



Title	数学教育の内容史研究に関する試論：改造運動における微積分の問題を中心に
Author(s)	大田, 邦郎
Citation	北海道大學教育學部紀要, 44, 17-47
Issue Date	1984-03
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/29276
Type	departmental bulletin paper
File Information	44_P17-47.pdf



数学教育の内容史研究に関する試論

—改造運動における微積分の問題を中心に—

大 田 邦 郎

An Essay on the History of Educational Contents of Mathematics

Kunio Ohta

目 次

はじめに.....	17
第1章 数学教育課程編成の視点.....	19
第1節 ベリーの改革論.....	19
第2節 クラインの改革論.....	23
第3節 日本における改造運動.....	26
第2章 教育内容構成の視点.....	38
第1節 「量」と微積分.....	39
第2節 微分法と積分法との関連.....	41
第3節 「無限小」の概念.....	45
第3章 1942年中学校教授要目における微積分.....	以下次号
第1節 微積分の内容構成	
第2節 「数学教育再構成研究会」における論点	
第3節 1942年教授要目の性格	
むすび	

は じ め に

1942(昭和17)年中学校教授要目¹⁾が、戦後の中等数学教育の原型である。戦後の数学教育の内容は、ほとんどこの時期に準備されたといえることができる。とくに微積分が、多くの問題点をふくみつつも、この要目においてはじめて中学校に導入されたのであった。新制高等学校が今日まで、まがりなりにも微積分を位置付けてきたことは、この時期までの研究の蓄積に負うところが大きいと思われる。したがって今日の中等数学教育のあり方、とくに微積分の位置付けについて考えるうえでも、1942年教授要目の成立過程の研究が重要である。そしてまた、その成立過程をいかなる視点から分析するかということについても検討する必要があるだろう。

横地清はかつて、「数学教育史や比較教育の立場から、数学教育の論争点にとりくんだ研究は、戦前とはもとより、戦後も余りなされておられない²⁾」と述べているが、この状況は今日まで続いているといわざるを得ない。横地はたとえば、高等学校で微積分を必修にするための、内容と方法の研究に資料を提供するという目的のもとに、「微分の導入」について

1° 二次函数 $y = ax^2 + bx + c$ の極大、極小は微分の中で扱うがよいか、それとも微分より前に独立に扱うがよいか。

2° 微分の導入には数列や級数に関する極限値の扱いを前提としたがよいか。

3° 必須としての微分はどの程度までやったらよいか。

という三つの問題を設定し、ドイツの数学教育におけるこれらの扱いの変遷を調査している。³⁾このような実践的視点からの比較検討により、すぐれた内容と方法を摂取することには、大きな意義をみとめることができるだろう。

しかし、われわれの関心はこれにとどまるものではなく、いかなる必然性のもとに教育内容が改革されてきたか⁴⁾にある。ここで、数学教育の歴史を、「理念」や「目的」、またそれらを実現するための「制度」等の側面からのみ検討することは、教育内容の研究にとってあまり意味をもたないことを指摘しておかなければならない。数学教育の実体——実際に教えられる数学の内容と方法の改革に、それらが直接的に反映されるとはかぎらないからである。むしろ、教育内容の改革は、教育内容それ自体の改革として、それがいかなる論理によって、いかなるレベルで行なわれたのかが中心に、検討されなければならないと考えるのである。

本稿では、微積分に焦点をあて、それが1942年教授要目に導入⁵⁾される過程について検討していくことにしたい。中等教育への微積分の導入こそ、今世紀初頭からの数学教育改造運動の中心的な主張であり、これが実現される過程で、数学教育の内容は質的な変化をとげたのであった。したがって、ここには教育内容の編成のあり方にかかわる問題が、集約的にあらわれていると思われるのである。

教育内容の編成について、われわれはつぎの二つの側面からの研究を統一적으로こなうことを提起している。ひとつは、教科の全体構造の構想のレベルにおいて、「科学の構造の分析をふまえたカリキュラムの論理構造」を検討する、教科課程（教科カリキュラム）編成論とでもよぶべき側面であり、もうひとつは、ひとまとまりの授業プランの作成のレベルにおいて、「対象——科学的概念の構造に即しての教育内容の論理的分析」を行なう、教育内容構成論とでもよぶべきものである。⁶⁾この2つの側面は、もちろん相互に規定しあうものではあるが、それぞれ独自に研究を要するものでもある。さしあたりこの分析枠を適用して、改造運動以降、第1には中等数学の課程に微積分を導入する論理が、そして第2には、微積分の内容を中等段階にふさわしいものとして構成する論理が、どのように構築され、発展させられて、1942年教授要目とそれにもとづく教科書に反映しているか、このことを明らかにすることが本稿の課題である。

第1の側面では、ペリーおよびクラインの改革論を、日本の改造運動がどのように継承し、中等教育課程編成の視点をどのように形成してきたか、いくつかの段階に分けて分析するという方法を、また第2の側面では、中等段階の微積分指導において論点となるべきいくつかの問題について、それらがどのように解かれてきたのかを分析するという方法を、本稿では試みることにしたい。

註

- 1) 「中学校高等女学校数学及理科教授要目」1942年3月5日、文部省訓令第4号。
- 2) 横地清『世界の算数数学教育』1960年、国土社、2ページ。
- 3) 横地清「高校における微分の導入について」『日本数学教育会誌』第40巻3号、1958年。
- 4) 板倉聖宣は科学教育史研究の目的を次の二点にまとめている。

「第1 現在行なわれている科学教育がいかなる必然的な理由、あるいは偶然的な理由によって行なわれるようになったのか、という事実を明らかにし、それらの理由が現在なお有効であるかど

うかを具体的に検討して、現在の科学教育の変革の可能性の展望をひらくこと。

第2 科学教育の発展の構造・論理を明らかにし、これからの科学教育研究のための指針を見出すとともに、科学教育を含むもっと広い科学や教育や社会全般の発展と、科学教育の発展との関連を明らかにし、もっと広い歴史の研究の一環として、寄与するように努めること」(板倉『日本理科教育史』1968年、第一法規出版、1ページ)。

本稿の課題は、この第1の目的の前半と共通しており、教育内容成立の必然性を、中等教育における微積分に限定して明らかにすることにある。板倉もまた、すぐれた遺産の摂取のために「『低学年理科教育の歴史』とか『力学教育史』とか『花と実についての教育史』とか、問題を限って論ずることが必要」(同上書「はしがき」)であると述べている。

また数学教育内容史研究の視点にかかわっては、須田勝彦が1947、51年および1958年の小学校学習指導要領の「内容における同一性と差異、または連続性と非連続性」という問題を設定し、「これまでの両指導要領に関する様々な言及の中で、両者の同一性、あるいは連続性にふれるものはほとんど皆無であったといつてよい」と指摘している(須田「数学教育における『系統性』の問題」1981年、北海道教育学会第25回研究大会自由研究発表)。「連続性と非連続性」したがって必然性を、教育内容のレベルにおいて明らかにしていくことは、教育史研究の一環でもあるだろう。

5) ただし、要目の中に「微積分」の語句はなく「連続的变化の考察処理」となっている。このことについてはあとで検討する。なお高等女学校の5年制についても同様であった。一方、師範学校ではすでに1925(大正14)年の要目に「微積分大意」がとり入れられている。師範学校の教育内容については、稿をあらためて検討してみたい。

6) 鈴木秀一、大田邦郎「教育内容、教材を決める具体的な観点とは何か」『現代教育科学』No312・313、1982年11月・12月号、明治図書。

第1章 数学教育課程編成の視点

今世紀初頭にはじまる数学教育改造運動は、イギリスではペリーが、また、ドイツではクラインが中心になり、それぞれ展開された。彼らは中等教育への微積分の導入をつよく主張したのであるが、この点での共通性からペリーとクラインの思想を区別せずに論ずるものもみられる。¹⁾しかし、共通点をふくみつつも、彼らはそれぞれ独自の思想にもとづいての主張を行なったのであり、ペリーとクラインの思想の相違を明確にしておくことが、日本における改造運動の展開をみていくうえでも必要である。以下、小倉金之助によりながらも、²⁾現在の視点からこの点について検討していきたい。

