



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	正比例関数の基礎としての内包量指導
Author(s)	土井, 捷三; 三上, 勝夫; 須田, 勝彦
Citation	北海道大學教育學部紀要, 19, 165-187
Issue Date	1972-01
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/29071
Type	departmental bulletin paper
File Information	19_P165-187.pdf



正比例関数の基礎としての内包量指導

An Instruction in Intensive Quantity as an Introductory Course to Linear Function

土 井 捷 三
三 上 勝 夫
須 田 勝 彦

Shozō Doi
Katsuo Mikami
Katsuhiko Suda

目 次

第0章 問題の設定と方法	§ 5. 速さをもとめる (2)
第1章 内包量指導の意義と外延	§ 6. 距離をもとめる (1)
第0節 位置づけ	§ 7. 距離をもとめる (2)
第1節 量の系列と用法の系列	§ 8. シエマ
第2節 関数概念の端緒としての“速さ”	§ 9. 時間をもとめる
第2章 実在の線形的構造と内包量	§ 10. 複合問題
第0節 問題の所在	第2節 密度の指導過程
第1節 平均との順序関係	§ 1. 均等分布と不均等分布
第2節 二つの外延量の分離	§ 2. 密度の比較
第3節 内包量指導の基本的構想	§ 3. 密度をもとめる (1)
第3章 内包量の指導過程	§ 4. 密度をもとめる (2)
第1節 “速さ”の指導過程	§ 5. 重さをもとめる
§ 1. 不等速な運動と対比された等速運動	§ 6. シエマ
§ 2. 速さの比較及び運動の二側面の抽出	§ 7. 体積をもとめる
§ 3. 速さの数値化と単位の導入	§ 8. 複合問題
§ 4. 速さをもとめる (1)	付 事後テストによる指導過程の評価

第0章 問題の設定と方法

内包量に関する基本的な理論は、数学教育協議会が確立した、量についてのグローバルな指導体系の中で、既に一定の明確さをもった概念規定と大域的な位置づけが与えられている。量指導体系のもつ意味は、何よりも「数学教育全般にわたる分岐点」⁽¹⁾を定めたことにあり、それ以前の数学教育の骨格を規定する基本的シエーマー序数的自然数論に基づく自然数の指導(数え主義)から、整数の二つの直積空間の同値類としての有理数の構成⁽²⁾(割合分数)へ——に対して、全く新しい立場から数学

教育を構築しようとするものであった。“量の追放”に対する批判の論点は広い範囲にわたり、数学的認識の実在的基礎の問題にまで係っているが⁽³⁾、少なくとも数学教育協議会の10年余にわたる集団的な実践は、その基本的な出発点の正しさを、疑いの余地のない程に明らかにしたといえるであろう。

しかし、「分岐点を定める」という問題に関する限りで、内包量指導の大域的な意義及び位置づけは既に明らかであるにしても、その指導過程に関してはまだ確定したものが得られているとはいえない。それは端的に、いくつかのあい異なる指導プランが数学教育協議会の内部に存在し、しかもどのプランも決定版としての証拠を

自ら示しえないことに現われているのであるが、本質的には、内包量概念に関して、より分析的に解明されるべき問題の所在を示唆するものと考ええる。この研究は、小域における内包量の指導過程の確定をめざす中で、内包量指導の理論的基礎に関する若干の問題提起を企図するものである。

数学教育研究における仮説系の設定と検証の手づきについては、既にわれわれは可能な一つの筋道に関する概要を提出した⁽⁴⁾。それは要約すれば次のようになる。数学教育における、数学的諸概念の連関の様式は、さし当たり順序関係に於て明証的に示され、従ってそれは基本的には検証可能なものと考えうる。その検証は、直接的には授業において、目的とする概念の教授をなしたか否かを判定するところの、評価問題の通過率——少なくとも80%以上——によって測定される。同時に、その概念の教授自体、より広い、実践的には一貫カリキュラムと呼ばれている一つの概念系の中に位置づいたものでなければならない。しかし、そのいわゆる一貫カリキュラムは現在のところ、科学的検証を受けるほどまでには完成度を備えていないと考えられる。われわれは従って、それをもまた一つの検討を受けるべき対象として、結局は大域、および小域の二つのレベルでの順序構造の設定と検証を当面の方法論的課題として提起したのである。それらの順序構造はまた、必ずしも科学的あるいは数学的認識一般の成立過程に関する法則性を全面的に明らかにするものではなく、一つの実体論的な段階とでもいうべき一面性を免れえないところから、われわれはそれを「順序モデル」と呼んだのである。そしてまた、検証の手続きにおいて捨象した科学的あるいは数学的認識一般の成立過程に関する法則性を明らかにする契機を可能的に回復するものとして、授業書の確定を、いわゆる授業研究あるいは教授学の、当面のもっとも実りある研究課題として指定したのであった。

第1章 内包量指導の意義と外延

第0節 位置づけ

内包量を指導することの必要性、あるいは数学教育全般にわたる位置づけは、次の三点に要約できよう。

第1に、内包量は外延量と共に、子どもの数学的認識のもっとも基礎となる有理数体あるいは実数体の四則算法に実在的裏づけを与える上で、本質的に重要な位置をもっている。

有理数自身、それらの連続量からの抽象であり、主と

して加減は外延量、乗除は内包量における量的法則の反映であることを、既に遠山氏らは、それをすべて、「実体概念としてではなく、関係概念として」⁽⁵⁾とらえる立場に対する批判と共に、十分に明らかにしている。この立場からすれば、乗除演算の指導の中で、その意味づけにおいて内包量が、面積などの量と共に常に登場してくるのは当然のことといえよう。しかし、乗除演算そのものの指導において、かかる意味づけを与えることは不可欠であるにしても、そこでの指導の目標は実際に乗除演算ができることであって、意味づけを知ることはない。従ってさし当たり、内包量としては必ずしも意識される必要がなく、外延量的に認識されていても乗除の意味づけを知る上では十分であるような内包量がそこでは用いられているのである。⁽⁶⁾ 従ってまた、子どもが一通り有理数の四則を学び終えたさいに、内包量がそれ自体として認識の課題に設定されることは、十分に意味のあることであろう。

第2に、量を基礎にすえた数学教育の体系において、内包量は解析学的内容の発展に対する不可欠の前提としての位置をも持っている。既に遠山氏は「量の理論」において、《数え主義》の批判として次のように述べた。「数え主義は……整数論をもとにして数学教育を考えようとするものである。……そこでは有理数やP進体を導くことのできる自然数が数の基本であるという立場に立ち、こういうことをすることが数学であるという立場である。……数学にはこういう分野が存在することは事実だが、そのすべてが整数論でない。数学には物理・工学・社会科学方面へ広く応用ができる解析学……の分野がある。解析学の分野は、いうまでもなく、極限つまり連続量をベースにおいている。しかも解析学の成果の上に立って、整数論などの新しい分野が開花したという歴史的な事実を忘れている。」⁽⁷⁾

古典的な数え主義、および割合現論に対する批判として書かれたこの文章は、それ以後、新たに登場してきたいわゆる New-Math における解析軽視・有限数学への偏重に対する批判としても、解析学を数学教育の一つの根幹として設定する必要があること、しかもそれは量の指導が不可欠の前提となることを指摘した点において、今なお、意味をもっているといえよう。とりわけ、内包量はその後数学教育協議会が創り出しつつある関数指導体系において、いわゆる森ダイアグラム⁽⁸⁾へ直接に接続すべき、特殊な重要性を持っているのである。

第3に、自然科学教育全般と係って、子どもの自然観・物質観を形成する上で、密度・濃度などの内包量は、定性的認識と定量的認識の結節点とでもいうべき位置にあ

り、速度あるいは速さなども、運動学から力学までの全体系にわたって、文字通り要石の役割を果たす概念である。

第1節 量の系列と用法の系列

前節に述べた位置づけをもとに、内包量指導の大まかな外延を確定しよう。内包量の種類はいうまでもなく、ほとんど無数にあるが、それを分類する試みは既に銀林氏らによって詳しくなされている。⁽⁹⁾ その分類のメルクマールは、内包量を数値化するさいに用いられる二つの外延量に着目して、二つの外延量が異種であるものを度、同種であるものを率と呼んでいる。さらにそれらはまた詳しく分類されているのであるが、「わかるさんすう」における内包量の指導は、“こみぐあい”あるいは“収穫度”を導入として、度の第一用法、度の第二用法、度の第三用法を指導し、次に「度と率の中間に位置して両者の橋渡し」⁽¹⁰⁾ をするものとして含有度の三つの用法を、そして率の三つの用法へと進み、最後に速さの三用法と他の時間的な度を指導する、という順序になっている。

ここで疑問なのは、内包量の前記の分類がそのまま、指導順序を規定するワク組みとして用いられていることである。内包量を、それを数値化するさいに用いられる二つの外延量の単位から度と率に区分することは無論可能である。しかし、そのように区分した度や率が、一つのまとまりをもった指導の単位となって、その中に含まれる諸量が、用法の系列に沿って一括されるべきであると考ええる根拠は何もない。しかも、その度と率の分類は数値化の段階における単位のとり方という人為的な行為に依存しているのであって、たとえば濃度については、一つの溶液の濃度が、あるときは度 (g/cm^3 , mol/l など) であり、あるときは率 (g/g) である。

しかし、量指導の意義は、単に量が指導されるという点だけにあるのではなく、量が、実在における基本的な存在様式に即して指導されるという点にあり、それゆえに数概念、あるいは数構造の理解の感性的基礎たりうるのである。外延量の指導において、外延量を一つの指導過程の単位として、その中で保存性や加法性についてさまざまな外延量を一括して指導することを数学教育協議会は決してしなかったとすれば、内包量の指導において、基本的には度と率にのみ区分して、その中でさまざまな内包量をとり扱うことの妥当性は結論されないばかりか、量指導の観点からして首尾一貫しないといわざるをえない。

量指導の立場からすれば、いかなる内包量を教える必

要があるのか、またそれらの内包量をいかなるレベルにまで分析・総合させることが必要なのか、という形で、指導過程の骨格を規定する問題として論じなければならないのである。

