経済学研究　*57-2*
北海道大学　2007.9

生産理論に関する或る考察

田　中　嘉　浩

1．はじめに

経済理論は静学分析に於いては大幅に数理計画に基いており，扱う関数クラスの一般化を必要としているが，その方向の文献はまだ限られている (Diewert [5], Avriel, Diewert, Schaible, Zang [2])。特に，生産理論は消費者理論と同様に，Hicks [6], Shephard [18], Shephard [19] や Samuelson [17] 等多くの研究者に依って最適化の観点から研究されてきた。

我々は主に現代ミクロ経済理論の２つの基本的な生産モデル，利潤最大化モデルと費用最小化モデルを，比較静学の立場から扱う。

関数が微分可能な場合には，(1) Hotelling の補題は，出力や入力と利潤関数の価格や要素価格に関する偏微分の間の関係，(2) Shephard の補題は，条件付き要素需要と費用関数の要素価格に関する偏微分の間の関係，をそれぞれ確立していることは経済学の文献に十分に書かれている。特に，何人かの研究者 (Samuelson [16], Shephard [18]) は，幾つかの条件の下で経済学の双対定理に関連して費用最小化モデルを調べた。

一方，最適化理論に於ける非滑解析は数理計画の適用範囲を拡張する為に多くの研究者 (e.g., Clarke [3]) に依って試みられてきた。より最近，Rockafellar and Wets [15] は実汎関数のより幅広い扱いを目指した変分解析を統合した。

本稿には直接の関係はないが，最近は束論 (lattice theory) や劣モジュラ関数等離散数学の導入もされ始めており，静学分析 [11] や交換経済 [21] 等への適用が為されつつあるが，その方向も大きな発展が望まれることを付記しておきたい。

本稿では，我々は非滑最適化の枠組みの下で劣微分や Clarke の劣微分を用いながら従来の結果を拡張し，一般 Hotelling の補題や 一般 Shephard の補題を示す。ところで，経済学にも数理計画にも解の連続性を扱った文献は殆どないのも注意すべきである。解の連続性を保証するには線形生産関数ですら十分ではない。本稿では強準凹性の概念を導入し，条件付き要素需要関数 $x(w)$ の連続性を保証する十分条件――緩い条件の下で必要条件にもなる――を調べる。最後に，感度分析に関する結果を述べる。

2．準　備

まず最初に，便宜のために，非滑解析に於ける幾つかの定義を簡潔に纏める。関数 f で，どの $x \in \mathbb{R}^n$ に対して $\delta > 0$ と $c > 0$ が存在して，$\| z - x \| \leq \delta$, 但し $\| \cdot \|$ は $\mathbb{R}^n$ の任意のノルム，$\| y - x \| \leq \delta$ ならば， $|f(y) - f(z)| \leq c \| y - z \|$ を満たす時その時に限り局所リプシッツ連続という。関数 f が局所リプシッツ連続ならば，一般方向微係数 $f^\circ(x; d)$ は

$$f^\circ(x;d) = \limsup_{y\to x,\ t\downarrow 0} \frac{f(y+td)-f(y)}{t}, \tag{1}$$

に依って定義され，それは Clarke の劣勾配 $\xi \in \partial f(x)$ を用いれば

$$f^\circ(x;d) = \sup\{\xi^T d \mid \xi \in \partial f(x)\} \quad \text{for any } x \text{ and } d. \tag{2}$$

と等価である（Clarke [3] の 命題 2.1.2 を見よ)。関数 f が更に凸ならば，$\partial f(x)$ は通常の劣微分 $\partial^c f(x)$ (cf. Rockafellar [14]) に一致し，$f^\circ(x;d)$ はどの d に対しても方向微係数 $f'(x;d)$ に一致する。

我々は本稿を通じて生産理論の次の２つの基本モデルを考える。

利潤最大化モデル

$$\begin{array}{llll} (P_{max}) & \pi(p,w) = & \text{maximize} & py - w^T x \\ & & \text{subject to} & f(x) \geq y, \\ & & & x \in \mathbb{R}^n_+,\ y \geq 0, \end{array}$$

但し，$x \in \mathbb{R}^n_+$ は入力ベクトル，$y \in \mathbb{R}_+$ は出力，$p \in \mathbb{R}_+$ は価格，$w \in \mathbb{R}^n_+$ は要素価格，$f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ は生産関数，を満たす $x(p,w)$ と $y(p,w)$ を求めよ。