第1節 ペリーの改革論——数学の大衆化

イギリスの工学者ジョン・ペリー(J. Perry 1850~1920)は、1875(明治8)年から4年間、工部大学校の土木学の助教師として日本へ来ているが、このときは数学教育に関しては井口在屋ら一部の工学関係者に影響を与えたにとどまる。ペリーが、「国際的な数学教育改造運動への有力な1つの契機」³⁾となった、英国学術協会における講演——グラスゴー講演を行なったのは、1901年、彼が王立理科大学の力学と数学の教授であった時代のことである。当時のイギリスの中学校では、ユーリッド流の幾何学を改良しようとする動きもあったが進展せず、1902年の条例による公立中学校の設置という制度的な側面から、中等教育への関心が高まりつつあ

るときであった。

グラスゴー講演においてペリーは、「如何なる場合にも、総ての児童が将来純正数学者になるかの如く、初等数学を教授する現在の組織は改められねばならぬと確信する」⁴⁾として、ユークリッド幾何学などの「正統派的な事柄はずっと少く」し、「現在では全く手を付けない習慣になっている部分を、一層厳正に学習せしめたらどうか」⁵⁾と、根本的な改革を提起している。「如何なる学科が子供に教えらるべきであり、又如何なる方法で教えらるべきかは、有用ということによって決定せねばならぬ」⁶⁾との原則のもとに、ペリーは次のように主張する。

「今日に於ては総ての人が自然科学を学ばねばならない。」「自然を研究する最も初歩な場合に於ても必要な方法の例として、私は次のものを挙げる事が出来る。即ち計算に於ける対数の利用、代数公式を取扱う知識と能力、方眼紙の使用法、微積分の方法等である。」「之等を利用すると彼等の頭脳の力は充分早く発達し、且つ喜んで学習するに至る。」⁷⁾方眼紙、微積分といった、新しい内容の提唱が、数学教育と自然科学との関連という視点からなされたことが、ペリーの改革論の特徴のひとつである。

講演の際、資料として配布されたペリーによる教授要目「教員養成所における数学教育の教科課程」⁸⁾では、初等課程において

算術、代数、求積法、方眼紙の使用、幾何学
が、また高等課程においては

三角法、求積、方眼紙の使用、変化率と積分、簡単な微分方程式の解法、幾何学、ベクトル

が、それぞれ主な項目になっている。これは、従来の算術、代数、幾何、三角法に解析の内容を単に付け加えたというものではなく、それに応じて従来の内容をも変更するものであった。⁹⁾微積分については、その細目も引用しておこう。¹⁰⁾

変化率と積分

一つの量の、他の量に対する増加率、たとえば、対応する二つの変量の値が実験的に観測されている場合に、このような値によって描かれた曲線の勾配を求めて、増加率を計算する近似的方法。

増加率を表わす「微分係数」という言葉、およびその記号 $\frac{dy}{dx}$ (ここで、 y と x とは、二つの変量である)、(y と x とが

$$y = ax^n, y = ae^{bx}, y = \sin x, y = \cos x, y = a \sin(bx + c), y = A \log(x + a)$$

などの関係にあるとき)、 y の x に対する微分係数 $\frac{dy}{dx}$ を求める規則。上記の関数の研究。

二つの関数の積、あるいは合成関数(関数の関数)の微分法則の証明と使い方。逐次微分と偏微分、部分積分と置換積分、その他の積分計算の工夫。

極大値と極小値の計算。

微分の逆演算としての積分、あるいは総和としての積分。その記号 $\int y dx$ および $\int_a^b y dx$ 。 y と x の数値が知られているとき、 $\int_a^b y dx$ の近似値を求める方法。等間隔の x の値に対して、 y の値が与えられているときの、 y の積分。

積分 $\int ax^n dx, \int ae^{bx} dx, \int \frac{A}{x+a} dx, \int A \sin(ax+b) dx, \int A \cos(ax+b) dx$ を計算すること。

簡単な微分方程式の解法

生徒が学習に興味をもつようにするために、測量、力学、物理学などの実例を、不断に引用し

なければならない。

これは、現在の日本の高等学校のものと、項目的にはかなり重なっているといえよう。

さて、ペリーの教育内容編成における基本的な視点は「有用性 (usefulness)」にあった。ペリーにおける数学教育の「有用性」とは次のようなものである。¹¹⁾

- 高尚な情緒を養い、心の歓びを喚起すること。
 - 自然科学の研究に際し数学的武器によって与えられた助け。
 - 自分の手や足と同様に自由に使える精神的用具を人々に与え、生涯を通じてその教育(精神及び頭脳の発達)と伴って進歩せしめ、総ての経験を此目的のために利用せしめる能力を与えることに於て。
 - 人々に自己のためという見地から離れて事物を考えることの大切さを教え、それによって現在の権威のおそろしい束縛から逃れしめ、屈伏と支配と何れを選ぶか、又彼自身最高存在の一つではないかということを考えしめることに於て。
 - 応用科学の職業にたずさわる人々をして、その応用科学の基礎となり且つそれに従って進歩が促される所の原理を理解していると感じしめることに於て。
 - 鋭敏な哲学研究者に対して非常に快適なそして満足すべき完全に関する論理的助言を与え、それによって純抽象的見界から哲学上の問題を発展しようとする意図を阻止する点に於て。
- ペリーの「有用性」は即物的なものではないということが、ここからうかがえる。とくにはじめの4点は「すべての人々」を対象としたものであった。

さらに、微積分の導入を主張するに至る論理を少しくわしく追ってみよう。

「私は幼児から老年に亘る真実の教育を想像することが出来る。私は世界の驚くべき科学的発見を利用し、更に之を発展せしめ、歴史家並びに哲学者の労作の結果を利用するに堪うる市民、詩と有らゆる文学とを享樂することの出来る市民を想像することが出来る。」¹²⁾

すなわちペリーは、「教養ある市民」の育成を教育の目的と考えているのであり、「科学の大衆化」を主張するのである。このことは、次の主張により端的に表われている。

「自然科学の研究、従って数学の研究は、単にその与える知識だけでなく、思考に科学的習慣を付け、人間各個に己れを考える力を得せしめ、総ての国民に最大の幸福と最大の実力を与えるという意味で、貧富の別なく我国に於ては最も大切なことと信ずるのである。」¹³⁾

近代社会の発展を背景としたこの科学の大衆化の思想こそ、ペリーにとってすべての人々に自然科学を教えることの根拠であり、「自然科学の実際の研究が量的でないものがないのであるから、総て数学によらなければならないといっても何等差支がない」¹⁴⁾のであって、量の数学、したがって関数・微積分を中心とする新しい数学のカリキュラムが必要になるのであった。ここでは、数学の主要な対象を「量」においたことが着目される。ポジティブには述べていないものの、ペリーが「量」を中等数学教育の内容の中心においてカリキュラムを構想したことは、前述の要目案にもみられる通りである。ただし、ペリーにおける「量」は物理的量のレベルのものであり、数学の対象としての数学的量を意識するには至っていない。

以上のように、ペリーの数学教育改革論は「科学の大衆化」の思想を基調とするものであったといえよう。彼は1895年に『技術者のための微分積分学』を著し、また1899年には教育局の依頼により、ロンドンの工場労働者を対象として「実用数学」の講義を行なっている。このようにペリーの改革論は実用的な数学を教えるところから出発したのであるが、それをふくみ