前節の位置づけから、一般に関数指導の、特に森ダイアグラムの出発点にふさわしく、しかも自然科学教育全般に明確な位置づけを持った内包量について、それを新しい量として、実在から引き出す過程、およびその新しい量に関する三用法を習得させることが、われわれの内包量指導の基本的なねらいとなる。即ち、「単位あたりの量」や「単位量あたりの値」が教えられるのではなく、「速さ」や「密度」などの、基本的物理量そのものが教えられなければならないのである。そのことが何か、内包量としての一般化を行なわない、“理料的”な発想であるかのような俗論はすでに問題にならないであろう。内包量としての一般化は、〈度〉や〈率〉というレベルで一括されて用法の指導がなされることによってなされるものではなく、実在のきわめて特徴的な構造である線形的な構造に基づき、それが典型的な形で現われる局面において、そこにある量的法則を基本的物理量における法則として認識する過程が不可欠なのである。そして、それら基本的物理量に対する、内包量としての一般化は、一つにはそれらの量的法則を引き出す分析・総合活動のある種の同型性によって、一つにはそれらの量的法則を意図的に同型な空間の対象に外延化したところのいわゆるシエーマによって、実現されるべきものである。

このような位置づけとねらいから、教えることが必要と考えうる基本的物理量は、密度、速さの他に濃度もあり、それを教えること自体は十分に意味のあることである。しかし、必ずしも自然科学の側からの要請として、溶液の濃度を定量的に扱うことがこの段階では必要のないものであり、しかも密度と速さの指導でもって内包量としての一般化が可能であるとするならば、濃度については、この段階における内包量の指導に絶対不可欠の量であるとはいえないと思われる。

以上、われわれは内包量指導の外延を、速さおよび密度の指導として設定した。そのことの可能性に関して、われわれの方法論からすれば、「速さは子どもにわかりにくい」「密度はむずかしい」といった俗論を批判する必要性は、理論的には全く存在しない。なぜならば、わかりやすい」という概念は、数学、あるいは一般に科学を教える必要から媒介された諸概念に対する“公理的”分析の厳密さの結果としてはじめて問題とされるべき概念であって、指導過程の内容の分析をぬきに、あるいは

旧来の指導過程をそっくりそのまま前提とした上で、速さは難かしいか否か……などという問題の設定自体が無意味なのである。

第2節 関数概念の端緒としての“速さ”

すでにわれわれは、正比例関数に関して、等速運動を分析の主な対象とした指導プランを提出した。⁽⁴⁾ 本稿では関数指導体系全般にわたって、速さの概念がいかなる意味で端緒となるかという点について、若干の補足を述べたい。

New-Math の関数指導の基本的アイデアは、現代数学の中の、どちらかといえば古典的な集合主義の立場に立った関数の定義を、ストレートに初等・中等教育に持ち込むことであった。それは次のようになされる。⁽¹¹⁾ まず、集合とは「物の集まりだが、与えられた要素がその集合に属するかどうかを示す規則があることが必要」で、このような集合二つの元の順序対の全体が直積である。たとえば直積は、「手紙の重さ×切手代」「各生徒×その点数」「品物の個数×値段」など。その直積空間の部分集合が関係 (relation) である。たとえば $D=\{1, 2, 3, 4\}$, $R=\{35, 70, 105, 140\}$ で $D \times R \supset F$, $F=\{(1, 35), (2, 70), (3, 105), (4, 140)\}$ など。次にこのような有限集合の関係 F を次のようにいにかえる。 $F=\{\text{第1要素が第2要素の35倍であるような数対, 第1要素はDに属する}\}$ これを $y=35x$ で表わす。この x, y は変数である。その変数とはいわゆる変量とは全く関係がない。 x は変化せず、たださまざまな D の元が代入さるべき空席 (place holder) である。関数とは relation の特別な場合、すなわち D の各元に R の元が一意に定まる関係である (上の例における F は関数ともなる)。

New-Math の関数指導、およびその亜流としての新指導要領 (特に中学校改訂指導要領では正比例関数も上述のような関数一般の中に解消されている) のアイデアは、少なくとも次の二つの重要な問題点を含んでいる。第1に、集合はモノの集まりか、ということである。周知のように、集合をモノの集まりとする素朴集合論 (モノの集まりといおうと《あるはっきりと定まった、われわれの直観または思惟の対象を一つの全体にまとめたもの》といおうと同じことである) は、集合論のパラドックスによって破産し、それはいまだに「これこそ決定的という印象を与えそう」な⁽¹²⁾ 解決策を得ていない。そのことは最初の入門において集合を「モノの集まり」と《定義》することを少しも禁止するものではない (「点とは、部分のないものである」という種類の《定義》よ

り、はるかに優れていることは確かである) が、少なくともそこから得られる教訓として、集合が「モノの集まり」で十分であったのはまさにカントールが無限集合の濃度を明証的に規定した段階までであって、それ以降においては集合は何らかの「構造の素子」あるいは一般化された数学的对象と考えなければならないということであろう。集合は、ある構造をもった数学的对象を把握するために必要なものであって、集合、あるいは集合の考え方自体に何か“現代数学”的なものがあるわけではないのである (無論、「なにも規定しないのも一種の規定である」⁽¹³⁾ から、集合それ自身も一つの数学的对象となる)。

第2に、有限集合に定義した関数なり関係なりを、そのまま、何の準備的な過程もふまずに無限集合に拡張していることである。 D も R も有限集合であれば、直積にしても関係にしても関数にしても何の問題もない。ただ順序対を列挙すればそれで終わり、それ以上何もすることはないからである。しかし、無限集合の場合、これとは根本的に異なっている。それは、当然のことながら、それらを列挙し尽すことはできない。そこに重要な問題が含まれているのである。

アイマイな変数の概念を追放して place holder にすることは、一つの道として可能であろう。しかし、それは子どもが無限個の値を代入して無限個の順序対を構成しなければ、直積や関数に対する外延的な説明とはコンシステントなつながりを持ちえないのであり、実際それが不可能であることも明らかである。少なくとも、算術的な構成で汲みつくされることのない無限操作の承認がその理解の前提として必要なのである。順序対を列挙することをやめ、それを内包するある文章表示あるいは式表示でそれと同値な関数を定義したり、それに V や $\mathbb{R}$ などの記号を導入すれば、そこに書かれた記号表示としては無限の問題が解決したかに見える。しかし、その意味を把握することの内に、超限算術的な操作を決して素通りすることはできないのである。変数の追放を貫き、しかも無限のアボリアを避けるとすれば、かかる無限個の規定とは独立なものとして、ある算術的操作そのものを関数として考えなければならない。しかし、それはもはや関数とは無関係な、単なる代入計算にすぎないものとなるだろう。

われわれは以上のような New-Math に対する批判の上に立って、古典解析学の主要なテーマでもあった変化と運動の量的法則の解明を基軸にすえた関数指導体系を構想し、その導入に運動学、さらには等速運動の具体物を用いるのである。これはしかし、ゼノンのパラドッ

クスを論駁すると宣言して実際に自ら歩いてみせた哲学者の試みと同じく、上に述べた New-Math の問題点を論理の水準で止場したことにはならないという論議も可能であるが、ゼノンの逆理がともかく逆理としての意味をもつためには、運動が確固として存在しなければならないのであり、そのようないわゆる“概念の感性的基礎”の水準の問題として New-Math を批判し、そこから速さの指導を正比例関数の基礎としての内包量指導の、不可欠のテーマとして設定したのである。

第2章 実在の線形的構造と内包量

第0節 問題の所在

前節までの考察から、われわれは正比例関数を指導する前段階における内包量指導の外延を、速さ、および密度の指導として設定した。次に指導過程を具体的に決定して行く上での、若干の理論的問題を検討したい。

これまでの内包量指導プランにおけるいくつかの異なった理論は、その導入に用いられる“典型的内包量”といわれるその典型性の内容如何という形で論じられてきた。われわれの立場からしても、それは単なる導入問題としてではなく、指導過程の本質的契機を明らかにする方向で、その問題と係らざるを得ない。そこで論点は主として次の二点に要約されよう。第1は、いわゆる均等分布の指導の内容と係った、平均指導との順序関係の問題であり、第2は典型的内包量が収獲度的なものとする根拠として松井幹夫氏らの主張している、いわゆる「異物二量」をとることの妥当性の問題である。この二つの問題は、本質的には同一であるが、非本質的なレベルで混同されて論じられており、従ってさし当たり区別しておく。

それらの検討の結果として、また用法の系列ではなく、量そのものに即した内包量指導のねらう、内包量としての一般化の内容を明らかにするために、われわれの内包量指導における、いわば同型な課題群——すなわち指導過程の一般的な脈絡が示されるであろう。

第1節 平均との順序関係

「わかるさんすう」における内包量の指導は、平均の指導が内包量指導に必要な前提として位置づけられている。その理論的根拠について、松井幹夫氏は次のように述べている。

「乗除を用う以上は『1 a 当たりのとれ高がどこでも同じ』ということが前提になる。このことを一方の量

……の上で他方の量が《均等分布》しているという。厳密に言えば均等分布していないのが実際だが、《平均》の学習がしてあれば、子どもの中から『平均すればいい』ということが出てくる。……したがって《平均》の学習がしっかりと行なわれていることが大事である」

「収獲度や散布度などでは、ある広がりをもった外延量の中に、米なら米、農薬なら農薬がばらばらだったり、あるいは濃かったりうすかったりというように、“度”を直観的イメージとして、量の大小があるものとして思いうかべることができる。そこから均等分布も、実際に『平均すればいい』という思考操作を経て設定できる。……これは数値化以前に、未測の量として内包量を認識するということである。このことは、ある単位面積を設定したとき、それ以内にも《混み具合》なり《取れ具合》があるのだということの問題にすると、重要な条件となる。『平均する』という思考操作は、将来の微分法の導入の際にも重要な思考パターンであると思う」⁽¹⁴⁾

ここに長く引用したのは、松井氏がいかに、いくつかの区別して論ずべき問題を混同しているかを示すためである。ここでは少なくとも、三つのことが論じられている。第1は、内包量という概念自体、平均する操作を経て認識されるものである；それは実在は厳密には均等分布していないから、という論点、第2に、内包量を未測の量として、感覚的にとらえさせることの必要性について、第3には微分法との関連の問題である。

