



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	量の測定にもとづく数（自然数, 分数）概念の導入について : B.B. ダヴィドフの実験プログラムから
Author(s)	土井, 捷三
Citation	北海道大學教育學部紀要, 25, 117-138
Issue Date	1975-12
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/29122
Type	departmental bulletin paper
File Information	25_P117-138.pdf



量の測定にもとづく数(自然数, 分数) 概念の導入について

—— B. B. ダヴィドフの実験プログラムから ——

土 井 捷 三

Introduction of Number Concept through the Measurement of Quantity

Shōzō Doi

概 要

B. B. ダヴィドフの一般化理論にもとづく数学教育の具体的な展開過程を分析した。

かれの研究における 1. 量概念の指導, 2. 自然数概念の導入, 3. 分数概念の導入, について検討し, それらが, まだ, 「体系」にまで至っていないことを指摘した。

さらに, それらと我が国における数学教育協議会の提起する指導体系との比較も行なった。

第0章 課 題 の 設 定

B. B. ダヴィドフは, 伝統的教授学が感覚論的認識論を基礎にしているが故に子どもに理論的思考を形成する内容と方法を解明するに至っていないと批判しつつ, 感覚論的「一般化と抽象」にではなく, 理論的・内容的「一般化と抽象」に基礎をおいた教育内容編成論の構築を提起している¹⁾。では, 理論的・内容的「一般化と抽象」にもとづいた内容編成論とはどのようなものか。B. B. ダヴィドフによればそれには二つの段階があるという。

「研究される全体的なもののあらゆる特質の統一的源泉, 発生的基礎として, 全体的なもののいまだ発展せざる『細胞』に関する概念の作成」の段階と「抽象的な本質(『細胞』)からの, いまだ分割されざる内部的関連からの具体性への, 発展していく全体的なものの諸側面の多様性の統一への, 上昇」の段階とである²⁾。

さて, この小論の第一の課題は, 彼の理論的・内容的「一般化と抽象」による教育内容編成の具体的実現を解明することにある。いいかえるならば, 数学教育に関する実験プログラムの具体的展開過程と指導過程とを考察することにある。

第二の課題は, ダヴィドフの数学教育の「体系」(まだ, 体系というまでにいたっていないが)と数学教育協議会(以下, 数教協と略)が提唱する数学教育の体系との違いを浮彫りにすることにある。即ち, 上記の教育内容編成論にもとづくダヴィドフの数学教育の「体系」は

量 → 数
(等・不等関係と加減) (自然数 → 分 数)

というものであり³⁾、これが、数教協の「量を基礎に」する数学教育の体系と同じなのか、違うのか、ということを明らかにしようとするのである。これは、ダヴィドフの理論と数教協の理論との表面的な比較による一致の主張⁴⁾に対する反論にもなるだろう。

B.B.ダヴィドフは、低学年児童の学習可能性の問題を解明しようとし、この研究課題に「学習プログラムの構成と再構成⁵⁾」の見地から接近しようとする。それは、従来、思考心理学が採用してきた研究方法に180°の転換をもたらすものである。彼の研究方法、仮説、さらに「発達」論などの検討も重要な課題ではあるが、それらについては他日を期したい。

<注>

- 1) B.B.ダヴィドフ「一般化の理論と教授のプログラミング」(「教科内容の現代化」所収)
- 2) B.B.ダヴィドフ「教授—学習における抽象的知識と具体的知識の相互関係の問題によせて」『現代教育科学』誌№178, 1972, P.120, P.121,
- 3) 方程式の指導、乗法の指導など部分的な試みがあるが、体系化にいたっていない。
- 4) 注1)の論文に対する解説のなかで柴田義松氏は次のようにいう「ここには水道方式の基礎理論を教科内容の現代化をおしすすめていくうえでの基本的な方法を示すものとして積極的に評価してきた筆者の考えが、要約的に述べられている」(「教科内容の現代化」P. 106)
- 5) B.B.ダヴィドフ「教授—学習における一般化の諸形態」1972, P.374

第1章 量の理論

ダヴィドフの実験プログラムでは数学の学習は、数からではなく、量の概念から開始される。それは、量が一般で、その特殊が数ということからである。それでは量が一般で、その特殊が数となるというそのような量とはどのようなものであろうか。

彼は「知識習得の年令的可能性」の中の一節「量概念と学校数学課程における量の位置¹⁾」の中で、A.H. コルモゴロフとB.Φ. カガンの量理論を紹介しているが、彼の量理論はかれらのそれに依拠しているといえる。そこで、カガンとコルモゴロフの量理論を述べ、ダヴィドフはそこからどういう結論を導いているかを述べよう。そうすれば、彼の量にたいする考え方、さらに、数の前に量概念の学習を先行させた理由等が、判明するであろう。

第1節 カガンの量理論²⁾

「集合は、その任意の要素AとBにたいしてAはBに等しいか、Bより大きいか、小さいかを確定することを可能にする基準が確定される時のみ量になる」

「比較の基準を確定することによって我々は集合を量へと実現する」

「公準1～Ⅶを満たす比較の基準が確認されるようなすべての集合は量とよばれる」

公準1～Ⅶとは、 $\langle 等 \rangle \langle 大 \rangle \langle 小 \rangle$ の概念の次のような性質をいう。

- I. 少なくとも次の関係の一つが生じる。 $A = B$, $A > B$, $A < B$,
- II. もし、 $A = B$ という関係が生じるなら、 $A < B$ は生じない。
- III. もし、 $A = B$ なら、 $A > B$ は生じない。
- IV. もし、 $A = B$ であり、 $B = C$ なら、 $A = C$ である。
- V. もし、 $A > B$ であり、 $B > C$ なら、 $A > C$ である。
- VI. もし、 $A < B$ であり、 $B < C$ なら、 $A < C$ である。
- VII. 相等は対称的である； $A = B$ という関係からいつも、 $B = A$ である。

VIII. 相等は反射的である；検討されている集合の要素 A がどのようなものであろうとも，

$A = A$ である。

以上が，カガンのいう比較の公準である。

「自然数列は，個々の数によって占める位置（ある位置を占める，その次の位置を占める，それに先行する位置を占める）のような比較の基準の見地からすると公準を満たしており，それ故，量である。」

カガンの量理論をまとめると，比較の公準 I ～ VIII（等・不等関係，推移律，対称律，反射律）を満足するような比較の基準（現実の諸側面）が確認される集合は量である，ということになる。

第2節 コルモゴロフの量理論³⁾

次にコルモゴロフの量理論に移ろう。ダヴィドフはコルモゴロフの量理論に移るにあたって次のように述べている。「B. Φ. カガンの公準には $\ll<=>$, $\langle>$, $\langle<>$ の符号によって定着されている二つの要素の関係だけが登場する——ここではこれらの要素に対するどのような操作も述べていない。それと同時に，A. H. コルモゴロフによって与えられた公理論の中には比較可能性だけでなく，加法－減法の性質もふくまれている」と。

コルモゴロフによれば

「量の概念は数学の発達とともに一連の一般化をこうむった」

「最初の量の概念（正のスカラー量）はユークリッドの『原論』の中で定式化された，……この最初の概念は長さとか，面積，体積，質量等のより具体的概念の直接的な一般化である」

「すべての同種の量の体系の中で（すなわち，全ての長さの体系，すべての面積の体系，すべての体積の体系の中で）不等の関係が設定される；同種の量 a と b は $a = b$ か， $a < b$ か， $b < a$ のいずれかである。また，長さ，面積，体積，の場合，各々の量に対して加法操作の意味がどのようにして設定されるかもよく知られている。考察されている同種の量の体系の各々において $a < b$ という関係と $a + b = c$ という操作は次のような性質をもっている。

- 1) a, b がどのようなものでも，次の三つの関係のただ一つが生じる： $a = b$, or $a < b$, or $b < a$
- 2) もし， $a < b$, $b < c$ であれば， $a < c$ である（関係の推移性）
- 3) 任意の二つの量 a, b にたいして，一義的に規定された量 $c = a + b$ が生じる。
- 4) $a + b = b + a$ （加法の交換法則）
- 5) $a + (b + c) = (a + b) + c$ （加法の結合法則）
- 6) $a + b > a$ （加法の単調性）
- 7) もし， $a > b$ であれば， $b + c = a$ となる量 c がただ一つ存在する（減法の可能性）
- 8) 量 a ，自然数 n がどのようなものであろうとも， $nb = a$ となる量 b がある。
- 9) 量 a と b がどのようなものであろうとも， $a < nb$ となる自然数 n が存在する。
- 10) もし，量の系列 $a_1 < a_2 < a_3 \dots < \dots < b_3 < b_2 < b_1$ が，適当に大きな自然数 n をとれば，任意の量 c にたいして $b_n - a_n < c$ となる性質を持っているならば，すべての a_n より大きく，すべての b_n より小さい唯一の量 x が存在する。（連続性の性質）