ながらも、単に工業における「実用性」「有用性」にとどまるものではないことが、以上の検討から明らかであろう。小倉金之助も、「ペリーは単純な、通俗的な意味での実用主義者ではなかった。ペリーが唱えた数学の実用方面は、消費者の数学ではなく、主として生産者の数学であった」¹⁵⁾と述べているが、「すべての人々」が生産者・勤労者であるとすればそれは正しいといえよう。ただしペリーは、『初等実用数学』(1913年)の序において次のように述べている。

「実用数学という名称は、新研究方法に対して附与されたものであって、唯単に旧方法と区別する為のみの名称ではない。」¹⁶⁾

すなわちペリーの「実用数学」(practical mathematics)とは、たしかに「生産者の数学」という側面をふくみつつも、「方法」、具体的には量の測定や方眼紙の利用など、従来は中等教育の対象外であった諸活動等を取り入れる新しい方法に「実用」の名を与えているのである。

なお、ペリーは「純粋数学」(およびそれを適用する「応用数学」)に「実用数学」を対置しているが、それは中等段階においてであり、「純粋数学」の意義はそれ自体としてみとめている。つまり、数学を「純粋」と「実用」の二元論において捉えているのである。もっとも、前者のためにも後者の学習は効果があるとしているのではあるが。

ところで、ペリーはまた、「私には数学は自然の神秘を開くべき有力なる道具である。吾々はこの道具の用い方を知り得たならば充分である」¹⁷⁾として、次のようにいう。

「この道具がどうして作られたか、そして之を私自身のものとするにはどう鍛えればよいかに就てもっと多くの事を知りたいと思う。併し若し道具を作ることに何等の喜びも何等の熟練も持たない、又それを利用することに大なる喜びを持たないとしても、私は出来るだけそれを使う、熟練するまで実際に使って見ようと思う。」¹⁸⁾

これは、従来の数学教育においては数学を「使う」ことが軽視されていたとの、ペリーの批判である。しかし「使う」ことの強調は逆に、経験主義、実用主義とうけとられる側面をも有しており、実際、日本の改造運動において、ペリーの思想はこの方向でゆがめられていくのであった。

註

- 1) たとえば丸山哲郎編訳、ペリー、クライン『数学教育改革論』1972年、明治図書の「訳者解説」では、「ペリー、クラインの改良運動の基本的スローガンは 1. 生活、感性あるいは心理といった、人間的要素との結合 2. 科学、技術との結合 であった。」(180ページ)と述べられている。しかしこれでは、彼らの思想の核心が捉えられていないばかりか、一括することによって改造運動の展開の構造を捉えることも困難になるのである。
- 2) 小倉金之助、鍋島信太郎『現代数学教育史』1957年、大日本図書。
- 3) 2), 14ページ。
- 4) ペリー、鍋島信太郎訳「数学教育の革新」鍋島編『数学教育の革新』1926年、目黒書店、60ページ。原題は“The Teaching of Mathematics”。1)の丸山訳もあるが、改造運動期の鍋島訳によることにした。なお、以下本稿では、漢字とかなづかいを、現代のものになおして引用する。
- 5) 4), 77ページ。
- 6) 4), 49ページ。
- 7) 4), 80～81ページ。
- 8) ペリー、丸山訳「教員養成所における数学教育の教科課程」、1)『数学教育改革論』所収。
- 9) 幾何の場合についていえば、「作図と算術の計算を結びつける」こと、あるいは直交座標や極座標

を用いることなど。

なお蛇足ではあるが、この要目案のただし書きの中に「すぐれた教師は、試験というものは、彼の教えた結果をテストしてみるものだから、彼以外の他人によって行なわれてはならないことを、理解しなければいけない」と述べている(8), 44ページ)。これはペリーの教育批評であるが、評価論として興味深い。

10) 8), 47~48ページ。

11) 4), 55~57ページ参照。なおペリーは「試験を通過することに於て」という項目もふくめているが、これだけは「余り結構でない」(57ページ)としている。

12) 4), 104ページ。

13) 4), 83ページ。

14) 4), 103~104ページ。

15) 2), 53ページ。

16) ペリー, 新宮恒次郎訳『初等実用数学』1930年, 山海堂, xiv ページ。

17) 4), 82ページ。

18) 4), 82ページ。

第2節 クラインの改革論——教育内容の科学化

ドイツの数学者フェリックス・クライン (Felix Klein 1849~1925) は、幾何学のエルランゲンプログラム等でも知られているが、彼もまた、1904年のプレスロウ自然科学者会議で「高等学校の数学および物理学教育の現状について」¹⁾の報告を行ない、中等教育への微積分の導入を主張している。

「18世紀の大数学者によりて発達せしめられたる、云わば自然的の形に於ての函数論的思想、随って微分学及び積分学の初歩が19世紀中に正確研究の総ての領分に漸次完全に滲透せり。

(中略) 斯くの如くにして得られたる数学の価値をその一般的意味よりして十分に了解せられて、中学校の教育を受くる生徒が整頓せらるることに導くと云うことは即ち問題(課題——引用者)なり。」²⁾

さらに、同年よりクラインは、ゲッティンゲン大学において「高等学校における数学教育」³⁾の講義を開始したのであるが、ここではより明確に次のように述べている。

「余の了解する処に従えば微積分は今日己に函数概念の発達として各人に要求せらるべき一般の数学教育に属し、而して将来に於ては益々これに属するなり。」⁴⁾

クラインもペリーと同様、すべての人々に必要な一般的教養として微積分を捉えているのである。

しかし、ペリーの数学観が基本的には「純粋数学」と教育のための「実用数学」の二元論であったのに対し、クラインは数学と数学教育との関連について明確な考え方を示している。

「高等学校における数学教育」の講義では、中等教育を中心にドイツの数学教育の歴史的検討も行なっているが、この中でクラインは、「科学の迅速なる進歩によりて今や学校と大学との間に見誤る可からざる疎遠が始ま」⁵⁾り、「学校の課業は大学の科学とは厳密に分離」⁶⁾されているとの認識のもとに、次のように述べている。

「科学に於ては高等なる又困難なる部分が、増加する所の概念の、明瞭と簡単にせられたる叙述によりて徐々に初等化せらるるが模範的発達経路なり(“歴史的推移の法則”)。さて学

校の問題は一般教養の見地よりして初等化せられたる材料を教育課程に採用（古くなりたる事物は除去することとして）することが必要なるや否やを見るにあり。」⁷⁾

この、数学の発展を数学教育の内容に反映させるという視点は、「現代化」の思想そのものであるとさえいえよう。この視点はすでにプレスロウ報告においてもみられる。教師の研究のあり方について、クラインは次のようにいう。

「特に重要なるは、正教諭の科学的教養と努力とが学生時代のみを終らざることなり。独立的科学研究にはあらずして、他の方面によりて新たに得られたる進歩の科学的消化（学校の目的に対しての消化）が正教諭活力の一般的属性ならざる可からず。」⁸⁾

ここにも、科学と教育との統一への指向がよみとられるのであるが、クラインはそれを、教師の本来的な仕事と位置付けたのである。小倉金之助はこの点については論及していないようであるが、教育内容に科学性を与えるという視点こそ、クラインの改革論においてもっとも特徴的なもののひとつであるといえるだろう。