第1の論点に関しても、「実在は厳密には均等分布していない」ことを承認するとする。しかしながら、そのことは実在における量的法則の基本的な存在様式が不均等性あるいは非線形的なものであることを決して意味しない。むしろ、厳密には均等分布をしていないという認識は、より厳密には、マクロスコピックなレベルにおける均等分布は、ミクロスコピックなレベルでは均等分布しているとはいえない、という内容なのであり、換言すればマクロなレベルにおける基本的な量的法則の存在形式は線形である、という内容なのである。松井氏自身もいわれるごとく、乗除を行なう以上は、そこに均等性が前提とされているのであり、人間が乗除演算の法則、あるいは内包量の概念を抽象すること自体、マクロなレベルにおける均等性、あるいは線形性を基礎にしている。そしてそこでは、いうまでもなく一つの“理想化”が行なわれているであろう。しかし、“理想化”を“平均する”という思考操作にすり替えるのは誤りなのであって、平均はあくまでも、(少なくとも「わかるさんすう」における平均指導に見られる限りにおいては)マクロなレベルにおける不均等なものを、同じレベルで均等化す

るものであり、それに対して理想化は、マクロなレベルにおける均等性を、不均等なものとの対比によるミクロなレベルでの不均等性の捨象というプロセスを経て、抽象するものに他ならない。

第2の論点に関して、内包量を数値化以前に、未測の量として感覚的にとらえさせる必要がある、という松井氏の指摘は、それ自体としては全く正しいにしても、そこから導かれる結論は、実は松井氏とは正反対のもでなければならない。すなわち、内包量を数値化以前に、「量の大小のあるものとして」知覚するためには、内包量のいわば直接比較とでもいうべき指導段階が必要である。しかし、松井氏が「パラパラだったり、濃かったりうすかったり」といっているのは二つのことが混同されている。それは、本来の意味で、内包量の大小関係の存在を、二つの具体物の比較という課題から知覚するという内容と、一つの具体物自身の中に量の大小がなければならない、という内容である。この二つのことは全く矛盾しているのであって、前者の内容を指導の必然的な課題とするならば、後者はそれに対して、全くの爽雜物として作用せざるを得ない。すなわち、二つの具体物における量を直接に比較するためには、当然のことながらそれぞれは一つの具体物として、一つの量をもったものとして、存在しなければならないのであり、一つの具体物の中で「濃かったり、うすかったり」しているのでは、比較は不可能なのである。⁽¹⁵⁾それは無論、それぞれを平均するという操作を経て均等化したものについて比較する他はないのであるが、そこではもはや、直接、その量を比較することではなく、思考の中で関係的に比較されているにすぎない。もし、実際に平均する操作ができて、その結果として均等な具体物を提示できるのであれば、それははじめから、そのような均等な具体物が比較の対象として設定されるべきなのである。

第3の論点に関して、まず「ある単位面積を設定したとき、それ以内にも《混み具合》なり《取れ具合》がある」ことを知らせるために、収穫度的なものをとることの妥当性を検討しよう。松井氏は、密度が典型的内包量ではなく、「外延量的内包量であることの説明として、線密度の場合、「その針金固有の性質として与えられたもので、……基底外延量たる長さを無限小に持って行くといった必要性はあまりない」⁽¹⁶⁾といっているが、それでは《混み具合》や《取れ具合》には、基底外延量を無限小にする必要性はあるのであろうか。むしろ、「その針金固有の性質として与えられた」という線密度の場合、固有の性質として認識しうするためには、任意の長さを取り出しても、その線密度は一定になるという量的法

則として理解しなければならないのであって、単位外延量以内の量に対しても内包量が存在することはむしろこの場合、線密度の方が典型なのである。また、基底外延量を無限小にする、という操作そのものは、局所線形化（微分法）の指導の中ではじめて必然性をもった形で現われるのであり、大域的な線形法則としての内包量指導の課題ではないが、特に速さの場合、運動する物体は各点で速さを持っているという認識は、この段階の指導で十分可能なことである。松井氏が、「将来の微分法を学習するときの伏線」⁽¹⁷⁾になることを期待するのであれば、微分法の二つの典型的なタイプを代表する速さと密度を教えるべきであり、《こみ具合》微分や《収穫度》微分などという概念が存在しえない以上、それらを教えることは何の伏線にもなりえないであろう。

この点とかかわって、内包量、比例、微分法の関連について、松井氏はいう。「（瞬間速度を求めるには……引用者） $\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \Delta x / \Delta t$ を求めるわけだが、ここで $\Delta x / \Delta t$ という除法を行なっているということは、その瞬間の時刻において、単位時間当たりに進む距離を求めているのであり、しかもその単位時間内における速度（内包量）一定を前提として数値化しているということになっている。ここまでくると内包量（速度）が比例とは一応独立な概念であることがわかる。それを数値化しようとするとき、局所的に比例（均等分布）を仮定するわけである」⁽¹⁸⁾（傍点引用者）

ここで、微分係数が、単なる変化の割合ではなく、速度（内包量）からの抽象であることを指摘している点についてはその通りである。しかし、この文脈からすれば、内包量が単なる局所的な線形法則であり、比例が大域的な線形法則であるかのようにいわれているが、これは全くの誤りである。内包量と比例は、かかる意味での区別があるのではなく、実における同一の法則を、異なった抽象のレベルでとらえているにすぎない。微分法における抽象的なとり扱いのさいと全く同様に、一様変化における変化率→非一様変化ではあるが一様とみなしうる場合の変化率→非一様変化における極限を用いた変化率；の順で、⁽¹⁹⁾内包量が拡張されて行くのが論理的な指導の筋道であり、不均等な具体物を内包量の導入に用いることは、微分法との関連からしても何ら整合性をもたないのである。

以上の検討により、内包量指導が、平均を不可欠の前提とした形でなされるべきであるという主張、およびそこから導かれるところの、収穫度的な量を内包量の導入に用いるべきであるとする見解の誤りは十分に明らかになった。そしてすでに本節で明らかとなったように、平

均と内包量の順序関係は、平均指導が外延量のマクロなレベルの均等化を扱う限りにおいて、内包量とは線形順序とはならないが、不均等なものの平均内包量は、単に“みなす”ことによって均等化されるにしても、実際に平均するにしても、内包量指導の後にならねばならないのである。

第2節 二つの外延量の分離

未測な段階における内包量の感性的把握の必要の問題と係って、収穫度的な量から入ることの妥当性は、密度的な量との相違点としても検討されるべきであろう。松井氏は、典型性をそなえた内包量の条件として、「関係している二つの外延量が分離しやすく、直観的につかまえやすい」⁽¹⁰⁾ものであることをあげている。この条件から、密度は、あるひとつの物質の二つの側面の量としての体積と重さの関係になるために、「二つの外延量は分離しにくく」一方の量の上に他方の量が均等に分布しているかどうかというイメージでなく、物質の均質性が前面にでてくるため、典型性からいって不適当であり、収穫度的な量が典型であることを述べている。⁽²¹⁾

しかし、この論理は、実は全く矛盾したものなのである。すなわち、はじめに、関係している二つの外延量を分離するという、内包量理解において本質的な契機を指摘しながら、それではいかなる量を用いて、どのように二つの外延量を分離させるべきか、という問題に何ら答えることなく、はじめから二つの外延量が分離しているところの、収穫度的な量を典型として持ってくるのである。実際「わかるさんすう」における次のような内包量の導入問題において、いかなる未測な内包量の感性的把握が可能か、またそこからいかなる過程で二つの外延量を分離する活動に子どもが定位するのか、結論はすでに明白であろう。

ある農業試験場で各種の稲を育てたところ、それぞれ次のような収穫がありました。

	A	B	C	D
面積	7 a	5 a	5 a	4 a
米のとれ高	315kg	315kg	290kg	252kg

(1) AとBの稲では、みのりぐあいはいちがうか。

(2)

「ここで最初に与えられているのは、「未測な内包量」などではなく、すでに与えられた二つの外延量なのであり、比較するものは感性的にとらえうる内包量そのものではなく、四つの数字の関係にすぎないのである。いか

なる優れた生活経験をもった子どもが、7 aの田に 315 kgの稲が実ったイメージと、5 aの田に 315 kgの稲が実ったイメージを区別して描き、その上で実りぐあいという内包量を知覚するのであろうか。さらにいうならば、松井氏は収穫度は都会の子どもにはつかまえやすい量ではないから、電車の“こみぐあい”を助走に用いることを提案していることに関して、このように子どもの生活経験の多少に依存した形で“わかりやすい”という概念が問題にされること自体、疑問であるといわねばならない。数学教育はむしろ、生活経験から相対的に独自の数学の体系に基づき、公理的に、すなわちどのような子どもも、授業以外の何の手持ちの知識も前提とすることなしに、導かれるものだけを真とするような形で教材が組まれなければならない、またそのことのみが、すべての子どもに高い水準の数学を教えることを可能ならしめるのである。無論そのことは、数学的諸概念そのものの中に、倉田令二郎氏の表現を使えば「日常性」⁽²²⁾の契機があることを否定しないし、授業運営の中で、生活経験を、いわゆる科学的概念と対比させる観点から、積極的に位置づけることを少しも排除するものではない。

なお、「均等分布」という概念を、単にすでに与えられた一方の量に、すでに与えられた他方の量が均等に分布している状態としてとらえる松井氏の見解は皮相なものであり、「均等分布」を内包量概念の実在的基礎とするならば、あくまでも物質の均質性あるいは変化の一樣性（すなわち、自然の線形的構造）を本質的な内容とすべきであろう。⁽²³⁾

本節までの検討により、内包量指導の本質的契機——未測な内包量の感性的把握、およびその数値化の段階における二つの外延量の分離——に定位させる量は、収穫度的なものではなく、速さおよび密度であることが明らかにになった。速さと密度の指導の順序関係については、内包量そのものを直接視覚でとらえるという根拠から、速さを最初に指導するのが妥当であると考えている。

第3節 内包量指導の基本的構想

すでに述べたように、個々の内包量の指導に対して、内包量としての一般化は、それらを実在から抽象する過程のある種の同型性、およびそれらの量を同型な空間的な量へ外延化したシエーマの指導、という二つの本質的な契機を含んでいる。前節までの検討から、それらはさらに次のような課題群に分析することが可能となる。

① 不均等なものとの対比による均等性の抽出。およびその中で感性的なレベルにおける対象の非本質的特性の捨象と課題となる量への定位。

- ② 均等性をもった二量の直接比較による、対象の本質的特性の抽象と大小関係の存在の確認。
- ③ 直接比較が不可能であるという課題状況の設定の中で、内包量を関係する二種の外延量に分離し、一方の外延量を一定にすることによって比較の可能性を導く——すなわち全順序性の確認。
- ④ ③において、特に“等しい”という二量の関係の存在も導かれるが、それによって“強さを表す量”が単位当たりの量として標準化された形で表現されることを導く。
- ⑤ そのことによって、感性的なレベルでの均等性の理解が、数値化された量における法則として記述される。⁽²⁴⁾
- ⑥ さまざまな内包量を求める。(第1用法) その中で内包量が線分化される。そのことによって、外延量においては容易であった量のアルキメデス性が、内包量の場合外延化された形でおさえることができる。
- ⑦ 第二用法。およびシエーマの指導。
- ⑧ 第三用法。内包量の定義に基づく包含除除法と、⑦のシエーマによる表現との同型性の最終の確認。
- ⑨ 第一、第二用法と第一、第三用法の複合問題。いわゆる比例問題のアルゴリズムの指導。
- ⑩ 他の内包量への適用による一般化。あるいは単位の換算など。

