



|                  |                                                                                           |
|------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------|
| Title            | 中学校幾何教育カリキュラムの再構成：平面幾何学の公理系について                                                           |
| Author(s)        | 高橋, 哲男                                                                                    |
| Citation         | 北海道大学大学院教育学研究科紀要, 84, 209-233                                                             |
| Issue Date       | 2001-12                                                                                   |
| DOI              | <a href="https://doi.org/10.14943/b.edu.84.209">https://doi.org/10.14943/b.edu.84.209</a> |
| Doc URL          | <a href="https://hdl.handle.net/2115/28839">https://hdl.handle.net/2115/28839</a>         |
| Type             | departmental bulletin paper                                                               |
| File Information | 84_P209-233.pdf                                                                           |



# 中学校幾何教育カリキュラムの再構成

— 平面幾何学の公理系について —

高 橋 哲 男

## Curriculum Reform of Geometry Education in Junior High School: With a Focus on System of Axioms in Plane Geometry

Tetsuo TAKAHASHI

### 目 次

|     |                   |     |
|-----|-------------------|-----|
| 1   | 中学校幾何教育の現状と課題     | 209 |
| 1.1 | 本研究の課題            | 209 |
| 1.2 | 中学校学習指導要領幾何分野の全体像 | 210 |
| 1.3 | 小学校幾何教育における先行研究   | 212 |
| 2   | カリキュラム再構成の柱と現在の状況 | 213 |
| 2.1 | 公理系の設定の問題         | 213 |
| 2.2 | 「証明」の問題           | 215 |
| 2.3 | 現在までの状況           | 216 |
| 3   | 第一単元の教育内容・教材構成論   | 217 |
| 3.1 | 小学校での既習事項との関連     | 217 |
| 3.2 | 角の定義              | 217 |
| 3.3 | 平行の定義             | 218 |
| 3.4 | 各問題の解説と授業の展開      | 221 |
| 4   | 第二単元の教育内容・教材構成論   | 226 |
| 4.1 | 線分・長さ・距離          | 226 |
| 4.2 | 三角形の決定条件          | 226 |
| 4.3 | 各問題の解説と授業の展開      | 227 |
| 5   | 今後の課題             | 231 |

### 1 中学校幾何教育の現状と課題

#### 1.1 本研究の課題

「分数で割るときに、なぜ分子と分母をひっくり返してかけるのかがわからない」は、算数で躓いた思い出あるいは数学に対する不信感や嫌悪感を表明する際によく用いられる。「分数ができない」は、残念ながら、「算数・数学ができない」を象徴的に表現するフレーズとなっている。

小学校算数における「分数」のような扱いを受けているものを、中学校数学のなかから探してみる。「負の数」かもしれないし、「因数分解」かもしれない。そして間違いなく、「図形」や

「証明」がそこに含まれる。「はっきり答の出る計算は好きだけれど、図形の証明は何をすればいいのかかわからないから嫌いだ」と思っている中学生は多い。その一方で、工作や折り紙を不愉快な活動・体験として思い出すことはあまりない。鋏で紙を真っ直ぐに切ることは、直線の認識に支えられまたその認識を強固にする。そして、折り紙の世界は美しい対称性の世界を見せてくれる。これらの楽しい活動・体験は幾何学への入口となっている。子どもたちはここからなぜか迷路に入り込み、「図形」を嫌うという誤った出口に到達させられているのである。

では、誤っていない出口とはどこにあるのか。すなわち、幾何教育を通して子どもたちをどこへと導くべきであるのか。それは幾何教育の目的への問いそのものであり、答えることは難しい。二千年来、幾何学は論理的思考力育成のほとんど唯一の道具であると考えられてきた。今日、論理的思考力の育成は幾何学の上に背負わされた課題であると考えられてはいない。それでも、幾何教育の目的のなかに論理的思考力の育成を含める考え方もまた、ほとんど疑われることがない。しかし、こうした目的設定も、「論理とはそもそも何であるのか」や「人類にとって論理的思考にいかなる価値があるのか」を問うたとたんに揺らいでしまうものである。幾何教育の目的はわかっていない。

けれども、幾何教育の目的それだけを取り出しても、宙に浮いた議論にしかないだろう。仮に幾何教育の目的を措定したとしても、その次には目的を達成するための教育内容が必要となる。何かを教えることなしには教育目的の達成はあり得ないからである。しかも、教育内容は指導可能なものでなければならない。学習者に教えることが可能な方法を伴った教育内容であることが必須の要件である。したがって、幾何教育の真の出口の探究は、教育の目的と内容と方法とを一体のものとして論じ、提案することに他ならない<sup>1)</sup>。今、中学校幾何教育に限らず様々な教科教育の領域で、その目的を構想しつつある一定の教育内容のまとまりを教材とともに提案することが、教育方法学研究の課題となっているのである。

須田勝彦を中心とする北海道大学教育学部数学教育研究グループでは、3年ほど前から中学校数学のカリキュラム提案を目指して、単元別 UNI-TEXT づくりを進めてきた。中学校数学入門期の「中学校数学へようこそ」シリーズは、負の数の導入と実数の範囲での基本的な代数法則の獲得を目指して作られ、第一、第二、第三の各単元がすでに報告されている<sup>2)</sup>。これに引き続き、中学校数学の幾何の領域でも、カリキュラムを展望しながら教材を構成し、授業実践に耐え得るような教授プログラムを提案する作業を開始した。中学校の幾何教育全体において、何を教えるべきでありまた教えることが可能であるのか。本論文はその課題を解明する研究の、第一歩に位置づく。

## 1.2 中学校学習指導要領幾何分野の全体像

中学校の幾何教育カリキュラムを考えるにあたり、まず学習指導要領に示される中学校数学・幾何分野の全体像を見ておこう<sup>3)</sup>。2002年度から施行の学習指導要領では、数学の週ごとの時間は第一、第二、第三学年各  $3 \cdot 3 \cdot 3$  の合計9時間になる。現行  $3 \cdot 4 \cdot 4$  から比較すると2時間の減少である。教えるべきとされる項目とその学年配当の変化は、表1の通りである。

大きな変化としてあげられるのは、相似が第二学年から第三学年に移行されたことである。しかし、平面図形の合同と相似から三平方の定理に至る中学校幾何の大目標は守られている。そのほかの変化としては、第一学年の「平行・対称・回転移動」「条件を満たす図形」、「空間図形の切断・投影・展開」のうちの切断と投影、第三学年の「立体図形の面積比と体積比」など

表 1 中学校学習指導要領数学図形分野の内容

| 学年 | 現行学習指導要領 |               | 新学習指導要領 |                      |
|----|----------|---------------|---------|----------------------|
| 1  | 平面図形     | 基本作図          | 平面図形    | 線対称・点対称              |
|    |          | 平行・対称・回転移動    |         | 基本作図                 |
|    |          | 条件を満たす図形      |         |                      |
|    | 空間図形     | 直線や平面の位置関係    | 空間図形    | 直線や平面の位置関係           |
|    |          | 平面図形の運動       |         | 平面図形の運動、空間図形の表現      |
|    |          | 空間図形の切断・投影・展開 |         | 扇形の弧と面積、柱体・錐体の表面積と体積 |
| 2  | 平面図形     | 平行線の性質        | 平面図形    | 平行線や角の性質             |
|    |          | 三角形の合同条件      |         | 多角形の角                |
|    |          | 三角形・平行四辺形の性質  |         |                      |
|    | 相似       | 三角形の相似条件      | 合同      | 証明の意義と方法             |
|    |          | 平行線と線分の比      |         | 三角形の合同条件             |
|    |          | 相似の応用         |         | 円周角と中心角              |
| 3  | 円        | 円と直線、二つの円     | 相似      | 三角形の相似条件             |
|    |          | 円周角と中心角       |         | 平行線と線分の比             |
|    |          |               |         | 相似の活用                |
|    | 三平方の定理   | 三平方の定理        | 三平方の定理  | 三平方の定理の証明            |
|    |          | 扇形の弧と面積、球     |         | 三平方の定理の利用            |
|    |          | 立体図形の面積比と体積比  |         |                      |

が中学校から削除され、一部は高等学校へ移行の措置がとられた。全般的に、図形の運動や空間図形の領域が縮小したといえる。さらに、第三学年にあった「円周角と中心角」は第二学年に移行したが、従来この中で扱われてきた「円に内接する四角形」が高等学校数学Aに移されることになり、中学校数学には文字通りの円周角と中心角のみが残された。面積比や体積比、球の表面積や体積などの、平面図形や簡単な空間図形の計量も高等学校数学Iに移された。

授業時間数が減少するため、指導項目を厳選することによって基礎・基本事項の徹底をはかろうとすることが、今回の改訂のポイントである。しかし、表1を少し眺めてみただけでも、さらなる改訂の提案ポイントが目につく。例えば、平面図形の領域は第一学年と第二学年に登場する。学習指導要領の図形分野の「目標」には、第一学年には、「平面図形や空間図形についての観察、操作や実験を通して、図形に対する直観的な見方や考え方を深めるとともに、論理的に考察する基礎を培う」とある。第二学年には、「基本的な平面図形の性質について、観察、操作や実験を通して理解を深めるとともに、図形の性質の考察における数学的な推論の意義と方法とを理解し、推論の過程を的確に表現する能力を養う」と書かれている。ここから、一年生で図形の「直観的な見方や考え方」をしながら、二年生にかけて徐々に「数学的な推論」へと移行しようとする目論見が推測できる。しかし、「数学的な推論」は一年生の段階でも必要であるし、なにより、「直観的な見方や考え方」と「数学的な推論」は切り離して考えるべきものではないだろう。表1に示された第一学年の「線対称・点対称」は合同変換群の部分群に属する教育内容であり、第二学年の「合同」と一緒に指導することが可能である。垂直二等分線や角の二等分線などの「基本作図」についても、二等辺三角形の鏡映による自己対称性がその背景にある。これも「合同」と結びついた場所に配置されるべきであろう。このような提案の実