クラインはこの講義の中で、ギムナジウム（古典中学校）の教育課程についての案を示している。下級（10～15歳）と上級（16～18歳）をあわせて引用しておこう。⁹⁾

級（学年）	古 典 中 学 校		
	算 術		幾 何
第 六 級 VI	計 算： 比例に至るまでの 初步計算及び日用算術問題	数 字 的 計 算 の 教 養	幾何学入門： 実測及び画法
第 五 級 V			
第 四 級 IV			
第三下級 IIIb	算 術： 文字計算，四則算法， 一元一次方程式		平面幾何学： 直線，角，三角形， 平行四辺形，円
第三上級 IIIa	幾何学的形式に於ける函数思想を中心として融合せる算術及び幾何学。直角 xy 座標及び最も簡単な函数の図表示（方眼紙），かくして得たる曲線の全径路， 上降，下降，及び面積の吟味。 函数的思想によりて勢を得且つ互に連続して次の通常の事項を教授す： 累及び根：一次及び二次の方程式，円錐曲線に関する初等思想，円に関する 計算，三角形の辺及び角の間の相互の関係。 多くの实际的の例をとりて空間的智識を練習し且つ数字的計算に熟達せしむ。		
第二下級 IIb			
第二上級 IIa	指数函数及び対数函数，其の応用： 二元二次方程式に関する若干の事項 （円錐曲線に関する直観的取扱いは よる）。		三角函数及び其応用； 近世幾何学に関する若干の事項（函数 思想の拡張としての同類思想）。
第一下級 Ib	已に以前に取扱いたる函数と関係を 保ちて例題につきて微分積分の思想 を与えること。 組合せに関する若干の事項。		立体幾何学，及び射影に関する重要な 事項； 球面三角法に関する若干事項； 数学的地理（地図の作成を含む）。
第一上級 Ia	解析的及び総合的に円錐曲線を取扱うこと，星学初步に於けるその応用； 已修事項全部に関する復習，特に多くの応用問題を課しこれをグラフにて或は 計算によりて解かしむること。 詳細なる点にも注意して数学全体に関し回頭をなすこと，必要な場合には多少 哲学的又は歴史的の解釈をなすこと。		

ペリーの案と共通している点も多いが、近世幾何学の「函数思想の拡張としての同類思想」など、クライン独自のものもふくまれている。ただし、微分方程式はふくまれない。

さて、上述の数学の発展を数学教育に反映させるという立場からの研究として、「高等学校における数学教育」の第2編、「高い立場からみた初等数学」¹⁰⁾の講義が1907年から行なわれた。ここでは、数や方程式、集合、関数、無限小計算、幾何学等のいくつかの素材が「現代」の視点から、また歴史的に、検討されたのであった。この中で「中間的な附録」として「数学の近代的発展と一般的な構造について」の論及が興味深い。これは次のような「注意」から始まる。

「ひとつの注意から出発することにして。それは、現代までの数学の発展史には、2つの異なった発展の系統がはっきり区別できるということであって、それらはある時代には互いに分裂し、ある時代には双方が互いに共存し、またある時代には、この2つが互いに混り合ってきたのである。」¹¹⁾

「系統A」は「科学の分科主義的把握にもとづき」「各専門分野を、結晶した論理的に閉じた体系につくり上げること」であり、(当時の)学校で採用されている方法。「系統B」は「数学的科学的全体をひとつの大きく連関した全体として理解すること」¹²⁾で、直観的・発生的方法とされる。たとえば微積分学確立の17世紀は「系統B」に属するという。ここでクラインは、「この2つの研究法がどちらも無視されない場合にのみ、数学はすべての方向に万遍なく発展する」¹³⁾としながらも、数学教育においては「系統B」をもっと重視すべきであるとして、次のように主張する。

「とくに私が考えるのは発生的教授法を普及させることであり、空間的直観にもっと重点をおくことであり、そういうわけで、とくに空間直観と数的直観の融合のもとに関数概念に優位を与えることである。」¹⁴⁾

クラインの「2つの系統」は、表面的にはペリーの「純粋数学」と「実用数学」に対応するようにもみえる。実際、数学的操作等を取り入れるペリーの「実用数学」は、クラインのいう「発生的方法」にふくまれているとも考えられる。しかし、クラインが二元論にくみしないことは前述の通りである。「実用数学」の立場から発言したペリーとは視座そのものが異なり、クラインの場合は、数学の発展とその構造の分析をふまえたところにその独自性があって、この分析にもとづく「発生的方法」によって、数学と数学教育とを結びつけ、教育内容に科学性を与えるという視点を提起したのであった。

微積分に即していえば、高等学校ではむずかしすぎるとの異論に対して、クラインは次のように反論する。

「幾何学的に叙述せられたる簡単なる函数より出発し、然る後例えば自身に記録したる寒暖計の曲線像によりて温度の傾斜の内面的思想を、微係数の明瞭なる概念に迄発達せしめ、而して他の機会に於て積分の概念を、直観的に簡単なる場合に於ける全く自然的なる面積の思想を得ると云う意味の一つの教育を施すならば、それが生徒に対して余りに困難なりと云うことは如何にしても主張し得ざるなり。」¹⁵⁾

いまではオーソドックスな微積分の導入法である、接線と求積による方法は、ペリーにおいては「実用数学」、クラインにおいては「発生的方法」であったのである。さらにクラインは、「力学に於て避け得べからざる所の速度及び加速度の概念は只微分学思想との連結によりてのみ十分明瞭ならしめ得る」¹⁶⁾という。

「茲に我国教育の一つの改造の必要が特に明らかとなるなり。随って余は簡単に次の如く総

括することを得：函数概念及び力学の基礎概念の根本的にして且つ有効なる取扱いは全く自然的に中等学校の教育に初等微積分学を採用することを含めりと。」¹⁷⁾

もっとも第2章で検討するように、クラインの場合、微分学の考えは速度・加速度の概念と「結びつく」ものであっても、それらに「もとづく」ものであるとは考えていない。これは数学者クラインの「発生的方法」のひとつの限界であるといえるかもしれない。しかしともかく、ここに中等数学教育を、微積分をひとつの中心として再編成する視点が示されたといえよう。

註

- 1) クライン, 林鶴一, 武辺松衛訳『独逸に於ける数学教育』1921年, 大日本図書所収。なお当時のドイツにおける「高等学校 (höheren Schulen)」は, ギムナジウム, 実科ギムナジウム, 高等実科学校の総称で, 中等教育段階に相等する。林, 武辺訳では「プレスロウ自然科学者会議に於ける中学校の数学及び物理学教育の立場に関する報告」と訳されている。なお, 丸山哲郎編訳, ペリー, クライン『数学教育改革論』1972年, 明治図書にも所収されているが, ここでは改造運動期の, 林, 武辺訳によった。
- 2) 1), 295ページ。
- 3) この講義がシムマックによって編集されたものが1)の原書である。
- 4) 1), 168ページ。
- 5) 1), 133ページ。
- 6) 1), 134ページ。
- 7) 1), 134ページ。なお, この引用のみ読点は引用者。
- 8) 1), 306~307ページ。
- 9) 1), 53ページおよび192ページ。なお, 1905年のいわゆる「メランの要目」も, ドイツの改造運動の中で作成されたものであるが, クラインは「私は単に, 数学教師の優れた代表者たちに協力したにすぎない」(10), 2ページ) という。
- 10) クライン, 遠山啓監訳『高い立場からみた初等数学』(4分冊通しページ), 1960~61年, 東京図書。小倉金之助が1909~10年に「クラインの『高い立場から見た初等数学』を読む」(『小倉金之助著作集第5巻』1974年, 勁草書房所収) において紹介を行なっている。
- 11) 10), 109ページ。
- 12) 10), 111ページ。
- 13) 10), 120ページ。
- 14) 10), 120ページ。
- 15) 1), 167ページ。
- 16) 1), 168ページ。
- 17) 1), 168~169ページ。

第3節 日本における改造運動——「融合主義」の検討

日本における数学教育改革運動は, 1902(明治35)年の中学校教授要目に対する批判にはじまるといえよう。ペリーやクラインらの改革論の影響を強く受けながらも, 日本の改造運動は独自の展開をみせた。そしてそこにはいくつかのレベルの論点が混在していた。1902年教授要目への批判から1942(昭和17)年教授要目の成立に至る過程を, ひきつづき教科課程編成論の側面から分析していくことにする。