さらに，コルモゴロフは云う。

「1)～10)の性質は，正のスカラー量の体系の現代的概念をことごとく規定している。もし，

このような体系において測定の単位としてなんらかの量 ℓ をえらべば、体系の残りのすべての量は、一意的に次のようなかたちで表現される。

$$a = \alpha \ell \quad (\alpha; \text{正の実数})$$

「正の実数の体系が上で枚举された性質 1)～10)を満たし、すべての実数の体系がスカラー量のすべての性質をもっているが故に実数そのものを量と呼ぶことは全く法則的である。……次のような見地もより論理的である；長さ、体積、等々の量と同じように数は変量であり、定量である。」

以上がコルモゴロフの量（スカラー量）の概念である。

ダヴィドフは、カガンの公準とコルモゴロフの公理論を比較して次のようにいう、

「カガンの公準とコルモゴロフの公理論の 1～2 の性質の比較は、公理論で簡単に表現されているが、公準において体系的に展開されている、といえる。しかし、そのほかに公理論は加法の遂行可能性と一義性、加法の交換性と結合性、単調性および減法の可能性と結びついた量の一連の重要な性質をふくんでいる。」

第 3 節 ダヴィドフの量理論とその批判

以上が、カガンとコルモゴロフの量理論であるが、ダヴィドフはこれらの量理論（カガンの公準はコルモゴロフの公理論にふくまれる）からいかなる結論をひき出しているかをみよう。

- 1) これらの性質は正に量（正のスカラー量）を特徴づけている。
- 2) 公理論では量のあらゆる性質が数以前に採用され、検討されている。従って i) 数値化する前にこれらの性質から現実の長さ、体積、重さ、時間などを操作することができる。ii) 量の性質の依存、等から不等への移行、加法（その中で交換法則と結合法則を指導）など複雑な変換を行なうことができる（量を文字でおきかえて）。
- 3) 自然数の概念は公理 8 においてはじめてあらわれる。この公理は除法の可能性を導びいている。自然数は量の＜除法＞によってもうることができる。
- 4) 自然数、分数、実数自身が量である。
- 5) 上述の資料は自然数も実数も量やその若干の本質的な性質（1～7）に強固に結びついていると結論することを可能にしている。あれこれの性質が量関係記述の数形式が導入される以前に、子どもの特殊的な学習対象になりはしないか。

これらがダヴィドフがコルモゴロフの量理論からえた結論である。これらの結論について若干の検討を加えておこう。

第一に、ダヴィドフの量の考え方は A. H. コルモゴロフの量理論に依拠しているといえる。

第二に、銀林浩氏もコルモゴロフのような量理論を展開しているのだが、⁴⁾彼はこの理論を一般論と云い、その分析を一步進めて、量の「質」の違いを指摘し、量の体系を整備するにいたっている（ $0 < a$ なる a の中に最小のものがある場合、分離量、 $0 < a$ なる a に最小のものがいない場合、連続量、連続量の中で $A \cap B = \emptyset$ なら $m(A \cup B) = m(A) + m(B)$ が成り立つとき、 m を外延量といい、そうでないとき、 m を内包量という）。しかし、ダヴィドフの分析は、この一般論にとどまっていて、それ以上に進んではない。

第三に、ダヴィドフは 2) で「公理論では量のあらゆる性質が数以前に採用され、検討されている」といっているが、コルモゴロフは量の一般論を述べているのであり、量を文字で表わし、その間の関

係を論じるのは一般論を論じるにあたってとる常套手段である。にもかかわらず，そのことから「i）数値化する前に…操作することができる」といういわば教育内容の構造にかかわる結論を導いているのは現代科学の構造と教育内容の構造の層の違い⁵⁾を無視した結論ではあるまいか。さらに，3)「自然数の概念は公理8においてはじめてあらわれる。……自然数は量の＜除法＞によってもうることができる」と公理8を理解しているのであるがこれは間違いではないか，公理8は $\frac{a}{n}$ となるbがあるということで，aが幾等分もでき，無限分割が可能であるということを述べているのであって，自然数の概念を規定しているものではない，自然数ははじめから前提されているのである。従って，この公理は自然数は量の測定でえられるということをいっているのではなんらない。最後に，これらのことから，2) 3)は結論されないということがわかった。従って，5) もはなはだあいまいなものとなった。これらの考察からコルモゴロフの量理論から導びいたダヴィドフの結論の中で1)と4)が残るだけとなった。

<注>

- 1) B. B. ダヴィドフ「知識習得の年令的可能性」1966, P. 116～P. 126,
ここでいう量とはロシア語で Величина といわれるもので，数学の対象反映性の意味で使われる
Количествоとは異なる。
- 2) В.Ф. カガンの量理論は注1)の論文より引用した。
- 3) А.Н. コルモゴロフの量理論は注1)の論文と「量(Величина)」Б, С, Э, 所収より引用した。
- 4) 銀林浩「量と数学教育」『量と構造』所収，国土社。
- 5) 高村泰雄「教授学研究の方法論的諸問題」(その1)，北海道大学教育学部紀要第19号，P. 10,

第2章 量概念の指導（第1学年前期）

ダヴィドフは前章でみたように，コルモゴロフに依拠しながら「量は一般で数はその特殊な種類である」と述べている。他方，彼は教科内容編成原理として「研究される全体的なものの，あらゆる特質の統一的な源泉，原初的な関係から派生的な個別的な特殊なものを導き出す」という一般化論を展開している。この一般化論の数学教育への適用が，量の一般的性格の学習が数の学習より先行して始められる所以である。

第1節 「量概念導入のプログラム」の内容

この部分の実験プログラムはよく研究され，何回かの改訂が行なわれている。「量概念導入のプログラム」がはじめて実施されたのは1960/61年（モスクワ第91番学校）であったが¹⁾，1964/65年までの5年間に実験授業が都市部，農村部（モスクワ，トゥーラなど）など17学級で行なわれ，1964/65年には第2回の改訂が行なわれている。近著「教授－学習における一般化の諸形態」（1972年）で述べられているものは，少し加わったところもあるが，ほぼ1964/65年のものと同じである。

ここでは，ほぼ確定したと思われる1964/65年の実験プログラムを記載することにする²⁾。

§ 1 物を等しくすること（長さ，体積，重さについて），および，物のセットをつくること（6授業）

- 物と物を相等化する実際的課題，セットづくりの実際的課題
- 何について等しくするか，何についてセットづくりをするか，その特徴をコトバでいわせる。（「長さについて」，「重さについて」等）

これらの課題はいろいろの教具を使った次のような作業の中で解決される。

- (1) 「～について，この見本と同じ」物を選択する作業。
- (2) 言われたパラメーターについて見本と「同じ」物をつくる作業。

§ 2 物の比較と、比較結果を等式、不等式によってあらわす。(14～16授業)

1. 物を比較する課題。
2. 比較結果の言葉による表現(「よりおおい」「よりすくない」「ひとしい」の用語)等号、不等号の使用($>$, $<$, $=$)。
3. 比較結果を絵で表わす, つづいて線分で表わす。
4. 比較する物を文字であらわす(1年前期はロシア文字, 後期にはローマ字)。比較結果を式で表わす。 $A=B$, $A<B$, $A>B$ 。
5. 比較結果は「等しい」か「よりおおい」か「よりすくない」かのどれかの1つである。

この§ 1, § 2の部門の基本的課題は, 教具をつかつての行為にもとづいて, 子ども自身が, 一定の関係をもっている対象の三つのパラメーターを抽出できるようになる, ということにある。子供は物理的対象をつかつてこれらのパラメーターの抽出の方法を習得し, この関係を記述する記号($<$, $>$, $=$)を習得するようになる。一連の中間段階を介して児童は特殊な数学的「対象」を構成し, その性質の学習へと進むのである(この対象とは, 抽象的に表わされた等一不等関係である。)

§ 3 等式, 不等式の性質(10授業)

1. 等式の対称律, 反射律。
 $A=B$ ならば $B=A$, $A=A$
2. 不等式では, 右辺と左辺をとりかえると, 不等号の向きが変わること。
 $A>B$ ならば $B<A$ など。
3. 等式, 不等式の性質としての推移律。
 $A=B$, $B=B$ なら $A=B$, $A>B$, $B>B$ なら $A>B$ $A<B$, $B<B$ なら $A<B$
4. 教具を用いた学習から, 文字式だけの等一不等関係の学習への移行, 上記の等式, 不等式の性質の知識を必要とするさまざまな課題の解決(たとえば「 $A>B$ で $B=C$ ということがわかっています。 A と C の関係はどうなりますか」といったタイプの課題の解決)。