第3章 内包量の指導過程

科学的概念の指導のすじ道および方法、(従って子どもがそれを習得するすじ道および方法)を「授業書」として対象化することを、われわれは当面の研究方法として採用した。以下の叙述は、速さおよび密度の授業書の解説である。教師が実際の授業に際し、いかなる点に留意して指導すべきかが記されている。

第1節 “速さ”の指導過程

§1 不等速な運動と対比された等速運動

§1. 運動

これから見る二つの運動について、どこが異っているかを考えましょう。

まとめ

§1の目的は、等速運動を不等速運動との対比において、感性的に把握することにある。

速さがもとめられるには、その前提としてその運動が等速であることが条件となる。速さは等分除の除法によってもとめられるからである。他方、等速であることは、厳密には任意の時間における速さがもとめられてはじめてあきらかになることである。これは、従って論理的には解決のつかない堂々めぐりとなってしまう。

われわれの観点からすれば、「等速」は、速さの学習全体を通して、その特質がつかまれるべき目標となる概念である。とはいえ、速さをもとめるには、等速を前提にしなければならない以上、少くとも感性的分析の水準で、一応の把握をおこなわせるべきであると考え。松井氏らのように「平均すればいい」ということを、等速の指導におきかえることは正しくない。

われわれは、子どもに、実際に等速運動を見せることによってこれを解決することにした。しかし、単に等速運動を「見る」ことによって等速はうきぼりにならない。そこでわれわれは、不等速運動と対比させるという方法を採用したのである。

授業は、等速運動と不等速な運動とを提示し、「どこが異っているか」と問うことによっておこなわれる。

子どもは一樣に、一方は「速さはかわらない」、一方は「だんだん速くなる」などと答える。等速運動する物体としては、テープレコーダーの回転速度一定を利用し、テープを水平に延ばしたものの上に切り紙の自動車をのせたものを用いた。不等速なものとしては、斜面をころがるボールなどを用いた。

まとめは、「運動には、等速運動と不等速な運動とがあり、等速運動とは速さの変わらない運動である」としておけばよいであろう。

§2 速さの比較及び運動の二側面の抽出

速さくらべこそ、速さの授業の生命である。速さくらべは、三つの段階に分節化できる。すなわち、(1)、運動が同時に起っていて、直接的知覚的に比較できる段階、(2)、運動の二側面としての時間と距離に着目し、このどちらかをそろえて比較する段階、(3)、何らかの計算をほどこすことによって比較が可能となる段階の三つである。§2は、このうち(1)と(2)の授業である。

(1)の直接の比較では、追いこす、差がつまる、ひらくなどの明瞭な知覚の手がかりをもとに、運動の速さは、その大小が比較できる量であるということを、子どもに理解させることが目的となる。これを自明のこととして、ただちに時間と距離の表を与える現行の教科書は量指導の本質的条件の欠落したものといわなければならない。

(2)は、(1)による速さは比較可能という認識を基礎に、

§2. 速さをくらべる (1)

これから見る二つの等速運動について、どちらが速いか、速さをくらべることにします。

(1) まず、最もかんたんでかくじつな方法を考え、実際にやってみましょう。

(2) この二つの運動が、別々におこるものとしたら、どうすれば速さがくらべられるでしょうか。方法を考え、実際にやってみましょう。

(こんどは、いろいろの用具を用いてもかまいません)

まとめ 1.

問題 つぎのそれぞれについて、どちらが速い運動かを答えなさい。

(1) 物体Aは、40秒間には、120cm進む。物体Bは、40秒間には、100cm進む。

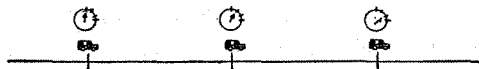
(2) 自動車Xは、10秒間には、200cm進む。自動車Yは、15秒間には、200cm進む。

(3) 物体Eは、5秒間には、30cm進む。物体Fは、5秒間には、30cm進む。

まとめ 2.

問題の(3)から、二つの運動について速さが等しい、ということは、同じ長さの時間をとれば、同じ距離進むことだとわかりました。

このことをもとにして、ある一つの物体が「等速運動」をするとはどういうことかを、きちんと定義してみましょう。



展開される。問は、「運動が別々におこるとしたら、どうすれば比べられるか」と与えられる。この問題の設定では若干の配慮が必要である。すなわち、一つ一つの運動をみて、知覚的に明らかに差のわかるものは適切ではない。一見して識別することの不可能なものを比較するのだからこそ、定量化の必要が生じてくる。子どもたちは、日常経験の範囲からでも容易に時間、距離のどちらかを等しくしてくればよいことをみつけた。実際に測定する前には、子どもたちすべてが、この内容を明確に「時間を等しくしたときには距離の大きいものが速く、距離を等しくしたときには、時間の小さいものが速い」と、つかんでいるかどうかを確認しておくことが必要である。おわりには、これをまとめ1として記入させておく。

つぎの問題は、以上のことがらが正しく認識されているかをたしかめるための問題である。問題(3)は二つの物

体の速さが等しい例であるが、このわざとらしい問題には重要な意味がある。以上までの過程を通じて、子どもたちは、速さは(そして多分すべての速さは)比較するという確信を得た。これは、速さが全順序構造、($a > b$, $a < b$, $a = b$ のいずれか一つが成り立つ)をもつ、すなわち量の性質の一つを有しているということがつかまれたことに外ならない。従ってあえて相等しい運動を比較させてこれを自覚化させること、これが第一。とともに、これを媒介に再び等速運動にもどり、この段階において自然におこない等速運動の定義づけへと繋げることが問題(2)の第2の目的である。こうして、等速運動の定義は、§1の「速さのかわらない運動」というあいまいなものから、「どの時間をとっても、時間の長さを同じくすれば、距離も同じになっている運動」という極めて厳密なガリレオの定義に高められるのである。

この定義はただちに(3)の段階における推論の手がかりとして用いられる。子どもがこの定義を自覚的に適用し、比較を強いる指導法も正しいとはいえない。

§ 3 速さの数値化と単位の導入

§ 3. 速さをくらべる (2)

つぎの二つの等速運動はどちらが速い運動でしょうか。下にあたえられたことがらだけをもとにして、考えてください。

物体Aは、15秒間には、60cm進む

物体Bは、3秒間には、15cm進む

まとめ

速さをくらべるには、いろいろな方法のあることがわかりました。そこでこれを一通りに統一することに約束すれば、どんな等速運動もただちにくらべられるようになります。

これから、速さは1秒あたりに進む距離であらわすことにします。この新しい単位は、 $\text{cm}/\text{秒}$ とかき、センチメートル毎秒と読みます。*

このことから時間(秒)とその間に進む距離(cm)をもとに、速さ($\text{cm}/\text{秒}$)を計算するには、次の式によればよいこともわかります。

$$\text{速さ}(\text{cm}/\text{秒}) = \text{距離}(\text{cm}) \div \text{時間}(\text{秒})$$

* $\text{m}/\text{秒}$ 、 $\text{km}/\text{秒}$ 、という単位が用いられることもあります

等速運動であるという前提のもとに、異なる長さの時間に、これまた異った距離を進む二つの物体の速さを比較する問題が与えられる。

この問題にそくしていえば、まず、推論の大前提は、時間か距離のどちらかを等しくすることである。答は大きくわけて二通り、さらに細くわけて最小限四通りが現われるだろう。

1) 時間を等しくする場合

- i) 両方とも15秒にそろえる。
- ii) 両方とも1秒にそろえる。

2) 距離を等しくする場合

- iii) 両方とも60cmにそろえる。
- iv) 両方とも1cmにそろえる。

いずれの場合にでも、そのような操作ができる根拠を子どもに説明させることが大切である。i) の場合、「物体Bは等速運動であるから定義によれば、どの3秒間にも15cm進むことが5回つづけば15秒間になるので、進む距離は75cmとなる」などと答えさせたい。ii) の場合ならば、「物体Aは1秒間に4cmと考えたが、こうすれば、等速運動するとして、どの1秒にも4cm進むということだから、15秒間ではたしかに60cmになる」あるいは、「わり算をすれば1秒当りが出るが、これは等速運動だからこそできる。(すなわちどの1秒当りの距離もすべて等しい)」など。このような説明のためにこ

そ、前時にまとめた定義が必要なのである。

もちろん、子どもの中には、すでに何らかの経験によって、以上のような論理的構造を直観的に把握しているものもいるにちがいない。が、速さを全く知らない“天使”に指導するとすれば、このような定義にもとづく説明が不可欠なのである。すべての子どもがわかるための最大の条件の一つは、いかにそれが論理的であるかということにある。

いずれの方法によっても速さが比較できることを説明した後、その最終の確認には、実際に物体A、Bを動かして直接比較をする。

まとめとしては、さまざまな比べ方のうち、合理的などれか一つを採用することに決めれば、すべての速さがただちに解ること(これはとりもおさず、速さが定量的にとりあつかうことができるということである)を指導する。

こうして速さ($\text{cm}/\text{秒}$)は、距離(cm)÷時間(秒)として自然に定義されるのである。

なお、時間(秒)÷距離(cm)を採らない理由として、速さの大小が数の大小の順序の逆となり、また静止しているものの速さが表わせないなど不便さを説明することも場合によっては必要であろう。

§ 4 速さをとめる (1)

さて、前§までの指導が周到におこなわれてもなお、速さが、距離÷時間で定義される(すなわち $\text{cm}/\text{秒}$ とい

§4. 速さをもとめる (1)

ある一つの等速運動を、6人が観察し測定をしました。A君の測定が正確だったとして他の5人の測定や主張は正しいといえるでしょうか。

- A君 「この物体は、20秒間に、240cm進んだ」
 B君 「この物体は、15秒間に、180cm進んだ」
 C君 「僕は10秒間には何cm進むかはかるつもりだったけど、やりそこなってしまった。A君のを見ると、おそらく半分の120cmだったろうと思う」
 D君 「この物体は、1秒間には、12cm進んだ」
 E君 「0.5秒間でしらべるつもりだったが失敗した。けれど、この運動の速さは、0.5秒間では半分くらいになっていることは、はっきりしている」
 F君 「この物体は、0.2秒間には、2.4cm進んだ」