現可能性を示すことは、今後の本研究の課題に含まれる。

### 1.3 小学校幾何教育における先行研究

中学校幾何教育カリキュラムを構築するにあたり、北海道大学教育学部数学教育研究グループの次の四つの教授プログラムは見ておく必要がある。これらは、小学校における幾何教育カリキュラムを構成する授業プログラム群である。

(1)「多角形と円」<sup>4)</sup>は、「算数たのしい学習プリント」シリーズの三年生用プリントとして作成された。「平面」「点と直線」「角・線分・折れ線」「多角形」「円」「とくべつな三角形」「正多角形」の全七節から構成されている。平面、点、直線、円などの意味を知ると同時に、それらの相互関係に関するいくつかの公理を導いている。また、始点と終点が一一致する折れ線が多角形になる条件を考えさせているほか、二等辺三角形の性質に注目することにより垂直二等分線と角の二等分線の作図方法を教えている。

(2)「いろいろな形」<sup>5)</sup>は、同じシリーズの四年生用プリントである。三部からなっており、「Part 1」では、点、平面、直線、空間の相互関係を言葉にまとめるとともに、角と平行に関する定理が扱われる。「対頂角は等しい」が導かれ、平行線と同位角・錯角の関係が明らかにされる。また、空間内における平面同士の平行についても調べられる。「Part 2」では、三年生編と同様に多角形を定義した後、いろいろな三角形を書く問題を通して三角形の決定条件に相当する内容を扱っている。また、四角形の分類を行っている。「Part 3」では多面体、特に直方体と立方体の性質について簡単に扱っている。

(3)「合同変換」<sup>6)</sup>は、これより以前に作られた「鏡による図形の移動」<sup>7)</sup>をベースにしている。平面上の変換である恒等変換、平行移動、回転移動、鏡映の性質とそれらの合成変換について調べるという基本方針で、平面上の合同変換の全体像を明らかにする教授プログラムである。最後には、平面上の合同変換が高々3回の鏡映の合成で表されることが獲得されている。さらに、合同変換を図形の対称性研究の道具として位置づけて「対称性」の章を設け、子どもを対称変換群研究の入り口に立たせている。

(4)「ホモセティー」<sup>8)</sup>は、相似変換指導の一環として作成された。ホモセティーは平面上の変換で直線を自分自身に平行な直線に移す変換のことであり、平行移動と中心拡大（その特殊ケースである半回転も含まれる）が該当する。ところどころしきつめ図のイメージに頼りながら、平行性と相似に関する性質を学習している。中心拡大については、正の数倍だけではなく負の数倍も扱っている。最終的に中心拡大の合成変換を調べることによって、中学校で学習する正負の数の乗法の幾何学的イメージを与えることにも成功している。

「合同変換」と「ホモセティー」は、「変換による不変性を探究する」<sup>9)</sup>というF. クラインの思想が教材構成の柱として貫かれている。教育内容の面では、クラインの思想をよく具体化しているH.S.M. コクセターの『幾何学入門』<sup>10)</sup>から多くの示唆を受けている。前者は合同変換群を、後者はホモセティー変換群を教育内容のまとまりとしてもっている<sup>11)</sup>。これらは小学校での授業実践を経て、実現可能性のあるプランとして提示されたものである。そして、「多角形と円」と「いろいろな形」は、平面上の相似変換群の探究を可能とさせるための前提条件となる点や直線、平面などの基本的概念形成を担っている。

中学校プランでも、以上の先行研究にならい、幾何学の基礎となる概念形成をはかりつつ、変換の幾何学を基軸にした教材構成をすることにする。そうした上で、中学校バージョンの作

成にあたっては、小学校での実践で指摘されたいくつかの問題点を改善していかなければならない。また、中学校幾何教育カリキュラムを構想しながら、教育内容の順序構造と関連性を明らかにし、教育内容・教材構成の論理を語っていくことが課題になる。この作業ははっきりとは見えない中学校数学の全体像と対峙されながらなされる。幾何単元の作成は幾何教育に対して実践的価値をもつだけでなく、代数・解析分野の教授プログラム作成作業にもプラスの影響を与えることになるだろう。

## 2 カリキュラム再構成の柱と現在の状況

### 2.1 公理系の設定の問題

数学教育の現代化がいわれた時代、阿部浩一は、「幾何教育の混迷」<sup>12)</sup>と題する論文の中で、幾何教育の方法としておおまかには以下の三つがあるとした。

[A] 三角形の合同に基づくユークリッド流の接近

[B] 変換群に基づく F.KLEIN 流の接近

[C] ベクトルによる線形代数的接近

そして、次のように述べている<sup>13)</sup>。

ところで、接近の差が単に手法の差であり、到達されるべき目標が同一であれば、問題はむしろ単純であるといえよう。[中略]しかし、問題はそれほど単純ではない。というのは、接近の差にともなっていて、同じくユークリッド空間の認識といっても、その意味内容が異なってくるのである。図形に関する諸定理とその系列において、接近の差によって、系列内における定理の順序が変わることは当然に予想されとしても、問題はそれだけに止まらず、なにが基本的に重要な定理であるかに、選択と判別の差が生ずるのである。ある接近においては、不可欠の重要定理が、他の接近では副次的な価値しか認められず、別の接近ではまったく顧みられないという事態が起こる。

ここで阿部は、このような定理の例として円周角の定理をあげている。円周角の定理は、「[A]の接近にしたがえば、基本的に重要な定理であり、現在中学生にも指導されているが」、[B]の接近では、「平行移動なり、回転・対称なりの応用という域を出ない」。そして、「[C]の接近では、円周角の定理の存在位置そのものが消滅してしまう」としている。ここから、次のように結論する<sup>14)</sup>。

要するに、接近の差が必然的に内容の差を結果するのであり、そうであれば、同じく「初等幾何」と言い、空間認識と言っても、その意味するところはまったく別個の存在とも見えるほどに異なっているのである。したがって、問題は、ユークリッドの“純血性”を保持するかどうかという心情の問題ではなく、また、どの程度に代数的手法を採り入れるかという程度の問題でもなく、いずれを選び、いずれを捨てるかという問題である。[A]を選べば、他は捨てられねばならない。[A]を根幹とし、移動や変換の考え方、ベクトルのな処理を加味して、図形の多角的な見方を育てるという表現は、ことばの上のまやかしに過ぎない。学習者に数学に対する誤解と混乱をもたらす以外のなにものでもないであろう。

阿部のこれらの記述は、当時の「幾何教育の混迷」状態を的確に表現したものであり評価できる。しかも、このような「学習者に数学に対する誤解と混乱をもたらす」状況は、現在の中学校幾何教育においても現れている。先に見たように、学習指導要領では、第一学年で図形の線対称や点対称を扱い([B]の接近)、第二学年で三角形の合同に基づく論証に取り組む([A]の接近)という流れになっている。しかし、両者の学習内容が整合的な関連性をもって子どもに捉えられているとは思われない。より具体的にいえば、線対称移動や点対称移動させてできた図形が元の図形と合同であるという事実と、三角形の合同条件による図形の合同証明との内部関連が子どもにとって明確な形で提示されていないという点が、「誤解と混乱」の原因になっているのである。「いずれを選び、いずれを捨てるか」をはっきりさせてほしいと、多くの子どもが望んでいるのではないだろうか。もしかすると、多くの教師もそれを願っているかもしれない。

このように、阿部の分析は、現代の幾何教育の混迷について論じた文章としても読むことができる。しかしながら、阿部の論には賛同しかねるところがある。それは、「接近の差が必然的に内容の差を結果する」ことに対する評価である。教育の方法と内容が一体のものであることについてはすでに述べた。「接近の差が必然的に内容の差を結果する」のは当然である。問題になるのは、阿部がそのことをよしとしていない点にある。「同じくユークリッド空間の認識といっても、その意味内容が異なってくる」ことに対する、警戒心が伺えるのである。しかし、ユークリッド空間の認識はもとより単一のものではありえない。「なにが基本的に重要な定理であるかに、選択と判別の差が生ずる」のは、ユークリッド空間に対する認識の違いからの必然的帰結である。それぞれ異なる認識を数学的に表現した公理体系を背景にもって、[A][B][C]の接近方法が個々に存在しているだけなのである。複数の接近の併用が学習者に誤解と混乱を招くというのは、ユークリッド空間の認識を、[A][B][C]三者のいずれかしかない、排他的で固定的なものとしているからであろう。

よって、問題は、「いずれを選び、いずれを捨てるかという問題」ではなくなる。教える側にとっては、学習者に獲得させたいと考えるユークリッド空間の認識を、それが可能な公理体系をもって提示することが課題なのである。すなわち、

#### [D] 中学生のユークリッド空間認識に基づく接近

が求められる。中学校幾何教育カリキュラムは、中学生が安心感をもって迎えられいくつかの公理から出発し、中学生が論理的に納得できる体系として構成された、新しい公理体系を提示するものになるのである。

公理は、子どもが空間の研究を始めるに当たっての立脚点になる命題とする。ここには、「線分はその長さを変えずに任意の位置に動かすことができる」など、『ユークリッド原論』が認めなかった移動に関する公理も含まれてよい<sup>15)</sup>。この際、公理の簡潔性や公理間の独立性は問わないことにする。公理としてはできるだけ単純な命題群を選び出し、そのなかに冗長性を残さないことは確かに数学の大切な姿である。数学的概念を教えていく中で、そのような数学的思想を伝えることも数学教育の課題である。しかし、中学校の幾何教育の中で、しかもその公理系をめぐってその課題を追究する必要はないと考える。おそらく、初等・中等教育全体を通してみてもその必要はないだろう。単純さを求める数学の姿は、例えばある命題が証明された場合、より一般的な命題は成り立たないだろうかと考えさせたりすることを通して、あらゆる領域の中で、少しずつ獲得させればよい。