§ 3の目的は, 等一不等の表現の一定の体系内で量の本来的な性質を知ることにある。この場合児童は関係を物的教具でみつけることからはなれ, 言語的—論理的次元へ移行していく(「もし, …で, かつ…ならば, …である」)。

§ 4 加法と減法の操作(10授業)

1. あるパラメーター(重さ, 長さ, 体積など)についての物の変化の観察, 増減を+, -の記号で表わす(「プラス」「マイナス」の用語)。
2. 右(または左)辺に変化をくわえて, まえにつくった等式をくずす, 等式から不等式への移行(この移行と加法の性質としての単調性が関係づけられる)。
 $A=B$ ならば $A+K>B$, $A=B$ ならば $A-K<B$,
3. 新しい等式への移行の方法(「差に等しいもの」を加えると等しくなるとの原則を用いた不等式から等式への移行)。次のような式の学習。
 $A=B$ なら $A+K>B$ しかし, $A+K=B+K$
4. 等式から不等式へ, 不等式から等式への移行のとき, 加法, 減法の操作の適用を必要とするさまざまな課題の解決。

§ 4の目的をダヴィドフは次のように説明している, 「児童は, 量の具体的な値の変化をみつけ, 新しい値と古い値を比較し, この比較の結果を『増加』と『減少』として意味づけ, それらを『+』と『-』の記号で記述し, 等一不等の性質と結びつけ, 加法と減法の操作によって等から不等へ, 不等から等へと移行することを学習する」。

§ 5 加法（減法）の操作によって $A < B$ タイプの不等式を等式に移行させること。（25～30授業）

1. このような移行を求める課題の解決。比較する2つの物の量の差の値をきめる必要性，この差の値が未知のときにも， X （「エックス」）を使って等式を表わせること， X の使い方。³⁾

次のタイプの式をかく。

$$A < B \text{なら } A + X = B, A > B \text{なら } A - X = B$$

2. X の値の決定，この値を式に代入する。カッコの学習，次のタイプの式を書く。

$$A < B$$

$$A + X = B$$

$$X = B - A$$

$$A + (B - A) = B$$

3. 上のような操作を必要とする文章題の解決

§ 5では，量の不等はそれらの差である具体的な値の規定によって止場される，という状況の解決へとみちびく。これはもっとも単純な方程式である。加法の操作と減法の操作の結びつきについても認識が深められる。

§ 6 等式，不等式の加減，代入（授業数不明）⁴⁾

1. 等式，不等式の加法と減法

$$A = B \text{で } M = D \text{なら } A + M = B + D$$

$$A > B \text{で } K > E \text{なら } A + K > B + E$$

$$A > B \text{で } B = \Gamma \text{なら } A \pm B > B \pm \Gamma$$

2. 量の値をいくつかの値の和でおきかえること，次のタイプのおきかえ。

$$A = B$$

$$B = E + K + M$$

$$A = E + K + M$$

3. 上のような操作を必要とする文章題の解決。

§ 6では，§ 5までのものを総合し，量の具体的な値を若干の加算の和によってかえることの可能性，量の表現形式の他の形式への交替の可能性などが解明される。このことによって加法の交換法則と結合法則の学習のための前提がつくり出されるのである。

第2節 授業過程と若干の問題点

これまでは「量概念導入のプログラム」とそれぞれのセクションの目的について書いてきた。次に授業過程について述べよう。授業過程については，駒林邦男氏による詳しい報告⁵⁾がなされているので，ここでは重要と思われる部分 i) 等号，不等号の導入，ii) 文字と文字式の導入，iii) 「+」「-」の導入，iv) X の導入とその解法，について述べるにとどめよう。

i) 等号，不等号の導入

等号，不等号の導入は，§ 2，2で行なわれる。＜よりおい＞＜よりすくない＞という用語が導入されたあと，等号，不等号が教えられる（「＝」「≠」「＞」「＜」）。ある徴表（重さ，長さ，体積など）によって対象を比較すると，それは，ひとしいかひとしくないかである，これは特殊な記号「＝」，「≠」によって記述することができる，といって等号が導入される。しかし，あとの記号は正確にすることができる，ある対象が他より＜よりすくない＞か＜よりおい＞かのいずれかである，それにはそれ自身の記号がある，これ「＜」とこれ「＞」である，といって，不等号が導入される。

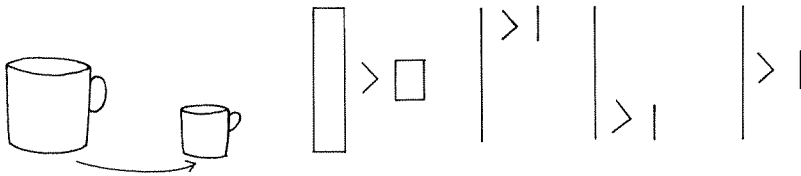
そのあと、児童は、比較の結果をこれらの記号によってすべて記述することができることを学ぶ。またこれらと同時に、「左から右へ」という規則も教えられる。たとえば、これはこれよりすくない、というときには、左から右へむかって規定しなければならないというものである。以上が、等号、不等号の導入である。

ii) 文字と文字式の導入。

文字式による関係の表示は二つの中間段階を介して行なわれる。第一の段階は、絵をえがいて比較結果をあらわす段階である（等号、不等号もかきこむ）。



第二の段階は、比較結果を線分で表わす段階である（線分のバリエーションとして正方形小丸なども使われる）。



第1段階から第2段階への移行は、重さの比較、音の大きさの比較ではこの結果を絵であらわすことはできない、絵ではあらわさず、線分であらわそう、ということからこの移行はなされる。次に絵や線分の代わりに文字が使われ、文字式による関係の表現が導入される。文字の使用の説明は次のようになされる。同じ徴表（たとえば、重さとか、長さ）の比較結果をさまざまなしるし（線分とか小丸とか正方形）によってあらわすことができること、さらに、これらのしるしは、所与の対象の重さ、体積などが他の対象の重さ、体積などと比較していかなるものかを述べていること、これらを思い出させたあと、教師は、しるしの選択は自由なのでいろいろな子どもたちでいろいろなしるしがとられている（あるものは線分を、他のものは小丸を）、それはよいのだが、みんなが同じしるしを使った方がもっとよい——このようなしるしとして人々は文字を見つけ出したのです、と文字の使用を説明する。次に、分銅とレンガの重さの比較を例にして文字式が導入される。これは次のようになされる。分銅とレンガの重さを較べよう、分銅の重さはAの文字で、レンガの重さはBであらわすことにします、といって、黒板に「A……B」とかく。しかし、AとBの2つの文字は同じ大きさです、この点で他のしるし、たとえば、小丸、正方形などとはちがっていますね、さて、考えてみましょう、「分銅の重さがレンガの重さよりおおきい、ということがわかっているなら、この記述（「A……B」）をどうよんだらいいだろうか」「分銅の重さAはレンガの重さBよりおおきい」、そこで、「よりおおきい」という記号がぬけていることを確かめてから「……」の所に「>」をいれる（ $A > B$ ）。再び、この記述を読ませる「分銅の重さAはレンガの重さBよりおおきい」。

次に分銅とレンガを取り替え、レンガの方を重くする。 $A < B$ の式が作られ、意味を児童が説明する。

次に同じ対象であるが他のパラメーター（体積）によって比較がなされる。このとき、分銅の体積Aはレンガの体積Bより小さい（ $A < B$ ）。

何回かの授業で同じような作業がわずかの文字（A, B, B, D）をつかって新しいパラメーター（音の大きさと長さ、図形の面積など）について行なわれる。最後に、比較の結果は $A = B$ か $A >$

Bが $A < B$ かのどれかの1つで表わされることを遊びをもちいた課題でみちびかれる。

このようにして文字式による関係の表現の指導は終る。

iii) 「+」「-」の導入

「+（プラス）」「-（マイナス）」の記号は§ 4, 1で導入される。まず、第一段階で何らかのパラメーターで対象の変化が示される。器の水のかさをかえたり、レンガの重さをかえたり、生活経験を例にしながら、「これだけであったものが、これだけになった」という変化がみちびかれる。この時、変化には二つの方向がある——増加と減少——ということを児童に理解させる。次の段階はこの変化の記述である。