費用最小化モデル

$$\begin{array}{llll} (C_{min}) & C(w,y) = & \text{minimize} & w^T x \\ & & \text{subject to} & f(x) \geq y, \\ & & & x \in \mathbb{R}^n_+,\ y \geq 0, \end{array}$$

但し，$x \in \mathbb{R}^n_+$ は入力ベクトル，$w \in \mathbb{R}^n_+$ は要素価格，$f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ は生産関数，$y \in \mathbb{R}_+$ は所与の出力，を満たす $x(w,y)$ を求めよ。

我々はまた利潤関数 π は費用関数の Fenchel 双対関数と見れることに気付く。

我々は上述の２つのモデルを上半連続関数の枠組で調べ，３節で一般 Hotelling の補題 や 一般 Shephard の補題を導出する。

関数 $f(x)$ の等量曲線が図１の様に描かれる場合を考える。生産関数が連続な場合（実際，生産関数が線形の場合にさえ (第４節の 例１を見よ)）にさえ，要素需要関数が不連続になり得ることが分る。この不連続性は経済全体に悪影響を及ぼすこともあるが，それが第４節の緩やかな仮定の下でそういう場合を排除する必要十分条件を確立する我々の動機になっている。

３．生産理論の一般化

我々は次の仮定を生産関数におく。

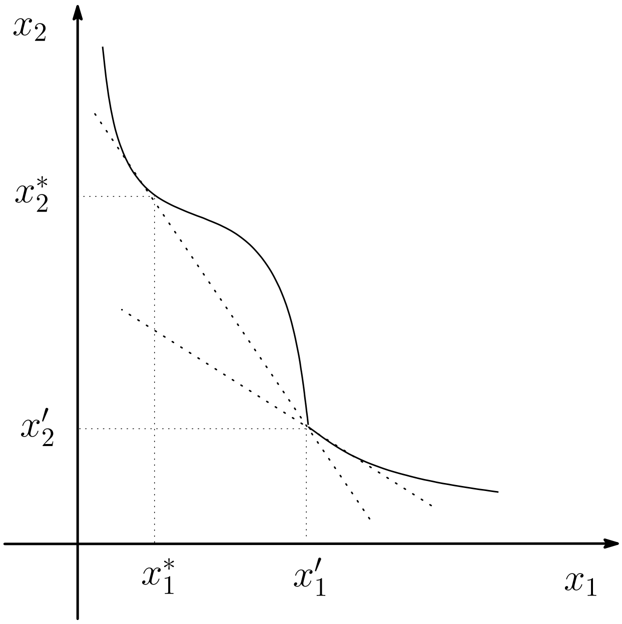

図 1: 生産関数の等量曲線

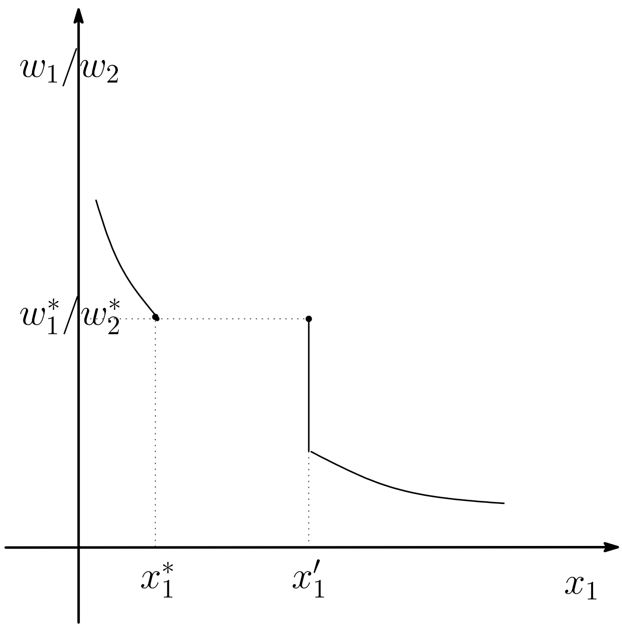

図 2: 要素需要関数

仮定 1　生産関数　$f:\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ は上半連続 *(upper semicontinuous)* 且つ $\forall x > 0$ に対して $f(x) > 0$。

生産可能集合を $Y = \{(y, -x) \mid f(x) \geq y, x \in \mathbb{R}^n_+, y \geq 0\}$ と定義する。
まず利潤最大化問題 (P_{max}) に関する結果を示す。