## 2.2 「証明」の問題

先に見たように、現行の学習指導要領の第二学年の目標には、数学的な推論の意義と方法の理解が掲げられている。この目標のもとに、第二学年で証明の形式が初めて導入されることになっている。新学習指導要領においても証明の導入は同じく第二学年であるが、内容に「平面図形の性質を三角形の合同条件などを基にして確かめ、論理的に考察する能力を養う」という新しい一文が入ってきた。また、教える項目として「証明の意義と方法について理解すること」が加えられた。これらは今までも授業実践の中で取り組まれてきたであろうが、新学習指導要領ではより重視する姿勢が伺われる。

このような変化は、今回の学習指導要領改訂の中で積極的に評価できる点である。確かに、多くの中学生が図形の証明問題を嫌っている。多くの教師も、証明の指導に困難さを感じていることだろう。しかし、幾何教育の中で証明の指導をやめることは、現行のカリキュラムからすると、三角形の合同条件の指導をやめることとほとんど同じである。とすれば、三角形の合同は「動かしてぴったり重なる、形も大きさも同じ三角形」ということになってしまう。これでは小学校での合同の指導と同じレベルであり、中学校の幾何教育として不十分なのは明らかである。

そもそも、証明指導の困難さは証明の形式そのものの内部に存在するのではない。証明は、本来、数学的な事実と事実の関連性を明らかにするためのもっともわかりやすい論理的説明だからである。これまでの証明指導の不成功は、証明の時点で何を前提にしてよいのかが、少なくとも子どもにとって明確になっていなかったことであろう。それは、幾何教育カリキュラム自身が、論理的構成をとっていなかったことに源を発している。子ども自身が幾何学の体系を構築する作業に加われるような、論理的幾何教育カリキュラムを作成することが、改めて課題として意識される。「証明の意義と方法」は、このような作業の中で、証明してみたいと思わせられるような楽しく不思議な問題に取り組むことで、徐々に定着していくものであろう。

ところで、中学校二年生の幾何教育で初めて証明の形式と方法を導入することに対しては、須田勝彦が次のように批判的見解を述べている<sup>16)</sup>。

中学校数学の不成功の原因は幾何において証明を含むことではなく、そこに至るまで証明という一つの論理的形式を与えられてこなかった点にある。より明確で、より平易な対象を考えながら論証の形式を身につけるべきである。たとえば「整数論」はその最もふさわしい対象の一つであろう。一般に代数の領域は最初に証明の形式を学ぶのに適している。

筆者はこれに同意し、証明の形式と意義については、中学校の最初の幾何教育以前に、例えば初等整数論をその内容とする「定理と証明」などの単元で一度学習していることを前提にする。しかし「定理と証明」はまだできていない。当面の実践上は、幾何学的事実の関連性を明らかにするという側面と、証明の形式と意義を学ぶという二つの側面が、証明指導のなかに同居させられることになる。しかし、それはさほど悲観的事態ではない。両側面は、常に一体のものである。何かを明らかにすることなしに、証明の形式と意義のみを単独で学ぶことはできない。また、証明対象となる定理は、証明することによってその形式と意義を体感できるようなものであるべきである。

そのような定理としては、「対頂角は等しい」「三角形の内角の和は平角である」などの証明

が平易で、しかも後々何度も活用されるような重要なものがふさわしい。また、幾何学であり数学である以上プランの全過程が証明の連続であるのはもちろんであるが、はっきり「証明しよう」と問いかける証明問題は少なくてもよいだろう。複雑な難問で子どもを苦しめることは避けなければならない。

### 2.3 現在までの状況

以上の基本方針に基づき、各单元ごとに教授プログラムの原案を作成している。以下に单元名とおおまかな内容を示す。

#### 第一单元 平面幾何学の公理系(1)——角と平行の公理——

空間(3次元空間)、平面(2次元空間)、直線(1次元空間)、点(0次元空間)、半直線の意味を知るとともに、これらの関係を平面幾何学の公理としてまとめる。二直線の交わる／交わらないの関係を理解し、角と平行の概念をつかむ。「同位角(錯角)が等しい」と「二直線が平行」が同値であることの証明を避けるために、「同位角が等しい」を平行の定義とする。

#### 第二单元 平面幾何学の公理系(2)——線分と円の公理——

円を定義する。線分をつなぎ合わせた折れ線概念から、多角形の定義を導く。「中心と半径をもって円を描くことができる」と「線分は長さを変えずに任意の位置に動かすことができる」という二つの公理を導き、さらに三角形の三つの決定条件を得る。

#### 第三单元 合同変換(1)

様々な変換の例を見せることを通して、変換のイメージをつかむ。対称性のある絵によって、合同変換の概念を定義する。

#### 第四单元 半回転の幾何学

半回転の性質を用いながら、三角形の決定条件を三角形の合同条件に高める。併せて、平行四辺形の諸性質を導く。また、中点連結定理を証明する。

#### 第五单元 鏡映の幾何学

鏡映の性質を用いながら、二等辺三角形の諸性質を導く。定規とコンパスを使った二つの基本作図(線分の垂直二等分線、角の二等分線)を習得する。

#### 第六单元 合同ホモセティ変換

合成変換を定義する。半回転の合成変換を通して併進を定義する。ホモセティ変換を定義し、併進と半回転からなる合同ホモセティ変換群の性質を調べるとともに、乗積表を導入して変換群の研究手法の一端を知る。

#### 第七单元 合同変換(2)

鏡映の合成変換を調べ、一般の回転を定義する。回転の合成変換が併進または回転になることを導き、正格合同変換群を完成させる。平面上の合同変換が高々三回の鏡映で表現できることを知る。変格合同変換が併進鏡映になることを知る。

#### 第八单元 相似変換

タレスの定理と中心拡大と相似の関係を直観的かつ論理的に理解する。中心拡大の合成変換が併進または中心拡大になることを導く。相似変換が、中心拡大と合同変換の合成変換で表されることを知る。

この单元区分はまだ確定したものではないが八单元全体と学習指導要領とを比較してみると、欠けている領域がいくつかある。まず、空間図形があげられる。しかし、この領域は新学

習指導要領で大幅にカットされることになった。時間数が削減される中でより重要な課題に時間をかけようとするれば、この改訂には理解できる面もある。まずは平面上の幾何学についての内容と教材を確定する作業を優先課題としたい。筆者の見解では、三次元空間の幾何学は、小学校で今以上に扱われるべきであると思われる。三次元空間における直線や平面の垂直・平行についての感覚を養うことにより、中学校で扱う二次元空間の相対的位置が明らかになる。「二次元空間は三次元空間の一部分である」ということを小学校で理解させてはじめて、中学校幾何を二次元空間に限定するカリキュラムも成り立ち得る。そうすれば、二次元空間の研究を完全に行うことで、「三次元はどうなっているのか」という発展的学習意欲や、「三次元空間についても理解できるはずだ」という自信を子どもに与えることができる。

円周角の定理や接弦定理を中心とする「円の幾何学」や「比例と相似比・面積比」も単元化しなければならない。これらも、学習指導要領の上では従来教えられてきた項目がいくつか削られた領域である。しかし、前者は合同変換の、後者は相似変換の発展的内容として取り上げたい。そして、中学校数学の結実点であり、様々な楽しい授業展開が考えられる「三平方の定理」の具体化も今後の課題である。

中学校幾何教育カリキュラムの提案は、高等学校幾何教育の条件整備の作業にも通じている。中学校で指導可能な教育内容が明らかになれば、その上に立って、高等学校で何をどこまで教えることが可能かについての展望が開けることになる。現在の高等学校数学Aの「平面幾何」で展開されている幾何教育は、アポロニウスの円やチェバ・メネラウスの定理を除いてほとんど中学校の復習のような内容しかもっていない。しかもそれらは平面幾何学の断片的な知識の寄せ集めであり、全体として、幾何学内部のどのようなまとまりのある一部を教えたいのかがまったく理解できない。本研究は、高等学校幾何教育の課題を明らかにするための基盤づくりとしても位置づけることができるだろう。

### 3 第一単元の教育内容・教材構成論

第一単元の目標は、点や直線・半直線および角と平行の概念をつかむとともに、それらに関するユークリッド平面の基本的公理を承認することである。

#### 3.1 小学校での既習事項との関連

点、直線、平面などについては小学校でも扱われている。これらの言葉をまったく聞いたことがない中学生はいないだろうし、それらがどんなことかを説明することはほとんどの中学生ができるであろう。しかし、中学校幾何の教授プログラムは、幾何学の基本であるこれらの概念についても改めて教えていくことにする。幾何学の体系は、土台となるいくつかの定義や公理から築き上げられるものである。構築のスタートであればなおさら、曖昧な概念を残しておくのは避けなければならない。また、「二点を通る直線は一つしかない」などの公理についても、しっかりと確認しておきたい。

#### 3.2 角の定義

角の定義はいくつか考えられる。『ユークリッド原論』を見ると、「平面角とは平面上にあって互いに交わりかつ一直線をなすことのない二つの線相互のかたむきである」<sup>17)</sup>と角の定義が

されている。これと同様に、二つの半平面の共通部分として角を定義する方法もあるだろう。これらの定義では、定理「対頂角は等しい」との関連が問題となる。『ユークリッド原論』では、平角に対する共通の補角との関係から定理を証明しているが、角の定義が「二つの線相互のかたむき」であれば「対頂角は等しい」はほとんど自明の定理になってしまうのである。しかし、補角を用いた対頂角が等しいことの証明は、イコールの推移律を用いた最も基本的な証明方法といえる。幾何単元における最初の証明問題としては、この定理は適切と思われる。「対頂角は等しい」を代数的に証明するためにも、「線相互のかたむき」による角の定義は避けるべきである。

