



Title	運動の解析を基礎とした正比例関数の指導
Author(s)	土井, 捷三; 三上, 勝夫; 須田, 勝彦
Citation	北海道大學教育學部紀要, 18, 181-204
Issue Date	1971-03
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/29061
Type	departmental bulletin paper
File Information	18_P181-204.pdf



運動の解析を基礎とした正比例関数の指導

土 井 捷 三

三 上 勝 夫

須 田 勝 彦*

目 次

第0章 問題の設定と方法	
第1章 関数指導体系と正比例関数の指導過程	
第0節 関数指導体系の端緒的問題	
第1節 正比例関数の位置づけ	
第2節 指導過程の概要と他のプランに対する批判	
(1) 導入 (2) 定義 (3) 定義の展開	
(4) 拡張 (5) シェーマの問題	
第3節 指導過程の論理的脈絡	
第2章 授業書とその展開	
第1節 不等速運動との対比による等速運動の感性的把握	
第2節 運動の解析を軸とする近代自然科学成立史の	

お話し	
第3節 等速運動の最も基礎的な認識	
第4節 比例の定義	
第5節 変化する量に定義を適用する	
第6節 定義から $y/x = a$ を導く	
第7節 比例の式(その1)の適用	
第8節 定義にもとづいて $y = a \times x$ を導く	
第9節 比例の式(その2)の適用	
第10節 比例のグラフ	
第11節 バネを用いた比例の応用	
第3章 比例指導の評価	

第0章 問題の設定と方法

数学教育の科学的研究に於て多くのことが未知のままに残されている現在、私たちは次のような簡単な作業から出発したい。それは数学教育の一つの中心的な課題となる概念に関して、その指導体系、あるいは指導過程を確定して行く作業である。そのこと自体、数学教育における実践的な価値をもつものであると同時に、そのことによってより一般的な数学教育研究の方法に関する見通しも明らかになると思われるからである。さらに、それがもし成功的なしるうならば、そこで得られるカテゴリーは、将来建設されるべき科学的教授学の諸カテゴリーと、何らかの準同型な対応が見出されることが期待されるからである。

長いレンジについてはこのような莫然とした見通しではあっても、当面の作業の課題と方法は明確にしなければならぬ。そのため私たちは関数指導体系の確定をめざす作業から始める。その理由は第一に、疑いもなく関数はその高度に一般化された形に於て、現代数学のあら

ゆる分野で基本的なカテゴリーを構成する不可欠の武器となっていること、第二に、従ってその指導体系の確定の作業は、科学的概念の形成に関する一つの典型的な道すじに係わらざるをえないこと、第三に、関数指導体系は、数学教育協議会の集団的な研究の成果としてほぼ確定している数指導、及び量指導の体系に直接に接続すべき、未確定な領域だからである。

関数指導体系の確定の作業は、さし当りそれを構成する諸概念の多様な連関の中から、順序関係を抽出し、それを構造化したモデルを設定することから始めることができる。その順序モデルとは、問題を単純化して表わすならば、他の様式で存在する二つの順序モデル——公理的に仕上げられた現代数学、及び歴史性に於てとらえられた現代数学、即ち一つは概念発達の歴史として把握された数学史——に対比して、新たに、すべての子どもに理解可能というメルクマールから現代数学を再構成するものに他ならない。関数指導体系における順序モデルは、次の二つのレベルに区別することができよう。

第一は、指導体系全般にかかわる、いわば大域の順序モデルの設定である。このレベルではまず、指導体系全般の基礎をなす、アナロジカルな意味における^①公理、

* 北海道大学教育学部教授学研究室 算数数学グループ

の選定がなされる。この「公理」は、公理の俗流的解釈のように「任意の約束事、という類のものではなく、数学論から一意的に媒介されうるもの」と考えるが、ここではその事自体の妥当性の問題にはふれず、数教協とともに「量を基礎に」という立場を公理的な出発点として定める。量とは、いくつかの条件を満足する集合関数³⁾として、数学のうえで明確な意味を賦与しうるが、それを順序モデルの基礎にすることによって、「数学教育全般にわたる分岐点」³⁾が定まるのである。

それ以降のこの順序モデルの具体的展開は数学における諸定理の連関のような形で、論理的に決定しうるものと考えて、その最終的な検証は次の二つのレベルによってなされるであろう。第一は、その順序モデルによってどれだけの子どもに、どれほどの水準の数学を教授しえたのか、という数年単位の、歴史的オーダーでの検証であり、第二は、そのモデルを構成する個々のテーマをいかに成功的に教授しえたのかという、授業時数で数十時間単位の、時間的オーダーでの検証である。しかし、歴史的オーダーでの検証は現在の日本の教育の社会的条件から、積極的にその指導体系の妥当性を明らかにすることは困難であり、むしろ例えば生活単元学習による学力の低下や、学テによって割合理論の破産が明らかにされた、というように、誤った指導体系に対する反証という形で与えられるにすぎない。従って私たちのとりうる方法は、大域の順序モデルに関しては、「公理」系の妥当性、及び論理的連関の整合性を基本的な基準にすえなければならない。そしてその実践的検証は時間的オーダーのみによってなされる。

第二に、この時間的オーダーの検証がなされるためには、そのテーマの指導過程自体が順序モデルとして定まっていなければならない。これを小域の順序モデルと呼ぼう。これは関数指導の場合、たとえば個々の初等関数の指導過程、あるいは有限集合の写像、さらには代数系の同型や表現、マトリクスやアフィン変換等々の指導過程がそのテーマとなる。大域の順序モデルがそれ自体、大まかな意味で公理的な形をとることとは異なった意味で、小域の順序モデル設定の方法もまた公理的な方法に近づく。ここではそのテーマを相対的にミクロな諸概念に分析し、それを整合的に秩序づけるのである。⁴⁾すべての子どもに、わかりやすく、という要請は、それがいかに分析的であるか、という水準に応じて答えられる。この分析のプロトコール、及びそれらの連関の様式に関して、私たちは分析哲学的な楽天主義には立ちえないので、当面その一般論はさし控え、対象に即した形で展開したい。なお、この小域の順序モデルの最終的な

検証は、その授業過程に於て「理解させることの可能、な子どもの100%にその内容を理解させることによってなされる。」「理解することの不可能、な子どもとは、その授業内容の前提となる概念に関する理解を全く欠いている子どもであり、その主要な原因は現在の教科書にもとづく指導が必然的に生み出すもの」と考える。それにこくわずかの、本来特殊学級で指導されねばならない子どもの存在も含めて、大まかにいえば80~90%の子どもに理解させなければならない。

この小域の順序モデルは授業書に対象化することができる。従って私たちは当面、授業書の確定という形でその作業を進めたい。授業書は授業の成果の下限を規定するものであり、その意味で実際の授業は授業書「以上、ではあっても」「以外、であってはならない。逆にいえば授業は本来、授業書に対象化されているものの具体的展開でなければならない、そのような完成度を備えたものとして授業書を確定することが授業を研究することの本質的な内容でなければならないのである。このような方法的な位置づけから、本稿では正比例関数の指導過程を確定することを課題に設定する。

第1章 関数指導体系と正比例関数の指導過程

第0節 関数指導体系の端緒的問題

現代数学における関数の概念は、集合論の基礎のうえに高度に一般化された形で定式化されている。そのような一般化が必要であるのは、いうまでもなく、それが豊富な内容に満たされているからである。しかし、集合論的に一般化された関数の概念を初等・中等教育にストレートに持ち込む傾向——所謂 New-Math や新指導要領の関数指導体系——に共通することは、まさにそのもともと本質的な契機としての内容を欠いていることにある。⁴⁾現代数学のもつ豊富な諸概念をどの段階で、どのような形で教えるか、という大域の見通しを持たないことの必然的な帰結として、無原則な「何でも集合、何でも関数」が小学校の一年から各学年にわたってあらわれることになる。

しかし、一般的な「対応」の関係をいたるところに見ることが重要なのではなく(それは全く、どこにでもあるものだ)、反対にその一般的な対応の概念が、数学的諸概念の展開のそれぞれの局面におけるその特殊なあらわれ方の解明に役立つかぎりではそれは重要といえるのである。

官製の現代化研究が“can”と“must”とは異なる

という、陳腐な見解によりやくたどりつきつつある⁵⁾中にある。数学教育協議会では一貫して、関数指導の主な目標を自然の量的法則の解明に設定し、この立場からテイラー展開、微分方程式などへ至る多くのプランを提出している。そのことの意義は、自然科学教育全般の中での数学教育に正しい位置づけを与えていることと同時に、現代化それ自身が解析学的な基盤から離れてはありえないことを正しく示している点にある。微積分は古くあったのではなく、微積分は新しくなったのである。

第1節 正比例関数の位置づけ

比例は、数学教育における最初の関数教材である。関数の概念は、それに関数記号 f や変域、値域などの一般的表示形式が与えられるか否かに係わりなく、内容的に正比例関数がもっとも簡単な、そしてそれ自身の拡張のうちに萌芽的に主要な関数のすべてを含みうる最初のものだからである。

その全般的な指導体系の基本的な骨格は既に森毅氏らにそって提出されており、⁶⁾各テーマに関するその立場からの解釈はほぼなされているので、ここでは簡単にそれをスケッチするに止める。まず、正比例関数は $R \rightarrow R$ の線形写像であり、それは一方において $R^n \rightarrow R^m$ (マトリックス)へ、他方においては $R \rightarrow R$ の非線形関数の「線形形式による近似」あるいは局所的線形化(微積分)へと拡張される。⁷⁾さらに $R^n \rightarrow R^m$ の微積分(ベクトル解析)へ拡張される⁸⁾ことによって、一応現在の高等教育までの関数指導の根幹が完成するのである。このダイアグラムが現代化にとって本質的に重要なのは、かなり広大な領域を統一的なカテゴリー(この場合線形性)でカバーしうることに同時に、他のカテゴリーにおける基本的な写像(群や環の同型写像や位相同型写像など)も、広い意味で一般化された正比例関数とみなしうることにある。(このような内容的な裏づけを抜きにして「本源の手続きにまで分解してしまう」⁹⁾ところに、数学とは無関係な「関数的な見方、考え方、が生まれる。)

また、このような位置づけから、いかなる意味においても、「比と比例」、あるいは遠山啓氏の批判する「おうむの計算法」¹⁰⁾(外項の積=内項の積)などが正比例関数の指導内容とはなりえないことは明らかである。

第2節 指導過程の概要と他のプランに対する批判

私たちは、数学教育研究に於てさし当り、「順序」という一つのカテゴリーを抽出するに止めた。しかし、いうまでもなく諸概念の連関の様式は順序関係でもって汲

みつくされることのない多様性をもっている。しかし、それらは未だ十分に明らかではないので、他のカテゴリーはある一般性を志向した形において、比例の内容に即した順序関係のあり方を解明する論理の中にインプリットに含めて論議を進めて行きたい。

比例の授業はいくつかの局面、段階から構成される。¹¹⁾第一に典型的具体を用いた、概念の感性的基礎をつくる段階(導入)、第二にそれをもとにした一般的概念の習得の段階(定義)、第三に一般的概念を他の諸概念、あるいは諸特殊の再構成に用いる段階(定義の展開)、第四に、これは現在、必ずしも小学校でなされる必要はないが、より高次の概念へ拡張・一般化される段階である。