補題 1　利潤最大化問題 (P_{max}) に於いて，f が上半連続且つ $f(x) = O(x)$ であると仮定する。その時，$\pi(p, w)$ は或る正定数 c が存在して $\| p \| \leq c \| w \|$ に対して Y 内に最大値を持つ。更に，$\pi(p, w)$ は (p, w) に関して 1 次同次且つ凸である。

［証　明］　生産関数 f の上半連続性から集合 $\{(x, y) \mid f(x) \geq y, x \in \mathbb{R}^n_+, y \geq 0\}$ は閉であり，$\| p \| \leq c \| w \|, \exists c > 0$ の下で問題 (P_{max}) は最大値を持つ。
証明の残り（$\pi(p, w)$ の 1 次同次性，凸性）は Varian [25] と同様である。∎

一般 Hotelling の補題を確立する。

定理 1　利潤最大化問題 (P_{max}) に於いて，$f:\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ を上半連続と仮定する。$\bar{x}, \bar{y}$ を (P_{max}) の内点解，即ち，$\pi(\bar{p}, \bar{w}) = \bar{p}\bar{y} - \bar{w}^T\bar{x} = \max\{\bar{p}\ y - \bar{w}^T x \mid f(x) \geq y, x \geq 0\}$ とする。その時，π の p, w に関する $(\bar{p},\ \bar{w})$ での劣微分が存在して，

$$
\begin{aligned}
\bar{y} &\in \partial^c_p \pi(\bar{p}, \bar{w}) \\
-\bar{x}_j &\in \partial^c_{w_j} \pi(\bar{p}, \bar{w}), \quad j = 1, ..., n,
\end{aligned}
\tag{3}
$$

但し，$\bar{x}, \bar{y}$ は (P_{max}) の $(\bar{p}, \bar{w})$ での解，を満たす。

［証　明］　$\bar{x}, \bar{y}$ を (P_{max}) の $(\bar{p}, \bar{w})$ に関する利潤最大解とする。$\phi(p, w)$ を

$$\phi(p, w) = \pi(p, w) - (p\bar{y} - \sum_{i=1}^{n} w_i \bar{x}_i),$$

で定義すると，$\phi(\bar{p}, \bar{w}) = 0$ である。$\pi(p, w)$ の定義から

$$\phi(p, w) \geq 0 = \phi(\bar{p}, \bar{w}),$$

が成立する。それ故に，補題 1 から

$$0 \in \partial^c_p \phi = \partial^c_p \pi - \bar{y},$$

$$0 \in \partial^c_{w_j} \phi = \partial^c_{w_j} \pi + \bar{x}_j, \quad j = 1, ..., n.$$

が従う。∎

次に，費用最小化問題 (C_{min}) に関する結果を示す。

補題 2　費用最小化問題 (C_{min}) に於いて， $f:\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ は上半連続と仮定する。その時 $C(w,\cdot)$ は w に関して一次同次，$w>0$ に対して Y に最小値を持つ。更に，$C(\cdot,y)$ は w に関して凹になる。

［証 明］　$C(w,\cdot)$ の一次同次性は直ちに定義から従う。$y^0 \in Y$ に対して，集合 $\{y \mid C(w,y) \le C(w,y^0)\}$ は有界且つ $C(w,\cdot)$ が y について下半連続なので，コンパクトである (Avriel, Diewert, Shaible, and Zang [2], Theorem 4.1 (g) を見よ)。 それ故に $C(w,\cdot)$ は $w>0$ に対して Y に最小値を持つ。 $C(\cdot,y)$ の凹性は Avriel, Diewert, Shaible, and Zang [2], Theorem 4.1(d) から従う。∎

上の結果は f の連続性すら必要としないことに気付くべきである。
　次に一般 Shephard の補題を確立する。

定理 2　費用最小化問題 (C_{min}) に於いて， $f:\mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ は上半連続と仮定する。$\bar{x}$ を *(C_{min})* の解，即ち， $C(\bar{w},\bar{y}) = \bar{w}^T\bar{x} = \min\{\bar{w}^T x \mid f(x) \ge \bar{y}, x \ge 0\}$ とする。 その時，$\bar{w}$, $\bar{y}$ で C は w に関して *Clarke* 劣微分可能で，

$$\bar{x} \in \partial_w C(\bar{w},\bar{y}) = -\partial^c_w(-C)(\bar{w},\bar{y}), \tag{4}$$