また『ユークリッド原論』の定義には、子どもが抱く角についての自然なイメージを表現しているのかという疑問もある。角とは、二直線の交わりによって初めて認識されるものなのだろうか。角のイメージとは、何らかの「とがったもの」の「開き具合」ではなからうか。そこで、始点を共有する二半直線の対という角の定義が生まれる。「対」には順序のついている場合もあるが、いずれにしても優角（ $180^\circ$ 以上の角）・劣角（ $180^\circ$ 以下の角）のどちらを定義するかを明示しなければならない。本授業案では、始点を共有する二半直線の非順序対と、それによって二つに分けられた平面の一方を合わせて考えたものを角と定義したい。そして、初等幾何の範囲では、優角が問題になる場面がほとんどないことから、断りがない場合は領域の狭い方を考えた劣角を指すと注意しておくことにする。また、有向角の概念については扱う必要はないと判断する。

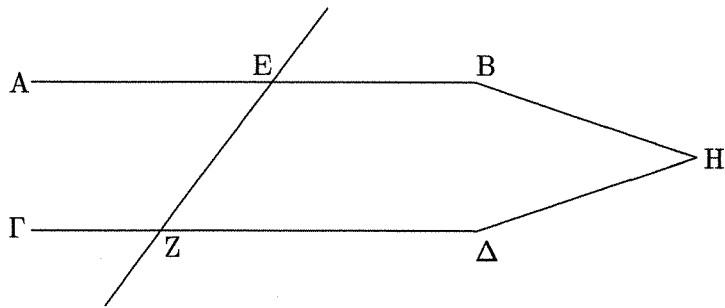
ところで、「とがったもの」の「開き具合」という角のイメージからは、半直線をその始点を中心として回転させたときの通過領域という定義も、あり得る選択肢のひとつである。しかしながら、図形の回転は合同変換群の部分群として後に改めて学習される内容である。そこで、回転による角のイメージは、二半直線による角の定義に併記するにとどめる。

角が定義された後は、その相等をいかに定義するかが問題になる。平面上のあらゆる角に対して同値関係を導入して、等しい角の概念を確定させなければならない。その一つの方法は、角の「開き具合」にある実数に対応することを前提とし、その実数の相等をもって角の相等を定義することである。しかし、この方法は中学校の幾何教育においては適切ではない。角と実数の対応は、回転や円の学習を通して最終的に獲得されればよい事実である。そう考えると、角の相等は、場所を動かしてぴったり重なる、すなわち合同変換によって重なることをもって定義するしかないだろう。角の相等を定義して同じ角の概念を確定することは、角に同値関係を定義することであり、「始点を共有する二半直線と分割された平面の狭い方」という当初の角概念の拡張を意味する。

### 3.3 平行の定義

平行の定義をどうするか、そして、平行な二直線に関する様々な性質である「どこまでいっても交わらない」、「二直線間の距離はどこでも等しい」、「錯角・同位角が等しい」をどのように結びつけるか。これは、非ユークリッド幾何学と対比した場合、ユークリッド幾何学指導の最初の根本問題である。

『ユークリッド原論』では、「平行線とは、同一の平面上にあって、両方向に限りなく延長しても、いずれの方向においても互いに交わらない直線である」<sup>18)</sup>と平行が定義されている。そして、第一巻第27命題で、「錯角が等しければ平行である」が次のように証明されている<sup>19)</sup>。



直線 EZ が 2 直線 AB,  $\Gamma\Delta$  に交わり錯角  $\angle AEZ$ ,  $\angle EZ\Delta$  を互いに等しくするとせよ。AB は  $\Gamma\Delta$  に平行であると主張する。

もし平行でなければ、AB,  $\Gamma\Delta$  は延長されて B,  $\Delta$  または A,  $\Gamma$  の側で交わるであろう。延長され、B,  $\Delta$  の側で H において交わるとせよ。すると三角形 HEZ において外角  $\angle AEZ$  が内対角  $\angle EZH$  に等しい。これは不可能である [引用者註：第一巻第 16 命題「すべての三角形において辺の一つが延長されると、外角は内対角のいずれよりも大きい」による]。それゆえ AB,  $\Gamma\Delta$  は延長されて B,  $\Delta$  の側で交わらないであろう。同様に A,  $\Gamma$  の側でも交わらないことが証明される。そしてどちらの側でも交わらない 2 直線は平行である。したがって AB は  $\Gamma\Delta$  に平行である。

よってもし 1 直線が 2 直線に交わってなす錯角が互いに等しければ、この 2 直線は互いに平行であろう。これが証明すべきことであった。

この証明方法は、中学生には不適當であろう。最大の理由は、証明が背理法によっている点にある。つまり、「延長され、B,  $\Delta$  の側で交わる」と仮定したところ、「これは不可能である」という結論が導かれた。ここから、「B,  $\Delta$  の側で交わらない」としているのである。これはもちろん正しい証明であるが、果たして、仮定に矛盾が生じたところで仮定を否定すればよいことを、すべての中学生が納得してくれるであろうか。どこかが間違っていたことに気づいたとしても、否定の対象が仮定ではなく数学の論理性そのものや、ひいては数学を学習すること自体に向かう可能性も考えられる。

このような背理法に基づく証明が必要となるのは、そもそも平行が「両方向に限りなく延長しても、いずれの方向においても互いに交わらない」という否定を含んだ命題によって定義されているからである。どこまで行っても交わらないことを示すのは困難である。そこで、交わると仮定しておいて矛盾を導く証明方法がとられる。「二直線間の距離がどこでも等しい」を平行の定義とした場合も、同様の問題が生じるだろう。そこで、本授業案では、「同位角が等しい二直線を平行と定義する」の形にもっていく。こうすることによって、「平行ならば同位角が等しい」、「同位角が等しいならば平行である」という二つの定理の証明が不要になる。錯角との関係についても同様である。

なお、多くの教科書で、平行ではない二直線の場合にも同位角・錯角を定義している。しかし、本授業案では、二直線が平行である場合に限り同位角・錯角を考えることにする。なぜなら、これらは二直線が平行であるかどうかを調べる場面に限って意味をもつ概念だからである。

図 1 を見てみよう。二直線  $a, b$  に直線  $c$  が交わっていると考えると、 $p$  と  $q$  は同位角である。

## 1 平面幾何学の公理系(1) — 角と平行の公理 —

## 1.1 点・直線・平面・空間

## 【1次元空間】

直線上の1点は、直線を二つの部分にわける。

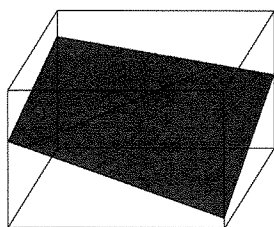
## 【2次元空間】

平面上の直線は、平面を二つの部分にわける。



## 【3次元空間】

空間内の平面は、空間を二つの部分にわける。



## 【4次元空間】

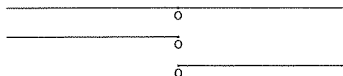
?

1

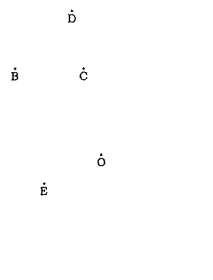
これから2次元空間について研究しよう。

## 1.2 直線・半直線

直線上の1点は、直線を二つの部分にわける。それぞれの部分を半直線という。



問題1. 点Oを始点とする半直線をたくさん描いてみよう。点Oを通る直線をたくさん描いてみよう。



2

空間について研究する際に、みんなが認める出発点を公理という。

公理はみんなでも相談して決めよう。

公理1. どの言葉が入るだろう。

( ない / 一つしかない / あるとは限らない / 無数にある )

(1) 点Oを始点とする半直線は \_\_\_\_\_

(2) 点Oを始点として点Aを通る半直線は \_\_\_\_\_

(3) 点Oを通る直線は \_\_\_\_\_

(4) 異なる2点O,Aを両方通る直線は \_\_\_\_\_

(5) 異なる3点P,Q,Rをすべて通る直線は \_\_\_\_\_

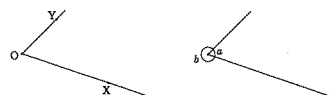
点Oを始点として、Oとは異なる点Aを通る半直線を、半直線OAと書く。

異なる二点O,Bを両方通る直線を、直線OBまたは直線BOと書く。 $\ell, m$ などの小文字一文字で表すこともある。

3

## 1.3 角

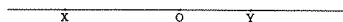
半直線OXと半直線OYを組にしたものは、平面を二つの部分にわける。



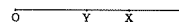
半直線OX,OYの組と平面の一方を合わせたものを、角という。 $\angle XOY$  または  $\angle YOX$  または  $\angle O$  と書く。特に断りがない場合は、狭い方を考えることが多い。どちらを考えるかははっきりさせて、角aや角bのように小文字一文字で表すこともある。

$\angle XOY$ は、半直線OXを半直線OYに重なるまで、点Oを中心にして回転させた領域、と考えることもできる。

半直線OXと半直線OYの組が直線になるとき、 $\angle XOY$ を平角という。



半直線OXと半直線OYが一致するとき、 $\angle XOY$ を零角という。



問題2.  $\angle XOY$ と同じ大きさの  $\angle APB$ を描いてみよう。



4

次に、 $c$ 、 $b$ に $a$ が交わっていると考え、 $q$ と $r$ は同位角である。そして、 $a$ 、 $c$ に $b$ が交わっていると考え、 $r$ と $s$ は同位角である。ところで、合同や平行のように二つのものの関係を表す概念で二者が対等な場合には、推移律が成り立つのが一般的である。同位角にも推移律が成り立つと仮定すれば、結局図1に現れるすべての角が互いに同位角になってしまう。このような同位角の概念など無意味であろう。二直線が平行な場合にのみ同位角を定義すれば、同位角の推移律の仮定は平行の推移律と同様に自然なものとなる。