0 「融合主義」の三つのレベル

まず1902年教授要目であるが、これは、ドイツに留学しクロネッカーに師事した藤沢利喜太郎、およびイギリスに留学し当時の文部大臣であった菊池大麓によるものである。¹⁾ペリーのグラスゴー講演の翌年に制定されたのであるが、しかしこれは欧米の改造運動が批判した当の古い数学教育そのものであったといえよう。

1902 (明治35) 年中学校教授要目 文部省訓令第3号

第一 算 術

第一学年 毎週四時

緒論 (命数法・記数法・小数), 整数及小数 (加減乗除), 諸等数 (時間・メートル法度量衡・尺貫法度量衡・本邦貨幣・外国度量衡及貨幣・諸等通法及命法・諸等数の加減乗除・英国度量衡及貨幣その他十進法に依らざる複雑なる諸等数は分数の中或は分数の後に於て便宜之を授くることを得), 整数の性質 (可約性・素数・約数・最大公約数・最小公倍数), 分数 (分数の主要なる性質・約分・通分・分数を小数に化すること・小数を分数に化すること・分数の加減乗除), 比及比例 (比・比例)

第二学年 毎週二時

比及比例の続き (連鎖法・比例配分・混合), 割合 (総説・歩合算・利息算其他割合に関連する日用諸算), 冪及根 (自乗冪及平方根, 三乗冪及立方根, 求積)

第二 代 数

第二学年 毎週二時

緒論 (記号の定義・代数式・結合の法則・定義の拡張・負数), 整式 (加減乗除), 方程式 (一元一次方程式)

第三学年 毎週二時

方程式の続き (多元一次の連立方程式), 整式の続き (分配に関する公式・因数・最大公約数・最小公倍数), 分数式 (分数の基本性質・約分通分・分数の加減乗除), 方程式の続き (一次式に帰せしむることを得べき一元方程式・一元二次方程式・二次式に帰せしむることを得べき一元方程式・二次方程式を含みたる連立方程式・方程式の解決に関する積義)

第四学年 毎週二時

無理式 (指数定義の拡張・無理数・無理数に近似する有理数値), 比及比例 (不名数の場合・量の場合“通約すべき量, 通約すべからざる量”・不尽数), 級数 (等差級数・等比級数), 順列及組合, 二項式定理 (正整数なる指数の場合), 対数 (対数の基本性質・対数表)

第三 幾 何

第三学年 毎週二時

緒論, 直線 (角・平行線・三角形・平行四辺形), 円 (円の基本性質・中心に於ける角・弦・弓形に於ける角・切線・二つの円・軌跡)

第四学年 毎週二時

円の続き (内接形及外接形), 面積 (直線形の面積の等同), 比例 (等しき比の定義・此定義より派生する一般の定理), 比例の応用 (比例線・相似形)

第五学年 毎週二時

比例の応用の続き (面積・軌跡), 平面 (直線及平面・立体角), 多面体 (角嚮・角錐・正多面

体), 曲面体 (球・円壘・円錐)

第四 三角法

第五学年 毎週二時

角の計り方 (六十分法), 円函数 (鋭角の円函数・円函数相互の関係・余角の円函数・格別なる角の円函数・真数表), 直角三角形の解法, 円函数の続き (円函数の一般の定義・円函数相互の関係・円函数の符号及大きさの変化・負角の円函数・補角の円函数), 角の和に対する公式 (二つの角の和及差の円函数・倍角及分角の円函数・円函数の積に対する公式・円函数の和及差に対する公式), 三角形の辺と其の角の円函数との関係, 対数表の用法, 三角形の解法, 高さ距離等の測法及之に関する実習

教授上の注意 (略)

翌1903 (明治36) 年には小学校令の改正によって小学校教科書が国定制となったが, 中学校の場合は実質的に国定化される1942年までは, 教授要目と受験体制とによって, 数学教育の内容の統制がなされたのであった。

1902年教授要目の主要な特徴は, 算術, 代数, 幾何, 三角法の4つに分かれていたというところにあるのではなく, 関数がふくまれないなど, 内容が古いということにある。そして, それらが相互に関連させられていない。たとえば算術では未知数を用いず, 代数では面積図等を用いず, また幾何では式を用いないのであった。なお, 算術における「理論」に関しての藤沢と寺尾寿との論争²⁾, 藤沢と菊池の数学観の反映としての代数と幾何の間の矛盾³⁾等, 1902年教授要目をめぐる論点は多いが, 以下, 改造運動の検討を行なうため, ここでは立ち入らない。

1902年教授要目が「分科主義」「孤立主義」⁴⁾であるとの批判から, 日本における改造運動がはじまったといえる。そして, 「融合主義」がそれに対置されたのであった。ここで改造運動を一括して「融合主義」とよぶことは不毛である。改造運動の中でもいくつかの異なる視点が存在し, いくつかの重要な局面において異なるあらわれ方をしているのであって, その構造を明らかにすることがここでの課題なのである。

「融合主義」なるカテゴリーが用いられるようになった経過は必ずしも明確ではない。改造運動における改革論は多様であり, この多様性については, すでに佐藤良一郎が指摘している。佐藤は「融合するとはどういうことか」として, 次の4点をあげた (番号は引用者)⁵⁾。

- 1 「在来の分ち方に依る各分科から教材をとりこれを適当に安排して丁度寄木細工でもするようにして一つの系統を作ること」
- 2 「在来の分科は認めておいて各科の間でもっと互に方法を融通し合うこと」「例えば算術で文字を用いることは拒まず, 幾何学に於て代数学又は三角法の方法を自由に用いることを許すというようにして方法上の区別はしないこと」
- 3 「在来の数学各分科にはかかわらず或る方針の下に新しい初等数学という体系を立てること」「例えば函数思想を中心としこの思想の涵養ということを主にし根本的に新しい数学を建てるとするような風にすること」
- 4 「自然及び社会が吾人に課するところの問題の模型的のものを選定しその問題を解くことを中心として種々の数学的方法を發展させるように数学を組織すること」

実際に日本の改造運動の中で主張された「融合」は, 主として第1のものを除く3点に分類されるだろう。すなわち, 「方法の融通」, 「関数中心の再編成」および「問題解決の組織」である。

この佐藤の分類は、改造運動の展開の構造を分析していくうえで、重要な手がかりになると思われるのである。

「方法の融通」としての「融合主義」は、1902年教授要目に対する、もっとも素朴な批判である。ここでは教育内容自体の再編成はまだ明確に意識されていない。したがって1902年教授要目の枠内での批判にとどまるものであるといえるが、しかしまた代数でグラフを用いて方程式を扱ったり、幾何で座標を入れた空間の中で図形を扱うといった「融合」の研究は、内容自体を再編成する必要性の認識に至る契機となりうるものでもあったといえるだろう。

やがて、ペリーやクラインらの改革論が紹介されるようになると、関数の導入が課題となるのであるが、関数をあくまで「方法の融通」のレベルで位置付けようとするものと、関数それ自体を教えることをめざし、さらに「関数・微積分を中心とした教育内容の再編成」を主張するものとにわかれていく。後者の主張は、数学の歴史と構造の検討をその基礎においたことが特徴的であった。

ペリーの「実用数学」が卑俗な「実用主義」でないことはすでに検討した通りであるが、1902年教授要目に対する批判として、それが「実用的」ではないとの批判が、とくに微積分の自然科学・工学との深い関連を背景になされ、やがてペリーの改革論を引用しながらも、卑俗な「実用主義」の立場からの主張もみられるようになる。佐藤のいう「問題を解くことを中心とした数学の体系の組織」も、積極的には「発生的方法」にふくまれる側面をもちながらも、実用主義的にゆがめられる側面をも有しているのである。