ま と め

ある一つの等速運動の速さは、時間の長さのとり方によらずに、常に等しい（一定であること）がわかりました。（なぜなら時間を半分にすると距離も半分になるというように、時間の長さを変化させるのに応じて、距離も変化しているからです。）

速さを「cm / 秒」という単位であらわすことの意味を考えます。上の例でいえば12cm / 秒は、0.5秒間には6cm進み、1秒間には12cm進み、2秒間には24cm進み、3秒間には……、10秒間には120cm進む…… という運動のようす、すべてを代表してあらわしているのです。

う単位によって表わされる）ことの意味が十分につかまれているかは明らかではない。例えば、現行の教科書によって速さが指導された子どもは、少なからず「ある運動の2秒間の速さは、4秒間の速さの半分の速さである」などと主張する。これは単にうっかりと速さと距離とをとりちがえたという性質のものではない。速さのような内包量が一担、外延量に分解された際に生ずる普遍的心性である。まして現行の指導のように、具体物による直接の比較などの速さという量の实在性を把握する段階を踏まないといえれば、このような現象が起きることはむしろ当然である。

われわれのプランでは、速さの实在性、比較可能性→時間と距離の抽出→距離÷時間による速さの定義、という認識の段階をふんだ。そこでこの§は、定義のもつ意味をきわだたせるかたちで、等速運動において速さが時間のとり方あるいは逆に距離のとり方に依存しない（一方がきまれば他方はそれに比例してきまるので）といういわば速さの本質を指導することになる。

問いは、「測定の正しさをたしかめる」などと多少自然さに欠けるという面もあるが、上の目的に対しては、これ以上にふさわしい問題はおそらく考えられない。子どもは、A、B、C、D、Fについては定義の式にもとづいて速さを計算し、BCDFともにAに一致することから正しいと判断する。またEについては、まずCの論法を適用して、「Dをもとに考えれば、0.5秒間には6cm進むはずだ」とし、そこで「速さは、6cm÷0.5秒でもとめられやはり12cm / 秒なのに、速さが半分というのは正しくない」とでも説明されれば十分である。

この間に、子どもは、まとめにある速さが「時間のとり方によら」ない量であることを内容的に理解していくのである。これはさらに具体的に、12cm / 秒を用いて、これが時間と距離の無限の対を内含したものであることを、「……という運動のようすをすべて代表」しているなどという表現によって説明する。こうして与えられた速さの意味は、やがて§6のいわゆる第二用法の学習の布石となるのである。

さらにまとめの後には、次の説明をつけ加えたい。

「では、時間の長さをきわめて小さく、瞬間としたらどうでしょうか。この運動の速さはかわるでしょうか。

もう一度§3の速さくらべを思い出して下さい。わたしたちは、物体Bの方が時間は短いけれど速いとしました。Bの時間のとり方をもっと短くしたならBはAよりも遅くなるのでしょうか。そんなことはありません。速いものはあくまで速く、遅いものは遅いはずです。

そこで次のように考えることが合理的です。『速さという量は運動の各瞬間、瞬間の量であって、等速運動という場合には、あらゆる瞬間の速さが常に等しい運動をいう』と。また、あらゆる瞬間の速さがすべて異っている運動もあります。』

こうして、速さは、最終的に、時間や距離すなわち外延的なイメージから分離され、いわば独り立ちするのである。

§5 速さをもとめる (2)

§5. 速さをもとめる (2)

問題(1) 超特急ひかり号は1035mのトンネルをわずか23秒で通過します。(トンネルの中では等速運動したと考えて) このときのひかり号の速さをもとめなさい。

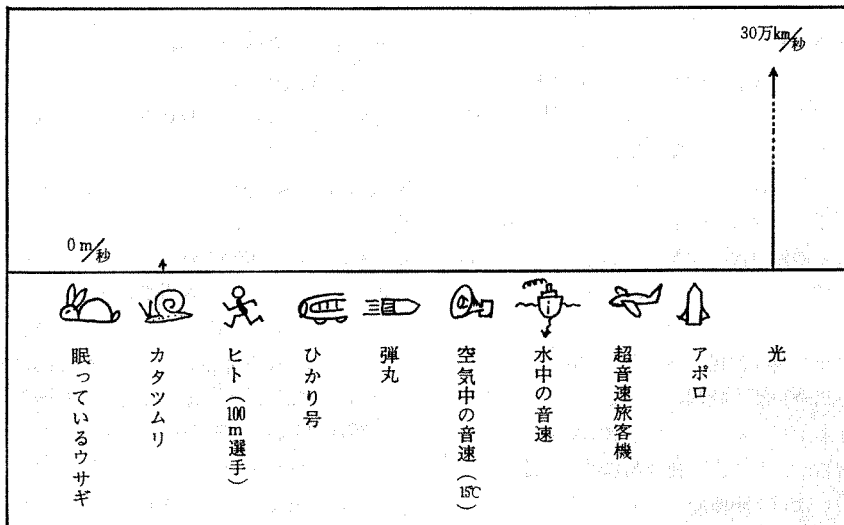
(2) 1020mはなれた場所から、花火大会をみていました。花火が美しくひらくのをみてから3秒後に音が聞こえました。音が空気中をつたわるはやさをもとめなさい。

(3) 次の表のそれぞれの物体の速さをもとめなさい。

	かかった時間	進んだ距離
A	75秒	712.5cm
B	2.5秒	425 m
C	0.3秒	2.4 m
D	6 秒	5.4 m

* 空気中をつたわる音の速さを、マッハ1と表わすことがあります。

速さくらべ



* 矢印の長さは、速さをあらわします。

正比例関数の基礎としての内包量指導

前時までで、速さ指導の、いわば「概念づくり」ともいべき最も重要な部分は終わった。これ以後は、概念を具体的な状況に適用して、現実を再構成していく段階である。

問題(3)のような、計算の練習と慣れ（これらは重要なことではあるが）のための問題ばかりでなく、速さを計算することが意味のあるような具体的問題状況を設定して、子どもたちの興味をかきたてるような工夫が必要であらう。

§ 6 距離をもとめる

§ 6 距離をもとめる(1)

速さ、3 cm / 秒の等速運動があります。速さを3 cm / 秒とあらわすことの意味を考えて、つぎのことからについて考えましょう。

- (1) この物体は、1 秒間、2 秒間、3 秒間、4 秒間には、それぞれ進む距離は何 cm でしょうか。
また25 秒間には何 cm 進むでしょうか。

- (2) 同じく、0.4 秒間、5.7 秒間にはそれぞれ進む距離は何 cm でしょうか。

まとめ

等速運動では、速さと時間がわかっているとき、その時間に進んだ距離が、下の式でもとめられます。

距離 (cm) = 速さ (cm / 秒) × 時間 (秒) *

* cm / 秒はもともと $\frac{\text{cm}}{\text{秒}}$ の意味です。そこで上の式を、 $\frac{\text{cm}}{\text{秒}} \times \text{秒} = \text{cm}$ と考えるとよくわかります。いっぽうに、かけ算やわり算をすると別の量がうまれます。たとえば長さ×長さ＝面積 (cm×cm=cm²) がそうです。これにたいして、たし算やひき算からは別の量はうまれません。

この § では、速さと時間とから距離をもとめる、いわゆる内包量の第二用法を指導する。

まず、3 cm / 秒で、1 秒間、2 秒間、3 秒間には、何 cm 進むかという問いを与えて、§ 4 の速さの意味から自然に、3 cm、6 cm、9 cm と答えさせたい。より厳密には、「3 cm / 秒は、とりもなおさず、1 秒間に 3 cm の意味だ。2 秒間は、3 cm + 3 cm、3 秒間は 3 cm + 3 cm + 3 cm で、それぞれ、3 cm、6 cm、9 cm となる」といったところであらうか。

25 秒間には何 cm 進むかの問では、子どもたちは 3 cm × 25、あるいは 3 cm / 秒 × 25 秒のいずれかを用いるであらう。乗法の意味は、前者は、 $\overbrace{a + a + \cdots + a}^n = a \times n$ 、後者は、1 当り × いくつ分 = 全体、としてそれぞれ既習のことがらである。

(2) は、時間が小数となった場合である。「1 秒間に 3 cm だからこれを 10 等分して、0.1 秒間には 0.3 cm。従って、0.4 秒間には、0.3 cm + 0.3 cm + 0.3 cm + 0.3 cm で、1.2 cm」と答えられれば十分である。もちろん 3 cm / 秒

また、理科の時間などには、近似値や誤差、有効数字などの概念とともに、物理量の測定方法を指導し、さまざまな運動の速さを実際にはかってみることもよいであらう。

図のように速さくらべをするのもたのしい。

また問題をつくったり解いたりするには、定義をみちびくための推論の際とはちがって等速性はさほど厳密にいう必要はなからう。

× 0.4 秒ができればなおよい。

速さは、子どもたちにはすでに習得している「1 当り量」の範疇においてとらえられているので、cm / 秒 × 秒 = cm の乗法は、1 当り量にもとづいて意味の与えられた乗法の枠の中で自然に理解されると考えられる。が、いわゆる「かけたのに小さくなる」という不思議のおこる小数の乗法について、実在の量にもとづいて本格的に指導されるのは、この速さの授業においてではなかろうか。もちろん、タイルの 10 等分などによって計算の構造は理解されているが。従ってこの第二用法の指導にあたっては、既習のこととしてただちに、乗法の式が与えられるのではなく、むしろ、速さの「意味」や等速運動のイメージや定義を媒介とした「0.3 cm + 0.3 cm ……」などの多少泥くさい指導こそ重要なのだといえる。

このような、確かな手がかりをもとに、距離 = 速さ × 時間が導入される。これも、速さ × 時間による計算の結果が、累加などによってもとめられる数値に一致するということから妥当性を確認するというニュアンスの指導

が望ましい。

物理量のデイメンションの変換を引きおこす演算である

そのうえで、改めて、*に書かれているような形で、

という乗法の本質を指導するとよいであろう。

§ 7 距離をもとめる (2)

§ 7 距離をもとめる (2)