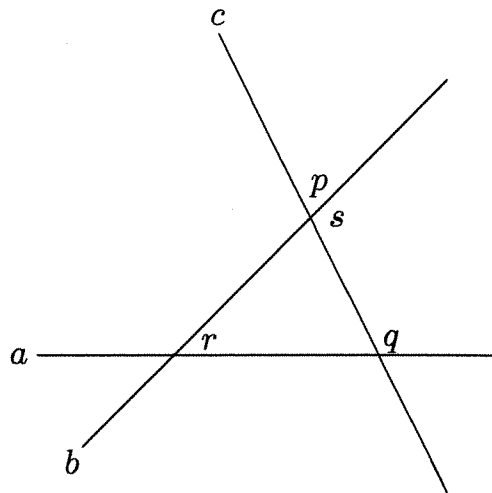


図1 非平行な直線に同位角を定義した場合

### 3.4 各問題の解説と授業の展開

1頁は、点、直線、平面、空間の概念をつかむことを目指している。一点が1次元空間を二つの部分に分けることのアナロジーとして、直線が2次元空間を二つの部分に分けること、平面が3次元空間を二つの部分に分けることまで一気に説明する。言葉で定義することが難しい平面や空間の概念化を狙っている。【直線】【平面】【空間】とせず【1次元空間】【2次元空間】【3次元空間】としたのは、次元という言葉によって、これから新しい学習を始めることを印象づけるためである。

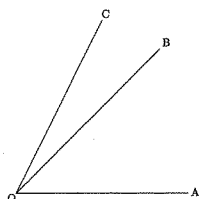
問題1は、点と半直線・直線に関する最も基本的な公理承認の基礎なす。次頁でまとめる公理群が獲得されればよい。そのほかにも、「直線は反対向きの二つの半直線から構成される」「直線をいくら引いても平面が埋め尽くされることはない」などにも気づかせたい。

公理1では、前頁の問題を解くなかで気づいてもらいたい公理「点Oを始点とする半直線は無数にある」、「点Oを始点として点Aを通る半直線は一つしかない」、「点Oを通る直線は無数にある」、「異なる2点O、Aを両方通る直線は一つしかない」、「異なる3点P、Q、Rをすべて通る直線はあるとは限らない」をまとめておく。また、この授業案では直線上の二つの向きは考えないことにし、直線BOと直線OBを同一視することにする。

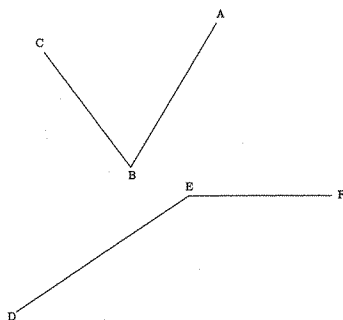
問題2では、 $\angle XOY$ を切り抜いたものかプリントと同じ紙を用意して、線分APと角の一边を重ね合わせて角を作図する。劣角を考えることに限定してかまわないが、向きが問題にならないように角を定義してあるので、直線APに関して対称な二つの角が作図される。この過程で、公理2「角は、大きさを変えずに任意の位置に動かすことができる」が承認される。なお、本授業案では、この問題に限らず一般的な市販の分度器は使用しないことにする。その第一の理由は、角の測度は小学校の既習事項とはせず、図形の回転などに十分慣れてから改めて導入したいからである。第二に、直角を $90^\circ$ にする度数法は日常生活ではよく用いられ小学校でも教えられているが、単位円上の弧の長さで中心角の大きさを表現する弧度法の方が合理的である。筆者は度数を数学教育から追放すべきと考え、度数が入っている一般的な市販の分度器の使用を望ましいとは思わない。ただし、平角と直角以外の目盛りが入っていない分度器は、この限

公理 2 角は、大きさを変えずに任意の位置に動かすことができる

二つの角の和を次のように定義する。  
 $\angle AOB + \angle BOC = \angle AOC$



問題 3.  $\angle ABC$  と  $\angle DEF$  をたした角を描いてみよう (どちらも狭い方の角を考える)。



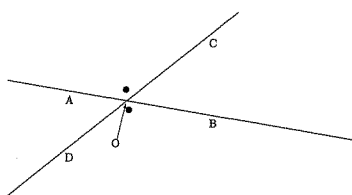
5

#### 1.4 直線の平行・非平行

問題 4. 平面に直線を4本引いて、平面を部分にわけてみよう。最大でいくつにわけられるだろう。最小でいくつにわけられるだろう。

6

二つの直線が交わると、角ができる。交わる点を交点という。



$\angle AOC$  と  $\angle BOD$  のように、向かい合った二つの角を、対頂角という。

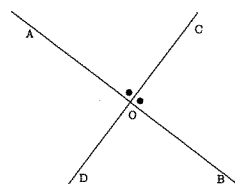
同様に、\_\_\_\_\_ と \_\_\_\_\_ も対頂角だ。

定理 1 対頂角の大きさは等しい。

証明

7

直線 AB と直線 CD が点 O で交わっている。

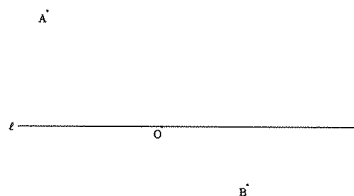


$\angle AOC$  と  $\angle BOC$  が等しいとき、この二つの角を直角という。  
 このとき、直線 AB と直線 CD は垂直だといひ、 $AB \perp CD$  と書く。

直線 AB を直線 CD の垂線という。

同様に、\_\_\_\_\_。

問題 5. 直線  $\ell$  の垂線をたくさん引いてみよう。



8

りではない。

**問題 3** では、前頁の問題と同様に角の移動によって角の和を作図する。子どもに同じプリントを二枚渡すか、子ども同士でプリントを貸し借りさせることになろう。 $\angle ABC$  か  $\angle DEF$  の一方を一旦薄い紙に写し取っても作図することができる。ここでは、狭い方の角を考えることにしたが、平角より小さい角の和が平角よりも大きくなる場合があることにも気づかせたい。

**問題 4** では、20 cm くらいの竹籤を四本ずつ渡し、これを直線に見立てて取り組んでもらう。最小でいくつにわけられるかは、二本以上の直線が一致することを許すかどうかで変わる。許すとすれば、四本の直線をすべて重ねた場合の領域数 2 が最小になる。許さなければ、四本の直線をすべて互いに平行な位置に置いた場合に、最小の領域数 5 になる。このような事実は子どもに発見してほしいので、教師は、問題を解き始める際に直線の一致を許すか許さないかについて何も指示してはならない。わけられる最大の領域数は 11 である。しかし、最大数を求めることで終わりにするのではなく、領域数を 10 にできるか、9 はどうかなどについても調べさせたい。直線が一致することを許さない場合に位相的な観点で分割のパターンを分類すると、図 2 のようになる。

ただし、すべてのパターンを網羅することに重点が置かれるべきではない。いくつにわけられるかを考えるなかで、点と直線の様々な関係が見えてくればよい。領域数を多くするためには直線をできるだけ多くの直線と交わらせるようにすればよく、反対に少なくするためには直線を他の直線と平行な位置に置くか三直線以上を一点で交わらせるようにすればよい。すなわちこの問題のポイントは、領域数の多少を考える中で必然的に点と直線の位置関係、とりわけ二直線の交わる／交わらないの対立を意識させるところにある。そのほかにも、「交わらない二直線ははるか彼方でも交わらないのか」、「交わった二直線はさらに別の点で交わることはないのか」を考えることにより、直線はどこまでいっても曲がらないことや平面は無限に続くことを知ることもできるだろう。

**定理 1** は、対頂角が等しいことを示す、幾何単元で最初に登場する証明問題である。「回転すれば重なるから」などの答が出ててもよいが、ここでは平角に対する補角を用いた代数的な証明まで到達させたい。

$$\angle AOC + \angle AOD = \text{平角},$$

$$\angle BOD + \angle AOD = \text{平角},$$

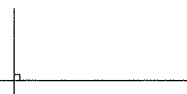
よって、

$$\angle AOC = \angle BOD$$

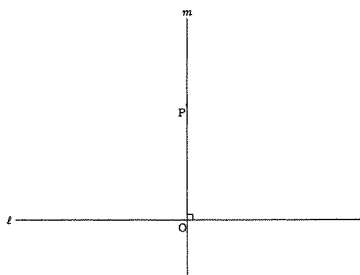
次の頁では直角と垂直を定義する。「同様に、」の後の下線部には、「直線 CD を直線 AB の垂線という。」が入る。**問題 5** は、垂線を引く練習問題であると同時に、直線  $l$  と点 P が与えられたとき、**公理 3** 「P を通り  $l$  と垂直な直線は、一つしかない」ことを承認するための布石になっている。垂線の引き方には特に決まりがない。 $l$  の垂線に沿って紙を折ってもいいし、三角定規の直角部分を当てて線を引いてもよい。直角の定義「直線 AB と直線 CD が点 O で交わっている。 $\angle AOC$  と  $\angle BOC$  が等しいとき、この二つの角を直角という」からすれば、目見当で垂線を引くのも、その見当が定義を意識したものである限り立派な方法といえよう。図の中に点 O、

公理 3 点 P を通り  $\ell$  と垂直な直線は、一つしかない。

直角を、下のように印をつけて表すことがある。



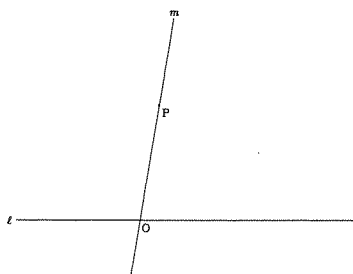
問題 8 直線  $\ell$  と直線  $m$  が点 O で垂直に交わっている。  $m$  上の点 P を通り、 $\ell$  と交わらない直線を引いてみよう。何本引けるだろう。



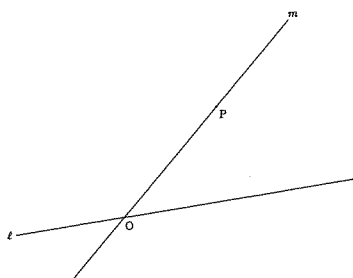
9

問題 7 直線  $\ell$  と直線  $m$  が点 O で交わっている。  $m$  上の点 P を通り、 $\ell$  と交わらない直線を引いてみよう。何本引けるだろう。