但し，$\bar{x}$ は $w=\bar{w}$, $y=\bar{y}$ での *(C_{min})* の解，を満たす。

［証 明］　まず $C(w,\bar{y})$ が f に関する連続性すらなしに，f が準凹であろうがなかろうが補題2 から w に関して凹になることに注意しよう。
$\psi(w)$ を

$$\psi(w) = C(w,\bar{y}) - w^T\bar{x},$$

と定義すると，$\psi(\bar{w})=0$。 $\psi(w)=0$ の定義から

$$\psi(w) \le 0 = \psi(\bar{w}) \qquad \text{for} \quad w \in \{w \mid w_i > 0\},$$

が成立する。それ故に，$\psi(w)$ は $w=\bar{w}$ で大域的最大解を満たすので，

$$0 \in \partial_w \psi(\bar{w}) = \partial_w C(\bar{w},\bar{y}) - \bar{x},$$

換言すれば，

$$\bar{x} \in \partial_w C(\bar{w},\bar{y}) = -\partial^c_w(-C)(w^*,y^*),$$

この等式は

$$\partial^c(-\varphi)(x) = \partial(-\varphi)(x) = -\partial\varphi(x), \quad \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

が Clarke [3], Proposition 2.2.7 and 2.3.1 から任意の局所リプシッツ連続の凹関数 φ に対して成立することから成立する。∎

Clarke 劣微分 $\partial_w C(\bar{w},\bar{y})$　は費用関数が微分可能な所では唯一だがカド点では閉区間なので，カド点は Lebesgue 測度の意味で最小解になり易いことに注意しよう。実際，W. Brian Arthur [1] に依る「ロックイン」現象は，収益逓増の費用関数の等量曲線が凹なので，曲線に沿ってカド点が生

じることから同様の議論で説明できる。上の結果は要素価格 w の摂動に関する感度分析とみなせることにも注意しよう。しかしながら，一般に $C(\cdot, y)$ が凹ならば $x(w)$ が連続とはならないので，次節で連続性に関して追究する。

4．感度分析

費用最小化問題に於いて，費用関数 C が凹ならば生産関数 f が局所リプシッツ連続とは限らない。更に，条件付き要素需要関数 $x(w)$ は目的関数 $C(w, \bar{y})$ が連続でさえ，不連続になり得る。この現象は $x(w)$ の劇的な変化（や不安定性），それは $x(w)$ が一旦選ばれたらロックインされがちだが，現代ハイテク経済を説明し得る収益逓増を基礎にした W. Brian Arthur [1] の経済理論に現れるものである。$x(w)$ が w に関して不連続に大きく変化するならば，$x(w)$ は他企業に関連した入力ともみなせるので全体経済に悪影響を及ぼす。

$x(w)$ が安定になる条件を考えよう。生産関数 f が線形でさえ，$x(w)$ が安定とは限らないことは注意すべきである。 関数 f が滑らかな時，こんな好ましくない現象を避ける為には，f の曲率が 0 でないことが十分である。

先に進む前に，

$$C(w, y) = \min_x \{w^T x \mid f(x) \geq y, x \geq 0\},$$

と

$$f^{**}(x) = \max_y \{y \in Y \mid C(w, y) \leq w^T x, \quad \text{for every } w > 0\}.$$

で定義される費用最小化問題を考えよう。

定義　関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は $f = f^{**}$ その時に限り反射的（*reflexive*）という。

定理 3　関数 f を上半連続且つ非増加と仮定する。関数 f が準凹ならばその時に限り f は反射的である。

［証 明］　十分性：　Avriel, Diewert, Schaible, Zang [2], Theorem 4.5 から従う。

必要性：　反射性は，$U(f, y)$ の閉性と $U(f, y)$ の境界の任意の点で費用関数に対応する接線の存在を保証する過程の下で凸性と等しい。その時，結果は Mangasarian [10], Theorem 9.1.3 から従う。 ∎

我々は関数 f が上半連続ならば $C(w, \cdot)$ は不連続になり得るので，f のより制限的なクラス――局所リプシッツ連続関数のクラス――を考える。

仮定 2　$f: \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ は局所リプシッツ連続である。

定義　関数 $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ は，$\alpha > 0$ が存在して，

$$f(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min\{f(x_1), f(x_2)\} + \lambda(1-\lambda)\alpha \parallel x_1 - x_2 \parallel^2 \tag{5}$$

for all x_1 and x_2 and all $\lambda \in [0,1]$ を満たす時に強準凹 (*strongly quasiconcave*) と呼ばれる。