二つの同型同大のビーカーの中の水の体積を比較し、 $A = B$ を書く、そのあといくらかの水を左のビーカー（A）に注ぎ入れ、新しい体積をBと表示する、そのあと $B > B$ という記述を行なう。どうしてこのような新しい体積になったか、AにどのようなことをしたのでBになったのか、Aにしたことをどのように書いたらよいか、と質問する、児童は、Aにいくらかの水を加えてBがえられたと述べる。教師に助けられて、 $A + K = B$ の式をつくり、「+」の記号と「K」の意味をはっきりさせる（加えられた水の量がわかっていてKと表示する）。このようにして「+」が導入される。「-」も同じようにして導入される。ここでは「+」が添加の加法に、「-」が除去の減法になっていることに注意しよう。

iv) Xの導入とその解法

Xの導入は§ 5, 1で行なわれる。対象をあるパラメーターによって比較し、えられた結果を不等式 $A < B$ で記述したあと、この式を等式にかえる課題が提起される、児童はBをへらすか、Aをふやすかする。これにつづいて次のような式が板書される。

$$A < B, A + \cdots = B, A = B - \cdots$$

これらの式は2つのコップの水を使って次のように説明される、点（ $\cdots$ ）のところは何かをたしたかひいたかして等式に変えたことを示している、何かをAかBにしなくてはならないことはわかっているから、この「必要なこと」をまゑもって書いておくことはできる、だが、この「何か」が「どれだけ」かはまだわかっていない。（ $A < B, A + \cdots = B, A = B - \cdots$ ）といった式を再び板書しながら、我々は「増加」または「減少」を予想しているだけである。そこで、この式の「わかっていないもの」を表示するために「X（エックス）」という記号を使うことにする。このような説明のあと、次のような式がみちびかれる。

$$A + X = B, A = B - X$$

このようにしてXの導入が行なわれる。子どもはすぐに「X」を理解した。すでにこのテーマiv)の第1回目の授業で、「任意」の重さ、「任意」の体積をふやしたり、へらしたりすることはできない、未知量ではあるがAとBとの差でなければならないと説明した。

次にこの差をみつけることからXの解法がみちびかれる。これにはいくつかの段階があった。まず、最初に教具をつかってこの「差」をみつけることが教えられる（たりない水を注いだり、おおい分だけ水を除いたり）。それと並行してこれらの過程と結果を文字形式で記述することが教えられる。最終的には次のような式体系がつけられた。

$$A < B \quad (\text{最初の条件})$$

$$A + X = B \quad (\text{計画的な変換})$$

$$X = B - A \quad (\text{差を探す})$$

$$A + (B - A) = B \quad (\text{事実上の相等化})$$

次の段階で式自身の次元で方程式の解法がみちびかれた。これは文章題の解決の過程で行なわれ、線分図によるXの探さくの作業がみちびかれた。同じようにして他の課題がとかれる。この課題の解決のなかでははじめは式による解法が対象的行為に並行して進められていたが、描写の次元に移り、だんだんと意味的にも順序の上でも独立したものとなり、最終的には不等式の両辺の関係の理論的考察によってXを求めるようになる。

$$\begin{array}{ll} H > \Pi & \Gamma < B \\ H = \Pi + X & \Gamma = B - X \\ X = H - \Pi & X = B - \Gamma \\ H = \Pi + (H - \Pi) & \Gamma = B - (B - \Gamma) \end{array}$$

(1年生のミーシャのノートから)

これがXの解法である。ここでは、第一にXは未知数ではなく、未知量である。第二にXの解法は式変換によって行なわれていない、児童は頭の中で(最初は物的行為で)Xを求めているので、不等式の両辺をながめて $A < B$ なら $X = B - A$ 、 $A > B$ なら $X = A - B$ としている。したがって、方程式を立てたあと($A > B$ なら $A - X = B$)、最初の式にもどることが指摘されているが、当然のことである。

以上でこの実験プログラムのなかで重要と思われる概念についての導入をみてきた。最初に、全体的なことについて若干の疑問を提起しておこう。

ダヴィドフは、彼の一般化論にもとづいて量の一般的性格の学習を初等数学の最初の部門として新入生に教えるのであるが、果してこのような方法で児童の豊かな量概念を形成することが可能であろうか。確かに、このプログラムは10年間の実践を経ているし、プログラムで目標とされるものは子どもも理解できるであろうと思われるが、しかし、これで量概念が成立したとは思えない。むしろ、その前提として量を実在から抽象する過程自体が厳密に指導され⁶⁾、そのような量概念を前提にしてしか一般的定式化は不可能ではなからうか(コルモゴロフも述べているように歴史がそのことを証明している)。

<注>

1) 1960/61年度 of プログラムは次のようになっている。

§ 1 量の比較

1. 長さ、体積、重さ、組成(СОСТАВ)などに関して、事物を実際に等しくしたり、セットにしたりする。
 - a) セットのなかから、指示された長さ(体積、重さ)と「同じもの」(見本を示す)をえらばせる。
 - b) 指示されたものと「同じもの」をそろえさせる(鉛筆6本をセットにして箱に入れたり、2本のスキーでセットにする、など)。
2. 長さ、体積、重さ、組成などに関して事物を比較させ、その結果を文字で表わす。
 - a) 実際の比較を通して「おいしい」「すくない」「ひとしい」の関係を明らかにする。
 - b) 最初は記号だけを使って比較の結果を書く(=, >, <)。このばあい、事物は表示されない。次に記号と、比較されている事物の絵をつかって、最後には記号と文字を使って、比較の結果表示する。 $(A = B, A > B, A < B)$ 。文字はロシア文字が使われる。次のようなタイプの課題が出される。「これらの物(計算棒、小立方体、荷物など)を長さ(体積、重さなど)でくらべてみなさい。わかったことを式で書きなさい」。
3. 式から内部の等一不等関係を取り出す。 $(A = B \text{ なら } B = A, A > B \text{ なら } B < A \text{ など})$

§ 2 等式の破壊と保存。加法と減法の導入。

1. 増－減による等式の破壊。

$$\begin{array}{cccc} A = B & A = B & A = B & A = B \\ A + e > B & A < B + e & A - e < B & A > B - e \end{array}$$

2. 適当な「均衡化」による等式の保存。

$$\begin{array}{ccc} A = B & A = B & \\ (A + e > B) & A < B + e & \\ A + e = B + e & A - e = B - e & \text{など} \end{array}$$

3. 上のような関係をふくんだ応用問題の解決。

§ 3 等式に変えること。

1. $A < B$ $A > B$

$$A + e = B \quad A - e = B$$

$$A = B - e \quad A = B + e$$

(e は A と B の差)

2. $A + e = B$ $A - e = B$

$$A < B \quad A > B$$

3. 上のことに対応する応用問題の解決（たとえば、「このカゴには、リンゴ A がはいっています。こちらにはリンゴ B がはいっています。 A の方が B の方よりたくさんです。一方のカゴのリンゴがこのカゴのリンゴと同じになるにはどうしたらいいですか、式で書きなさい）。

§ 4 構造等式の要素間の関係。

$$A + e = B$$

$$A - e = B$$

$$A < B \text{ (} e \text{ だけ)} \quad A > B \text{ (} e \text{ だけ)}$$

$$A = B - e$$

$$A = B + e$$

$$e = B - A$$

$$e = A - B$$

以上の4テーマの基本目的は数学的な等－不等の関係の概念、また増－減によるこれらの関係の相互移行の概念を児童に与えることである。これらのあとに数の学習がはじまる。

ダヴィドフ「初等学校における代数の初歩の導入の試み」『ソビエト教育学』1962, No. 8

駒林邦男訳「1年生から代数の初歩を」『ソビエト教育科学』No. 8

2) ダヴィドフ他著「知識習得の年令的可能性」(1966) から引用した。

なお、駒林邦男「小学校数学『代数化』の実験的試み<1>～<4>」『算数教育』を参照。

3) 60/61年度のプロプログラムでは、 X は1年後期で数の導入のあとで指導されていた。

4) このプログラムでは次の§ は数を知ってから、1年後期で指導されていたが、新しいプログラム(1972年)では§ 6の次に加えられている。

§ 7 加法の交換法則と結合法則。

$$a + b = b + a$$

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

5) <注>2) を参照。

6) 須田勝彦「『授業書』構成の論理」北海道教育学会第17回大会レジメ, P. 14

第3章 数概念の導入（第1学年後期）

この章では数概念指導の実験プログラムについて述べよう。

第1節 ダヴィドフの数概念

この実験プログラムの作成にあたってその基底となる「数」概念についてダヴィドフの見解をみ

ておこう。¹⁾。彼によると「数は、量関係を表現する特殊な場合、個別の場合である」として把握され、「次の一般公式で求められる」とされる。

$$n = \frac{A}{C}$$

n = 任意の数

A = 量としてあらわされた任意の物理的対象

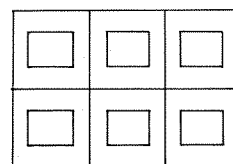
C = 任意の基礎 (単位)

この場合、 A に C が整数回含まれている時、自然数が、 A が C に共測な時、分数が、共測でない時、無理数がそれぞれ生じる。今後自然数についてだけ問題にしよう。

この式から彼は次の二点を重要な学習内容として抽出する。

- i) 数を、単位とみなされる量にたいする、考えている量 (測定対象) の比 (関係) として認識させる。
- ii) 同じ物理的物体に関連する数も、単位のとり方によって変わるものである。量 (測定対象) — 単位 — 数の三者関係を理解させる。