(1) 導入

比例の基礎には内包量がある。内包量指導の目的が自然のもつ特徴的な構造である一様性、均等性を基本的物理量そのものの理解を通して認識させ、それを基礎に連続量の乗法・除法により深い意味づけを与えることだとすれば、¹²⁾比例はそこにある量的法則を関数として一般化したものに他ならない。従って比例のモデルとすべき具体的な内包量は、子どもが今後数学・自然科学を学んで行く中で明確な意味をもった基本的物理量であり、かつ関数概念の端緒となりうるものでなければならない。

このような観点から、導入には等速運動を用いる。これは実在の変化・運動の複雑さを捨象したもっとも単純な運動であり、しかも他のすべての「なめらか」な運動は局所的に等速運動とみなすことによって解析されるという意味に於て、もっとも基礎的である。近代解析学の発生が、まさにガリレオの運動学であり、¹³⁾彼が等速運動の規定から始めて落体の法則を導いた¹⁴⁾ことは、微積分への導入としての速さ以上のモデルはないことを裏づけている。しばしば、速さは子どもにわかりにくいといわれるが、そのような主張の理論的根拠も、然るべき授業をふまえた実践の裏づけも私たちは知らない。速さが難しいのは、速さの概念が教えられずに、距離÷時間という除法が教えられているからなのであって、私たちの授業過程ではむしろ、速さこそもっとも所謂直観性に富んだ量であることを示唆する場面がしばしば見られた。

(2) 定義

比例はいくつかの同値な定義が可能であるが、その中から指導体系全般の中核となる概念が選ばなければならない。

従来の比例指導では、ほとんどが倍々関係による定義(一方が n 倍になれば他方も n 倍になり、一方が $1/n$ になれば他方も $1/n$ になる)が用いられている。比例は線形性の端緒であり、線形性は加法、及びスカラー乗法に

関する構造の保存として定式化されることから、倍々による定義は時にそのスカラー乗法の側面を表わした重要な法則であることは明らかである。しかし、関数の最初として比例を指導する際、他の初等関数に適用することが意味をなさないような操作をもって定義することが主要な課題なのであろうか。むしろ、スカラー乗法は線形代数以降に真の武器として働く概念であり、ここでの主要な課題は反対に、他の初等関数に適用する基礎となる操作を通して、正比例関数の特徴づけることなのである。

遠山啓氏は、比例を量的比例と関数的比例にわけ、倍々によって定義されたものを関数的比例と呼んでいる。¹⁵⁾しかし第一に、「対応変化として比例問題を考える」ことを関数的比例と呼ぶこと自体に誤りはないとしても、それを倍々による定義に限定することは誤りである。しいていうなら、倍々は関数的比例の一つにすぎない。第二に、内包量が表面に出ていない二量の関係(たとえば直径と円周、電流と電圧)などに対して、倍々関係から比例を発見するというプロセスが存在することは明らかであるにしても、それが関数としての比例の本質であるとはいえない。その過程の本質はスカラー乗法の操作というよりは、 $4x$ 、 $4y$ の関係であると考え、特に $4x$ を固定した時に、倍々がその系として導かれると考えた方が自然であろう。第三に、倍々は変化・運動の過程ではなく、その結果の一般的表示にすぎない。これらのことから、倍々関係が比例の定義として用いられることは何の根拠もないことが明らかになった。むしろ比例はそもそも関数以外の何ものでもないのであって、¹⁶⁾「関数的比例、なる概念を設定すること自体に混乱の原因があるのではないだろうか。

これらの理由から、私たちは微分方程式による定義「 $dy/dx=a$, $x=0$ のとき $y=0$ 」を用いた。当初は峯吉健三氏らの「札幌プラン」¹⁶⁾による定義、「 $x=0$ のとき $y=0$, $4x$ が一定ならば $4y$ も一定」を用いたが、夕張第二小での授業を通して、これを一步進めることの必要性が明らかになったからである。¹⁷⁾

なお、いくつかの新しい教科書では倍々による定義に代って $y/x=a$ が用いられている。このうち、 y/x を比の値としてとらえる立場は、旧来の比から比例へという誤った順序を前提とした割合主義の一変種であり、 y/x を一当たりと考える立場は一応数協の立場に近いが、これも後に述べるように y/x はそれ自体としては一当たりの意味をもたないので、いずれも正しくないと考える。 $y/x=a$ は定義ではなく、定義から媒介されるべきものである。

(3) 定義の展開

定義は数学に於て、公理とほぼ同様の働きをもつ。即ち、ある数学的对象群のもっとも単純かつ本質的な契機を抽出し、それ自身の展開によってそれらを一つの理論体系に再構成するのである。

「わかるさんすう」などにおける倍々の定義は、所謂比例問題(「 $y \propto x$, $x=x_1$ $y=y_1$, $x=x_2$ のときの y を求めよ」という型の問題)の解法に於て帰一法($f(1)$ を求めて $y=f(1) \times x$ に代入する法)を用いることと何ら整合性をもたない。即ち、倍々で定義するのであれば、 $y=y_1 \times (x_2/x_1)$ とすべきであるし、帰一法を用いるのであれば倍々の定義は意味をなさない。定義が生かされないという意味に於て、札幌プランも同様なことがいえる。もとより、単なる帰一法による比例問題の解法は、関数としての比例の概念を前提とせず、内包量の指導で十分にカバーしうるものである。あえて、札幌プランで比例一般の定義を与えることがどんな意味をもつものであろうか。実際、その指導案においても $4x$ 、 $4y$ の概念はいつか姿を消してしまうようである。

私たちは比例指導の目標は正比例関数の本質を教えることであって、¹⁸⁾「比例問題をとく、ことに解消されないと考える。その目標に位置づくかぎりでは比例問題がくみ込まれなければならない。このような観点から、私たちは次のような定義の展開を設定した。定義から $y/x=a$ を導き、他方、定義の微分方程式を解いて $y=ax$ を導く。この関係式を理解させる過程の中に比例問題を位置づけ、最後にグラフに於て再び定義にもどり、変化の法則—関係式—グラフの同一性をおさえる。

(4) 拡張

比例のもっとも簡単な拡張は、定義を任意の初期値に拡張する一次関数であるが、これは量変化の法則としては比例と変わるものではない。しかし、ここで「一般から特殊へ」という哲学的カテゴリーの無媒介なあてはめによる、一次関数から比例へ、という順序はとらない。それはたとえば二次関数の指導に於て、一般型の二次関数を最初に指導するのが正しくないと同様、素関数($y=ax$, $y=ax^2$ など)の解析的な性質の指導が先行しなければならない¹⁹⁾と考えるからである。

真の意味の比例の拡張は、解析的な側面からいえば二次関数から微積分へ、代数的な側面からいえば線型空間であるが、それらのことは他の機会に詳論したい。

(5) シェーマの問題

まず、ブラックボックスについては、私たちの指導プランの主なねらいが正比例関数の本質を教えることであって、比例も一つの関数であるということではなかった

ので考察の対象にはならない。「わかるさんすう」などのように、ブラックボックスや f は教えるが正比例関数は定義を与える程度、というのでは、 f は入ったが関数は抜けた中学校改訂指導要領にどこか似ているようである。遠山氏は、「 $f, g, \dots$ という関数記号を使わないで関数をつかませることは不可能」¹⁹⁾ であると言うが、正比例関数を指導するさい、それが具体的にどのような問題として現われるのかを示すべきであり、もし f を使わなければ正比例関数が写像一般の中に位置づけられないというだけの内容ならば、それは最初の数指導が集合に一般化されていないという論議と同じく、トリヴィアルである。むしろ、関数の指導に於て本質的に重要なことは実在の変化・運動のイメージをもとに、連続的に「無限」の順序対を思考の中に構成することであり、かかる無限個の規定とは独立な算術的操作(a 倍する)に還元することは本質を見失う危険さであるのではないだろうか。²⁰⁾ 無論、「無限」個の順序対の構成以前の、意識から独立に存在するところの法則の実体化としての意味からは、ブラックボックスは量変化の解析と矛盾するものではないし、 f は早い時期に導入すべきであり、さらにオペレーターとしての側面から f を指導することもしいずれかの段階で必要であるが、その時期についてはここでは即断をさけたい。

次に水槽について検討しよう。東数協が用いている金網で左右に仕切られた水槽は、比例関係が変化・運動としてではなく、あらかじめ水槽の形として固定的に決まってしまう。だからそれがいかに「わかりやすい」と言われても、関数のもっとも本質的な契機が捨象されているのだから意味をなさない。近数協の水槽はそれと異なって、時間と水量を変数にとっている点で関数のシェーマとして一応の意味を持っている。しかし、それは具体物として提示するのはかなり困難であり、しかもイメージとして想定するさいの夾雑物(理想的な蛇口や水の流れを想定しなければならないこと、一定な $f'(x)$ を視覚的にとらえるためには容器は方形でなければならないにもかかわらず、変数は容器の形とは無関係であること、もしその困難をさけて、直接 $f'(a)$ を水のいきおいと見ても、視覚的にとらえるのはかなり困難であること、など)が少なくないことから、適当なシェーマであるとはいえない。比例関数の重畳²¹⁾を指導するさい、これはわかりやすいモデルとなるが、第一に最初比例指導で重畳を指導することが如何なる意味をもつかという点、第二に水槽での重畳を理解させることが直ちに重畳一般、たとえば相対運動などに転移する保証があるか、という点などに於て疑問である。もとよりシェーマは、

諸対象のもっとも一般的かつ本質的な構造をそれ自身のうちにもって、諸対象の表現に用いられる一つの具体物であるとするなら、比例の場合、それは等速運動がになうべきである。もしシェーマに、空間的对象という限定をつけ加えるなら、それは所謂グラフが満たしている条件である。いずれにせよ、数指導におけるタイル・シェーマの成功の要因はより分析的に一般化される必要がある。²²⁾

私たちのプログラムに於ては、シェーマのもつ問題解決上の強ささと同時に、むしろ実在の量のレベルに立ち返るべき問題をシェーマのレベルにおしとどめる役割をも持つことに鑑み、シェーマとしては直交座標によるグラフを指導の最後に組み入れるに止めた。

第3節 指導過程の論理的脈絡

以上の検討を経て、私たちの比例指導のプログラムの関数指導体系における位置づけと、その中での大まかな順序構造が明らかになった。次にそれを、指導過程全体の主要な脈絡に沿って、その妥当性を検討したい。

まず、等速運動の具体物を提示し、そのイメージを形成する。あらゆる実在の運動は厳密には等速でないとか、平均する操作が必要とかいう論議は問題にならない。等速運動はいうまでもなく一つの理想化された概念であるが、それはかつて見たアイデアを想起することによってではなく、ある一定のオーダーのもとで、不等速な運動との対比によって認識可能なのである。

次に、そのような感性的なレベルでの等速運動を量的に分析するならば、まず任意の Δx (固定)に対して、 Δy が一定に定まるという法則としておさえる。他の量(物質の体積と重さの関係)に於ても同じような性質が存在することを確かめた後、様々な Δx に対して Δy が対応するが、 $\Delta y/\Delta x$ (その区間での速さ)は等速運動に於ては Δx に無関係な一定値として決まることを発見し(これは何ら自明な、同語反復ではない)、²³⁾ これをもとに比例の一般的定義を与える。いくつかの運動や物質の体積と重さの関係について Δx が一定の時、あるいは Δx が様々な変わる時に、定義が満たされているか否かを弁別させることで定義そのものの指導は終わる。