問題 つぎのそれぞれの運動の距離を計算でもとめましょう。

- (1) 空気中の音の速さは 340m / 秒 です。遠くの丘の上にカミナリの光をみてから、6秒後に、その音をききました。カミナリまで距離は何m ありますか。
- (2) 漁船が魚群探知機を使って、さかなの群の深さを調べています。探知機から出た信号音が、0.4秒たってもどってきました。さかなの群は、何m の深さにいるでしょう。
- (3) 下の表をみて、それぞれの距離を計算しなさい。

	速さ	動いた時間
A	330m / 秒	60秒
B	6.2cm / 秒	15秒
C	4.5cm / 秒	2.3秒
D	13.4cm / 秒	0.6秒

前§に導入された、距離をもとめる式を具体的状況に適用するかたちで問題を解く、これもできるかぎり興味

深い問題が考案されることが望ましい。

§ 8 シェマ

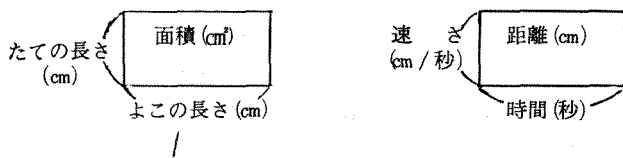
§ 8. 速さ・時間・距離のシェマ

速さ・時間・距離の関係をシェマ(図)にあらわし、学んだことを整理してみましょう。いろいろしかたがあるでしょうが、一度覚えたならいつまでも使えるようなものを考えました。

長方形の面積は、「面積=たての長さ×よこの長さ」でもとめました。

等速運動の距離は、「距離=速さ×時間」でもとめました。

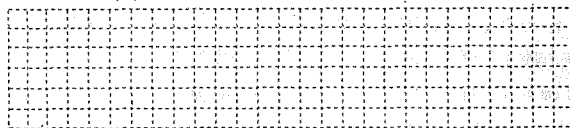
そこで、距離を面積に、速さをたての長さに、時間をよこの長さにおきかえると、速さ・時間・距離の関係がらっぱに、シェマ(図)としてあらわされます。



- (1) A, B二つの運動をシェマにあらわしてみましたが、Aの運動とBの運動とでは何がちがっているでしょう。

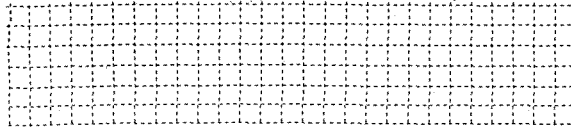


- (2) 3cm / 秒 で5秒間進むのと、 2cm / 秒 で7秒間進むのとではどちらが長い距離進むのかシェマを書いて(計算をしないで)較べてみましょう。一とめもりは 1cm / 秒 、1秒をそれぞれをあらわすものとします。



正比例関数の基礎としての内包量指導

- (3) 4 cm / 秒の等速運動で、時間が1秒、2秒、3秒、10秒と増えると、それに応じて距離も4 cm, 8 cm, 12 cm, 40 cm, と増えることを、シエマを書いて示しましょう。



また、このときどんな短い時間(瞬間)をとっても、速さは4 cm / 秒であることをシエマを用いて説明しましょう。

- (4) シエマを用いて速さは、速さ=距離÷時間でもとめられることを説明しましょう

前章にふれたように内包量をシエマに表現することは、分離量をタイルという半具体物によって表現する場合と異なり、一定の困難をともなう。シエマを一種の準同型な写像とすれば、タイルはある集合からその集合自身の中への自然なそれであるのに対し、内包量のシエマ化は、ある集合から別の集合への写像であるというレベルの相連を無視することはできない。子どもたちは、距離を面積であらわすなどという操作にひどく当惑するにちがいない。このように別のモノの上に移しかえることによって、いわゆる内包量の三用法の計算は達者にはなったが、かえって、実在の運動のイメージがシエマの段階におしとどめられてしまうという問題も生じるのである。

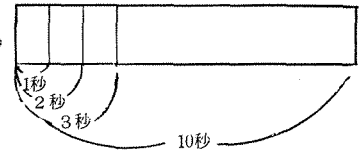
以上のような問題にもかかわらずあえて、シエマを指導するのは、三用法が同一の構造の三つの表現であるという関係の把握や、時間にもなる距離変化やその際の速さの不変性などの視覚的かつダイナミックな把握に対してもつシエマの強力な役割を位置づけるからである。また、微分、積分にいたる解析学指導の体系の中で、一貫して基本的なシエマたりうるということも指導

の必要性のきめ手となる。

(1)は、Aは等速運動、Bは不等速運動と答えればよいが、この背後には横軸(時間)の各点に対して速さがその上のたての長さであらわされているということが直観的につかまえられていなければならない。

(2)は、シエマを書く練習である。計算しないで、という条件が与えられたことによって、面積は数えられなければならない、距離が面積におきかえられているという関係を理解するにはよいであろう。

(3)は、シエマが右図のよう
にまとめて
書ければ十分
である。



次の問題は「をのように無限に縮めていってもたての長さすなわち速さ是不変である」と答えられる。

(4)は、「たての長さ=面積÷よこの長さ」であるからと説明されればよい。

§ 9 時間をもとめる

§ 9. 時間をもとめる

2 cm / 秒で等速運動する物体が、36cm進むには、何秒かかるでしょう。できれば計算の式やそのようにするわけも説明してください。

まとめ

この問題の考え方は、

いっばんに、速さと進んだ距離がわかって、要した時間をもとめる式はつぎのようになります
時間(秒)=距離(cm)÷速さ(cm/秒)

問題(1) 遠くの教会の鐘の音が聞こえました。教会までの距離は 2,040m あります。鐘は実際には何秒まえになったのでしょうか。

- (2) 12 m / 秒の速さで走る自動車がトンネルに入りました。4 秒あとに15 cm / 秒の速さで走る別の自動車がトンネルに入りました。トンネルの長さは 300 m あります。どちらの自動車が先にでてくるのでしょうか。

この§は、速さと距離から時間をもとめる第三用法の指導である。考え方は、「12 cm進むのに1秒かかるのだから、36 cmに12 cmがいくつふくまれているかをもとめればよい」となる。従って距離÷速さという包含除の除法によって時間がもとめられる。

前§で学習したシエマを用いてただちに式を導く子どももでてくるはずである。

問題(2)などは、距離をベースにしての速さくらべで、この種の問題に慣れることも、「速さ」のイメージをいっそう豊かにするであろう。

§ 10 複 合 問 題

§ 10. いろいろな問題。

問題1 6秒間に18m進む物体は、そのまま等速運動をつづけたとしたら9秒間には何m進むでしょうか。

問題2 25秒間に300m進む物体は、100秒間には、何m進むでしょうか。

問題3 28cmを0.7秒間で進む物体は、15秒間では何cm進むでしょう。

問題4 945mのトンネルを21秒間で通過した超特急ひかり号は、次の2,160mのトンネルは、何秒で通過するでしょう。

いわゆる“比例問題”である。

「 $18\text{m} \div 6\text{秒} = 3\text{m} / \text{秒}$ 、 $3\text{m} / \text{秒} \times 9\text{秒} = 27\text{m}$ 」のステップによって問題をとくように指導する。この他に

も適当な問題を工夫して与え、子どもに習熟させることが望ましい。

第2節 密度の指導過程

§ 1 均等分布と不均等分布

§ 1. 重さの分布をしらべよう。

〔問題1〕 この砂のいろんな部分の重さをしらべよう。みなさん予想してみてください。

この砂のいろんな部分では重さが等しいとはかぎらないことがわかりますね。

〔問題2〕

I) ではこのハリガネではどうでしょうか。

II) この灯油ではどうでしょうか。

ハリガネや灯油のように、物質にはどこをとっても重さの等しくなるものがあります。これから重さが均等に分布しているような物質について勉強していきます。

密度の定量的把握の前提には、物質には重さが均等に分布しているという認識が必要である。

均等分布の抽象は、均等な物質の知覚からは得られず、不均等な物質との対比で得られる。§1の目的は、均等分布の抽象を不均等分布との対比で形成しようとするところにある。

〔問題1〕では、(砂鉄をまぜた)砂を提示し、いろんな部分から、準備した体積、重さの等しい2つの容器に砂をとり出し、テンビンがガタンとなるので子供たちは

驚く。莫然とした均等分布の概念ができつつあることを示している。それでは、ハリガネではどうでしょうか、といって、ハリガネを長さの等しくなるように切り、重さをくらべる。灯油でもくらべてみる。

最後に、ハリガネや灯油のような物質にはどこをとっても重さの等しくなるものがあり、これから重さが均等に分布しているような物質について勉強して行きます、といってまとめる。

§2 密度の比較

§2. 密度くらべ

ここに水と灯油があります。どちらが重い物質かくらべましょう。

	重 さ	体 積
水	12 g	12 cm ³
灯 油	8 g	10 cm ³

〔問題1〕 どちらが重い物質かを直接くらべるにはいろいろありますが、入れてみるとすぐわかります。入れて底に沈むものの方を重い物質といいます。

水と灯油ではどちらが重い物質でしょうか。

I) 表のままの時

① 水の方が重い物質である。

② 灯油の方が重い物質である。

理 由

II) 水を半分にした時、

① 水の方が重い物質である。

② 灯油の方が重い物質である。

理 由

III) 水を一滴にした時、

① 水の方が重い物質である。

② 灯油の方が重い物質である。

理 由

このことから水の方が灯油より重い物質だということがわかりましたね。

〔問題2〕 では、直接くらべられないときにはどうしますか、考えてみましょう。じっさいに計算もしてください。

まとめると、1cm³あたりの重さで密度をあらわします。(g / cm³)。

密度(g / cm³)=重さ(g)÷体積(cm³)でもとります。

〔注意〕 わたしたちは重さということで二種類の意味をいいあらわしてきました。いわゆる重さと密度としての重さです。重い物質というときの「重い」は密度を意味しています。これからこの二つの重さを区別してつかっていきましょう。

この§の目的は、密度の定量的な概念を、その感性的基礎を土台にして形成しようとするところにある。〔問題1〕では密度の感性的な把握を、〔問題2〕では、その定量的な表現を理解させることにある。

まずはじめに、外延量としての重さから、物質の奥深くに潜む内包量としての重さを区別しなければならない。それは1滴でも沈むということによって感性的に把握される。すなわち、〔問題1〕では、体積12cm³で重さ12gの水と、体積10cm³で重さ8gの燈油（今後使われる密度の数値はすべて理科年表46年版による）とを直接比較する場面が設定される。いろいろくらべる方法があるが、その中で浮か沈むかで判別しよう、その時沈んだ物質を重い物質だといって、子供の思考を方向づける。Ⅰの段階ではまだ子供たちは外延量に定位してい