関数 f は収益逓減の通常の場合に相当し包括的な理論を構築するので，通常は準凹と仮定してよい。実際，それは通例の生産問題に幅広い応用を持つ。

我々は $x(w)$ の連続性を保証する次の定理を確立する。

定理 4　関数 f を局所リプシッツ連続且つ反射的と仮定する。$x_1 = x(w_1)$ *and* $x_2 = x(w_2)$ は費用最小化問題の内点解とも仮定する。その時，条件付き要素需要関数 $x(w_1)$ が局所リプシッツ連続ならば，即ち，全ての $y < y_0$, $y_0 = \sup f(x)$ に対して，$M_y > 0$ が存在して，$x \in U(f, y) = \{x \mid f(x) \geq y\}$, $g \in \partial f(x)$ ならば $\| g \| \leq M_y$，及び $\delta w = w_2 - w_1$, $\| w \| > 0$ に対して，

$$\| \delta x \| \leq \frac{M_y \| \delta w \|}{\alpha \| w_1 + \delta w \|} \to 0 \quad (\delta w \to 0). \tag{6}$$

が成立する時その時に限り，f は強準凹である。

［証　明］　必要性：　$x_2 = x_1 + \delta x$, $w_2 = w_1 + \delta w$ とする。その時，x_1, x_2 は費用最小化問題の内点解なので内向きの単位法線ベクトルを $p_1 = w_1 / \| w_1 \|$, $p_2 = w_2 / \| w_2 \|$ と選ぶことに依り， Vial [26], Corollary 1 の証明と同様に，

$$\begin{aligned}
\| \delta x \| = \| x_2 - x_1 \| &\leq \frac{M_y}{2\alpha} \cdot \| p_2 - p_1 \| \\
&= \frac{M_y}{2\alpha} \cdot \left\| \frac{w_2}{\| w_2 \|} - \frac{w_1}{\| w_1 \|} \right\| \\
&= \frac{M_y}{2\alpha} \cdot \left\| \frac{\| w_1 \| (w_1 + \delta w) - \| w_1 + \delta w \| w_1}{\| w_1 \| \| w_1 + \delta w \|} \right\| \\
&= \frac{M_y}{2\alpha} \cdot \frac{\| \, \| w_1 \| \delta w - (\| w_1 + \delta w \| - \| w_1 \|) w_1 \, \|}{\| w_1 \| \| w_1 + \delta w \|} \\
&\leq \frac{M_y}{2\alpha} \cdot \frac{\| w_1 \| \| \delta w \| + \| (\| w_1 + \delta w \| - \| w_1 \|) w_1 \|}{\| w_1 \| \| w_1 + \delta w \|} \\
&\text{(Schwartz's inequality)} \\
&\leq \frac{M_y}{2\alpha} \cdot \frac{\| w_1 \| \| \delta w \| + (\| w_1 \| + \| \delta w \| - \| w_1 \|) \| w_1 \|}{\| w_1 \| \| w_1 + \delta w \|} \\
&\text{(Minkowski's inequality)} \\
&= \frac{M_y}{2\alpha} \cdot \frac{2 \| w_1 \| \| \delta w \|}{\| w_1 \| \| w_1 + \delta w \|} \\
&= \frac{M_y}{\alpha} \cdot \frac{\| \delta w \|}{\| w_1 + \delta w \|} \to 0 \quad (\delta w \to 0).
\end{aligned}$$

十分性：　Poliquin and Rockafellar [13], Theorem 1.3 から従う。実際，$x(w)$ の局所リプシッツ

性から x は f の tilt-stable 局所最小解となるので，$\partial^2 f(x|0)$ は正定値であり，任意の x_1 と x_2 に対して (5) に $\alpha > 0$ が存在する。 ∎

次に，出力変数 y の摂動に関する感度分析を考える。

制約想定 (CQ): (C_{min}) の解 $\bar{x}$ に於いて，

$$\sum_{\{j|x_j^*=0\}} \mu_j e_j \in \partial(\lambda(y - f(\bar{x}))), \tag{7}$$

但し，e_j は j 番目の単位ベクトル，を満たす (λ, μ) は，$(\lambda, \mu) = (0, 0) \in \mathbb{R}_+^{n+1}$ 以外には存在しない。

費用最小化問題 (C_{min}) に於いて，摂動問題 $(C_{min}(p))$ を次の様に定義する：

$$\begin{aligned} (C_{min}(p)) \quad \mathcal{C}(p) = \quad & \text{minimize} && w^T x \\ & \text{subject to} && f(x) \geq y + p, \\ & && x \geq 0. \end{aligned}$$