次に比例の特殊的な性質として $y/x=a$ を定義から導く。そのねらいは増分の間の関係から変数そのものの関係を導き出すこと、及び $y/x=a$ からも比例の弁別をなしうようにするためである。 y/x は結果的には一定な内包量であるが、内包量は規準点からの計量を問題にしないので、その抽象的表現は $\Delta y/\Delta x$ となる。従って、一当り一定をはじめから $y/x=a$ と表わすことはできない。

代数的には、ここに導かれた $y/x=a$ から $y=ax$ を得るが、 $y/x=a$ の導き方が全く正比例関数の特殊性に依存しているため一般性がない。従って $y=ax$ は $y/x=a$ からは導かず、定義の微分方程式を積分して解く。この段階では x のインターバルを無限小にするリーマン積分の必要性はないので、一定な Δy を加えて行けば内包量の第二用法の乗法で得た値と一致することを確かめる、という道筋にした(積分と加法は異なるものではない)。 $y=ax$ をこのように導いた後に $y/x=a$ とは同じ運動を表わした式であり、しかも代数的にも同値である、という二つの意味で同一であることを説明する。この後者の説明は、面積図のシェーマによって行なうことも可能である。²⁴⁾

文字を用いた関係式の意味、特に個別性と一般性の関連などについて理解させた後に、所謂比例問題のアルゴリズムを指導する。

最後に、比例関数の諸対象を同型な空間の対象に写したものととしてグラフを指導する。グラフはまず、順序対と座標平面上の点との一対一対応を確認した後、等速運動の関係式から対応表をもとめ、点をプロットする。離散的に点をプロットしただけでは等速運動の表現には不十分であることに気づかせ、さらに細かくプロットし、結局グラフは変化の連続性に対応して、原点を通る直線となることを導く。逆に原点を通る直線は、どこをとっても $\Delta y/\Delta x=a$ となることから、グラフそれ自身が比例の対象であり、ある関係式で表現しうることを指導して比例の授業は終る。このあと、一次関数の簡単なものにふれておくことは見通しをよくするであろう。

第2章 授業書とその展開

われわれの研究の方法論からすれば、研究の成果は「授業書」に凝縮するものでなければならない。以下にのせる授業書は、もはや重要な変更の余地のないほぼ完成されたわれわれが考えているものである。しかしなお、実際に授業をおこなう教師の授業書に対する理解という面からすれば、授業書の各§や、問題などのもつ意味及び根拠が示されることは必要であろうと考えられる。これによって、不用意な誤りや、重要な点での配慮の欠落などが防がるであろう。この章の叙述は、これらを主な目的として書かれたものである。

第1節 不等速運動との対比による等速運動の感性的把握

今日から約2週間、「比例、ということについて勉強します。算数のなかでいちばん重要なことが、この「比例、ですから、がんばって勉強しましょう。

§1 比例の勉強をはじめるにあたって、まずつぎの問題をといてみてください。

〔問題A〕 この自動車は()秒間に()cm 進みました。この自動車をよくみて、()秒間には何 cm 進むか計算で答を出しましょう。

〔問題B〕 この自動車は()秒間には()cm 進みました。それでは()秒間には何 cm 進むでしょうか。

では、Aの距離が計算でもとめることができたのに、Bはもとめることができなかったのはなぜでしょうか。

Aの距離をもとめることができたのは、Aが速さのかわらない運動、すなわち等速運動をしていたからでした。これからは、この等速運動の性質についてくわしくしらべていきます。

端的にいえば、正比例関数は等速運動からの抽象であるし、そうなければならないというのが、われわれのプランを貫く精神であった。事実、プランでは、等速運動が分析の対象、抽象の素材として終始一貫登場する。とはいえ、最初の数時間を除いては、そのたびごとに実際の運動が提示されるわけではない。等速運動は、授業書の中では、等速運動ということばか、あるいは時間と距離の対応表によって示されるのである。従ってこれらのことばや表が示している当の運動がイメージとして想起されるような指導上の準備が必要となるのである。

すなわち、等速運動の特質をある程度感性的にたしかめなかつて把握させておくことが指導の第一段階にしなければならない。この目的で §1 が構成された。等速運動の感性的把握といっても、たんに、さまざまな速さの等速運動をながめていることによって果たされないのであって、この場合、不等速運動と対比させることによって、きわだたせるという方法がとられた。

まず、等速運動を実際にみせる。適当な時間と距離をはかって、次に進む距離を予測させる。これが問題Aである。われわれの授業では、「4秒間に45cm 進みました。10秒間には何cm 進むでしょうか」等の数値を用いた。

子どもは、帰一法「 $45\text{ cm} \div 4\text{ 秒} = 11.5\text{ cm/秒}$ 、 $11.5\text{ cm/秒} \times 10\text{ 秒} = 115\text{ cm}$ 」、あるいは倍比例「 $10\text{ 秒} \div 4\text{ 秒} = 2.5$ 、 $45\text{ cm} \times 2.5 = 115\text{ cm}$ 」のいずれかの解法によって解く。ここではこの後に用いる計算法に一貫性をもたせるため

運動の解析を基礎とした正比例関数の指導

に帰一法を確実に指導しておきたい(すなわち、時間と距離から速さをもとめる、時間と速さがわかって距離をもとめる計算)。つまりこの問題は、内包量の学習のおさらいをかねることにもなっているのである。次にこの計算による予測を実際にたしかめる。予測した点に目じるしをつけておいて、所定の時間に通過するかどうかをみればよいわけである。こうして若干の誤差の範囲内で、予測の正しさはたしかめられる。

問題Bに移って、こんどは不等速運動をみせる。例えば「2秒間に80cm進んだ、5秒間には何cm進むでしょう」と、やはり距離を予測させる。子どもは、問題Aと同様と考え、帰一法による計算によって、予測をたてる。われわれがおこなった数学級の授業のうち、これを計算することができないと事前に主張したものはわずか1名にすぎない。次に実際に測定して、計算によっては予測できないことをたしかめる。

子どもたちは、実際のくいちがいをみて、ただちに、不等速運動だったので計算できないと気づく。これも「Aの距離が計算でもとめることができたのに、Bはもとめることができなかったのはなぜでしょうか」という問いに答えさせるかたちで、書かせたり話しあわせたりしてはしっかり確認させておく。

この後の学習は、この等速運動の性質をくわしくしらべてゆくのだということを知らせて、この時間は終る。

なお、等速運動する物体には、2台のテープレコーダーにわたしたテープに、紙の目じるしをのせたものを、不等速運動には、斜面をころがるミニカーを用いた。数値が、A、Bともぬいてあるのは、事情に応じて、適切な値を入れることができるようにしたためである。ただし、数値は比較的簡単に計算できるようにすることと、不等速運動の場合、計算による予測と大幅に異なるように、時間のとり方を工夫する配慮が必要であろう。

第2節 運動の解析を軸とする近代自然科学 成立史のお話し

§2 お話し、運動と変化の科学

16世紀、ヨーロッパには、封建制度にかわる新しい時代の夜明けがおとづれていました。新しい時代とは、「商品」を売り買いする商業がさかえ、やがてそれを生産するための工業がおこり、社会のしくみも、人々のものの考え方も大きくかわっていった時代——「近代」とよばれる時代です。

近代以前、多くの人々は、変化しないものが完全であり、変化するものは不完全なものであると考えていました。しかし、一例をあげてみましょう。当時さか

らになった貿易のために大洋を航海する船が、正しい航路を進む手がかりといえば、月や星などの天体でした。ですから、これらの天体の運動を正確に知ることがとても必要だったのです。変化と運動についての学問こそ新しい時代にもっともふさわしい学問でした。そしてその後の研究によって「運動や変化」こそがすべての物質の本当のすがたであることがしだいに明らかにされていったのです。

ガリレオはこの時代のもっともすぐれた学者の一人でした。ガリレオがはじめて望遠鏡で木星を観測し、木星のまわりを小さな星(衛星)がまわっていることを発見したり、金星が月のようにみかけすることを見つけたりして、これを証拠に地動説をと考えたことはみなさんよく知っているでしょう。地動説をと考えたので、古い考えの人にはくがいされたこともありました。

ガリレオはまた、落下の法則をみつけました。ガリレオはまず、等速運動を正しく定義しました。ガリレオの運動の調べ方は、運動を一定の時間に区切って、たとえば、最初の1秒間、次の1秒間、さらに次の1秒間……というように、それぞれの1秒間の物体の運動した距離や速さをもとめて、その変化を調べるというやり方でした。こうしてガリレオは、等速運動における時間と距離の関係と同じような関係が、物体の落下運動における時間と速さの関係にもみられることをみつけたのです。ガリレオは、前の時間、みなさんができなかった、斜面をころがる物体の距離を計算でもとめることができたのです。

さらに等速運動には、それまでの常識をひっくり返すような驚くべき事実がかくされていることもガリレオは見ぬいていたのです。宇宙船は地球からとび出すときだけロケットを噴しゃしますが、あとは噴しゃなくても宇宙をとんでゆけるのです。ガリレオはこれを説明するのにもう一步のところまできていました。

ガリレオの考えをさらに発展させ、近代科学の基礎をかためたのは、17世紀の偉大な科学者ニュートンでした。

ニュートンの研究はガリレオよりももっとしつかりしたものでした。ニュートンは落下運動のように速さのかわる運動のどの時刻の速さでも計算できる方法をつくりあげました。ニュートンは、速さのかわる運動でも、時間のはばを無限に小さくしていくならば、その瞬間だけは、等速運動をしているとみることができると考えたのです。これは曲線を顕微鏡で無限に拡大してみると、そのほんのわずかの部分は直線に近づいていくのになています。地球はまるいのに、そのわずか一部しか見ていない私たちには地面が平らにみえるのはよく知っていますね。

これからの「比例」の勉強は、このような偉大な科学の入口にすぎませんが入口にふさわしくとても重要

なことがらです。ガリレオやニュートンのことなどを
思いうかべながら、楽しく勉強しましょう。

お話しの目的の第1は、この比例の学習、及び比例から
はじまる関数の学習の内容が近代自然科学の成立期に
おける、極めて重大な科学思想史上での転換点に位置づ
いていることを明らかにし、学習することがらの意義を
客観的につかませることにある。

叙述は大きく三つにわかれ、第一は、その転換とは、
変化と運動を研究の対象とするようになったことである
こと及びその社会的背景が、第二には、ガリレオの運動
学とその方法が、第三には、ニュートンによる微分学の
確立がそれぞれのべられている。

叙述が簡単で、多少むずかしい表現もあるので、項目
ごとに解説を加えながら、近代科学成立期のいぶきが伝

わるように、いきいきと語って聞かせたいものである。
まだ比例を定義していないので、この言葉を用いずに、
「等速運動における時間と距離の関係」などという表現
を用いてあるが、これらは後に再び学習することがらと
説明しておけばよい。

目的の第二は、§3以降の学習すなわち等速運動の分
析に、直接役だたせようというところにある。等速運動
の最も基礎的認識は、任意の時間間隔について、それを
一定としたとき距離も一定となるということである。こ
のように運動を分析する方法は、子どもから、自然発生
するものではない。これを、お話しを通じて、「ガリレ
オにならって……」と与えようというわけである。