特に、このような「数」の規定をとる理由として次のことがあげられる。第一に、自然数から実数へ移行する過程を一貫させるべく一般的な定義を採用する。そのことによって生徒たちが経験している整数と分数の結びつきの困難さを克服することができる。第二に、通常のプログラムでは、子どもたちにとって「数は物理的に分離した対象の具体的セットに強く結びついたものになっている (例えば、5は直接に指示された、分離した対象のグループにすぎない) ……これらの子どもの場合、対象の直接的な特質からの抽象の発達が不十分なものとなっている」として、対象の分離性をもとに総和の数的特徴づけとしての数抽象を行なう方法を、抽象の感覚論的解釈にもとづいているとして排除される。これに対して、上記のような数の定義にもとづいて抽出された自然数と実数を生み出す共通な行為としての測定行為 (単位としてえられた量によって、測定対象としての量を測る行為) は、物を1つずつ数える勘定行為とはちがって、自然数と実数の間に溝をつくることはなく、その獲得は高度の一般化と抽象をもたらすことができる。なお、この測定行為が離散的な対象に適用されると次のようになる。たとえば右図において、単位として「長方形」をえらべば、数3が、「正方形」をえらべば、数6が、「水平線」をえらべば、数2がえられる。



以上が、数の定義として $n = \frac{A}{C}$ を採用した理由である。

第2節 実験プログラムとその指導過程

次に実験プログラムの概略を述べよう²⁾。実験授業は次の四つのテーマからなっている。

- § 1 Mepka³⁾の使用による計数 (2授業)。
- § 2 計数結果の表示手段としての数詞の導入 (9授業)。
- § 3 数値線、数の文字による表示、数系列の構成原理 (10授業)。
- § 4 測定対象と Mepka と数の関係の文字式による表示、この文字式に対応する文章題の解決、(11授業)。

§ 1 Mepka の使用による計数

この§1では、Mepkaの使用、すなわち、直接比較が不可能な対象の比較を Mepka (個別単位) を使って比較する、Mepka で測りとった結果を小立方体におきかえる、これらのことが行なわれる。

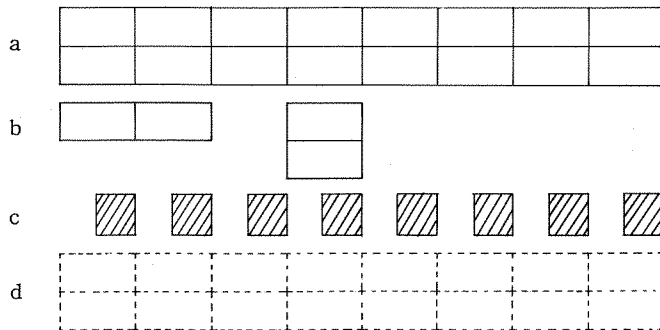
〔課題〕「廊下のパネルのなかで見本のパネルと長さが同じものを選びなさい，けれども見本のパネルをじかに廊下のパネルに合わせてはいけません。どうやったらいいでしょうか」「他方ワビーカーにあると同じだけの水をこのビーカーに入れなさい（ビーカーの大きさはことなる）」

誘導質問によって教師はこのような場合には Mepka を使って課題を解くことができることを子供に気づかせる。すなわち，見本のパネルと同じ長さのものをえらび，それを Mepka として使用し，廊下のパネルの中に Mepka と同じ長さのものをみつける，というように。

しかし，見本と同じ Mepka がなく，それより小さいものしかなかったとしよう。そうすると見本を1回測るごとに何かでしるしを付けなければ忘れてしまう。そこで，結果を小立方体におきかえることにしよう，といって小立方体を取り出す。1回 Mepka をあてると小立方体1ヶおく，5回で測りきると5ヶの小立方体がおかれることになる。小立方体の群があると同じだけ今度は廊下のパネルを測り同じものを選ばなければならない。このようにして測定結果を小立方体におきかえる学習は終る。

これらの作業のなかで児童は，測られる対象， Mepka ，測定結果を記録する手段（たとえば小立方体）を区別するようになる。

この§1では離散的な対象（小立方体，タイル）を測ることも行なわれる。この場合複合 Mepka が用いられる。（図参照）



a が，測られる対象。 b が複合 Mepka。

c は b で a を測った結果をタイルでおきかえたもの。

d は測られる対象を再現した対象。

§ 2 数詞の導入

この§2では，(i)数詞の導入，(ii)「1」の概念の意味の仕上げが行なわれる。まず，数詞の導入からのべよう。

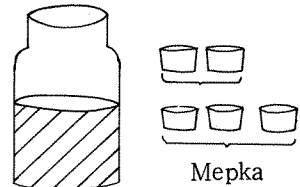
測定結果を小立方体で表わすにはかさばるし，持ちこたに不便だということから，＜1回（pa3）＞をつかおうと動機づける。＜pa3＞＜pa3＞……ではいくつ＜pa3＞があるかわからないので＜1回＞＜2回＞＜3回＞といおうと誘導する。＜回＞なしでのべることもできる，ただ，1，2，3……といおう，最後に唱えられる＜たとえば6＞が Mepka が対象にどれだけ含まれているかを示した数である，として数が導入される。一連の練習を行なうことで生徒たちは数詞の使用をすばやくマスターした。次のような課題にも正しく答えられた「あなたはこれらの小立方体をどのようにしてえたのですか，なぜこれらが5つとわかったのですか，これらの小立方体は何をかたっているのですか」。複合 Mepka と離散的な対象をつかって数唱の練習も行なわれた。「小立方体が16コ一列にならんでいる，Mepka として3コからなる小立方体がとられた，数はどうなるか」子供たち

は数5と残りと答えた。

次に「1」の概念の意味の仕上げが行なわれた。「1」とは Mepka に等しいものである。それと同時に、Mepka がかわれば「1」の内容も変わるということが教えられる。Mepka として $\square \rightarrow \square$ となれば、1の内容も $\longrightarrow \longrightarrow$ になることを言っている。(i)長さ、(ii)液量 (iii) Машиа というコトバを使って「1」の概念の意味の仕上げがなされる。

ii) の液量について具体例を示しておこう。

この場合の Mepka は2つあるいは3つのサカズキであった。児童は Mepka として2つのサカズキをとったときには1はこれ、別の Mepka (3つのサカズキ) のときには1はこれと Mepka のちがいによる1のちがいを区別することができた。

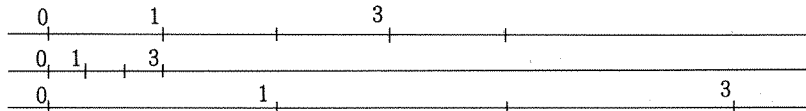


§ 3 数直線の導入

この§ 3 では、(i)線分上に数を表示する、ii)「前の数」「あとの数」の用語の意味、iii)数を文字で表示する、iv)数系列の構成原理 ($n \pm 1$ という原理による) の理解、ということが行なわれる。線分上での数の表示からはじめよう。

さまざまな対象の計数の過程で数を見つけることができた。そこでは数は一様であることがわかった。どんな場合でも5にいたるには1, 2, 3, 4, 5であるというように。教師は、これらの数がどこに「住む」ことができるか、これらの数そのものがどのように組み立てられているか、どのようにある数から別の数に到達することができるかを児童に説明した。子どもたちは数を線上に配置できることを学んだ。このためには規則にしたがう必要がある。線分上で「1」は1 Step であり任意にえらばれるが、2は任意に目もつことはできない。「数の2は線の上のどこにありますか」。——教師はわざと「2」に合わないところに点をうつ、多くの児童は「1までと同じところに点をうたなくてはなりません」と指摘する。3, 4, 5についても正しく線分上に点をうつ。「5の数の点をうつためには4の数の点からどれだけはなさねばならないか」と質問した。Боря. К「0から1まであるいは1から2までと同じだけ」と正しく答えた。

線分上に点で数を表示する規則を定式化したあと、児童は右に限りなく進めることを理解した(どんな数でも、26も、100も100万も)。このあと練習が行なわれた。ここでは、いろいろなものをある Mepka で測って同じ数(たとえば、3)がえられるが、線分上では $<1>$ のとり方によって多様に示すことができるということが示された。(図参照)