1902年教授要目への批判から1942年教授要目の成立に至るまでの日本の改造運動は、「方法の融通」としての「融合主義」にはじまり、やがてこれが克服されて「関数・微積分を中心とした再編成」の主張がなされる。この主張ははじめ、数学の歴史と構造の検討にもとづく「発生的方法」に基礎づけられていたが、「時局」が「戦争に勝つための数学」をもとめるようになると、実用主義の立場から微積分の導入がもとめられ、前者は後者にくみこまれていく、というのがわれわれの仮説である。ただし、教育の「理念」が戦争に勝つためのものであり実用主義であっても、そのもとに実現された教育の「内容」がかならずしもそれを直接的に反映するとはかぎらないのであって、そこには独自の論理が存在するといえよう。教育内容研究の「連続性」もそのひとつであるとおもわれる。

註

- 1) 中谷太郎「日本数学教育史4・5」『数学教室』1966年8・10月号、国土社参照。
- 2) 須田勝彦「算数教科書論」『教授学の探究』第1号、1983年、北大教育学部教育方法学研究室参照。
- 3) 中谷太郎「日本数学教育史14」『数学教室』1967年7月号参照。中谷は1902年教授要目について、「算術の実用性、代数の汎通性（形式不易の原則・方程式中心主義）、幾何の論理的厳密性、三角法の総合性といういくつもの原則がまじりあい、矛盾しあって、生徒が、数学に対する統一的・系統的認識を得ることを困難にしていることは否定できない」と指摘している（31ページ）。
- 4) 小倉金之助は「各分科にはそれぞれその分科自身の研究方法があって、他の分科の研究方法をいうことを禁ずるという方針」を「私は便利のためこれを孤立主義と呼ぼう」と述べている。「数学教育の根本問題」1924年『小倉金之助著作集第4巻』1973年、勁草書房、17ページ。
- 5) 佐藤良一郎『初等数学教育の根本的考察』1924年、目黒書店、90～91ページ。なお、佐藤自身は「数学各分科の方法を思考経済の見地から選択し、一つの対象を考究するという目的の下に統合する」ことを主張している（94～95ページ）。

1 「方法の融通」としての「融合主義」

1902年教授要目に対する批判は、はやくも1902年に三守守が、また1905年には林鶴一が、「融合」的な幾何学教科書の執筆という形で行なっている。また、東京高等師範付属中学校の黒田稔、西川順之らにより1906～09年に作成された「融合」的な教授要目案が反響をよび、1911(明治44)年にはこの線に沿って教授要目の改正が行なわれている。

1911(明治44)年中学校教授要目 文部省訓令第15号

数学は、算術・代数・幾何及三角法に分ち各学年に対して教授事項を配当すと雖も常に相互の連絡を図りて教授し特に算術に関する複雑なる事項は代数及幾何を授くる場合に之を教授すべし

第一学年 毎週四時

算 術

尋常小学校に於ける算術との連絡を保ち整数・小数・諸等数・分数・歩合算の補習及練習を為さしめ且比例を授くべし

第二学年 毎週四時

代 数

負数、整数式(四則 一次方程式 約数・倍数)、分数式(約分・通分 四則 分数方程式)

第三学年 毎週五時

代 数

開方(開平 開立 二次方程式 無理式)

幾 何

直線(角 平行線)、直線形(三角形 平行四辺形)、円

第四学年 毎週四時

代 数

比例(比 比例 複比例 比例配分 混合)、級数(等差級数 等比級数)

幾 何

比例(比例線 相似形)

第五学年 毎週四時

代 数

対数、歩合算(歩合 利息)

幾 何

平面(平面と直線 二面角 立体角)、多面体(角嚮 角錐)、曲面体(円嚮 円錐 球)

三角法

三角函数(鋭角の三角函数 一般角の三角函数 二角の和及差の三角函数)、三角形の解法、簡易なる測量

注 意

- 一 数学は正確に理會せしむるのみならず計算に熟し応用に慣れしめんことを要す
- 二 算術に於ては暗算及筆算の外に珠算を併せ課するも妨なし
- 三 幾何に於ける軌跡・作図・面積及体積は適當なる場合に於て便宜之を授くべし

前文からは「相互の連絡を図りて」などと「融合主義」の影響を受けていることがよみとられるが、しかし内容的には1902年のものと大差ない。これは「方法の融通」のレベルにとどまるものであるといえよう。ただ、とくに算術など内容の指示が大まかになり、いわゆる「教師の裁量」の範囲が広がったといえなくもない。そして「注意」の三で、作図、求積等をあらたに教えてもよいことが示されている。もっとも、教科書のレベルにはほとんど反映されてはいないのであるが。

大正から昭和初期にかけて、のちに少しくわしく述べるが欧米の改造運動の紹介がさかんになり、文部省もこの時期（大正7および13年）に教授要目の改正に着手し、草案まで作成されるが、実施には至らなかった。¹⁾ この草案では「算術及代数」と「幾何及三角法」の2系列となり、内容的にも「長さ、面積及体積の測定」等が加えられている。また「注意」の中では「函数の変化及グラフに関して総括及補充するに際し微分積分の観念を与え、方程式を用いて幾何学的図形を考究する方法の一斑を授くるも可なり」と、微分積分がはじめて顔を出すなど、一歩進んだものではあった。

1911年教授要目が改正されたのは、20年後の1931（昭和6）年のことである。これは、中等教育の普及に伴い、中学校の教育課程を甲は4年から、乙は3年から、「実業」をふくむ第一種と、数学、外国語等を重視する第二種とに分けたことにもよる。

1931（昭和6）年中学校教授要目（第二種甲の場合） 文部省訓令第5号

本要目は算術・代数・幾何・三角法の区別をなさず単に教授内容を列挙するに止めたり而して其の取扱は或は之を分科し或は之を綜合する等教授者に於て任意工夫すべきものとす

第一学年 毎週三時

整数・小数・分数 正数・負数 一次方程式 幾何図形

第二学年 毎週三時

二次方程式 直線形 円

第三学年 毎週五時

分数方程式 比例 相似形 鋭角三角函数

第四学年 増課教材 毎週二時乃至五時

基本教材の補充 級数 対数

第五学年 増課教材 毎週二時乃至五時

平面及直線 多面体 曲面体 三角函数及其の応用 全課程の総括及補充

注 意

- 一 歩合算・軌跡・作図題・求積等は本要目に列挙せる事項に連関して適宜之を授くべし
- 二 第一学年に於ける幾何図形を教授するには立体の観察測定、平面図形の作図、模型の作製等に依りて空間に関する観念を明瞭にし且後学年に於ける学習の基礎たらしめんことに力むべし
- 三 教材は成るべく實際生活に適切なるものを選ぶべし
- 四 教授の際常に函数観念の養成に留意すべし
- 五 珠算は適宜之を課することを得

代数・幾何等に分けることをやめ、かつ項目を非常に大まかにしたことがこの要目の形式的な特徴である。しかし項目をみる限りでは1902年、1911年のものとほとんど同じであるといつてよいだろう。「注意」で「空間に関する観念」「函数観念の養成」がうたわれてはいるが、大正

期の改正草案の水準にも達していない。

小倉金之助は1931年教授要目に対して、この要目の「自由性」の悪用の危険を説きながらも、次のような評価を下している。

「この新要目は、種々の欠点を有するにもかかわらず、とにかく、それは確かに大いに進歩的なものであった。すなわち数学各分科の総合的取り扱いが認容され、直観幾何が採用され数値三角法が適当な地位におかれ、函数觀念の養成が説かれ、『教材はなるべく實際生活に適切なるものを選ぶべし』と述べられた。それは内容と方法とにおいて、よほど新鮮となり近代化された上に、教育の画一打破が主張された。」²⁾

たしかにこの要目は、改造運動の主張を部分的に取り入れた——というよりはむしろ「許容」したようにもみえる。しかし小倉自身もみとめているように、第一種と第二種のコース分けにより受験準備にいつその時間がさかれ、教科書も従来通り、いわゆる「分科主義的」なものでなければ、せいぜい「方法の融通」のレベルにとどまるものであった。

