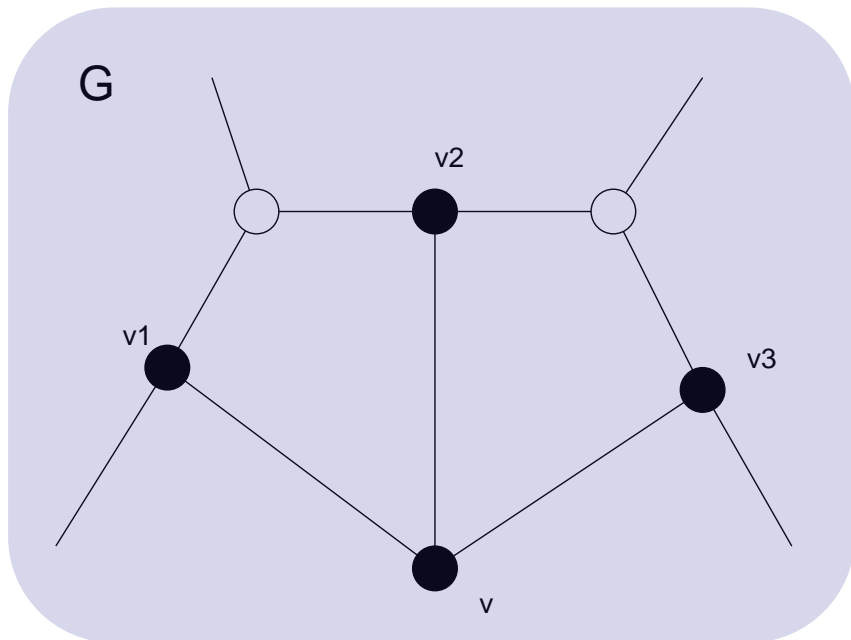
$$\therefore n\delta \leq 2m \leq 2(2n - 4)$$