(1)



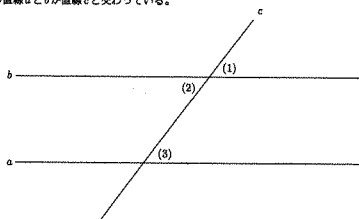
(2)



10

$\ell$  上にない点 P を通る直線で、直線  $\ell$  と交わらないものは、1本しかない。

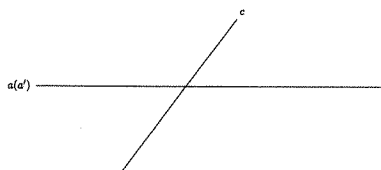
二つの直線  $a$  と  $b$  が直線  $c$  と交わっている。



(1) と (3) を同位角という。(2) と (3) を錯角という。  
対頂角は等しいので、同位角が等しいときは錯角も等しい。

同位角や錯角が等しいとき、直線  $a$  と  $b$  は平行であるといい、 $a \parallel b$  と書く。

問題 8 直線  $a$  と直線  $c$  は平行だろうか。



11

どんな直線でも、自分自身と平行だと考えることにする。

そうすると、数  $x, y, z$  について

$$x = y, y = z \Rightarrow x = z$$

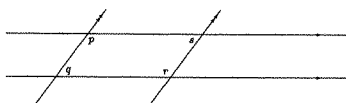
が成り立つように、直線  $a, b, c$  について

$$a \parallel b, b \parallel c \Rightarrow a \parallel c$$

が成り立つ。

公理 4 点 P を通り  $\ell$  と平行な直線は、一つしかない。

二直線が平行であることを、下のように印をつけて表すことがある。



定理 2 上の図のように、平行な二直線が二組あるとき、

- (1)  $\angle p = \angle r$
- (2)  $\angle p + \angle q = \text{平角}$

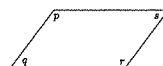
証明 (上の図を使って証明しよう)

定理 3 右の図で、

$$\angle p = \angle r, \angle p + \angle q = \text{平角}$$

ならば、向かい合う二組の辺はそれぞれ平行である。

証明 (右の図を使って証明しよう)



12

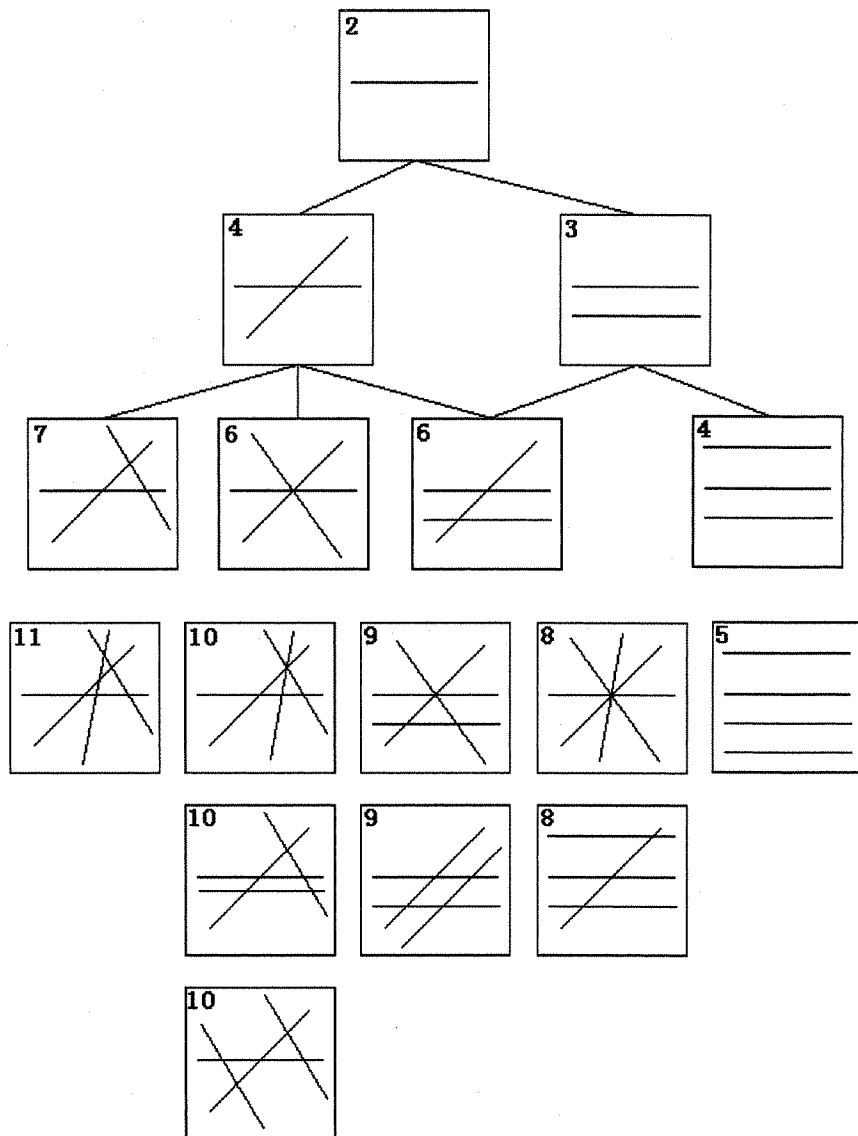


図 2 四本の直線による平面分割の系統図

Aがあるのはもちろん、それらの点を通る垂線がそれぞれ一本しかないことを確認するためである。

**問題 6** と **問題 7** は、平行の定義を「二直線の同位角が等しいこと」にすることを承認するための準備問題である。どちらも様々な作図の仕方が考えられるが、最終的には、点 O における角を点 P の位置に移せば正確に平行線を引けることを納得させる。**問題 6** では、角を移す道具として市販の二枚組三角定規を使う。**問題 7** も、これらの三角定規でできないことはないが、「同位角を等しくすればよい」という認識形成を助けるために、度数目盛りのない分度器を与えるようにしたい。あるいは、点 O における鋭角をもつ直角三角定規をボール紙などで作成して、子どもに渡してもよい。

**問題 8** は、同一直線の平行性について考える問題である。中学校の教科書では普通、直線が自分自身と平行かどうかを問題にしない。しかし、高等学校では、直線は自分自身と平行であると約束し平行の概念を拡張することになる。もしも  $a//a$  を認めなければ、平行の推移律が成立しなくなるからである。本授業案では、この段階で「直線は自分自身と平行である」を認めることにする。二直線が「交わらない」ではなく「同位角が等しい」という平行の定義に立ち返って、同位角がどこにあるかを探させるようにしたい。

第一単元最後の頁では、最初に平行の推移律についてまとめておく。このまとめは、「併進の合成変換は併進になる」を証明する場面などで生かされるだろう。そして、**公理 4** 「点  $P$  を通り  $l$  と平行な直線は、一つしかない」を確かめておく。最後に、平行四辺形の性質に関する**定理 2**、**定理 3** を証明する。多角形・四角形の定義は第二単元で、平行四辺形の定義は第四単元で行う予定であるが、平行の定義を使うほどよい練習になるため、この証明問題をここに配置することにする。**定理 2** は、平行の定義からすぐに示される。 $\angle q = \angle s$  も当然成り立つし、 $\angle p$  と  $\angle q$  だけではなく隣り合う二つの内角の和はいずれも平角になる。**定理 3** は**定理 2** の逆であり、二つの条件から「 $\angle q + \angle r = \text{平角}$ 」を導くことによって簡単に証明することができる。

## 4 第二単元の教育内容・教材構成論

第二単元の目標は、円と多角形の定義をするとともに、三角形の三つの決定条件を公理として承認することである。

### 4.1 線分・長さ・距離

線分の長さや距離の概念を定義するのは非常にやっかいである。多くの教科書では「2点  $A$ ,  $B$  を結ぶ線分  $AB$  の長さを、2点  $A$ ,  $B$  の距離という」と書かれている。距離が、線分の長さで定義されているのである。ただし、線分の長さについては説明されていない。一方、幾何学のテキストでは、「距離  $\overline{AB}$  を線分  $AB$  の長さという」と、線分の長さが距離で定義されているものもある<sup>20)</sup>。この場合、距離は、距離の公理を満たすように二点の組を非負の実数へ対応させたものとされている。

結局、言葉で上手に説明しようとしても混乱するだけのように見える。本授業案では、距離、長さ、そして正の実数などの言葉の使い分けについてはそれほど厳密にならない方針をとる。教科書と同じように、二点  $A$ ,  $B$  の距離とは線分  $AB$  の長さのことであると考え。ただし、長さは線分以外のものに対しても考えられることから、その例として、折れ線の長さを比較する問題を出しておきたい。

また、距離の公理に対応する性質として最も大切なのは三角不等式である。これは、三角形の決定条件の一つである三辺の長さに関する制約の中で扱うことにする。

### 4.2 三角形の決定条件

三角形の三つの合同条件は、中学校の幾何教育から外すことのできない内容であろう。現在の教科書では、三角形の合同条件のうちの二辺とその間の角に関する条件は次のようにして説明されている。

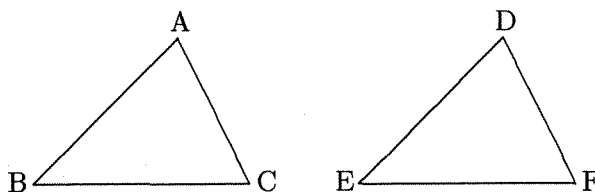
$\triangle ABC$  と  $\triangle DEF$  において

$$BC=EF$$

$$AB=DE$$

$$\angle B=\angle E$$

とする。



いま、 $\triangle ABC$  を移動して、辺  $BC$  を等しい辺  $EF$  に重ねる。このとき、 $\angle B=\angle E$  であるから、辺  $BA$  を半直線  $ED$  の上に重ねることができる。 $BA=ED$  であるから、点  $A$  は点  $D$  に重なる。したがって、辺  $AC$  と辺  $DF$  も重なり、 $\triangle ABC$  と  $\triangle DEF$  はまったく重なる。