第3節 等速運動の最も基礎的な認識

§3 変化する量をしらべるには

みなさん、“ある物体が運動する、とは、どういうことでしょうか。そうです、時間がたてば、もとの位置からある距離だけ動くということです。運動しつづける物体にとって、時間と距離とは、ともに変化する量です。

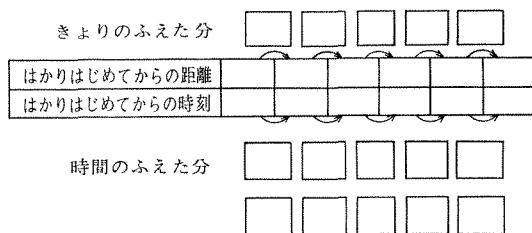
さて、次の表は、等速運動をするこの物体の、はかりはじめてからの時刻と、そのときのはかりはじめてからの距離を、つぎつぎに表に示していったものです。

はかりはじめてからの距離(cm)	0	4.75	9.5	14.25	19	23.75	28.5	33.25	38
はかりはじめてからの時刻(秒)	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4

42.75	47.5	52.25	57	61.75	66.5	71.25	76	80.75
4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5

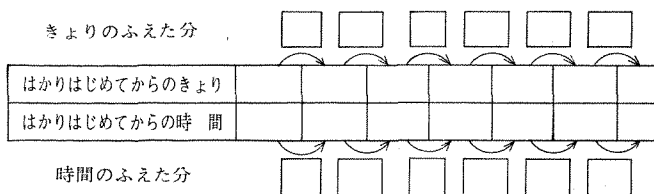
この時刻と距離の関係をただながめているだけでは、等速運動の性質はわかりませんからガリレオになら
って時間の変化を一定にしてみたとき、距離の変化がどうなっているかをしらべてみることにします。

〔問題 1〕 出発してから2秒おきにしたら、



こんどははっきりしましたね。どの2秒間をとってみても、その2秒間のうちに変化した距離に ____cm
で一定しています。等速運動にはこのような美しい関係があるのですね。

〔問題 2〕 では、1秒間にしたときはどうですか。たしかめて下さい。



運動の解析を基礎とした正比例関数の指導

〔問題 3〕 0.5 秒間でもたしかめて下さい。

きよりのふえた分

はかりはじめてからのきよ						
はかりはじめてからの時 間						

時間のふえた分

まとめると、等速運動では、時間のふえた分を一定にとれば、距離のふえた分も一定になります。

〔問題 4〕 i) つぎの表は砂の重さと体積の関係を示したものです。

重　　さ（g）	0	7	14	21	28	36	44	52	61	70	79
体　　積（cm ³ ）	0	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50

体積のふえた分を一定にしたとき、重さは一定にふえるでしょうか。

ii) つぎの表は灯油の重さと体積の関係を示したものです。体積のふえた分を一定にしたとき、重さは一定にふえるでしょうか。

重 さ (g)	0	1.4	2.8	4.2	5.6	7	8.4
体 積 (cm ³)	0	2	4	6	8	10	12

おはなしまでで、子どもは、等速運動の学習がこれからどのように進むのか興味がかきたてられている。§3 では、以後の学習の土台となる、等速運動の最も基礎的な認識である「時間のふえた分一定のとき、距離のふえた分一定」を導くことが目的である。

そのまゝに、変数の概念、すなわちこの場合、ともなうて変る二つの量をつかませることが必要である。この変数の概念の最も自然な導き方は、授業にあるように、「物体が運動する」とはどういうことかと問うことであろう。こうして運動において時間と距離がともに変化すを二つの量であるということをしっかりつかまえさせ、いよいよ等速運動の分析に入るのである。

まず、実際に等速運動をみせる。つまりこの運動が分析の対象なのだということををはっきりさせる。つぎに、授業書の時間と距離の表が、この運動をあらかじめ測定しておいたものだということを知らせる。なおこのとき、表の意味を十分つかませるために、表を読みとる作

業もやっておきたい。例えば「この物体は、2秒後には19 cm のところにいる」等々と。

さて、分析は、時間のふえた分を一定にとっておこなうのであるが、このやり方は、「ガリレオはどうしたか」という質問などによって引き出してもよいだろう。

はじめは、2秒おきに調べる。この作業はきわめて単純で、結果もまた単純な美しさを示すのであるが、その単純さの故に、子どもは途中で、作業の目的や手づきを見失なうおそれが多い。これは、結論を前提としたり(距離のふえた分を先に空欄にうめて、各時刻の距離をたしかめたりする)、きちんと計算しなかったり(距離のふえた分の計算を全部しない)等にあらわれてくる。そこで、作業の手順をはっきりとさせておくことが大切となる。問題1の場合、「2秒おきに」という指示(これは、時間のふえた分を2秒間とするということである)に従って、まず最初に、時刻の欄に、0, 2, 4, ……を、同時に時間のふえた分の欄に、2, 2, 2, ……を入れさせる。つぎ

に0秒後、2秒後、4秒後……にはこの物体はどこまで進んでいるかを距離の欄に入らせせる。これはすでに測定してある授業書の表から読みとることである。この段階で、残ったのは、距離のふえた分で、それぞれの2秒間にこの距離のふえた分はどうなるのか、これが課題であるということをはっきりさせておく。それぞれの2秒間に、距離のふえた分はどうなるだろうかと予想させてみるのもよいだろう。作業の目的がきわだつからである。

こうして、距離のふえた分をきちんと計算によってもとめさせると、どの2秒間にも距離のふえた分は、一定(19cm)となっていることが、明らかにされるのである。

この手順が理解されれば、問題2の1秒おき、問題3の0.5秒おきにとる作業も同様におこなうことができよう。問題2,3の目的は、任意の時間間隔において距離のふえた分一定が成立することを指導することにある。いづれにせよ、この問題を通して、あくまでも、同一の運

動について調べ方を変えてみたにすぎないということをおさえておく必要がある。等速運動の具体的なイメージと関連させて、時間間隔がせばまると厳密さが増すということにもふれておいてもよいだろう。

こうして、等速運動においては、「時間のふえた分を一定としたとき、距離のふえた分も一定になる」という一般的なかたちで、等速運動の最も基礎的な認識が得られたことになるのである。

この後は他の量の関係にも同様のことがいえないかどうかをみさせる問題である。問題4の砂は、プランの中では、一方(体積)のふえた分を一定にとっても、他方(重さ)のふえた分が一定にならない唯一の例であり、非常に効果的な役割をはたしている。ii)は、体積一定、重さ一定の例である。

第4節 比例の定義

§4 比例の定義

はかりはじめてからの距離	0	4.75	9.5	14.25	19	23.75	28.5	33.25	38
はかりはじめてからの時刻	0	0.5	1	1.5	2	2.5	3	3.5	4
	42.75	47.5	52.25	57	61.75	66.5	71.25	76	80.75
	4.5	5	5.5	6	6.5	7	7.5	8	8.5

【問題1】 この等速運動について考えてみましょう。

- i) 4秒～6秒までの運動の速さ cm/秒
 - ii) 4秒～5秒までの運動の速さ cm/秒
 - iii) 4秒～4.5秒までの運動の速さ cm/秒
- をそれぞれもとめてみましょう。

(速さ＝距離のふえた分÷時間のふえた分)

【問題2】 では、ある時刻からの時間のかつてにとって、速さをもとめてみましょう。

まとめると、ともなう変る二つの量があつて、一方の量のふえた分で他方の量のふえた分をわった値が一定になり、一方が0のとき他方も0になるとき、この二つの量は比例するといいます。

$$\frac{\text{他方のふえた分}}{\text{一方のふえた分}} = \text{一定, 一方0のとき他方も0}$$

等速運動の基礎的な認識をふまえて、「他方の量のふえた分/一方の量のふえた分＝一定、(0, 0)」によって比例を定義するのが§4の目的である。(分析される運動すなわち与えられている表は、§3と同じものである)

まず、起点とする時刻を固定しておき、時間のふえた分をさまざまにとって速さをもとめる。問題1では、4秒～6秒、4秒～5秒、4秒～4.5秒のそれぞれにおける速さを計算させる。いうまでもなく「速さ＝距離のふえた分/時間のふえた分」でもとめているわけである。計算の結果はどの場合も9.5cm/秒となる。内包量の指導

が必ずしも正しくおこなわれていなかった場合には、4秒～5秒の1秒間は当然9.5cm/秒だが、4秒～6秒は2秒間だから速さは2倍でなくてはならないという議論なども出てくることありうるが、これらも、ここで十分指導しておきたい。また計算の式も例えば4秒～6秒の場合、 $\frac{57-38}{6-4} = 9.5$ に統一しておく方がよい。

そこで次に、問題2で、起点とする時刻も、そこからの時間のふえた分も、かつてにとって速さをもとめさせる。けっしてすべての場合をとりつくことが目的ではないので、1秒からとるグループ、2秒からとるグルー

運動の解析を基礎とした正比例関数の指導

ブ……等々と子どもを分けて、ただし時間のふえた分のとり方は、多様になるように奨励しておくのも一つの手である。子どもに数例をださせ(例えば、1秒からふえた分を3秒間とした子どもは、 $38-9.5/4-1=9.5$)これまたいずれも9.5 cm/秒になることを確認する。

この段階で、すでに比例の定義を導入しうる状態に至っているが、さらに追いうちをかけて、§3の問題1, 2, 3にもどり、やはり、「距離のふえた分/時間のふえた分」によって速さをもとめさせ、(問題1の場合 $19/2=9.5$ の1回ですむ) どこをとっても9.5 cm/秒となることをたしかめる。すでに時間のふえた分を一定にとってあるので、1回計算すれば、どこをとっても速さ一定は、おのずと

明らかなことである。

こうすれば、比例の定義「他方のふえた分/一方のふえた分=一定 (0,0)」が無理なく導入されるのである。

この定義の意味するところは、変化する二量の関係が直接的に示されるのではなく、そのふえた分の関係がまず示されて、はじめてこの二量が比例とわかるのであるが、これを正しく指摘しておくことは、やがて、二量の直接的な解明に移ることからみて、非常に重要である。

「一方が0のとき、他方も0」は、事実確認的にたしかにそうなっているとふれる程度でよいであろう。

第5節 変化する二量に定義を適用する

§5 比 例 す る か——その 1

〔問題 1〕 次の運動の距離と時間は比例しますか。

①A物体	はかりはじめてからの距離(cm)	0	5	10	15	
	はかりはじめてからの時刻(秒)	0	1	2	3	
②B物体	はかりはじめてからの距離(cm)	0	3	6	9	
	はかりはじめてからの時刻(秒)	0	0.2	0.4	0.5	
③C物体	はかりはじめてからの距離(cm)	0	8	16	32	40
	はかりはじめてからの時刻(秒)	0	1	2	4	5
④D物体	はかりはじめてからの距離(cm)	0	6	8	12	14
	はかりはじめてからの時刻(秒)	0	2	4	6	8

〔問題 2〕 次の物質の重さと体積は比例しますか。

①A物質	重 さ (g)	0	26.7	53.4	80.1	106.8	133.5	…
	体 積 (cm ³)	0	3	6	9	12	15	…
②B物質	重 さ (g)	0	19.5	23.4	42.9	46.8	62.4	…
	体 積 (cm ³)	0	2.5	3	5.5	6	8	…