つまり、 $\delta \leq 4 - \frac{8}{n}$

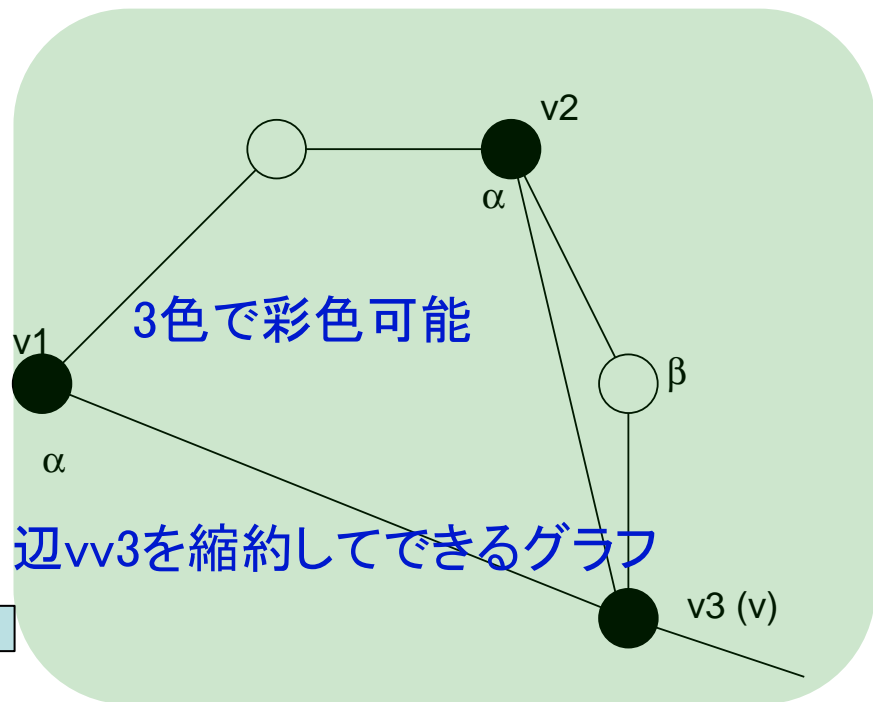
n は 8 以上なので
(講義ノート参照) 題意が成立する。

握手補題より

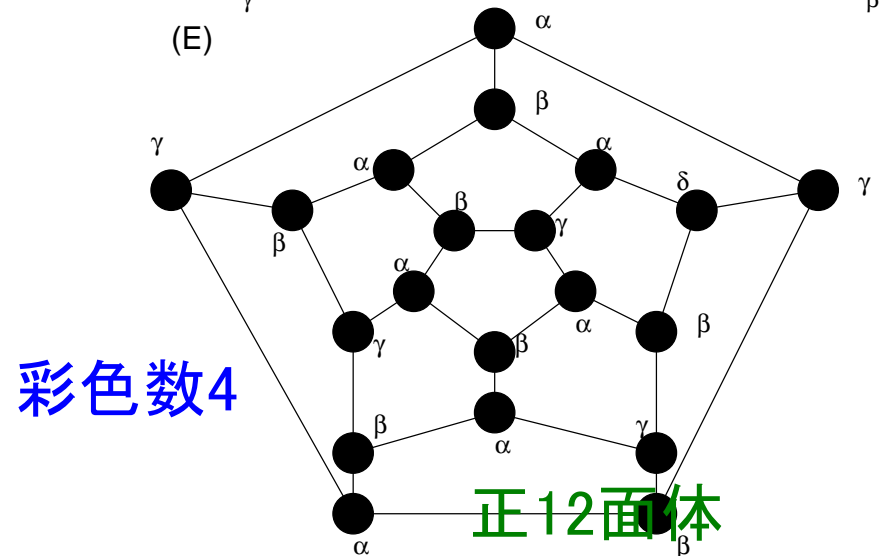
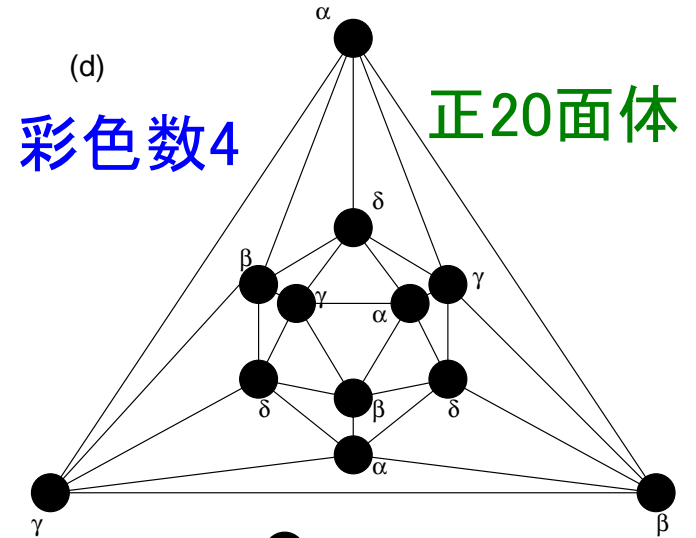
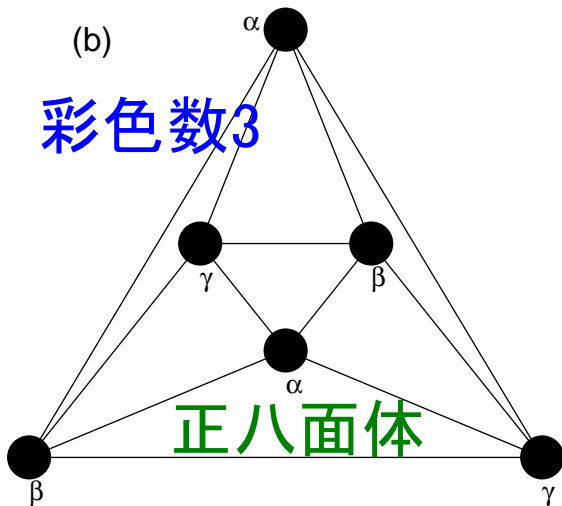
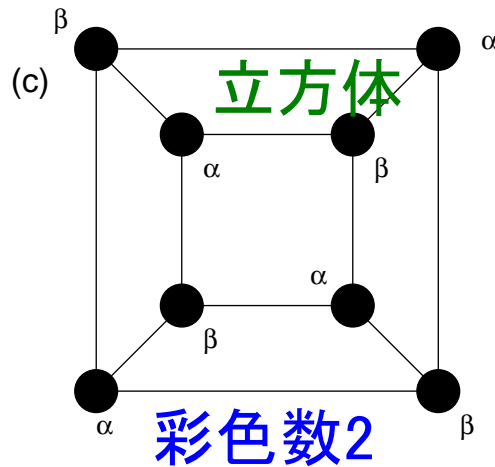
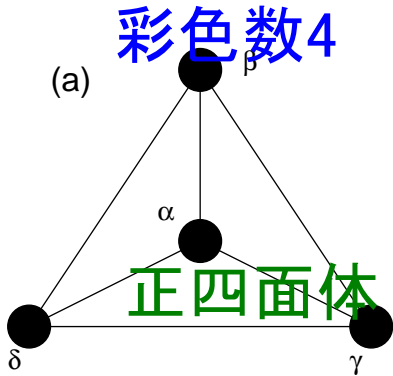
例題9.2の1の(2)