ところで、小倉の1931年教授要目に対するこのような評価は、それ以前のものととの比較においてなされたものであった。しかし小倉自身はすでに、中等数学教育の改革について「関数・微積分を中心とした再編成」の立場を表明しているのである。1931年教授要目は、小倉にとっては本来、この視点から批判すべき対象であったのではないだろうか。

註

- 1) 佐藤良一郎『改正教授要目と数学教育』1933年、目黒書店に、1924年の草案が紹介されている。この要目案について佐藤は、「少くとも各教材に対する考え及び教授上の注意に関しては、新要目(1931年教授要目——引用者)に当筈めてもさしたる不都合はない」(121ページ)と述べている。
- 2) 小倉金之助「数学教育の改造問題」1934年『小倉金之助著作集第4巻』1973年、勁草書房、346～347ページ。

2 関数・微積分中心の再編成としての「融合主義」

小倉の改革論について検討する前に、当時の状況について述べておこう。大正から昭和初期にかけて、欧米の改造運動関係の文献が、あいついで翻訳出版された。主なものを拾ってみよう。

- 1915 (大正4) 年 ベーレンドゼン、ゲッチング (独)、文部省 (森外三郎) 訳『新主義数学』上・下 (下巻は1916年)
- 1921 (大正10) 年 クライン (独)、林鶴一、武辺松衛訳『独逸に於ける数学教育』
- 1925 (大正14) 年 ボレル (仏)、佐藤良一郎訳『幾何学』
- 1926 (大正15) 年 ボレル、石井省吾訳『代数』
ペリー (英)、ムーア、ヤング (米)、鍋島信太郎編訳『数学教育の革新』
- 1927 (昭和2) 年 ラッグ、クラーク (米)、新宮恒次郎訳『初等数学の基礎』
- 1930 (昭和5) 年 ペリー、新宮恒次郎訳『初等実用数学』
- 1931 (昭和6) 年 ヤング、モルガン (米)、小倉隆訳『初等数学解析』

クラインの要目に即して書かれた『新主義数学』の訳が文部省によって出版されたことは、日本の改造運動を加速させることになった。1919 (大正8) 年、「日本中等教育会」から「日本中

等教育数学会」が設立され、林鶴一を初代会長として主に中等学校の教員を組織し、機関誌として『日本中等教育数学会雑誌』が発行された。また、小倉金之助『数学教育の根本問題』が出版されたのは1924（大正13）年であるが、この年には佐藤良一郎『初等数学教育の根本的考察』、また小学校の方では佐藤武『発生的算術新教育法』なども出ている。この時期に日本の改造運動は、「方法の融通」としての「融合主義」のレベルをこえる、あらたな視点を形成しつつあったのである。

小倉の数学教育改革論は、中等教育への微積分の導入を主張するという点ではペリーやクラインの改革論と共通しているが、しかし小倉は独自の論理を展開した。小倉は「純論理的に考えれば、数学は自然科学と全然独立なる科学である」¹⁾と強調したうえで

「しかしながらわれわれが数学教育を論ずるに当たって、十分に知らざるべからざるは、むしろ発生的方面のことである」²⁾

と、「発生史」に着目し、³⁾ 数学の発達には自然科学に負うところ大であるとする。そして自然科学の目的を、小倉は「因果の法則」⁴⁾の発見にもとめたのであった。さらに小倉は、因果関係を発見しようとする努力、精神を「科学的精神」と定義し、次のように結論する。

数学教育の意義は科学的精神の開発にある⁵⁾

また「数学上函数の概念こそ最もよく科学的因果関係を語るもの」⁶⁾であるとして

数学教育の核心は函数概念の養成にある⁷⁾

と主張したのであった。

小倉に特徴的な点は、第一には「因果関係」——「科学的精神」を強調したことにある。そして第二の特徴は、因果関係でとらえ切れない現象に対して、「統計法の中心たる相関関係」⁸⁾の研究を関数と同様に重視した点にある。小倉の要目案には統計が位置付けられ、これはペリーやクラインとはもっとも異なるところである。なお、微積分については次のように述べている。

「あの平易な微積分の概念こそ、本当に人生に必要な数学の行くべき道を示しているのです。ここまで来て初めて数学の科学的精神が高調されるんです。あのニュートンの認めた光、近代科学の本当の意味が、ここでようやくハッキリと解ってくるんです。国民の常識として近代文明の意味を理解する必要があるものなら、微積分の概念は必ず中等教育の中にはいらねばならぬものです。」⁹⁾

微積分をやはり「教養」として捉え、かつ「科学的精神」として捉えたのも小倉の特徴といえよう。

小倉が『数学教育の根本問題』において示した中学校教授要目案は以下の通りである（×印は「できるだけ簡単にせよとの注意」）。¹⁰⁾

第 一 学 年

第 一 部		第 二 部	
一 学 期 (3)	×整数および小数の四則 ×単位の変換 ×整数の簡単な性質 近似値に関する注意 簡単なグラフ ×分数、平均値 統計上のグラフ	一 学 期 (2)	定規の使用、直線、長さ、距離の測定 直角定規の使用、直角、矩形、正方形 面積の測定、グラフ 方柱、立方体、体積の測定 重さの測定、グラフ 分度器の使用、回転、時計 コンパスの使用、円 三角形の作図、合同の定理 円壩、円錐、球 立体の模型、展開面
二 学 期 (2)	文字の導入(正数のみ)、公式 ×比および比例、比例のグラフ 挿入法 日常生活上のグラフ 平方、立方、平方根、立方根および逆 数の表の使用法	二 学 期 (3)	
三 学 期 (合併 5)	平行移動、平行線、三角形の角の和 平行四辺形、その面積、三角形の面積、グラフ ピタゴラスの定理、応用、グラフ 相似形、相似三角形の定理、相似形の面積 円の面積、円周の長さ、グラフ 円壩、円錐、球の体積、グラフ 対数表の使用法、算術および幾何への応用		

第 二 学 年

第 一 部		第 二 部	
一 学 期 (2)	正数および負数の四則 等速運動、線分の内分外分その他の例 代数式、種々の公式 簡単な方程式 ×単項式および多項式の加減乗法、多項 式を単項式で割ること	一 学 期 (3)	×三角形、作図、計算 ×平行四辺形、作図、計算 対称図形、作図、計算 多角形の面積、作図、計算
二 学 期 (3)	一元一次方程式 応用問題 座標、二点間の距離、その他幾何学上の 応用 函数の概念、グラフ 函数とグラフの雑問題 一次整函数(直線)	二 学 期 (2)	×三角形の比例線、作図、計算 × $x=\sqrt{a^2+b^2}$ $x=\sqrt{a^2-b^2}$ $x=\frac{bc}{a}$ 等の作図 (以上順序不定)
三 学 期 (2)	正比例直線の勾配 変化率 $\frac{\Delta x}{\Delta y}$ グラフの応用 反比例 $y=\frac{k}{x}$ グラフの応用、二つのグラフの比較 物価指数その他	三 学 期 (3)	×円の中心角 ×円弧、×弦、×割線 割線の極限としての切線 作図、計算