仮定 3　$f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ は局所リプシッツ連続，$\bar{x}_i$ が有界であり，コンパクト部分集合 $\Omega \in \mathbb{R}_+^n$ と $\epsilon_0 > 0$ が存在して，*$(C_{min}(p))$* がその解を Ω 内に持ち，$\mathcal{C}(p) < \mathcal{C}(0) + \epsilon_0, \forall p < \epsilon_0$ を満たす。

Σ を Ω 内の (C_{min}) の解集合とし， $M(\Sigma) = \cup_{\bar{x} \in \Sigma} M(\bar{x})$ 但し $M(\bar{x})$ を $\bar{x}$ に対応するラグランジュ乗数とする。

定理 5　生産関数 $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ が局所リプシッツ連続，且つ制約想定（ＣＱ）と仮定３が成立すると仮定する。また，Σ が単一点 $\bar{x}$ であると仮定する。その時，$\mathcal{C}$ は 0 で局所リプシッツ連続であり，

$$\begin{aligned} \partial_y C(w, y) &= \partial \mathcal{C}(0) \subset M(\bar{x}) \\ &= \{\lambda \mid w - \mu \in \lambda \partial f(\bar{x}), \quad \lambda \geq 0, \mu \geq 0, \ \mu_j = 0 \ if \ \bar{x}_j > 0\}. \end{aligned}$$

を満たす。

［証 明］　Clarke [3], Corollary 1 of Theorem 6.5.2 から直ちに従う。 ∎

f がまた準凹ならば，制約想定 (CQ) は次の様に簡単化される。

さて，関数 $\phi : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}$ に対してレベル集合 S を $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x) \geq \phi(x^0)\}$，距離関数 $d_S(\cdot) : X \to \mathbb{R}$ を

$$d_S(x^0) \equiv \inf\{\| x^0 - c \| | \, c \in S\},$$

閉凸錘 $\mathcal{T}(S;x^0)$ を

$$\mathcal{T}(S;x^0) \equiv \{d \in \mathbb{R}^n \mid d_S^\circ(x^0;d) = 0\},$$

接錘 $T(x^0)$ を

$$T(x^0) \equiv \{d \in \mathbb{R}^n \mid \exists t_k \downarrow 0,\ d_k \to d,\ \text{with}\ \ x + t_k d_k \in S, \quad \forall k\},$$

極錘 $N(x^0)$ を

$$N(x^0) \equiv \{\zeta \in \mathbb{R}^n \mid \langle \zeta, d\rangle \leq 0, \quad \forall d \in T_i(x^0)\},$$

で定義する。 次の補題が成立する。

補題 3　$\phi : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ は局所リプシッツ連続な準凹関数とする。$0 \notin \partial\phi(x^0)$ を仮定する。その時,

$$N(x^0) \subset -\mathbb{R}_+ \partial\phi(x^0), \tag{8}$$

更に ϕ が正則ならば

$$N(x^0) = -\mathbb{R}_+ \partial\phi(x^0). \tag{9}$$

が成立する。

［証 明］　$T(x^0)$ の定義と ϕ の局所リプシッツ連続性, S の凸性から, $T(x^0)$ は Hiriart-Urruty [8], Theorem 2 への Remark 2 の様に

$$T(x^0) = \mathcal{T}(S;x^0) = \mathrm{cl}\ \{\mathbb{R}_+(\mathrm{cl}\ S - x^0)\}. \tag{10}$$

その時, $-\phi$ を [8], Proposition 4 への Remark 1 の g_i とみなせば,

$$N(x^0) \subset -\mathbb{R}_+ \partial\phi(x^0).$$

但し ϕ の局所リプシッツ連続性から, $\partial\phi(x^0)$ は非空, が成立する。

逆に, ϕ が正則ならば, Clarke [3], Theorem 2 から $S = \{x \in \mathbb{R}^n \mid (-\phi)(x) \leq (-\phi)(x^0)\} = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \phi(x^0) \leq \phi(x)\} = L_\phi^{\geqq}(\phi(x^0))$ に対して,

$$\begin{aligned}\{d \in \mathbb{R}^n \mid (-\phi)^\circ(x^0;d) \leq 0\} &= \{d \in \mathbb{R}^n \mid \phi^\circ(x^0;d) \leq 0\} \\ &= \{d \in \mathbb{R}^n \mid \max_{\xi \in \partial\phi(x^0)} \langle \xi,\ -d\rangle \leq 0\} \\ &= \{d \in \mathbb{R}^n \mid \max_{\xi \in \partial\phi(x^0)} \langle -\xi,\ d\rangle \leq 0\} \\ &= T_S(x^0) = \ T(x^0).\end{aligned}$$