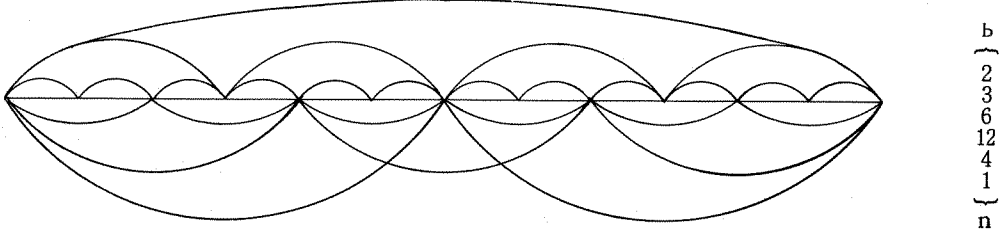


このあとの授業で数は小さければ0に近く、大きければ0からはなれる、ということが確認された。

この§ 3 の第2の段階で「まえの数」「あとの数」の用語の意味が教えられる「列になっている任意の数を直線上にめもり、どれが「まえ」でどれが「あと」かを規定したあと、「あとの数」は所与の数より1大きく、「あとの数」をえようとすると所与の数に1を加えなければならないということがみちびかれた。

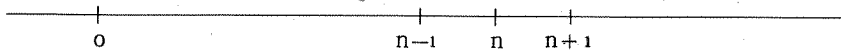
次の段階では、数を文字で表示することが教えられた。数軸上の同じ点にさまざまな数を記すことができる。Step を変えればこの数を他の数に変えることができる。児童は数師の指示によって Step をいろいろにとった場合の数の違いを導いた。1 Step にノートのマス4つぶんだったときの数3

の占める場所は，1 Step にノートのマスメ 2 つぶんとったときには数 6 によって占められる，といったことを遂行した。このような作業の結果，同じ点にさまざまな数が記されているいくつかの数軸がえられた。これを基にしてこれらの数を文字によって替えることができる。この文字は任意の数である。もし，線分上に点をうち文字で表示したら，ここにはどのような数をおいてもよいこと，どのように数をおくかはステップに依存していることが導かれた。（図参照）



このような文字表示の移行は児童にとって特に困難でなかった。かれらは文字をさまざまな数に変える逆の練習も行なうことができた。（ステップを変えると点 A が 1，2，4 などに等しくなることをみつけるのである）。

次の段階では文字記号を使って「まえの数」「あとの数」を規定する課題が出された。「『あとの数』をうるためには数 n に何をしなければならぬか」大多数の児童は「 n に 1 を加えればよい」と正答する，しかし，何人かの児童はどうやってよいかわからない。このような児童には個別課題が出され，そのあとすべての児童が数 n の「まえの数」「あとの数」の作り方を理解した。（図参照）



次に隣接する数の間の差は 1 にひとしい。与えられた数に隣接する 2 つの新しい数をうるには，線上に左右に 1 つずつステップをとればよい。すなわち，1 を加えるか，あるいは 1 をひけばよいというようにして数系列形成の一般原理が教えられた。たとえば，線分に 4 の点があたれる。それより 1 だけ大きい数を見つけ，さらに数形成のための式をかく課題が出された。

$$5 = (4 + 1) \quad 6 = \{(4 + 1) + 1\}$$

同じようなやり方で 7，8，9，10 のための点が探し出された。

§ 4 量，Mepka，数の三者の相互関係

この § 4 では，量，Mepka，数の間の相互関係の習得がなされる。i) 同じ物でことなる Mepka の時の数の関係，ii) 同じ物でことなる数の時の Mepka の関係，iii) 同じ Mepka でことなる数の時の物の関係，iv) 数が同じで Mepka がことなる時の物の関係，といった関係を物への依存なしに知的平面で式をつかって行なわれた。

例えば ii) の例， $A_k = 7$ $\left\{ \begin{array}{l} A_k = 7 \text{ は } A \text{ を Mepka } k \text{ で測ると } 7 \text{ がえられるということ} \\ A_r = 12 \text{ とを表わしている。} \end{array} \right.$

$k \cdots r$

……の中はどういう関係になるか（<か，>か）

以下はこの問題の解決の教師と生徒との問答である。

教師「この式で同じものは」— 生徒「測られる対象です」— 教師「ちがうものは」— 生徒「数と Mapka です」— 教師「同じ対象でちがった数がえられたら，Mapka はどうですか」— 生徒

「それらはちがいます」——教師「Mepka をくらべなさい。— 必要な記号を書きなさい」——生徒たちは $k > r$ と書く。

以上が、ダヴィドフの「量関係の学習にもとづく数概念形成」の実験授業の概略である。このあと § 5 として数の加法と減法が続くが詳しい授業経過は報告されていない。

第3節 若干の疑問点

ここで若干の疑問点を述べておこう。

第一に数の定義についてである。数の定義は「単位とみなされる量にたいする、考えている量の比」(スミルノフ)として行なわれている。数を「分離量」から抽出されたものとする考えはなく、しばしば授業の中で子供は対象の分離性に定位するのだが、それは生活経験への退行として排除されている。そこで量の違いが問題となっても、例えば「長さ」と「重さ」が違ふと同じ程度に「分離量」と「長さ」も違ふといった量の種類の違いでしかなく、分離的な対象が問題となってもそれは1つの教材として提示されるにすぎない。なるほど、数(実数)の一般理論の導出のためにはこのような定義が可能であるとしても、自然数概念の歴史的発生からすると対象の分離性にもとづく集合の濃度としての自然数概念の規定の方がよりその実態に則しているのではあるまいか。

第二に、数を大きさとして把握するのが弱い点について述べよう。§ 1 で測定対象を単位で測り小立方体でおきかえたのが、そのあと § 2 で物的次元から言語的次元へ移り、数が導入されるが、「最後にとなえた数が Mepka が対象にどれだけ含まれているかを示している」という程度で集合の大きさといった明確な規定はない。そのあと「1」の概念の正確化が導かれ、すぐ、数は系列をなしているという説明があり、数直線への表示が行なわれる。数直線上での表示の位置の任意性から一般化し数を n で代表し、新しい数を $n \pm 1$ であらわせるという数の構成原理があらわれる。実は、これはペアノの公理であり、その教材化である。それとのちがいはペアノの公理では「1」はアприオリに規定されているが、ここでは量の測定で「1」を規定しているというところにあるにすぎない(「1」の指導がなぜ強調されているかも理解できる)。このことからこの指導では数を大きさとして把握の側面(集合数)がほとんど無視されているといえる。なお、この指導で、測定対象を単位で測り、タイルでおきかえ(物的次元)、タイルの集合から数を導出し、集合数から順序数へという他の方法も考えられることをつけ加えておこう。

<注>

- 1) これを書くにあたって次のものを参考にした。

B. B. ダヴィドフ、天野清訳「心理的なものの『形成』と『発達』の両概念の相互関係」『現代教育科学』No 130, 明治図書

B. B. ダヴィドフ「初等学校における代数の初歩の導入の試み」『ソビエト教育学』1962, No 8

駒林邦男訳「1年生から代数の初歩を」『ソビエト教育科学』No 8

Г. И. ミンスカヤ「量関係の学習にもとづく数概念の形成」『知識習得の年令的可能性』1966

- 2) 次のものから引用した。

Г. И. ミンスカヤ「量関係の学習にもとづく数概念の形成」『知識習得の年令的可能性』1966, この実験はトゥーラ市第11番学校の第1学年の実験学級で1962/63年度に行なわれたものである。

駒林邦男「小学校数学『代数化』の実験的試み<5>〜<6>」『算数教育』を参照。

- 3) メールカ, Measure のこと。

第4章 分数概念の導入（第3学年後期）

第1節 ダヴィドフの分数概念と実験プログラムの大要

ここでは，分数概念の導入のプログラムを検討しよう。分数は量の測定の中から抽出されてきたものである。ダヴィドフはコロモゴロフに依拠しながら次のように云う¹⁾。分数を自然数の「対」として定義することができるが，量の測定の見地からも分数を構成することができる。後者は前者に劣らず科学的である。さらに，前者にくらべて，教育上後者の方がすぐれている。第一に，この方法は数学の発展史に照応している，第二に，実数の導入を必然的なものとする状況をつくり出す，という理由からである。「量の測定は，歴史的にも，現代教育にも分数導入の価値ある，見通しのある基礎である。」このようにしてこのプログラムでは分数は量分数として導入される。

このプログラムでは次のようなテーマが指導の対象となっている²⁾。

- (1) 帯分数概念の認識
- (2) 帯分数と真分数の記述，それらの数軸上での表現。
- (3) 分数の基本性質
- (4) 分数の比較

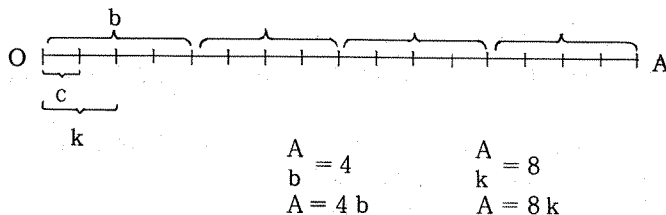
第2節 実験プログラムに基づく課題と授業過程

実験教育ではこれらのテーマを具体化した課題が作成される。次に，これらの課題と授業経過を述べることにしよう（各テーマの名前は筆者が便宜的につけたものである）。

§ 1. 単位で対象を測る。

〔課題〕①ビーカーの水をコップで測る。それを式であらわす ($\frac{A}{b} = 4$ ，Aをbで測ると4となる，という意味の表記)。②他のコップ（最初のコップより2倍小さい）で同じビーカーの水を測るそれを式であらわす ($\frac{A}{k} = 8$)