比例の定義を具体的問題に適用して、一そう強固な一般化として定着させることが§5の目的である。

ところで、定義をこの種の一連の問題(表が与えられて、比例するかどうかを決定する問題)を解くに際して、時間のふえた分を、どこからどのようにとるかで幾通りもの解き方が可能である。その中では、表にあわれているかぎり隣接している時刻の間をふえた分とするのが最も自然な見方であろう。問題1の②でいえば、0~0.2, 0.2~0.4, 0.4~0.5の各間隔をふえた分とするわけである。これを0~0.4, 0.2~0.4, 0.2~0.5等々にとることも可能ではあるが、あまりに不自然であろう。従ってふえた分のとり方については問題をとく前に、きめておく必要があるのである。

また、計算の式も定義の式に統一しておくことにする。つまり問題のとき方をまとめると、問題1の②の場合、「 $5-0/1-0=5$, $10-5/2-1=5$, $15-10/3-2=5$ 」で一定、しかも(0,0)だから、時間と距離は比例している」となる。すべての子どもが、これに習熟できるようにていねいに指導したいところである。

問1の①~④は、時間の間隔一定で、比例しているものとしていないもの、時間の間隔が一定でなく、比例しているものとしていないものの4つの型をそれぞれ代表している。基本的な型はこれで作られていると考えられる。

さらにつけ加えれば、問題をとかせる場合も、具体的なイメージからはなれないように、一定の値が速さや密度

をあらわしていることを確認したり、運動のようすを想像させたり常に留意すべきであろう。

第6節 定義から $\frac{y}{x} = a$ を導く

§6 はかりはじめてからのふえた分は

前の学習では、いろいろな時刻のふえた量をしらべました。こんどは、この運動についてはかりはじめて点からの、時間のふえた分、距離のふえた分、そのときの速さをそれぞれしらべることしましょう。

はかりはじめてからの距離	0	4.75	9.5	14.25	19	
はかりはじめてからの時刻	0	0.5	1	1.5	2	
	23.75	28.5	33.25	38	42.75	…
	2.5	3	3.5	4	4.5	…

〔問題 1〕 表に出ているそれぞれの時刻について、はかりはじめてからの時間のふえた分、距離のふえた分、およびその間の速さをもとめよう。

結局、どちらの量も 0 からはじまっていますので、 $\frac{\text{距離のふえた分}}{\text{時間のふえた分}} = \text{一定}$ ということから、
はかりはじめてからの距離
はかりはじめてからの時刻
は一定ということがわかりました。

これからは、一方の変化する量を x 、他方の変化する量を y とあらわします。そうすると上の表は、はかりはじめてからの時刻が x 秒、はかりはじめてからの距離 y cm で

$$\frac{y}{x} = 9.5 \quad (\text{比例の式})$$

という一つの式で表わすことができます。

この運動を表わすのに、上に書いてあるような表であらわすのと、比例の式であらわすのとではどちらがすぐれているかを考えてみましょう。

〔問題 2〕 ではつぎの等速運動を比例の式であらわしてみましょう。時刻を x 秒、距離を y cm とします。

はかりはじめてからの距離	0	15	30	45	60	75	…
はかりはじめてからの時刻	0	3	6	9	12	15	…

〔問題 3〕 次の表は、重の重さと体積の関係を示したものです。

重 さ (g)	0	31.6	63.2	94.8	126.4	…
体 積 (cm ³)	0	4	8	12	16	…

体積を x cm³、重さを y g として、この表を比例の式で表わしてみましょう。

比例する二つの量はすべて、一定な数 a があって、

$$\frac{y}{x} = a \quad (\text{比例の式, その 1})$$
 と表わすことができます。(この a を比例定数といいます)

〔問題 4〕 次の表を比例の式であらわしてごらんください。

y	0	3	6	9	12	…
x	0	0.5	1	1.5	2	…

注 意 比例の式で、 x や y や a はいろいろな量を代表するので単位をつけずに書きましょう。

問題をとくときには、 x や y や a がどのような量を表わしているのかを、はっきり単位をつけて表わしましょう。

〔問題 5〕 次の表は、あるはりがねの重さと長さの関係を示したものです。比例の式で表わしてごらんください。

運動の解析を基礎とした正比例関数の指導

重 さ (g)	0	5	10	15	...
長 さ (cm)	0	10	20	30	...

比例する二つの量はすべて $\frac{y}{x} = a$ と書きましたが、逆に $\frac{y}{x}$ が一定となるような二つの量は比例するでしょうか。

次の表は $\frac{y}{x} = 4$ となるような x, y の関係を示したものです。二つの量は比例していることをたしかめてみましょう。

y	0				16	20	24	28	...
x	0	1	2	3	4	5	6	7	...

比例の定義から、一方の量を x 、他方の量を y とするとき、 $y/x = a$ が成立することを導くことが §6 のねらいである。(ここでも分析の対象となる運動は §3 以来の同一のものである)

まず、問題1で、はかりはじめを起点としてふえた分をとらせる課題が与えられる。とすると答えは「 $4.75 - 0 / 0.5 - 0 = 9.5$, $9.5 - 0 / 1 - 0 = 9.5$, $14.25 - 0 / 1.5 - 0 = 9.5$...」となる。

このように、0.5は時刻を、0.5-0は時間のふえた分を表わすというように、明らかに異った内容を表現することになるのであるが、たまたま、出発点 (0, 0) を起点として比例の定義を応用した結果としての0をひくという操作はなにもしないのと同じことで、(時刻と時間がたまたま一致して) 結局、「出発してから距離/出発してから時刻=一定」という変化する二量の直接の関係を導くことになったのである。これは比較的小子どもに理解しやすい。

つぎに、変量を文字であらわすという大きな課題がある。この導入は、「一方の量(時間)をすべて x で代表させ、他方の量(距離)を y で代表させることにしよう」とする。

こうすると x と y の関係は、「出発してから距離/出発してから時刻=一定」から、この場合、 $y/x = 9.5$ と表わされる。これも子どもは理解しやすい。

が、配慮が必要なのはこの後である。まず一応、対応の関係(これはある意味で自明のことなのである。すなわち「 $4.75 / 0.5 = 9.5$, $9.5 / 1 = 9.5$...」の一般化として $y/x = 9.5$ を指導しているのだから)について念をおしておく。例えば、 $y/x = 9.5$ で、 x が個別的に2をあらわすとき、 y はなにを表わすのだろうかと問い、その y は19となることをたしかめさせるなど。これは、表をみればよいことであるし、 $() / 2 = 9.5$ となるような数は19しか

ないといわせてもよい。さらにたたみ込んで、38ではないのかという質問に、 $38 / 2 \neq 9.5$ と答えさせれば万全であろう。

いま一つの配慮としては、変数を x, y で代表させ、 $y/x = 9.5$ と式表示することの意義をつかまえさせるために、表とくらべて、 $y/x = 9.5$ のすぐれている点は何かを考えさせることがありうる。これには、表では書ききれないすべての数値が代表されているという答が期待される。これはまた $y = a \times x$ を指導する時点でもくり返し指導されなければならないことである。

問題2は、では他の等速運動もあらわせるのではないかということで、実際に式表示を試みる問題である。これによって、等速運動であれば「 $y/x = \text{一定の数}$ 」という式であらわされることがわかるのである。

問題3で、さらに鉄の重さと体積の関係も直接的に $y/x = 7.9$ とあらわせるとした後に、一般化して、比例においては、 $y/x = \text{一定}$ となること、これを $y/x = a$ とあらわすことを指導する。そして、この a を比例定数といい個々のケースで a の数値がきまったとき、個々の比例が式で表示させるのであるということも指導しておく。また、比例定数が、速さや密度をあらわしていることもくり返し確認しておきたい。

問題4,5では、比例の式の一般的なとめ方を指導しておく。すなわち「長さを x cm、重さを y g とすると、 x と y は比例しているので、 $y/x = a$ と書ける。 a をきめるには、どの数値の組をとってもよいが、例えば、 $5 / 10 = a$, $a = \frac{1}{2}$ 、答 $y/x = \frac{1}{2}$ 」

最後にできるだけかんたんに、 $y/x = a$ がいえるならば、 x と y は比例しているということもふれておく。次の練習問題は、これを用いて比例をたしかめるのであるから。

第7節 比例の式(その1)の適用

§7 比例するか—その2

〔問題1〕 次の x と y は比例しますか。比例するものは、比例の式も書きなさい。

①

y	0	4	8	12	
x	0	0,5	1	1,5	

②

y	0	10	20	30	
x	0	4	8	12	

③

y	0	8,4	9,3	21	
x	0	2	2,5	5	

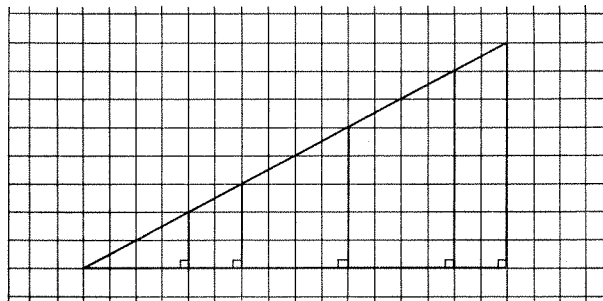
④

y	3	6	9	12	
x	0	1	2	3	

⑤

y		30	40	50	60	
x		6	8	10	12	

〔問題2〕 次のような直角三角形の高さ(y)cmと、底辺(x)cmは比例しますか。表をつくってしらべましょう。



この時間は、 $y/x=a$ をいくつかの問題に適用してみることをおこなう。

問題1は、 x と y が比例するかどうかをまずたしかめて、比例するものは式に表わす問題である。定義にもとずきたしかめ方は、すでに十分に習熟しているので、§6で学んだ y/x が一定になるかどうかによって調べるということをあらかじめ約束しておく。

①の解き方は、「 $4/0.5=8$, $8/1=8$, $12/1.5=8$ 、従って x と y は比例する。式は $y/x=8$ 」。④は「 $(0,0)$ でない」

でもよいし「 $6/1 \neq 9/2$ 」でもよい。⑤「 y/x でたしかめて比例(たどらせて $(0,0)$ を確認させてもよい)」等々。

問題2は、速さ、密度以外の量に比例の概念をあてはめる最初の例である。この問題はグラフ指導の伏線の意味もかねている。子どもの中には、底辺をとらずに底辺のふえた分をとり、高さはそのままにとって誤るものが多いのが特徴である。

第8節 定義にもとずいて $y=a \times x$ を導く

§8 y を も と め る 式

比例の定義をおもいだそう。そうそう、 $\frac{\text{他方のふえた分}}{\text{一方のふえた分}} = \text{一定}$ で、一方が0のとき他方も0、でしたね。

〔問題1〕 ところで、等速運動で、速さが4cm/秒と与えられたとき、5秒後、8秒後の進んだ距離はどのようにしてもとめましたか。

みなさんのもとめた値が正しいことを比例の定義にもとづいてたしかめてみましょう。

運動の解析を基礎とした正比例関数の指導

		4		4		
y	0			?		?
x	0	1		5		8
		1	1		1	

定義からやはり、距離＝速さ×時間 でもとめた値がただしことが、たしかめられました。

このことから、はかりはじめてからの距離を y 、時間を x であらわせば、 y と x の関係は $y=4 \times x$ という表わしかたをしてもよいことがわかります。