点 v を元に戻し、
 α 、 β と異なる色で塗れば
グラフ G の3彩色が完成

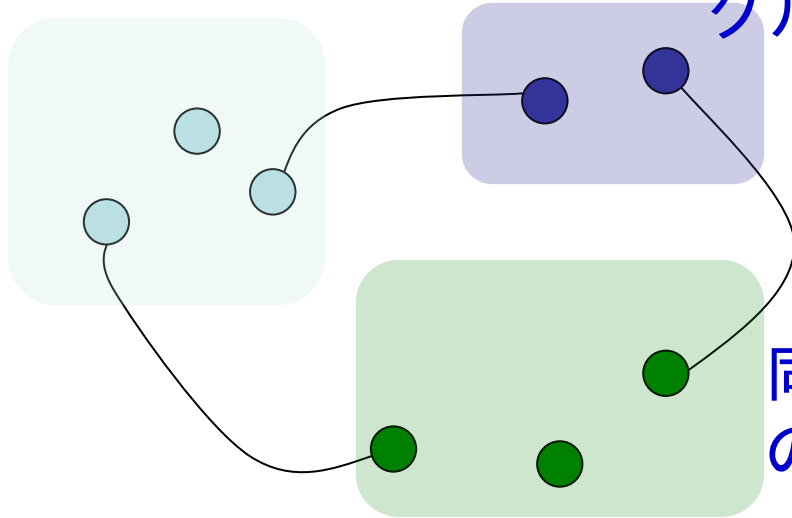


例題9.3 (プラトン・グラフの彩色)



例題9.4

辺が現れるのは異なる
グループに属する点の間のみ



同じ色で彩色されたグループ内の
点どうしは結ぶことはできない

従って、考えるグラフ G の辺 m は

$m \geq \chi(G) C_2 = \frac{1}{2} \chi(G)(\chi(G) - 1)$ が成り立つべき。

これを $\chi(G)$ について解いて $\chi(G) \leq \frac{1 + \sqrt{8m + 1}}{2}$

演習問題9

$\Delta(G)$ を単純グラフ G に属する最大次数とする. このとき, 任意の単純グラフ G に対して

$$\chi(G) \leq 1 + \Delta(G)$$

が成り立つことを示せ.