この説明方法は『ユークリッド原論』の第一巻第4命題<sup>21)</sup>に記されたものと同じであるが、決してシンプルなものとはいえない。もともと直観的に、二つの三角形が合同であることは見抜けてしまう。したがって、「辺  $BA$  を半直線  $ED$  の上に重ねることができる」ということは、「 $\angle B=\angle E$  であるから」ではなく、三角形全体同士が重なり合うという直観から認められているのではないだろうか。また、「 $\triangle ABC$  を移動」することを許すのならば、合同の最も基本的な性質である「動かしてぴったり重なる」かどうかを調べてみればよいということになりかねない。

そこで、本授業案では、三角形の合同条件を導く以前に、三角形の決定条件を明らかにすることを目指す。三角形の決定条件は、三つの合同条件それぞれに対応して三つある。例えば、三角形の二辺の長さとその間の角（この角は零角より大きく平角より小さな角でなければならない）が与えられれば、三角形は、鏡映対称ないずれかの三角形として形が決まる。これと、「適切な三辺の長さが与えられれば三角形の形が決まる」<sup>22)</sup>「一辺とその両端の適切な角が与えられれば三角形の形が決まる」<sup>23)</sup>をあわせて、三角形の決定条件として公理化しておく。三角形の決定条件から、三角形の合同条件は明らかなものとなる。

#### 4.3 各問題の解説と授業の展開

**問題9** は、円の定義を再発見させる問題である。問題の条件を満たすすべての点を描き尽くすことはできないが、描き尽くした状態を理想化して考えることは可能であることを確認する。

**問題10** は、コンパスの扱いに慣れるための練習問題である。危険な使い方をしないように注意することも必要だろう。できあがった模様の多くは、豊富な対称性をもつ図形になると思われる。簡単に、鏡映対称性や回転対称性の話に触れてもよいだろう。

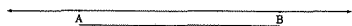
**問題11** は、次の頁の**公理5**「中心が  $O$  で半径が  $r$  の円は、一つしかない」を導く一段階前のステップになっている。この問題で直接、「中心が  $O$  で半径が  $r$  の円は\_\_\_\_\_」と聞いてもよいかもしれない。しかし、「中心  $O$  を色々な位置に変えて、半径  $r$  も色々な変えれば、そのような円は無限にある」という答が出ないとも限らない。「中心が  $O$  で半径が  $r$  の円」といえば  $O$  も  $r$  も固定されていると考えるという数学の世界の常識は、中学生にはまだ必ずしも形成されていないと見るべきではないか。そこで、本問題のように  $O$  と  $r$  を固定することを明確にし、「一つしかない」が出やすいように問いかけることにした。そうして、**公理5** では「中心が  $O$  で半径が  $r$  の円は、一つしかない」と言い切ることによって、このような文では  $O$  も  $r$  も固定されていると考えるのだということを教えるようにしたい。

**問題12** は、「図形はその形を変えることなく位置を変えることができる」の基礎としての公

## 2 平面幾何学の公理系(2) — 線分と円の公理 —

## 2.1 線分・円

半直線  $AB$  と半直線  $BA$  の共通部分を、線分  $AB$  または線分  $BA$  とよぶ。 $A, B$  を線分の端点という。



問題 9. 点  $O$  がある。 $O$  からの距離が線分  $AB$  の長さになる点をたくさん描いてみよう。

$O$

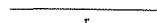
13

点  $O$  と長さ  $r$  を決めて、

(線分  $OP$  の長さ)  $= r$

になる点  $P$  をすべて集めた図形を円という。 $O$  を中心、 $r$  を半径 (radius) という。

問題 10. コンパスで、点  $O$  を中心とする半径  $r$  の円を描こう。続けて、コンパスだけを使って模様を描いてみよう。



$O$

問題 11. どの言葉が入るだろう。

( ない / 一つしかない / あるとは限らない / 無数にある )

中心  $O$  を固定する。半径  $5\text{cm}$  の円は \_\_\_\_\_

14

公理 5 中心が  $O$  で半径が  $r$  の円は、一つしかない。

問題 12. 定規とコンパスを使って、線分  $AB$  と同じ長さの線分を描いてみよう。



(1) 点  $P$  を端点とする線分

(2) 点  $Q$  を端点とし、点  $R$  を通る線分

(3) 点  $R$  を端点とし、直線  $PR$  上にある線分

$P$

$R$

$Q$

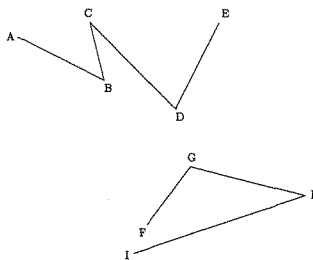
15

公理 6 線分は、長さを変えずに任意の位置に動かすことができる。

直線や半直線も、任意の位置に動かすことができる。

## 2.2 折れ線・多角形

線分を端点が一致するようにつなげたものを、折れ線という。



問題 13. 折れ線  $ABCDE$  と折れ線  $FGHI$  では、どちらが長いだろう。目盛りのある定規で長さを測らずに、比べる方法を考えてみよう。

16

**理 6** 「線分は、長さを変えずに任意の位置に動かすことができる」を導くための準備問題である。問題文には「定規とコンパスを使って」とあるが、ここでも定規は直線を引くためだけに用いて目盛りは用いないことにしたい。(1)の「点 P を端点とする線分」は無限にある。(2)の「点 Q を端点とし、点 R を通る線分」は一つしかない。(3)の「点 R を端点とし、直線 PR 上にある線分」は向きの異なるものが二つある。

**問題 13** は、コンパスを用いて折れ線の辺の長さを写し取り、それを二つの折れ線ごと一直線上に移してゆくことによって、折れ線の長さを比べることが可能になる。**公理 6** を使う問題である。この意図からいって、例えば折れ線を辺ごとに鋏で切り離して一直線上に並べるなどの解答も歓迎すべきものである。しかしこの場合も、コンパスを用いて同様のことができることを伝えるようにしたい。

次の頁ではまず線分の和を定義し、和が定義されときの線分の長さの関係について扱う。次に、折れ線は頂点と辺からなることを説明し、閉じた折れ線を定義する。**問題 14** は、辺の数が六、五、四、三、二の閉じた折れ線を描いてもらい、次の多角形の定義につなげる問題である。辺の数が三以上の場合にどの辺も交差しないように描けば、一般に知られた多角形が得られる。しかしここでは、辺が交差するものや辺の一部が完全に重なったもの、あるいは始点と終点以外の頂点も一致するような閉じた折れ線なども含めてたくさん描いてもらうようにしたい。そのような図形との比較によって、閉じた折れ線が多角形になる条件を導くのである。

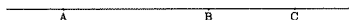
次の頁では、多角形を定義するとともに、多角形の対角線、内角、外角を説明する。 $n$  角形の対角線の数を求める問題などの、発展的な問題を出してもよいだろう。教科書では、多角形というときは凸多角形のみを考えるのが普通のようなものであるが、これは必然的理由をもたない。凹多角形を含めて多角形と考えることにする。ただし、凹多角形を考えた場合、平角より大きな内角に対する外角をどう考えるかが多少面倒になる。ここでは、「内角とたして平角になる角」を外角と定義したので、凹角に対しては「負の角」が外角になる。角の向き、したがって正負の角については扱っていないが、正負の数との対応で説明することにしたい。

**問題 15** は、三角形の三つの決定条件のうちの二つ、「三辺が決まる」「二辺とその間の角が決まる」を導くことを目指している。(1)は、二辺だけが決まっている三角形は一つに決まらないことを理解する問題である。内角  $\angle A$  は、零角より大きく平角より小さい任意の角にすることができる。線分 BC は、 $2\text{ cm} < BC < 12\text{ cm}$  の範囲を動くことができる。問題では「線分 BC の長さは最大で何 cm だろう。最小で何 cm だろう」と聞いているが、長さの最大値・最小値は「存在しない」が正解になる。 $12\text{ cm}$ 、 $2\text{ cm}$  は、正しい数学用語でいうところの上限・下限になる。存在しない最大値・最小値を問うことを避ける向きもあるかもしれないが、これらが存在しないような集合を考えることのできるこの機会を積極的に意義づけたい。「線分 BC の最大値・最小値はないが、 $2\text{ cm}$  より大きく  $12\text{ cm}$  より小さい長さをとる」のようにまとめられればよい。

(2)は決められた二辺の間の内角  $\angle A$  を、(3)は第三辺 BC を、それぞれ適切に決めれば三角形の形が決まることを確かめる問題である。なお、いずれも、直線 AB に関して対称な位置に向きの異なった二つの三角形が可能である。

次の頁で、三角形の二つの決定条件を公理としてまとめておく。**公理 7** の下線部には「零角より大きく平角より小さい」が入り、**公理 8** の下線部には、「 $|AB - AC|$  より大きく  $AB + AC$  より小さい」が入る。**問題 16** は、**公理 7** 「三角形の決定条件(1)」を使う練習問題である。 $\triangle OXY$  は、劣角に限定して考えてよい。 $\triangle OXY$  を、 $O=A$  で、OX あるいは OY が AB 上にくるよう