いっばんに、比例定数を a とすれば、

$$y=a \times x \quad \cdots (\text{比例の式, その 2})$$

となります。

注意 $y=a \times x$ (比例の式 2) は、 $\frac{y}{x}=a$ (比例の式 1) と同じ運動をあらわしたものです。

〔問題 2〕 二つの比例の式があります。

$$\frac{y}{x}=3 \qquad y=3 \times x$$

どちらの式でも、 x の値がきまれば y の値がきまりますが、いくつかの x の値に対して、どちらも y の値が同じになることをたしかめてみましょう。

〔問題 3〕 ① 25 cm 秒の等速運動をしている物体の距離を y cm、時間を x 秒として、 x と y の式を書いてごらんさい。

② x の値が 0, 3, 6, 9 のとき y の値はそれぞれいくらになりますか。

比例の定義にもとづいて、 $y=a \times x$ が成立することを確認することがこの時間の目的である。

問題 1 で、「4 cm/秒の等速運動の 5 秒後、8 秒後の距離」をもとめさせる。これは内包量の第 2 用法であるから子ども達は難なくといってしまう。即ち「4 cm/秒×5 秒＝20 cm、4 cm/秒×8 秒＝32 cm」。

ここでの課題は、この計算が比例の定義によってたしかめることができるかどうか、それはどうするのかということなのである。

たしかめ方は、定義を導びいた § 3, § 4 の逆をたどることである。4 cm/秒の等速運動ということは、まず 1 秒間に 4 cm 進む運動以外のなにものでもない。これを手がかりに時間と距離の表をうめていくわけである。最初に時間のふえた分を 1 秒間とすることをはっきりさせて、これを時刻とともに表に書き込んでいく。(時刻; 0, 1, 2, 3……, 時間のふえた分, 1, 1, 1……)。つぎに明らかなのは各 1 秒に進む距離すなわち距離のふえた分である。この距離のふえた分は、4 cm にほかならない。ここで、求めるべき量(空らんになっているのは)距離である。これを求めるには、最初を 0 cm として、距離のふえた分 4 cm をつらねてゆけばよい。こうして各時刻の距離がすべてわかるのである。5 秒後、8 秒後の距離もたしかに 30 cm, 32 cm と求められ、計算と一致していることが確認されるのである。このことの結論は、比例の定義と、距離＝速さ×時間とが同値であることが、具

体的にたしかめられたということである。この指導が複雑におこなわれると、子どもはこの論理過程を正しくたどれなくなるので、十分な注意が必要である。

以上をふまえたうえで、時間を x 、距離を y としたときに、20 cm＝4 cm/秒×5 秒、32 cm＝4 cm/秒×8 秒……の一般化として、 $y=4 \times x$ を導く。くり返すと、これ自体は何ら理解難なことがらではない。重要なことは、 $y=4 \times x$ と、比例の定義との間の連関が理解されることにあったのである。

さて、 $y=4 \times x$ と比例の式がきまっただいま、こんどは逆に、あらためて x が 0, 1, 2……となつたとき、 y は $4 \times 0, 4 \times 1, 4 \times 2$ ……ときまっていことを再確認しておきたい。同時にまた、表よりも $y=4 \times x$ の表記法がすぐれていることについても、論議しておくべきであろう。

つぎに、一般に x と y が比例するとき $y=a \times x$ という式がなりたつことを指導する。これが、〔注意〕にあるように、 $y/x=a$ と同じ関係をあらわす式であることもふれておく。これは問題で x にいくつかの数値を代入することによってたしかめられる。さらに指導するとすれば、 $y/x=a$ が、比例定数一定をニュアンスとして強調しているのに対して、 $y=a \times x$ は、独立変数と従属変数とが分離され、 x がきまれば y もきまるという関係が強調されていることをつけ加えてもよいだろう。ここで、今後は、普通には、 $y=a \times x$ を用いるが、 $y/x=a$ もいつも書けるようにと約束しておく。

第9節 比例の式(その2)の適用

§ 9

〔問題 1〕 次の y と x の式をつくりなさい。

- ① 4.5 cm/秒の等速運動をしている物体の進んだ距離 (y) cm と時間 (x) 秒
 ② 密度 7.9 g/cm³ の鉄の重さ (y) g と体積 (x) cm³

〔問題 2〕 次の y と x の式をつくりなさい。

- ① はかりはじめてから3秒後に 240 cm 進むような等速運動の進んだ距離 (y) cm と時間 (x) 秒
 ② 250 cm³ の重さが 1,600 g である均等な物質の重さ (y) g と体積 (x) cm³

〔問題 3〕 次の表はある等速運動の時刻と距離の関係を示しています。時刻を x (秒), 距離を y (cm) としたときの, x と y の関係を式にあらわしなさい。

①

距 離	0	12.8	25.6	38.4	51.2	64	76.8
時 刻	0	2	4	6	8	10	12

②

距 離	0	150	300	450	600	
時 刻	0	10	20	30	40	

〔問題 4〕 ある運動の時刻を x (秒), 距離を y (cm) としたとき, その関係は $y=20 \times x$ となっています。この運動を表であらわすとどうなるでしょう。

距 離					
時 刻	0	5	10	15	20

〔問題 5〕 次の表の x と y は比例しています。 x と y の関係を式にあらわし, そのあと, x が 7.5, 11 のとき, y はそれぞれいくらかになるかをもとめなさい。

y	0	7.1	14.2	21.3	28.4	35.5					
x	0	0.5	1	1.5	2	2.5		7.5		11	

〔問題 6〕 次の表の y と x は比例しています。

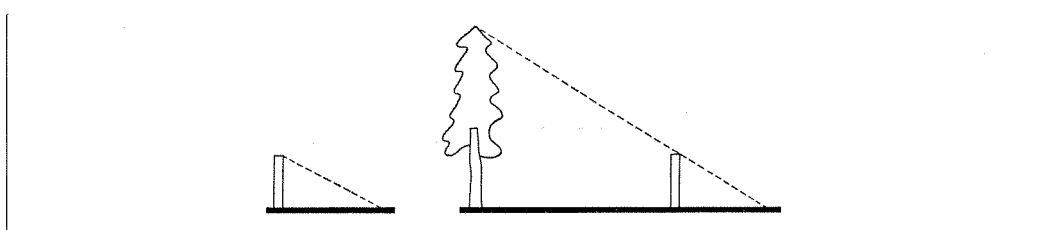
y	0	5	10	15	...	25		50		100	
x	0	2	4	6	...	?		?		?	

- ① y と x の式をつくりなさい。
 ② y が 25, 50, 100 になったときの x の値をもとめなさい。

〔問題 7〕 5 分間に 180 ℓ の水が流れる蛇口があります。流れでるいきおいはつねに同じとすれば, 30 分間には何 ℓ の水が流れることになるのでしょうか。比例の式をつくり, 計算しましょう。

〔問題 8〕 直径 5 cm の円の円周の長さは 15.7 cm ありました。直径と円周が比例すると考えて, 直径 20 cm の円の円周をもとめましょう。比例の式をつくり, 計算しましょう。

〔問題 9〕 高さ 2 m の棒のかげの長さが 5 m ありました。いろいろなものの高さとかげが比例すると考えて, かげの長さが 30 m の木の高さをもとめましょう。比例の式をつくり, 計算しましょう。



この§の課題は、子どもに $y=a \times x$ が、縦横に使いこなせるように習熟させることである。問題の量も多く配列にもある程度工夫がなされている。仮りに問題のパターンをⅠ、Ⅱ、Ⅲ、Ⅳとする。

Ⅰのパターンは、比例定数が、速さや密度のかたちで与えられていて、比例の式をあらわす問題である(問題1)。ただし、問題1の①なども、単に $y=4.5 \times x$ として終るのではなく、 x が 0, 1, 2, ……と決ったとき y が 0, 4.5, 9…ときまる関係をあらわしているのだということをつかまえさせるように指導するべきである。

Ⅱのパターンは、比例していることは前提なのだが、比例定数が与えられずに、変量の数値の組、あるいはそれが表として与えられているものを比例の式であらわす型の問題である(問題2, 3)。問題2の①は「等速運動というのだから、 x と y は比例していて、 $y=a \times x$ とかける、いま a がわかればよいから $a=240/3$ (これは、 $y/x=a$ の x, y に代入してもよいし、 $y=a \times x$ で $240=(a) \times 3$ からでもよい)、従って、 $a=80$ だから比例の式は $y=80 \times x$ 」と解く。

Ⅲのパターンは、 $y=a \times x$ が具体的に与えられていて、

x の値に対応して y がどう決るかを問う問題である(問題4)。これは、「 $y=20 \times 0$, $y=20 \times 5 \dots$ 」で解けばよい。

Ⅳのパターンは、ⅡとⅢの複合問題である(問題5以降)。この解き方は、比例定数をもとめ、式をきめて、 x に数値を代入して y の数値をもとめるという順序である。例えば問題4は「比例しているので $y=a \times x$, 比例定数をもとめるのはどこでもよいが、 $a=14.2/1=14.2$ だから $y=14.2 \times x$, x が 7.5 のとき y は、 $y=14.2 \times 7.5$ 」と解かれる。

この§ではさらに、速さ、密度以外の量にも、比例の式を適用することになる。これらを解くには、まず変化する二量をみつけだし、それを x, y であらわすという作業をしなければならない。ただし子どもにまかせっ放しにしておくと、 x, y のあらわし方がまちまちになるので、変化する二量をはっきりとつかまえさせたならば、どちらを x , どちらを y であらわすかを約束として与えなければならない。(この場合、 x とするのは、時間(x 分)、直径(x cm)、かげの長さ(x m)である。

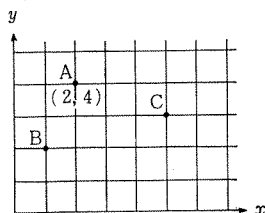
第10節 比例のグラフ

§10 比例のグラフ

比例 ($y=a \times x$) をグラフにあらわしてみましょう。

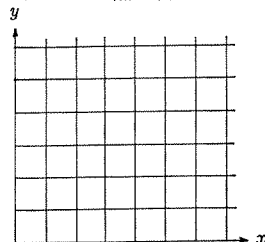
そのまゝに

〔問題1〕 次のような点をよみとってみましょう。



Aは x が のとき、 y が の点
 Bは x が のとき、 y が の点
 Cは x が のとき、 y が の点
 ⋮ ⋮ ⋮
 ⋮ ⋮ ⋮

〔問題2〕 次のような点を書きいれましょう。



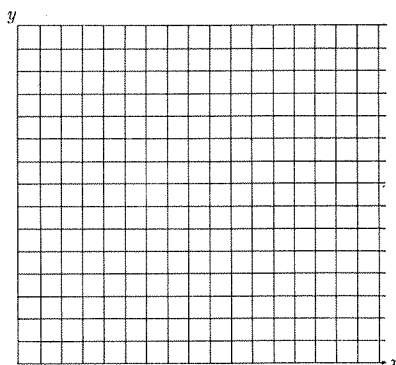
Aは x が のとき、 y が の点
 Bは x が のとき、 y が の点
 Cは x が のとき、 y が の点
 ⋮ ⋮ ⋮
 ⋮ ⋮ ⋮