さらに，次の二点が生徒たちに問われた。①第2の数は第1の数よりなぜ大きくなったのか，何倍か，②数の大きさが2倍大きかったら，Mepka の関係はどうか。次に，二数が同じ量Aだが，ことになMepka で測られたということを考慮して数軸上に表現される。



〔課題〕最初のコップより4倍小さい Mepka が使われるとすると数はどうかわるか，新しい数を知るためには，すべての水を再び測らなければならないか，新しい数をどのように知ることができるか。

子供たちは先行の学習経験にもとづいて，特に乗法の意味の習得の経験³⁾にもとづいてこの問題に正答した。新しい数は水をはじめから測定しなくても求められる，数は何倍か大きくなる $4 \cdot 4 = 16$ ，

関係は $\frac{A}{C} = 16$, 数軸上にも記述された。

同じような作業が長さの測定, 重さの測定, 離散グループの計数に際して導かれた。この § 1 の目的となったのは, 量の関係の記述を自由に行なう能力を確実なものとするため, 及び, 同じ量が測定単位がことなればことなる数によって表わされるということの理解のためであった。この § 1 は I ~ III 学年の実験プログラムの反復である

§ 2 余りをあらわす (1)

〔課題〕①残余を OCT. のことばであらわす。 $\frac{A}{b} = 2 + \text{OCT.}$ 。あるいは $A = 2b + \text{OCT.}$

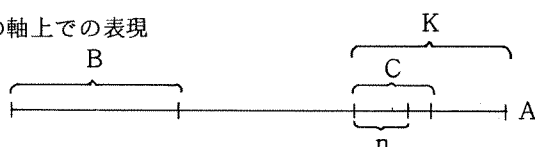
②残余を新しい Мерка で測る。もちろん, 最初の Мерка より小さい Мерка で, その記述は

$$A = 2B + 1k$$

$$A = 2B + 2c$$

$$A = 2B + 3n \text{ 等のような形となる。}$$

③結果の軸上での表現



$$A = 2B + 1k = 2B + 2c = 2B + 3n$$

この § 2 の目的は, 新しい単位によって残余も数で表現できることをデモンストレートすることにある。いまのところ, 新しい単位は任意であり, 古い単位との関係は未確定である。

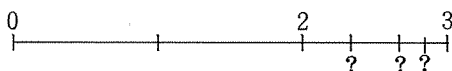
§ 3 余りをあらわす (2)

① $\frac{B}{k} \approx 2$ $\frac{B}{k} \approx 3$ の表記の仕方

残余がでた場合, えられた整数は与えられた量と Мерка の関係を近似的にあらわしたものである。

②残余を記述すると, これは $\frac{B}{k} = 2 + \text{OCT.}$ $\frac{B}{k} = 3 \dots$ とも書くことができる。……のところになんが入らねばならないか, ($k - \text{OCT.}$)

③ B と k の関係の真の値が 2 と 3 の間のどこかにある。ここか, ここか (?) (下図参照)



既知の数列の数ではあわせえない, それは不等式でしかあわせえないのか, という教師の間に対して子供たちは「新しい Мерка で表わせばよい」と § 2 の経験から出発して答える。教師「相互に無関係なことになる二つの単位があっては不便である。二つの Мерка を結びつけることはできないか, 古い Мерка を介して新しい Мерка を表わせないか」と問い直す。残余を古い Мерка を介して表わすということも重要であるという考えにみちびく。

§ 4 分数とは

生活経験の中で使われている「半分 (половина)」とか, 「4 分の 1 (четвертушка)」などは古い Мерка をもとにして使っていることを確認し, このことから出発して「2 分の 1 (одна вторая)」 「4 分の 1 (одна четвертая)」など数字で使われている意味と用語へみちびく。「半分」とは全体をひとしく半分に分けた一つぶん, 「4 等分の 1」とは全体を 4 つに等分した一つぶん ($\frac{1}{2}$ 半分, $\frac{1}{4}$ 4 分の 1) という定義が与えられ, 「等」とって, それぞれ「2 分の 1」「4 分の 1」「3 分の 1」「5 分の 1」と簡単によんでもよいことが説明される。

〔課題〕①「3 分の 1」を図にあらわす練習, 「4 分の 1」が与えられ, それである全体を再現する練

習。

②いろいろな材料をつかって「2分の1」「5分の1」等を求める課題（たとえば，200 g の分銅が5つある。「5分の1」kg は？）

§ 5 余りをあらわす(3)

再び § 3 の課題へもどる。〔課題1〕 「測定にあたってえられた残余はどうあらわせるか。」

定式がえすると，古い Mepka と関係した新しい Mepka の表現である。

残余を古い Mepka であらわそうということから分数の発生と表現がある。ダヴィドフは分数の定義を「等しくわけた……分」というように定義していることから考えて，古い Mepka の何等分かのいくつ分が残余と等しいという導き方が予想されるが，そうなると残余と古い Mepka をはかりきる新しい Mepka をどう発見するかが問題となつてこよう。少し長くなるが，その点は重要だと思われるので引用しておこう。操作がしやすいことから紙テープがつかわれる。

長さの測定にあたって ($\frac{A}{K} = 2 + 0 \text{ CT.}$) 古い Mepka は全体としてとられる。教師は示す—— k も残余も何回かで測りとり Mepka を採用しなければならない（故意に残余が k の3分の1に等しい場合がとられる）。教師「私は Mepka をとろう，ほら，こういうの，あなたたちもとりなさい，これを c と表示しよう，これは我々の Mepka に何回入るかな，ぴったり3回だ。もし， k を全体とするならばこの Mepka は何にひとしいでしょうか——「 k の3分の1」——「こんどは新しい Mepka——我々の Mepka c ——は残りに何回入るかな」「1回だ」と児童は答える。このあと，教師は2つの結果を統一的に結びつける，教師「だから我々の Mepka c は古い Mepka k の3分の1だ， K のこの3分の1は残余に等しい」といって，残余が Mepka k の3分の1になることを見出す。

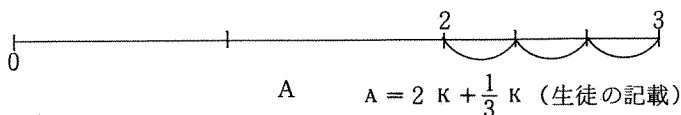
以前にも述べたが，新しい Mepka c の発見がこの指導の要になるが，この引用からもわかるように，教師によってはじめから準備されており，不自然さをまねがれない。自然さを取り戻そうとするとたまたまぴったりあったとでもしなければならぬ。しかしこれも無限に操作しなければならぬ場合もあるわけで不自然さをまねがれないだろう⁴⁾。

次に $\text{остаток} = \frac{1}{3}K$ という表記がなされ，測定結果は $\frac{A}{K} = 2 + \frac{1}{3}$ となるとされる。さらに， $A = 2K + \frac{1}{3}K$ ，加数をさしながら，ここも，ここも同じ Mepka です，新しい Mepka c は古い Mepka を介してあらわされています，といって $c = \frac{1}{3}K$ と記載される。

ここでは四つの記載が述べられているが，それぞれが無媒介な形で導入されているうえに，それぞれの記載の意味が述べられていないので，その必然性が子どもに理解できないで終るのではないかという疑問が残る。

〔課題2〕 $2 + \frac{1}{3}$ を軸上に目もる。

A は2と K の3分の1です。 K と2はこの点， K の3はこの点です。われわれの値はこれら2点の間のどこかにあります。その値の点を見つけなさい。



生徒は自分自身で必要な点を規定した。このあと， $a + a = 2a$ ， $k + 2k = 3k$ などの記法の類推から，和の記法の短縮型として $2k + \frac{1}{3}k = 2\frac{1}{3}k$ 又は $\frac{A}{K} = 2\frac{1}{3}$ が導入される。

〔課題3〕いろいろな練習問題。

i) 水の体積を測り，残余を $\frac{1}{2}$ で表わす。

ii) テープの長さを測り、残余を $\frac{2}{3}$ で表わす。ここでは $\frac{1}{3}$ が2つぶんを $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$ あるいは $\frac{2}{3}$ とも書けるとして $\frac{2}{3}$ が導かれている。

ii) の解決過程——生徒「残余には3分の1が2回あります」, 教師「そうです, この結果をつぎのように書きます, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3}$, しかし, 次のようにも書けます, $\frac{2}{3}$ 」。