その時,

$$\langle -\xi,\ d\rangle \leq 0, \quad \forall \xi \in \partial\phi(x^0), \quad \forall d \in T(x^0),$$

が成立するので

$$-\mathbb{R}_+ \partial\phi(x^0) \subset N(x^0)$$

となる。 それ故に，ϕ が正則ならば，

$$N(x^0) = -\mathbb{R}_+\partial\phi(x^0).$$

が成立する。 ∎

次の制約想定も知られている。

制約想定 (Hiriart-Urruty [7]):

$$\exists d \in \mathcal{T}(\mathbb{R}^n_+, \bar{x}), \quad (-f)^\circ(\bar{x}; d) < 0.$$

結局，f が準凹ならば，(C_{min}) に於いて制約想定は次の様に簡単化される。

定理 6 費用最小化問題 (C_{min}) に於いて，$f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ は局所リプシッツ連続な準凹関数と仮定する。或る x', $\bar{x} \geq 0$ に対して $f(x') > y$ 且つ $f(\bar{x}) = y$ とする。

$$0 \notin \partial f(\bar{x}) \tag{11}$$

が成立するならば，$f(x)$ は *Hiriart-Urruty* の制約想定を満たす。

［証 明］ 接錘 $T(\bar{x})$ は閉凸錘であり，f が $0 \notin \partial f(\bar{x})$，局所リプシッツ連続かつ準凹ならば，

$$N(\bar{x}) \subset -\mathbb{R}_+\partial f(\bar{x}), \tag{12}$$

但し，$N(\bar{x}) = \{\zeta \mid \langle\zeta, d\rangle \leq 0, \forall d \in T(\bar{x})\}$ が 補題３ から従う。
ここで，$(0 \neq)\ x' - \bar{x} \in \text{int}\ T(\bar{x})$ を取ると，

$$\begin{aligned} f^\circ(\bar{x}; x' - \bar{x}) &= \max\{\langle\xi, x' - \bar{x}\rangle \mid \xi \in \partial f(\bar{x})\} \\ &\geq \langle\xi, x' - \bar{x}\rangle, \quad x' - \bar{x} \in \text{int}\ T(\bar{x}). \end{aligned}$$

及び (12) から $0 \neq \exists\xi^0 \in -\partial f(\bar{x}) \cap -N(\bar{x})$ に対して $\langle\xi^0, x' - \bar{x}\rangle > 0$ だから，

$$\langle\xi, x' - \bar{x}\rangle > 0$$

なので，

$$f^\circ(\bar{x}; x' - \bar{x}) > 0$$

を得る。実際，上と同様に $\langle\xi, x' - \bar{x}\rangle < 0$ に注意すると，

$$\begin{aligned} f^\circ(\bar{x}; \bar{x} - x') &= \max\{\langle\xi, \bar{x} - x'\rangle \mid \xi \in \partial f(\bar{x})\} \leq \max\{\langle -\xi, x' - \bar{x}\rangle \mid \xi \in \partial f(\bar{x})\} \\ &< 0. \end{aligned}$$

だから，Clarke [3], Proposition 2.1.1(c) から

$$(-f)^\circ(\bar{x}; x' - \bar{x}) = f^\circ(\bar{x}; \bar{x} - x') < 0$$

が成立するので，Hiriart-Urruty の制約想定を満たす。 ∎

例 1　次の費用最小化問題——それは線形計画問題になるが——を考えよう。

$$\begin{aligned} &\text{minimize} && w^T x \\ &\text{subject to} && a^T x \geq y, \\ &&& x \geq 0, \end{aligned}$$

但し，$a^T x,\ a \in \mathbb{R}^n_+$ は線形生産関数である。

最適解は簡単な計算で，

$$\bar{x}_i = \begin{cases} \frac{w_k}{a_k} = \min_i \frac{w_i}{a_i}, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$