る。Ⅱの段階になって、外延量に定位していた子供たちが外延量としての重さとは異なる重さのあることに気づく。Ⅲ1滴でも沈むということを通して物質の奥に潜む内包量としての重さを感性的に把握する。

〔問題2〕では、直接に比較できない場合が設定される。そのとき、体積を同じにして重さの大小でくらべる、重さを同じにして体積の大小でくらべるという方法を子供たちが考え出すが、そこですべての方法が正しいとはめてやり、1cm³あたりの重さでくらべると便利であることを説明し（密度の大小が実数の大小と対応すること）、1cm³あたりの重さで密度（g/cm³）をあらわしますとまとめる。合わせ、密度（g/cm³）＝重さ（g）÷体積（cm³）でもとめられるとまとめる。

§3 密度をもとめる（1）

§3 密度をもとめよう。（1）

重さが均等に分布する物質では、どこをとっても密度が一定になるはずです。計算してみましょう。

〔問題1〕

- I) この水12cm³の重さが12gのときの密度 ()
- II) この水6cm³の重さが6gのときの密度 ()
- III) この水3cm³の重さが3gのときの密度 ()
- IV) この水2cm³の重さが2gのときの密度 ()
- V) この水1cm³の重さが1gのときの密度 ()
- VI) この水0.5cm³の重さが0.5gのときの密度 ()

- I)
- II)
- III)
- IV)
- V)
- VI)

〔問題2〕

- I) この燈油10cm³の重さが8gのときの密度 ()
- II) この燈油5cm³の重さが4gのときの密度 ()
- III) この燈油3cm³の重さが2.4gのときの密度 ()
- IV) この燈油2cm³の重さが1.6gのときの密度 ()
- V) この燈油1cm³の重さが0.8gのときの密度 ()
- VI) この燈油0.5cm³の重さが0.4gのときの密度 ()

- I)
- II)
- III)
- IV)
- V)
- VI)

水や燈油のように重さが均等に分布するような物質では、体積をどうとっても密度が一定になることがわかりました。密度をg/cm³であらわすことの意味を考えてみましょう。たとえば、0.8g/cm³というのは、体積1cm³の重さ0.8g、体積2cm³の重さ1.6g…などをすべて代表してあらわしている数字であるといえます。

正比例関数の基礎としての内包量指導

重さが均等に分布する物質では、体積、重さのとり方に依存せず（点でも）、いつも密度は一定である。この§では、このことを水と燈油について（数値は正確に測ったものとしてということわりをつけて）確かめる。§2の〔問題1〕で水が燈油に沈んだ理由も数値で確かめることができる。

最後に、水や燈油のように重さが均等に分布するような物質では、体積や重さをどうとろうと密度が一定になる。したがって、たとえば密度が 0.8 g/cm^3 というのは、 1 cm^3 の重さ 0.8 g 、 2 cm^3 の重さ 1.6 g 、 3 cm^3 の重さ 2.4 g ……などをすべて代表してあらわしている数字であるともとめる。

§4 密度をもとめる (2)

§4. 密度をもとめる (2)

〔問題1〕 次の表のような金属があります。それぞれの金属について密度をもとめなさい。

	重 さ	体 積	密 度
な ま り	68.04 g	6 cm^3	
アルミニウム	8.64 g	3.2 cm^3	
銅	44.65 g	5 cm^3	

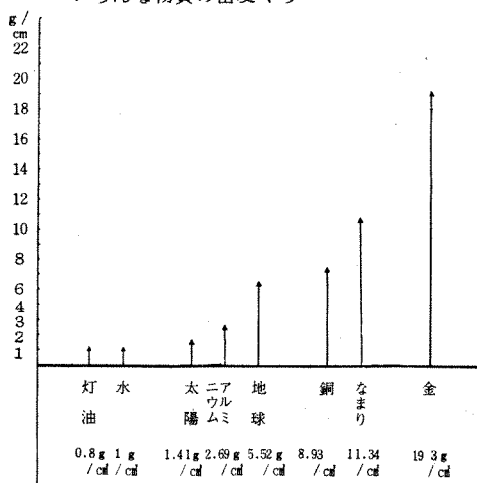
〔問題2〕

10 cm^3 で 7.9 gのアルコールと 4 cm^3 で 5.04 gのグリセリンを一つの試験管に入れました。どちらが下に沈むでしょうか。

〔問題3〕

体積が 5 cm^3 で重さ 39.3 gの鉄は、体積 8 cm^3 で重さ 108.8 gの水銀に浮くでしょうか。

いろんな物質の密度くらべ



いろんな物質の密度を、物質をイメージにおきながらもとめる。〔問題2〕〔問題3〕では、実際に実験してみるとよい。

付録の図は、密度を長さであらわし、その大きさくらべをしたものである。地球、太陽は均質だと考えて計算したものであることにふれておく。§4で出てきた物質でまだ記入していない物質の密度をこの図に記入させる。

§ 5 重さをもとめる

§ 5. 重さをもとめよう

〔問題1〕

密度 0.8 g/cm^3 の灯油は 6 cm^3 では何 g でしょう。

では 4 cm^3 , 1 cm^3 でもやってみましょう。

•

•

まとめると、重さ (g) = 密度 (g/cm^3) $\times$ 体積 (cm^3) でもとまります。

〔問題2〕 密度 0.8 g/cm^3 の灯油 0.5 cm^3 , 4.5 cm^3 では何 g になるでしょう。

〔問題3〕 次の表の物質について重さをもとめなさい。

	鉄	あ え ん	水 銀	い お う
密 度	7.86 g/cm^3	7.13 g/cm^3	13.6 g/cm^3	2.07 g/cm^3
体 積	20 cm^3	4 cm^3	9 cm^3	0.24 cm^3
重 さ				

この§は、密度、体積がわかっていて、重さをもとめる第2用法の理解を目的としている。密度が 0.8 g/cm^3 ということは、 1 cm^3 あたり 0.8 g ということであり、灯油は均質な物質であるから、その 6 cm^3 分では、ということで〔問題1〕は、 $0.8 \text{ g/cm}^3 \times 6 \text{ cm}^3$ で重さをもとめることを指導する。さらに 4 cm^3 , 1 cm^3 でも重さをもとめてみる。

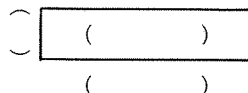
最後に、重さ (g) = 密度 (g/cm^3) $\times$ 体積 (cm^3) でもとまるということでもとめる。

〔問題2〕では、小数に拡張し、小数でも上式で重さをもとめることを導く。〔問題3〕ではいろいろな物質の重さをもとめる問題である。これで上式の習熟が達成される。

§ 6 シエマ

§ 6 密度のシエマ (図式)

〔問題1〕 速さのときのように面積図をつかって重さ (g) = 密度 (g/cm^3) $\times$ 体積 (cm^3) をあらわしてみましょう。密度、体積、重さはどこにあらわせばよいでしょう。



〔問題2〕 § 5 の〔問題3〕のそれぞれの物質の密度、体積、重さをシエマに書いてみましょう。

〔問題3〕 次の問題をシエマをつかってときましょう。

I) 鉄の密度が 7.86 g/cm^3 の体積 25 cm^3 の重さ。

II) 金の密度が 19.3 g/cm^3 の体積 15 cm^3 の重さ。

〔問題4〕 次の問題をシエマをつかってときましょう。

I) 体積 12 cm^3 で重さ 163.2 g の銀の密度。

II) 体積が 4 cm^3 で重さ 14.4 g のダイヤモンドの密度。

正比例関数の基礎としての内包量指導

速さでシエマを導入しているの、その一般化を期待して、ここでは、あえて速さで導入したときのような展開した過程をとらず、直接、重さ(g)＝密度(g/cm³)×体積(cm³)を面積シエマにあらわしてみようと導入する。シエマの一般化が期待されないならば、速さで行なった過程を密度でもふむ必要があろう。しかし、われわ

§7 体積をもとめる

§7. 体積をもとめよう。

〔問題1〕 密度が0.8g/cm³の灯油の重さ6.4gの体積をもとめなさい。

0.8gの重さで1cm³の体積になるのだから、6.4gの重さのなかに0.8gがいくつ分ふくまれているかによってもとめられる。

$$\text{体積 (cm)} = \text{重さ (g)} \div \text{密度 (g/cm)}^3$$

〔問題2〕

I) 灯油18.8gの体積はいくらでしょう。

II) 鉄35.37gの体積はいくらでしょう。

〔問題3〕

I) 鉄10gと灯油10gとでは、どちらが体積が大きいですか。計算しないで考えてみましょう。

II) 計算してみましょう。

〔問題〕 密度が5g/cm³で重さが105gの物質Aと密度が5.8g/cm³で重さが121.8gの物質Bとを同じ体積の水のはいっているビーカーに入れました。ビーカーの水面はどちらが高くあがりますか。

この§は密度、重さがわかっていて、体積をもとめる第3用法の理解を目的としている。面積シエマを前時で指導しているの、それを使って子供たちはとく。ここで包含除としての意味を合わせ指導することが必要である。最後に、体積(cm³)＝重さ(g)÷密度(g/cm³)でもとめられるとまとめる。

§8 複合問題

§8. 問題をとこう。

〔問題1〕

I) 6cm³で53.1gのニッケルは、14cm³では重さはいくらになるでしょう。

II) 9cm³で36gの物質Aは、4.3cm³では重さはいくらになるでしょう。

III) 長さ5cmで重さ90gの銅線は、170cmでは重さはいくらになるでしょう。

〔問題2〕

I) 50cm³で935gのウランがあります。このウラン1870gでは体積はいくらになるでしょう。

II) 8cm³で69gの物質Bがあります。この物質28.9gでは体積はいくらになるでしょう。

れが行なった授業ではその必要はなかった。

〔問題3〕〔問題4〕では、この面積シエマを使って、重さをもとめる問題、密度をもとめる問題を解いてみる。ここで、密度、体積、重さの三者関係が直観的に理解されるようになる。

〔問題3〕〔問題4〕では、第3用法の習熟にとどまらず、密度、体積、重さの三者関係の理解をも意図している。〔問題3〕では、重さが同じとき、密度が大きい方が体積が小さく、重さがギューとつまっていることなどについてふれるとよい。