〔問題 3〕 それでは $y=2 \times x$ のグラフを方眼紙に書いてみましょう。表をつくり点を書き入れていきます。

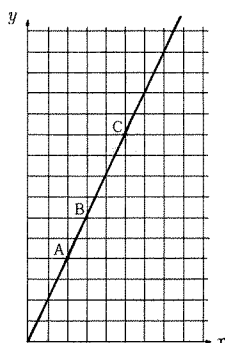
y	0				20
x	0	1	2		10

比例のグラフは、(0, 0) を通る直線になります。

〔問題 4〕 $y=\frac{1}{2} \times x$, $y=3 \times x$ のグラフを書きましょう。



〔問題 5〕 次の $y=2 \times x$ のグラフが、比例の定義にかなっているかどうかを確認しましょう。



AからBまで動くとき、

xは , yは ふえた

$$\frac{y \text{ の ふえた分 }}{x \text{ の ふえた分 }} = \frac{\quad}{\quad}$$

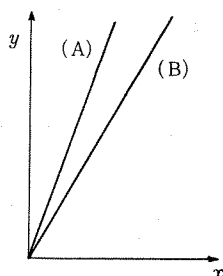
BからCまで動くとき、

xは , yは ふえた

$$\frac{y \text{ の ふえた分 }}{x \text{ の ふえた分 }} = \frac{\quad}{\quad}$$

比例定数は、グラフでは かたむき を表わします。

〔問題 6〕 下には、㊦速さ 1.5 cm/秒のグラフと、㊦速さ 2.5 cm/秒のグラフが書かれています、ひと目で区別できますか。



運動の解析を基礎とした正比例関数の指導

〔問題 7〕 いろいろな比例の式をグラフにあらわしてみましょう。(一枚の方眼紙に書いて下さい)。

$$\textcircled{1} \quad y = \frac{2}{3} \times x$$

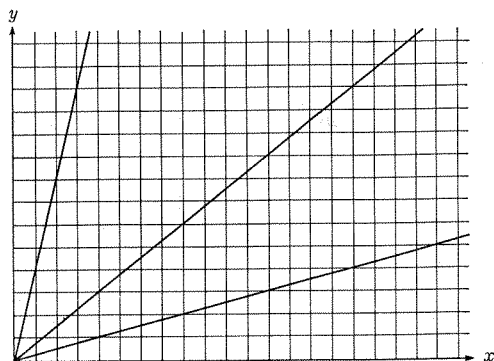
$$\textcircled{2} \quad y = 7 \times x$$

$$\textcircled{3} \quad y = \frac{5}{4} \times x$$

$$\textcircled{4} \quad y = 2.5 \times x$$

$$\textcircled{5} \quad y = x$$

〔問題 8〕 次のグラフの x と y の関係式をもとめなさい。



$y = a \times x$ をグラフにあらわし、その特徴をつかませることが、§10の課題である。

まず準備として、座標を指導する。問題1,2は、座標上の点をよみとり、逆に座標上に点をとることを練習させる。結果として、座標軸がきまれば、平面上の点は、2個の数の組としてあらわされることを子どもは習得する。ここでは、(0.5, 1) (1, 0.5) (0, 0) など、後のグラフに関係して誤りやすいとおもわれる点については、ぬかりなく指導しておきたい。とりわけ、子どもは x と y を逆転しがちであることも注意しておく必要がある。

問題3は、 $y = 2 \times x$ のグラフを書かせる問題である。子どもたちは当然ながら、 x が1, 2……のときの y の値をもとめ、この点をプロットとしてゆけばよいと提案する。ところで子どもたちは、ポツポツと点をプロットしただけで、グラフができあがったと考えている。これには、 $y = 2 \times x$ のグラフとして、それで十分かどうかを質問するとよい。例の $y = 2 \times x$ のすぐれた点の指導が十分であれば、ただちにもっとたくさんの点をとらなければならないことをさとするであろう。そこで、 x を0.1, 0.2, 0.3……とこまかくとらせて、点をプロットさせる。こうしてさらにこまかく、まだこまかくなどといって、結局グラフは、直線になってしまうことを納得させる。(以上の作業をおこなわせるうえで、少くともこの一題は、1mm 方眼紙が必要である。1cm を1として用いる)

ここで、「比例のグラフは (0, 0) を通る直線となる」ことをまとめるのである。

次には、 $y = 0.5 \times x$, $y = 3 \times x$ などのグラフをさらに書かせる。子どもは依然として点をたくさんプロットして

グラフを書いているが、慣れてきたところをみはからい、直線になるのだから、どこかわかりやすい一点と (0, 0) を結べばグラフになることを指導する。またこの練習もおこなう。

こんどは、原点を通る直線が、比例の定義にかなっているかをたしかめようという課題を与える。 $y = 2 \times x$ のグラフ上の点A (2, 4), B (3, 6), C (5, 10)に関してAB間の「 y のふえた分/ x のふえた分」をもとめると、 $6-4/3-2=2$, BC間では $10-6/5-3=2$ とたしかに定義にかなっていて一定になる。これはあらゆる点の間でいえるわけで、グラフ上の点をたどって、「 x が1ふえると y は2ふえる」というように、あるいは同じことであるが「 x が2ふえると y は4ふえる」等々、たしかめておく。そこで、この2 (比例定数) が、グラフは「傾き」をあらわしている数であることを指導する。比例定数は分数であらわす方がつごうがよいこともふれておく必要もある。

$y = \frac{1}{3} \times x$ のグラフの傾きは x が3ふえると y が1ふえる傾きと直観的につかめるからである。

次は、グラフから比例の式をもとめる問題である。この解き方は、「(0, 0) を通る直線」であるかどうかをみきわめて、 a の値をもとめることである。どうしてもできるわけであるが、中には、例えば問題7のゆるやかなグラフなどの場合、グラフ上の x と y の値のはっきりしている点をさがすのではなく、さきに x を5などと決めてしまっ、そのときの y の値がよみとれずに四苦八苦する子どももでてくる。これらには、グラフ上の x の値も y の値もはっきりとわかる点をどれかさがして、それから比例定数の値をもとめるのだということも指導し

なくてはならない。

また視覚に「直観的」に与えられるのがグラフである
がこれを直観的に把握する問題6のような練習も必要で

ある。

第11節 バネを用いた比例の応用

§11 比例の応用

いままでの学習で、比例は十分に理解しました。こんどはこの考え方を応用してみましょう。

バネの長さ (cm)							
バネに加える力 (g)							

【問題1】 いま、実際にはかったこの表から、バネの長さと加えた力は比例しているかどうかを確かめてみましょう。

【問題2】 これをくふうして、比例の関係をみるとことはできないでしょうか。

比例から一次関数への発展の典型的なすじ道を、この§はふんでいるのである。もちろん一次関数そのものを指導したというわけではなく、一次関数の関係にある二量を比例の概念によってとらえさせた授業ではあるが。

授業は、バネを示し、(われわれの授業では 25g ずつの重りを加えていった、25g のびが 3.5cm のバネであった)これに一定の力(重り)を加えていき、そのときのバネの全長をそれぞれ測る。これ(バネに加えた力(g)とバネの長さ(cm))を表にし加えた力とバネの長さは比例するかどうかを考えさせるのである。

子どもの考えは大きく二つにわかれる。①長さのふえた分/力のふえた分=一定 になるので比例している、②たしかにそうだが、(0, 0) でないので比例とはいえない。この外に、③ y/x が一定にならない等の意見の出る可能性もある。①、②のような考えは、われわれのプランによる指導によってしか達しえない高度の概念であるといえる。

そこで、②が正しいことを指摘したのち、なんとか比

例の関係と見たいがどうかという問題2を与える。子どもたちは、バネの全部の長さははかったのがわるい、のびをはかればよい等々、正しい答を見つけた。あらためて、のびと加えた力との表をつくり、比例していることをたしかめて授業は終る。

第3章 比例指導の評価

比例指導の評価は、(1)比例の定義($\Delta y/\Delta x$ =一定, (0, 0))の理解(問題1)、(2)比例の式($y=ax$)の適用(問題2)、(3)比例の式をグラフに表示する(問題3)、(4)比例の概念の一般化(問題4)という課題群からなっている。これらの課題を子供にペーパー・テストで課し、集計、分析を行なった。今回は時間の都合で面接を割愛した。しかし、結果を分析するに十分な資料はえられた。以下、課題の順番に従って分析しよう。

(1) 比例の定義の理解

問題1 次の表の y は x に比例しますか。比例するものは、比例の式も書きなさい。

①

y	0	0.96	2.24	3.2	3.84	...
x	0	0.3	0.7	1	1.2	...

②

y	1	7	13	19	25	...
x	0	2	4	6	8	...

③

y	0	0.8	1.5	4.5	3.6	...
x	0	0.3	0.6	0.9	1.2	...

④

y	0	1.5	3	4.5	6	...
x	0	0.5	1	1.5	2	...

⑤

y		75	90	105	120	...
x		50	60	70	80	...

比例の定義の理解をみる課題は、比例するものと比例しないものとからなっている。比例するものは、i) 比例の定義をつかって判別する課題；④ Δx が一定な場合、一(④) ⑤ Δx が任意な場合一(①)、と ii) y/x =一定で判別す

る課題一(⑤) とにわかれ、比例しないものは、i) (0, 0) ではあるが、 $\Delta y/\Delta x$ が一定でない場合一(③)、 ii) $\Delta y/\Delta x$ が一定であるが、(0, 0) でない場合一(②) とにわかれて(もちろん、これらの課題すべては y/x =一定を

運動の解析を基礎とした正比例関数の指導

使っても判別できる。

る。

次の表は、正答者数と誤答者数をあらわしたものであ

		総 数	
	正 答 者 数 () 内 %	誤 答 者 数 () 内 %	
①	29 (85%) 判別及び比例式 — 23 名 〔注 1〕 判別だけ — 4 名 〔注 2〕 考え方正答 (計算まちがい) — 2 名	5 (15%) x が比例していない — 2 名 理由不明 — 2 名 無 答 — 1 名	
②	26 (76%)	8 (24%) $y=3 \times x$ — 7 名 無 答 — 1 名	
③	31 (91%)	3 (9%) 理由不明 — 1 名 無 答 — 2 名	
④	33 (97%) 判別及び比例式 — 29 名 判別だけ — 4 名	1 (3%) 理由不明 — 1 名	
⑤	31 (91%) 判別及び比例式 — 27 名 判別だけ — 4 名	3 (9%) 無 答 — 3 名	

〔注 1〕 この課題は比例の判別が可能かどうかをみるためのものであるため、比例式の書いていないものも正答とみなした。

〔注 2〕 計算は間違っているが定義を正しく適用しているものも正答とみなした。

①, ③, ④, ⑤の正答率の高さからみて、ほぼ定義は理解されたものと思われる。

他の課題の正答率にくらべて、②の正答率の低いのは、 $4y/4x$ ＝一定を正比例と考えたものであり、(0, 0)の条件を欠落させたものと考ええる (授業書 §11 の未定着)。しかし、誤答者のうち、7 名が $y=3 \times x$ としており、この課題の二量の関係は一次関数で表現されるものであり、この課題も $4y/4x=a$ で処理できることを発見した高度なあやまりだといえる。

他の誤答例では、①の課題で、 $4x$ を等しくとっていないことを理由に比例しないと答えたものが 2 名いた。

「 $0.3-0=0.3$, $0.96-0=0.96$, $0.7-0.3=0.4$, $2.24-0.96=1.28$, (だから) 比例しない」(R, M)

この子供たちには、 $4x$ のとり方の任意性についての注意深い指導がなされれば、このような誤りはなくなるであろう (授業書 §5, §7)。

さらに、問題 1 の課題の全体をとうして、 $4y/4x$ と y/x とが十分分離できていないものが 4 名いた。

「 $\frac{y}{x}=a$, $15 \div 10=1.5$, $\frac{y}{x}=1.5$ 」(K, S) (⑤の課題)
従って、このような混同をさけるように注意して指導する必要がある (授業書 §6)。

(2) 比例の式の適用

問題 2 次の表の y は x に比例しています。

y	0	19.6	39.2	58.8		??	...
x	0	2	4	6		13	...