〔課題2〕では分数を数直線上に表わすことが, 〔課題3〕では新しい分数($\frac{1}{2}$ とか $\frac{2}{3}$ とか)を見つげ出すことが課題となっているが, 他方で $2k + \frac{1}{3}k = 2\frac{1}{3}k$, $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ などの指導がなされている。後者の場合, $a + a = 2a$, $k + 2k = 3k$ などの類推から分数のたし算をみちびいているが, 整数同士の加法にくらべて整数と分数の加法には一段と困難度は高いのではあるまいか。さらに $\frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ とも書けるとしてみちびいているが, これなどその内容をとわず全く天下り的である。

〔課題4〕 $\frac{1}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{3}{10}$ 等々の分数を必要とする課題とそれらの数軸上での表現。

〔課題5〕整数と比較して新しい数形式の独自性の理解, さらに「分子」「分母」ということばの導入。

§ 6 Mepka をすばやく見つける⁵⁾

この§ 6の目的は, Mepkaの間の関係をすばやく正確にみつめる能力の形成とそれを介して残余を表現する能力の形成にある。§ 5のところでものべたが, この指導では, 新しいMepkaの発見は偶然にか無限の操作(こんなことは不可能なのだが)を繰り返さなければならなくなったりするのだが, それを避けるための工夫である。

〔課題1〕Mepka n によって (Mepka は12の目もりに等しい) ある対象の長さを測ると数 k と残余ができました (残りは8の目もりに等しかった), 帯分数の分数部分はいくらになるでしょう。

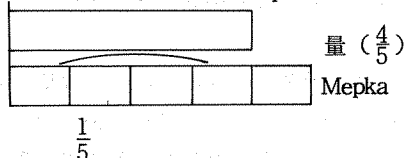
(格子目のついたノートか1mm方眼紙を使用する)

この過程の中で, 同じ残余もちがった分数であらわされる。Mepka のちがいによる数の変化の関係の把握も行なわれた「 $\frac{8}{12}n = \frac{4}{6}n = \frac{2}{3}n$, このちがいの原因は」といった課題。

〔課題2〕(目もり8にひとしい Mepka を示しながら) Mepka d によってテープの長さを測定すると整数15と, この Mepka の4分の3にひとしい残りがえられた。この残りを描きなさい。

この課題の目的は, 分数の値に対応した残余を描くことにあった。さらに, $\frac{1}{4}d$, $\frac{1}{2}d$, $\frac{4}{4}d$ などの残余を描かねばならなかった。後者の場合, 単位($\frac{4}{4} = 1$)になることが解明される。

〔課題3〕対象より大きい Mepka で対象を測る。



§ 7 分数の比較 (1)

〔課題1〕 $3\frac{1}{5}$ と $4\frac{1}{3}$ とはどちらが大きい, $15\frac{8}{9}$ と $12\frac{1}{2}$ とでは。

(整数の大小でみわける)

〔課題2〕 $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{10}$ と $\frac{1}{100}$ とではどちらが大きい。

(分母の小さいものは分数は大きい)

このような練習にもとづいて生徒たちの多くは $\frac{1}{5}$ と $\frac{2}{3}$ のような分数も自主的に比較することができるようになった。

§ 8 分数の性質

分数の分子と分母がともに何倍ふえても、あるいは減じても分数の大きさは変わらない、という性質の指導にあった。1 mm 方眼紙をつかいながら、新しい Mepka を 2 倍、3 倍、4 倍と小さくするとそれに応じて分母と分子が増加するという状況、逆に新しい Mepka を大きくすると分子と分母は減少するという状況を介して、分数の分子、分母がともに何倍ふえても、それは Mepka のとりかたのちがいによるのであって、分数のあらわしている量（大きさ）は不変であることがみちびかれた。子供の中に倍数を分子かあるいは分母にだけしか掛けないという特徴的な誤りをする子供がいたことが指摘されている。

§ 9 分数の比較(2)

〔課題〕 $\frac{3}{4}$ と $\frac{7}{8}$ とはどちらが大きい。

直接比較ができないことから、分母を等しくすれば比較できることを教師から教えらる。4 を 2 倍すれば分母は同じになる、§ 8 の指導から分子も 2 倍しなければならない、このようにして分母を共通にして分子で比較することからこの種の問題に答えることができる、ということを認識するようになる。時期をおいて最小公倍数の求め方も指導されたが、これは IV 学年のテーマであった。

§ 7 の〔課題 1〕では整数部分の比較による分数の大小が、〔課題 2〕では分子が 1 で分母のことなる分数の比較が要求されている。§ 9 では分子も分母もことなり直接比較が不可能な場合の分数の比較である。ここでは直接比較から間接比較へという原理が採用されているが、果たしてこのことは必要なのだろうか。〔課題 1〕はともかくとして〔課題 2〕は直接比較としてではなく、分母の異なるものの系として一つの練習問題として位置づけるのが望ましい。従って、まず分母が同じで分子の異なるもの → 分母のことなるものへという原理で課題を構成すべきであろう。そうすれば分母の異なるものの分数の大小比較では教師によって「分母をそろえなさい」と説明される必要がなく、分母が同じ時比較できたのだから分母がちがう場合には分母をそろえればよいのだということに自発的に気づくようになるであろう。分母をそろえるとは Mepka を共通にすることでもあるのだからこの指導プランで十分説明がつく。このように § 7 の〔課題 2〕を変形すると § 9 は必要なく、そのかわり § 8 は § 7 の前にもってくるのが適当となる。

§ 10 分数のいろいろな性質

課題となったのは〔1〕二つの数の除法の商としての分数の表象、〔2〕帯分数から仮分数への移行の手法、及びその逆、〔3〕分数のたし算と引き算、〔4〕分数かける整数、などであるが、これらについては詳しい報告はされていない。

最後に、次のことを付加しておこう。このプログラムでは、分数の起源について、分数を量の測定を基礎にして余りをあらわす数として導入している点は正しい。しかし、すでに指摘したように、新しい Mepka を見つける上で不自然さをまねがれえなかったり、分数の比較で不適当な原理を使ったりなど不十分な点が多い。

以上で、ダヴィドフの「量の測定にもとづく分数概念の導入」の説明と検討を終ろう。

<注>

- 1) B. B. ダヴィドフ「分数概念の対象源泉について」p. 91～p. 92 より引用した。『数学習得の低学年児の心理的可能性』（1969）所収。
- 2) B. B. ダヴィドフ「分数概念の対象的源泉について」p. 96～p. 114 より引用した。この論文は、B. B. ダヴィドフとЖ. Ч. ツベトコビッチの論文であるが、ダヴィドフの指導のもとにこの実践は行なわれている。なお、この実践はモスクワ第91番学校の第3学年を対象にして1965～1967年の間

行なわれたものである。

- 3) 乗法は新しいプログラムにもとづいて2年の前期で学習している。
- 4) この危険は互除法を使うことによって避けることができる。そもそも分数の発生は互除法によっている。
互除法を使った分数の導入は「わかる算数4」(むぎ書房)
- 5) 互除法を使った導入をするとこの§6は不要になる。

む す び

小論を結ぶにあたって課題としたことについてその結論を述べておこう。

第一の課題についてまずその目的は果たせた。これらのプログラムが豊かな数学的概念を保証するかどうかについては結論を出すにいたるほどまだ体系化されていないが、量概念については、量の一般的性質の前提となる具体的な量(長さ、重さ、体積など)の概念形成のプログラムがない(自然的状态におかれている)ことを考えるなら、それは表面的なものとなるであろうと結論することができる。

第二の課題についても不十分ながらすでに指摘した。ここでは結論だけをまとめておこう。

	ダ ヴ ィ ド フ	数 教 協
量 の 理 論	量の一般論だけで量の体系はない。	量の一般論の他に量の体系がある。 $\begin{array}{c} \text{分離量} \\ \text{量} < \text{外延量} \\ \text{連続量} < \text{内包量} \end{array}$
量 の 指 導	等一不等関係と加減。 量はこれらをみちびき出す諸例に使用されるだけである。	外延量(液量、長さ、重さ、面積、体積)の指導と 内包量(速さ、密度、濃度)の指導にわかれる。
数 の 導 入	起源: 連続量の測定 $\frac{A}{C} = n$ として n が定義される。 集合数の指導が不十分、順序数に重点。	起源: 分離量の抽象的表現、集合の濃度として数が定義される。 集合数→順序数へ。
分 数 の 導 入	量分数 起源: 連続量の測定。	量分数 起源: 連続量の測定。

以上で二つの課題は達成された。まだ、乗法の導入、文字式を使った課題解決過程、さらに第0章で述べた思考心理学研究の方法論にかかわる問題、「発達」論など残された問題は多いが、これらについては改めて稿を進めたい。