Ⅲ) 長さ15cmで重さ 2.7g の銅線があります。この銅線 9 g では長さは何cmになるでしょう。

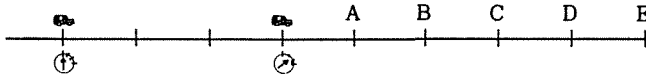
この§の目的は、第1用法と第2用法の複合問題、及び第一用法と第3用法の複合問題をとくことにある。このことによって、所謂比例問題をとくことが可能となる。なお、〔問題1〕のⅢ、〔問題2〕のⅢは線密度についてであり、 g/cm を線密度という（銅線の均質性は§1で確かめられている）と説明するとよい。

付 事後テストによる指導過程の評価

テストが、子供における知識の定着の度合を評価することを媒介に、指導過程の妥当性の検討をその目的とするものであることは、教授学的研究の方法としてのみでなく、教育的実践の基本的姿勢として自覚されなければならない。テストに正答できないのは、何ら子供の責任の範囲に属することがらではなく、指導プランの不備欠陥として不断の修正や改善を要請しているものとしてつかまえられなくてはならないのである。

〈評価テスト〉

問題1 5秒間に30mすすむ物体があります。



(ア) この物体が等速運動するとすれば、次の5秒には、図のA,B,C,D,Eのうち、どこまで進んでいるでしょう。

(答)

(イ) この物体の「速さ」をもとめなさい。

(答)

問題2 9秒間に、36m進む物体Aと、3秒間に24m進む物体Bとでは、どちらが「速い」でしょう(答)

問題3 4m/秒で等速運動する物体の15秒間に進んだ距離は、いくらでしょう。(答)

問題4 3m/秒で等速運動する物体が12m進むのには、なん秒かかるでしょう。(答)

問題5 7秒間に28m進む物体は、21秒間には、なんmすすむでしょう。(答)

さて、われわれの内包量指導の研究、実践は、1969、70、71の両3年にわたって、恵庭市立島松小学校、夕張市立夕張第二小学校の五年の各学級において行なわれた。この間、プランは、3次にわたって作製されこの論文で紹介した授業は、第3次のプランである。この最終プランによる実践は、目下のところ速さが終了した段階であり、密度及びその他の内包量については、引きつづき実践されつつある。

この段階における速さの評価テストの結果からみて、まず速さについては、われわれの指導プランを妥当と結論しうる結果を得たと考えられる。また密度については、一昨年(70)の第1次案の段階での正答率が厳密にみて80%近くに達しており⁽²⁵⁾、指導の基本的骨格は支持されているとみなすことができた。以下、資料として速さの評価テストとその結果を載せる。また密度については、資料を得次第、別刷として押入したい。

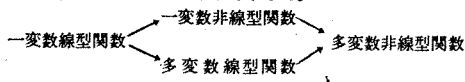
〈結果〉*

問題	正 答 (%)
1	(ア) 36/41(87.8) (イ) 37/41(90.2)
2	37/41(90.2)
3	40/41(97.5)
4	36/41(87.8)
5	38/41(92.7)

※ このデータは71年10月に実施された、島松小学校5年4組(授業者中山昌氏)によるものである。

〔註〕

- (1) 銀林 浩「量と数学教育」(『数学教室』1969年6月、国土社)
- (2) 整数 $Z \times Z^*$ ($Z^* = Z - \{0\}$) における同値関係 $(a_1, b_1) \sim (a_2, b_2) \iff a_1 b_2 = b_1 a_2$ によって得られる $Z \times Z^* / \sim$ に簡単な四則を定義して有理数体と「同型」になる。
- (3) たとえば、遠山氏は次のように書いている。
「A という物体とB という物体の合併をやはりU という記号で表わすと、合併した物体はAUBで表わされる。……だから重さについては、 $m(AUB) = m(A) + m(B)$ ……という式が成り立つ。これまでの算術教育は $m(A) + m(B)$ から先にやっていた。ところが、量の体系はもっと奥にさかのぼってAUBから考えさせようというのである」(遠山啓・長妻克亘「量の理論」明治図書P.13) このように、 $m(A)$ を問題とする前にA、あるいは写像 m を厳密に、アナログ的な意味における公理的な順序をたどって指導することの必要性を提起したのが量指導の体系のメリットであり、それは思弁的な意味での哲学的な方法に依ることなく、数学的認識の实在的基礎を明らかにする、数学的分野の一つの開拓であったと云えよう。このような方法論的な位置づけからの研究はほとんど未開であろうが、最近の数教協による障害児教育に関する研究の積み重ねは、この意味で注目に値すると思われる。遠山啓「障害児の教育について」(『教育』1971年7月、国土社) 数学教育協議会「研究と実践」(第29号・1971年2月) 倉田令二郎「集合論」に対する「原数学」(『現代数学』1971年5月、現代数学社) など参照。
- (4) 土井捷三・三上勝夫・須田勝彦「運動の解析を基礎とした正比例関数の指導」(北海道大学教育学部紀要・第18号、1971年3月)
- (5) 遠山・長妻著「量の理論」P.17
- (6) ここでも、銀林浩氏の表現によれば、「『知ること』はすなわち『できること』」(銀林浩「ベクトルから固有値問題へ」・現代数学社、P.13) という段階が必要ようである。
- (7) 遠山・長妻「量の理論」P.43~P.44
- (8) 森毅氏は、小学校から大学までの関数指導体系のもっとも本質的な骨格を次のダイアグラムで示した。



このダイアグラムの持つ意味は、広大な関数指導の内容を統一的なカテゴリ(線形性)で整理し、大域的な見通しを与えたことである。また、このダイアグラムは単に初等・中等教育の教材を整理する視点として有効であるばかりでなく、最近の大学生向けの解析学の入門コースにも、このスタイルをとるものが若干現われていることに見られるように、数学的概念の本質的連関を反映したものと考えることができる。詳しくは山口昌也・中原克己編「関数指導現代化入門」1.(初等関数)・明治図書、P.35以下、森毅「ベクトル解析」・国土社、同「現代の古典解析」・現代数学社、小島順「微分」(『現代数学』1970年10月、現代数学社) など参照。

- (9) 遠山啓・長妻克亘編「量の指導入門」(下巻)・国土社、P.12~P.15、P.74~P.75 など参照。
- (10) 遠山啓監修「わかるさんすう」・麦書房(指導ノートP.11)
- (11) この例はUCTMによる。日数教編「数学教育の現代化」・培風館、P.43
- (12) ブルバキ「数学原論」集合論3、歴史覚え書き・東京図書、P.87
- (13) 森毅・銀林浩著「現代数学への道」・国土社、P.124
- (14) 松井幹夫「内包量の指導」(遠山啓・銀林浩編「量と構造」・国土社所収) P.92~P.93 同「内包量」(『数学教室』1969年7月・国土社) P.9、引用は前者による。

- (15) 我々は、宮本敏雄氏の次のような見解に賛成である。「もともと、固有の意味では、内包量は一樣な流れ、一樣な分布に対してだけ決まる量であるといつてよい。」「流れが一樣であつてこそ、その流れの強さ、つまり流量がきまり、分布が一樣であつてこそその分布の強さ、つまり密度が決まると考えられる。」(宮本敏雄「量の概念とその発展」(『数学教室』1969年7月・国土社、P.21、及び注14)所収の同氏の論文の脚注、P.46)

このような観点から、松井氏の「速さくらべ」を未測量として感覚でやっている段階では、不等速運動であるか、等速運動であるかは、問題にせずに、両方を許容している(松井幹夫、注14)論文、P.105)という所説は誤りであると云える。さらに、直接比較のもつ非本質的な捨象という側面に関して、横地清氏の次のような速さの導入の方法の誤りも帰結される。横地氏は、速さの概念に対する詳細な実態調査から「ゴールイン時の状態(ゴールラインとの位置関係、先行関係)を決定的な条件」(横地清監修「新しい算数の授業計画」・国土社、P.97~P.104)としてみる傾向が強いことを明らかにし、その誤った認識を変えるために、スタートとゴールの状態に様々なヴァリエーションを持たせた速さくらべの授業を導入の中心課題に設定している。これは第一に、速さという量を、運動する各点でその物体が持っているとするれば、指導に於てスタートとゴールの状態に定位させること自体が本質点でない点、しかも第二に、そこで行なわれている速さは、本質的には不等速運動の速さである、という点での誤りが指摘される。不等速運動の速さくらべは、平均の速さを定義した後はじめて可能なものであり、速さ指導の前になされたこの実態調査がいかなる結果を示しても、指導過程を決定して行くうえでは無関係であると云わねばならない。横地氏らと同様の誤りは極地方式研究会「速さ」(極地方式テキスト試案71-5-25)にも見られる。

- (16) 松井幹夫 前掲論文P.83
- (17) 同上 P.105
- (18) 同上 P.102~P.103
- (19) 小林備一「変化率とはどのような量か」(『数学教室』1970.6・国土社) P.22
- (20) 松井幹夫 前掲論文 P.92~P.93
- (21) 同上 P.93
- (22) 倉田令二郎 前掲(注3)論文
- (23) この点に関して、我々は「均質性」と「均等分布」に関する「教授学」的区別をせずに、本質的には實在の線形的構造としてとらえる内藤久夫氏の見解に賛成である。「均一であるとか均等分布ということは、密度を例にとると、物体の任意のところから一定量の体積をとり出したとき、その重さはどこから取り出しても変わらないということ。……一般に、同一の集合A、B……に相異なる二種類の外延量 $m(A)$ 、 $n(A)$ が定義されていて、 $m(A)=m(B)$ のとき、 $n(A)=n(B)$ であれば均等分布です。」(森毅・内藤久夫編「数量関係指導の現代化」・明治図書、P.50)
- (24) 物質の均質性の確認は、それ自体としては一当り一定という認識を自明としない。従つて、「ピンとミルク」のような一当り一定が自明な外延量的内包量の中に、密度や等速運動の速さなどを含めることは、内包量の概念を媒介にしなければ導かれないことをはじめから「自明」と見ることによって、内包量指導の本質的契機を見落すものである。外延量的内包量の概念は、不都合な混乱を避けるためには、一方の外延量が分離量であるものに限定すべきであると考ええる。あるいは乗除演算の意味づけなどに用いられている、必ずしも内包量として認識される必要がないという意味での外延量的内包量は、一当り一定が定義、あるいは要請としてはじから与えられているのであり、それが量的法則として導かれる密度や速さとは全く異なったものと考えらるべきであろう。
- (25) 北大教育学部学校教育研究室・島松小学校「研究紀要」1969年9月参照。