直線上に3点A,B,Cがこの順にあるとき、 $AC=AB+BC$ と定義する。

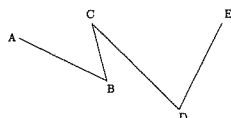


このとき、ACの長さ=ABの長さ+BCの長さになる。

折れ線には、頂点と辺がある。

点A,B,C,D,E,...を頂点という。

線分AB,BC,CD,DE,...を辺という。



折れ線の始まりの頂点を始点、終わりの頂点を終点という。

始点と終点一致する折れ線を、閉じた折れ線という。

問題 14. 辺の数がそれぞれ次のようになる、閉じた折れ線をたくさん描いてみよう。

(1) 辺が六つ

(2) 辺が五つ

(3) 辺が四つ

(4) 辺が三つ

(5) 辺が二つ

17

次の二つの条件をみたす閉じた折れ線を、多角形という。

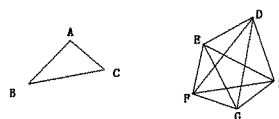
(1) どの辺も、頂点以外では交わらない。

(2) どの頂点でも、平角や劣角ではない。

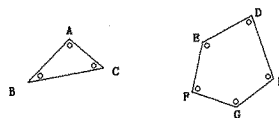
(3) どの頂点からも、線分が二本しか出ていない。

辺の数によって、三角形、四角形、五角形、...という。頂点を並べて、三角形ABC、四角形PQRSなどという。特に三角形は、 $\triangle ABC$ のように書く。

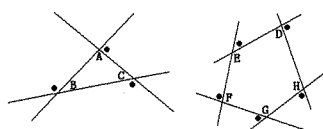
多角形の頂点から、自分自身と隣以外の頂点に引いた線分を、対角線という。



多角形の、○のついた角を内角という。 $\angle A, \angle B, \angle C, \angle D, \dots$ などと表すことがある。



多角形の、内角とたして平角になる角を、外角という。一つの内角に対して、外角は二つある。

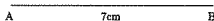
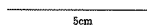


18

### 2.3 三角形の決定条件

問題 15. 線分ABの長さが7cmの $\triangle ABC$ を、たくさん描いてみよう。

(1) 線分ACの長さが5cmの $\triangle ABC$

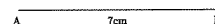
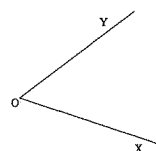
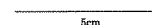


$\triangle ABC$ の内角 $\angle A$ を、できるだけ小さくしてみよう。また、できるだけ大きくしてみよう。

線分BCの長さは最大で何cmだろう。最小で何cmだろう。

19

(2) 線分ACの長さが5cmで、内角 $\angle A$ の大きさが $\angle XOY$ と同じ $\triangle ABC$



20

な位置に移せば題意の角が得られる。そのように移すためには、 $\triangle OXY$  の三辺を用いて三角形を描けばよい。

**問題 17** は、三角形の第三の決定条件を導くための問題である。まず、点  $C$  を線分  $AX$  上ではなく半直線  $AX$  上にとるので、内角  $\angle B$  は、零角より大きく平角  $-\angle A$  よりも小さな範囲を動く。点  $C$  を半直線  $AX$  上のいくらでも遠い地点にとれること、 $AX$  と  $BC$  が限りなく平行に近づくが決して平行にはならないことなどに気がつくだろう。また、平面が無限の彼方まで続いていることにも改めてふれたい。

次の頁の**公理 9**「三角形の決定条件(3)」は、「一辺とその両端の角が決まれば三角形が決まる」というものである。厳密には、「 $\angle A$  と  $\angle B$  がともに零角より大きく平角より小さい角で、その和が平角より小さくなくてはならない」という但し書きが必要となる。しかし、ここでは省略した。角の大きさに関する条件を明らかにすることは、次の**定理 4** を証明することと同じだからである。**定理 4** の証明では、各内角を切り取って平角になるように並べ直すのも悪くはないが、最終的には、錯角・同位角を利用した証明まで到達したい。すなわち、例えば、点  $B$  を通る辺  $AC$  に平行な直線と、半直線  $AB$  とを引いて、内角  $\angle A$ 、 $\angle C$  を  $\angle B$  の外角の位置に集め、内角の和が等しいことを説明させるようにしたい。このとき、「三角形の外角は、それに隣り合わない二つの内角の和に等しい」こともわかる。

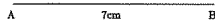
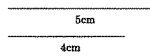
**問題 18** は、 $n$  角形の内角の和を求める問題である。多角形を適当な対角線で三角形に分割することにより、内角の和を求める。

## 5 今後の課題

今回提案した第一単元・第二単元は、北海道地区数学教育協議会の札幌中学校サークルに所属する中学校教員のみなさんにも検討していただき、授業実践に耐え得るレベルを目指して改良されてきた。高校受験との関係から中学校において教科書に沿わない授業に取り組むことは難しいが、彼らとの共同作業により実験授業を行って教育内容と教材構成について吟味し、中学校幾何教育カリキュラムの再構成を目指すことが今後の課題となる。

〔付記〕本研究は、北海道大学教育学部教育方法学研究室数学教育研究グループの共同研究の一環である。特に教授プログラムの作成に当たっては、高橋の原案をもとに、グループの須田勝彦（北海道大学大学院教育学研究科）、村守隆男（北海道大学大学院理学研究科）、石川高行（北海道大学大学院教育学研究科博士後期課程）とともに何度も議論を重ねながら修正を加えつつ、教育内容・教材構成の論理についても検討してきた。今回、その成果のうち、中学校幾何教育カリキュラム再構成に関する大まかな理論編と第一・第二単元の解説の部分を、高橋がまとめた。

(3) 線分ACの長さが5cmで、線分BCの長さが4cmの△ABC



21

公理 7 三角形の決定条件 (1)

辺ABの長さと辺ACの長さが決まっても、△ABCの形は決まらない。

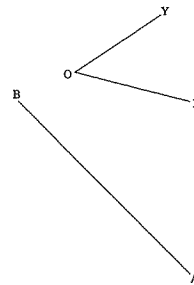
∠BACの大きさが、\_\_\_\_\_大きさに決まると、△ABCの形が決まる。

公理 8 三角形の決定条件 (2)

辺ABの長さと辺ACの長さが決まっても、△ABCの形は決まらない。

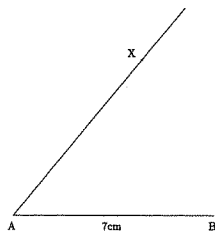
辺BCの長さが、\_\_\_\_\_大きさに決まると、△ABCの形が決まる。

問題 16. 定規とコンパスで、 $\angle XOY = \angle BAC$ になる、 $\angle BAC$ を作図しよう。



22

問題 17. 長さが7cmの線分ABと、半直線AXがある。AX上に点Cをとって、△ABCをたくさん描いてみよう。

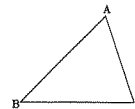


△ABCの内角∠Bをできるだけ小さくしてみよう。また、できるだけ大きくしてみよう。

23

公理 9 三角形の決定条件 (3)

線分ABの長さと、∠Aの大きさと、∠Bの大きさが決まれば、△ABCの形が決まる。



定理 4 三角形の内角の和は平角である。

証明

問題 18. 次の多角形の内角の和を求めよう。

(1) 四角形

(2) 五角形

(3) n角形 (nは3以上の整数)

24

## 註

- 1) このような見解は板倉聖宣の次の見解に学んでいる。「教育目標は、『子どもたちにどういった課題を与えたときにどのように考えることができる子どもを育てようとするのか』という形で提示するのがもっとも具体的となるであろう。こうなると教育目標を明確にするというのは、結局授業書の問題群をつくることと同じことになってしまう。つまり、教育目標が明確になるということは問題ができるということであり、問題ができるということは教育目標が具体化されるということなのである」。板倉聖宣「授業書のつくり方」(仮説実験授業研究会編『科学教育研究』第2冊、国土社、1970年)14頁。
- 2) 北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第17号、2000年、および第18号、2001年。
- 3) 中学校学習指導要領の数学編では、教える内容を「A 数と式」「B 図形」「C 数量関係」の三つに分類して示している。ここでいう幾何分野とは「B 図形」のことである。
- 4) 北海道地区数学教育協議会・算数プリント編集委員会編『[新訂] 3年算数の新しい学習プリント』共同文化社、1992年。
- 5) 北海道地区数学教育協議会・算数プリント編集委員会編『[新訂] 4年算数の新しい学習プリント』共同文化社、1992年。
- 6) 前田輪音「合同変換の授業プランとその授業記録——『鏡による図形の移動』の改訂——」(北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第12号、1994年)。
- 7) 前田輪音「授業書『ホモセティー』と授業記録——幾何教育における相似変換の指導の一環として——」(北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第12号、1994年)。
- 8) 須田勝彦・久蔵宏幸・岡野勉「授業書『鏡による図形の移動』と授業記録」(北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第8号、1990年)。
- 9) F. クライン「エルランゲン・プログラム」(『現代数学の系譜7』共立出版、1970年)277-278頁参照。
- 10) H.S.M. コクセター『幾何学入門』第二版、明治図書、1982年。特に第三章、第五章を参照。
- 11) 筆者は先に、行列を用いた代数的手法によって平面上の相似変換群の分類を行った。拙稿「ユークリッド平面における相似変換の表現行列と構造について」(北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第14号、1997年3月)参照。なお、合同変換群の分類を扱った最近のテキストとして、岩堀長慶「初学者のための合同変換群の話——幾何学の形での群論演習——」現代数学社、2000年がある。
- 12) 阿部浩一「幾何教育の混迷」(『大阪教育大学紀要』第16巻、V、教科教育、No.1、1967年)。
- 13) 同上、110頁。
- 14) 同上、111頁。
- 15) 『ユークリッド原論』が移動を公理・公準に含めなかったことについては、小林昭七『円の数学』裳華房、1999年、6-9頁参照。
- 16) 須田勝彦「中学校数学カリキュラム再構成への試み——入門期の中学校数学を中心に——」(北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第17号、2000年)23頁。
- 17) 中村幸四郎ほか訳『ユークリッド原論——縮刷版——』共立出版、1996年、1頁。
- 18) 同上、2頁。
- 19) 同上、20-21頁。
- 20) 佐々木元太郎『ユークリッド幾何』培風館、1979年、19頁。
- 21) 前掲『ユークリッド原論——縮刷版——』4-5頁。
- 22) 三辺  $a$ ,  $b$ ,  $c$  の最大辺を  $c$  とすると、 $c < a + b$  でなければならない。
- 23) 両端の角とその和はいずれも、零角より大きく平角より小さくなければならない。