① y と x の比例の式をつくりなさい。

② x が 13 のとき、 y はいくらになるでしょう。

この課題は、比例する二量の間では、 $y=a \times x$ という一般式がなりたち、このことから a の値をもとめ、任意の x に対して y の値を求めるという課題である。

以下の表は正答者数と誤答者数をあらわしたものである。表からわかるように、大体、80%のものが比例の一般式を正しく適用している。

	正 答 者 数 () 内 %	誤 答 者 数 () 内 %	
①	28 (82%) 計算まちがい — 2 名	6 (18%) $y=a \times x$ — 5 名 $y=19.6 \times x$ — 1 名	
②	28 (82%) 考え方正答 — 1 名 計算まちがい — 3 名	6 (18%) 無 答 — 4 名 無 意味 — 2 名	

誤答者のうち、①の課題では $y=a \times x$ としたものの 5 名、 x が 2 の時の y の値を a とみなしたものの 1 名、②の課題

では、 $y=a \times x$ としたものの 5 名のうち、1 名が正答 (内包量の第 1 用法, 第 2 用法をつかって), 4 名が無答であった。

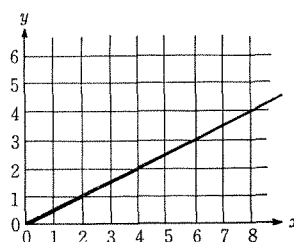
これらの子供たちのうち、 $y=a \times x$ としたものには、この式は比例の一般式であり、 a の値がきまらなければ、この表の y と x の二量の関係はあわせえないこと、後者の1名には、 a は一当り量であることを指導することに

よってこのような誤りはなくなるであろう(この部分の詳しい授業展開は、授業書§9の解説を参照)。

(3) 二量の変化をグラフに表示する

問題 3

- ① $y=\frac{1}{3} \times x$ のグラフを書きなさい。
② 次のグラフを比例の式であらわしなさい。



比例の式から二量の連続変化をグラフにあらわす課題と、その逆の課題である。この課題は、次の高い正答率

が示しているとうりほぼ理解されたものと思われる。

	正 答 者 数 () 内 %	誤 答 者 数 () 内 %
①	31 (91%)	3 (9%) [点のプロットだけ — 1名] [無 答 — 2名]
②	32 (94%) [a だけ — 1名] [計算だけ — 1名]	2 (6%) [$y=1 \times x$ — 1名] [$y=2 \times x$ — 1名]

(4) 比例の概念の一般化

問題 4

ふたりの人が汽車によって、汽車の運動をしらべることにしました。太郎君は30秒ごとに進んだ距離をしらべました。このとき、みち子さんは10秒ごとに進んだ距離をしらべました。それが下の表です。

太 郎	進んだきより (m)	0	750	1500	2250				
	時 間 (秒)	0	30	60	90				

みち子	進んだきより (m)	0	120	360	750	1000	1250	1500	
	時 間 (秒)	0	10	20	30	40	50	60	

太 郎 「僕の表からみると、この汽車の進んだ距離は時間に比例しているよ」

みち子 「私の表では、この汽車の進んだ距離は時間に比例していないわ」

問題 この汽車の進んだ距離は、時間に比例しているでしょうか。○をつけ、わけを書きなさい。

- ①比例している ②どちらともいえない ③比例していない

授業では、等速運動を解析することによって比例の定義を導いてきたのだが、この課題は、逆に、所与の数値から実在の運動を想定するという課題である。従って、この課題をなしうるには、本質的には、一般の連続関数

の変化の解析に習熟していなければならないのであり、いわば、われわれの比例指導の上限をはかるような課題である。

正答率は予想したとうりであった。

	正 答 者 数 () 内 %	誤 答 者 数 () 内 %
問 4	18 (53%) [②比例していない — 18名 (53%)] [(理由なし) — 3名]	16 (47%) [①比例している — 6名 (18%)] [②どちらともいえない — 6名 (18%)] [無 答 — 4名 (11%)]

これらをそれぞれの特徴によって類型分けすると次のようになる。

A類型……対応表の実在の意味をつかめず、事実を確認するだけのもの。これは①を選んだものにあらわ

運動の解析を基礎とした正比例関数の指導

れている。

「30秒ごとにきまった距離だけ進んでいるから」

(Y, O)－1名

「太郎さんの方は比例しているから」(H, H)－3名

「太郎、みち子、一方のふえた分÷他方のふえた分一定だから」

(A, H)－2名

B類型……比例の概念を運動のイメージを介して強固に一般化していない。即ち、これは、比例ならばどの区間においても $\Delta y/\Delta x = \text{一定}$ であるということ(もし、ある微小な区間において1カ所でも $\Delta y/\Delta x$ が、ことなれば比例でない)をある物体の運動にイメージ化できないことを、示している。これは③を選んだものに多くあらわれている。

「太郎君のは比例しているけど、みち子の方は比

例していない」

(S, M)－5名

C類型……比例の概念が、実在の運動と対応させて理解されているもの。これは②を選んだものに多くあらわれている。

「ふたりの乗っている自動車は同じ自動車だ。等速運動というのは $y = a \times x$ で、 $a = \text{かわらない}$ 、 $a = \text{何にでもつかえるけど}$ 、この場合同じ自動車なのに同じやないことは(等速運動)していない」(J, N)－16名

A類型は、対応表の実在的意味の分析によって、B類型は、比例するものと比例しないもののイメージを強固にすることによって、それぞれ比例の概念が強固に一般化されるものとする。

私たちは、この評価テストの結果から、比例指導の目的はほぼ達成されたものとする。

比例評価問題

問題 1 次の表の y は x に比例しますか。比例するものは、比例の式も書きなさい。

①

y	0	0.96	2.24	3.2	3.84	...
x	0	0.3	0.7	1	1.2	...

②

y	1	7	13	19	25	...
x	0	2	4	6	8	...

③

y	0	0.8	1.5	4.5	3.6	...
x	0	0.3	0.6	0.9	1.2	...

④

y	0	1.5	3	4.5	6	...
x	0	0.5	1	1.5	2	...

⑤

y		75	90	105	120	...
x		50	60	70	80	...

問題 2 次の表の y は x に比例しています。

y	0	19.6	39.2	58.8		??	...
x	0	2	4	6		13	...

① y と x の比例の式をつくりなさい。

② x が 13 のとき、 y はいくちになるでしょう。

問題 3

① $y = 1/3 \times x$ のグラフを書きなさい。

② 次のグラフを、比例の式であらわしなさい(方眼をめもり、 $y = 1/2 \times x$ のグラフを書いておく)。

問題 4

ふたりの人が汽車によって、汽車の運動をしらべることになりました。太郎君は 30 秒ごとに進んだ距離をしらべました。このとき、みち子さんは 10 秒ごとに進んだ距離をしらべました。それが下の表です。

太 郎

進んだ距離 (m)	0	750	1500	2250	
時 間 (秒)	0	30	60	90	

みちこ

進んだ距離 (m)	0	120	360	750	1000	1250	1500	
時 間 (秒)	0	10	20	30	40	50	60	

太 郎 「僕の表からみると、この汽車の進んだ距離は時間に比例しているよ」

みち子 「私の表では、この汽車の進んだ距離は時間に比例していないわ」

〈もんだい〉 この汽車の進んだ距離は、時間に比例しているでしょうか。○をつけてわけを書きなさい。

①比例している。 ②比例していない。 ③どちらともいえない。

〈注〉

- 1) 倉田令二郎「新数学構築の原点」(『展望』1969, 7 所収)
銀林浩「科学と教育」(『数学教室』No. 196)
- 2) 銀林浩「量と数学教育」(『数学教室』No. 189)
- 3) 銀林浩, 同上論文
- 4) 小平邦彦「New-Math 批判」(『科学』1968, No. 10)
- 5) 日数教編「現代の数学教育」1, pp. 3~11
- 6) 森毅「数学の構造」(小学館教育学全集 6, 所収), 山口昌哉・中原克己編「関数指導現代化入門」1 (初等関数) p. 35 以下参照
- 7) 小島順「微分」(『現代数学』Vol. 13, No. 11)
- 8) 森毅「ベクトル解析」(国土社)
- 9) 銀林浩「教研総括」(『数学教室』No. 188) p. 5
- 10) 遠山啓「数学入門」(下) (岩波新書) p. 36
- 11) 銀林浩「指導要領の思想」(『数学教室』No. 180) p. 5
ダヴィドフ「一般化の理論と教授のプログラミング」(『教科内容の現代化』所収)
- 12) 土井・三上・須田「内包量指導への若干の問題提起」(島松小学校・北大教育学部学校教育研究室「研究紀要」1969, 9 参照)
- 13) ブルバキ「数学原論」(実一変数関数) 1 など
- 14) ガリレオ「新科学対話」(下) (岩波文庫)
- 15) 「現代化算数指導法事典」(明治図書)
松井幹夫「内包量」(『数学教室』No. 190) など参照
- 16) 峰吉健三「比例の指導—再び札幌プランについて」(第10回道数協発表レポート)
- 17) 夕張第二小6年学年部会・北大算数・数学グループ「微分方程式による正比例関数の指導」(同上)
- 18) 近数協編「二次関数」(数学テキストシリーズ 27)

- 19) 遠山啓「教師のための数学入門」(関数・図形編) p. 54
- 20) 私たちは, 写像と写像規則を区別する見解に賛成である。
雨宮一郎「現代解析学の背景—幾何学の超限算術化の問題」(『現代数学』Vol. 1, No. 8)
- 21) f, g が線形ならば $f+g$ も線形となる。
- 22) 数教協では, シエーマの概念の明確な規定をまだ行なっていないようである。中原克己氏はピアジェの概念などを用いているが, このような一般論が数学教育研究に意味をもつとは考えられない。中原克己「数学教材論」(『教育』No. 254) p. 60
- 23) 均質な物質の密度や等速運動の速さを, 松井氏らは一当り自明な「外延量的内包量」と呼んでいるが, これは認識の異なつたレベルを混同しているものである。松井幹夫, 前掲論文参照)
- 24) 堀井洋子「比例 (中学校)」(『数学教室』No. 206)

〈付記〉

この研究をはじめめるにあたって数教協のさまざまな実践から多くを学んだ。とりわけ, 札幌プランの優れたオリジナリティーに出発の基礎を与えられた。さらに, この研究は, 札幌北小学校石田忠男先生, 夕張第二小学校の亀廻井宏幸, 江端厚, 本庄勝弘, 加藤博史, 斎藤スミ子の諸先生, ひきつづき島松小学校6年担当の諸先生との共同研究の成果としてみのつたものである。ここにあらためて感謝する。