と求まる。その時，$\partial_y C(w, y) = w_k/a_k$ $(= c_B^T B^{-1}$；慣習的には被約費用 (*reduced cost*)) は価格が $\partial_y C(w, y)$ を越えると生産量は増加するので生産物の潜在価格 (*shadow price*) になる。この場合，目的関数の変化は $o(\delta C) = o(\delta y)$，但し $o(\cdot)$ は Landau の記号; しかしながら，生産関数は強準凹でなく線形（微分可能且つ凹だが）なので入力の変化は $o(\delta x) > o(\delta w)$ となる。

5．結　論

我々は上半連続関数の枠組みの下での生産理論で一般 Hotelling の補題 と 一般 Shephard の補題 を提案した。

我々はまた，局所リプシッツ連続関数の枠組の下で費用最小化問題に対する感度分析の結果を提案した。w の変化に関する x の変化は不安定であり，問題の強準凹性の仮定がなければ大きく変化しうる。目的関数値の変化はラグランジュ乗数で表されるが，生産物の潜在価格とみなすことができる。

強準凹生産関数は最適解の連続性，可解性，安定性を保証する重要なクラスの関数である。将来的にはこの観点から局所リプシッツ連続且つ準凹計画問題に対する最適性の条件を特徴付けていきたい。

参考文献

[1] W. Brian Arthur, “Increasing returns and the new world of business,” *Harvard Business Review*, July-August 1996, 100–109.

[2] M. Avriel, W.E. Diewert, S. Schaible, and I. Zang, *Generalized Concavity*, Plenum Press, New York, 1988.

[3] F.H. Clarke, *Optimization and Nonsmooth Analysis*, Wiley, New York, 1983.

[4] C.W. Cobb and P.H. Douglas, “A theory of production,” *American Economic Review*, **18** (1928), 139–165.

[5] W.E. Diewert, "Duality approaches to microeconomic theory," in: *Handbook of Mathematical Economics, vol. II*, (K.J. Arrow and M.D. Intriligator eds.), North-Holland, 1982.

[6] J. Hicks, *Value and Capital*, Clarendon Press, England, 1946.

[7] J.B. Hiriart-Urruty, "On optimality conditions in nondifferentiable programming," *Mathematical Programming*, **14** (1978), 73–86.

[8] ____, "Tangent cones, generalized gradients and mathematical programming in Banach spaces," *Mathematics of Operations Research*, **4** (1979), 79–97.

[9] H. Hotelling, "Edgeworth's taxation paradox and the nature of demand and supply function," *Journal of Political Economy*, **40** (1932), 577–616.

[10] O.L. Mangasarian, *Nonlinear Programming*, SIAM, Philadelphia, 1994.

[11] P. Milgrom and C.Shannon, "Monotone comparative statics,"*Econometrica*, **62** (1994), 157-180.

[12] H. Minkowski, "Theorie der konvexen körper in besondere begründing ihrs oberflächenbegriffs," in: *Gesammelte Abhandlungen II*, (B.G. Teubner ed.), Leipzig, Germany, 1911.

[13] R.A. Poliquin and R.T. Rockafellar, "Tilt stability of a local minimum", *SIAM Journal on Optimization*, **8** (1998), 287–299.

[14] R.T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[15] R.T. Rockafellar and R.J-B. Wets, *Variational Analysis*, Springer, Berlin, 1998.

[16] P.A. Samuelson, "Prices of factors and goods in general equilibrium," *Review of Economic Study*, **21** (1953—1954), 1–20.

[17] ____, *Foundations of Economic Analysis, 2nd Edition*, Harvard University Press, Cambridge, 1983.

[18] R.W. Shephard, *Cost and Production Functions*, Princeton University Press, Princeton, 1953.

[19] ____, *The Theory of Cost and Production Functions*, Princeton University Press, Princeton, 1970.

[20] J.E. Stiglitz, *Economics – 2nd Edition*, Norton, New York, 1996.

[21] N. Sun and Z. Yang, "Equilibra and indivisibilities: gross substitutes and complements," *Econometrica*, **74** (2006), 1385–1402.

[22] T. Suzuki, "Nonconvex production economics," *Journal of Economic Theory*, **66** (1995), 158–177.

[23] Y. Tanaka, "Note on generalized convex functions," *Journal of Optimization Theory and Applications*, **66** (1990), 345–349.

[24] ____, "Nonsmooth quasiconcave programming," *Optimization Online*, 2007-01-1567, 2007.

[25] Hal R. Varian, *Microeconomic Analysis — 3rd Edition*, Norton, New York, 1992.

[26] J.-P. Vial, "Strong convexity of sets and functions", *Journal of Mathematical Economics*, **9** (1982), 187–205.