第 三 学 年

第 一 部		第 二 部	
一 学 期 (合併5)	×軌跡、軌跡の方程式 $x^2 + y^2 = a^2$, $ax + by = c$, 不等式 軌跡の交り、×作図題、二元一次方程式、応用問題 直線への応用 平行移動 ($x' = x + a$, $y' = y + b$) 横線、縦線の伸縮 ($x' = x$, $y' = ky$等) 楕円 対称、相似にして相似の位置、$y = x^2$, $y = ax^2 + bx^2 + c$, 相似形の面積 面積の近似計算		
二 学 期 (3)	一元二次方程式の解法、応用問題 幾何学的作図 ($x^2 + ax - b^2 = 0$) 等 軌跡の交り、標準曲線 二次の不等式 微分概念による拋物線の切線、二次 三項式の変化、極大、極小、拋物線、速度、加速度 応用	二 学 期 (2)	鋭角の三角函数、実測 三角函数表の使用 幾何学上の応用、測量上の応用 $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$, $\tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$ $\sin(90^\circ - \theta) = \cos \theta$等 ×正多角形、辺および面積 円周の長さ、円の面積 弧度法、小なる角の三角函数
三 学 期 (2)	$y = x^3$, $y = ax^3 + bx + c$, (微分の思想とグラフ、切線) グラフによる三次方程式 標準曲線 応用 統計上のグラフ、分布曲線	三 学 期 (3)	×一般角の三角函数、グラフ ×三角形の公式および解法 ×幾何学上の応用 単弦運動、単弦波の合成 統計学における移動平均 (moving average) とその応用

第 四 学 年

第 一 部		第 二 部	
一 学 期 (3)	×等差級数、×等比級数 Σn^2 拋物線 $y = x^2$ の面積 (積分への入門) 指数函数 対数函数 計算尺 応用 複利、年金 関係的变化率 自然科学への応用 簡単な実験公式	一 学 期 (2)	立体の射影像 平行射影、両面射影 射影の面積、楕円 曲面の水準曲線、曲線の群 (等温線、等圧線等) ×角溝および円錐、表面積、体積、投影法 ×角錐および円錐、表面積、体積 (積分への入門)、投影法 球の体積および面積(積分)、投影法、 経緯線、地図への応用 平面および立体幾何の実用
三 学 期 (5)	これまで現われた函数および曲線の総括 微分法とその応用の回顧、($y = ax + b$, $y = ax^2 + bx + c$, $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$) 微分の逆としての積分、(a, $ax + b$, $ax^2 + bx + c$ の積分) 面積、×和の極限としての積分、回転体(円錐、球、回転楕円体)の体積、自然科学上の応用 応用方面より観察せる数学全体の回顧		

この要目案は関数・微積分を中心に編成された、画期的なものである。等速運動、速度、加速度、単弦運動などがふくまれ、また統計も位置付けられるなど、小倉の数学観が反映されている。この要目案からみれば7年後の1931年教授要目がいかに内容が古いか、明らかであろう。

小倉はその後『家計の数学』（1938年、岩波）など統計関係の著作は多いが、中等教育の教科書等を書いていない。しかし微積分に関しては『数学教育の根本問題』出版直後の1925・26年、日本中等教育数学会第7・8回総会であわせて次の3本の研究発表が行なわれている。

石沢藤吉「中等学校に於ける微積分教授の実際」（第7回総会）

清水清「函数変化より微積分へ」（同上）

寺崎久造「中学校に於ける微積分」（第8回総会）

石沢報告は「中等学校には理性開発上最も有効なもの」として微積分を教えた報告で、「実験と図形とによって公式を導き之が実用につとめて居る」¹¹⁾と述べているが、この「実用」についての説明が注目されよう。

「実用と申しまして工業上必要なる計算を授くる意味ではありません。一般に取り扱う量の変化に緻密な思考をめぐらすことと実測し得る量の範囲に伴い省略し得る数の限界を知り之が取扱いを練ること（以下略）。」¹²⁾

これはペリーにおける「実用」と同様であるといえる。

また寺崎報告は「代数や平面幾何や立体幾何をして一層意義あらしむるために微積分の思想を加味して数学思想を進歩せしめ」¹³⁾たいとして、「代数函数にのみ限」って微積分の初歩の指導についての提案を行なっている。このように、大正末頃には「関数・微積分を中心とした教育内容の再編成」の試みがはじまり、「方法の融通」のレベルの「融合主義」を克服する視点が提起されたのであった。

しかし、20年ぶりに1931年に改正された教授要目は、前述のようにきわめて不十分なものであった。これを批判し新しい教授要目をもとめる動きは、戦時体制への移行期にあたって、主として実用主義の立場から展開されたのである。

註

- 1) 小倉金之助「数学教育の根本問題」1924年『小倉金之助著作集第4巻』1973年、勁草書房、73ページ。
- 2) 1), 73ページ。
- 3) この時期、小学校の方でも「発生的」研究のとりくみがみられる。須田勝彦「算数教科書論」『教授学の探究』第1号、1983年、北大教育学部教育方法学研究室参照。
- 4) 1), 78ページ。
- 5) 1), 112ページ。
- 6) 1), 113ページ。
- 7) 1), 112ページ。
- 8) 1), 80ページ。
- 9) 1), 130ページ。
- 10) 1), 131～141ページ。
- 11) 『日本中等教育数学会雑誌』第7巻4号、1925年、181ページ
- 12) 同上、181ページ。
- 13) 同上、第8巻4号、1926年、210ページ。

3 問題解決の組織としての「融合主義」

数学の歴史と構造の分析から、関数・微積分を中心とした教育内容の再編成の視点をみちびくことが「発生的方法」であるとすれば、とくに数学史とかかわって、「問題解決」の過程から数学的概念を形成することもまた、「発生的方法」にふくまれるだろう。しかし、「問題解決」が概念の形成と切り離されたとき、それは卑俗な実用主義におちいらざるを得ない。

1937（昭和12）年の日本中等教育数学会第19回総会中学校部会では「現行中学校数学科教授要目を改正する要なきか」が協議題とされ、討議の中で改正案が作成された。¹⁾これは「微積分の概念」や「確率の概念」を5年生の増加教材に入れたもので、前述の小倉案ほどではないが積極的なものであった。そして、同じ第19回総会で竹村弘が「国防と数学教育」という題の報告を行なっているのが注目される。竹村は「現代の国防には自然科学及び技術を大いに振興せしめねばならないが、之は基礎学としての数学を十分教えなくては不可能である」との立場から、「戦場では兵数、距離、角、時間等の兵器取扱上の数値、軍需品の量等すべて数量に関した多くの事項を正確且つ迅速に処理せねばならぬ」²⁾などと、戦争に必要な数学について述べているのである。

さらにその後も、以下のような論文が『日本中等教育数学会雑誌』に掲載されている。

第20巻（1938年）曾田梅太郎「国家発展の基礎としての数学教授」

第21巻（1939年）勝野井靖美「実用主義の徹底」

清田金三郎「時局下に於ける数学教育」

第22巻（1940年）水内金太郎「時局下に於ける数学教育」

鈴木長蔵「軍事上数学の応用に関する吾が経験」（総会講演）

第23巻（1941年）守田勝彦「航空工業教育に於ける数学の構造に関する一調査」

第24巻（1942年）島田茂「数学教育再構成の一つの方向」

林五郎「翼振れの話」

第25巻（1943年）小西勇雄「飛行機を撃墜するには」

これらに共通するのは、戦争遂行のためには数学が必要であり、既成の数学の中から役立つものを選ぶこと、また、役立つように使うことが、主張されたことである。ペリーの「実用数学」（practical mathematics むしろ「実践的数学」）とは異なり、ここでいわれる「実用性」は文字通り実際に役に立つという意味に他ならない。勝野井論文は「数学の実用性を強調し、実用的価値ある材料から出発すべきである」とし、「実用的教材に依ってこそ初めて、数学の論理性を知ることが出来、科学的精神を発揚することが出来るのである」³⁾という。

しかし、この中にも「発生的」視点がみられなくもない。たとえば島田茂「数学教育再構成の一つの方向」がそのひとつである。島田は「色々な概念が、現実の問題から如何に抽象して構成されるか、それが如何なる範囲に現実に応用されて行くかという思考の過程を生徒に体認させ得る様に再構成さるべきである」として「この目的にかなう様に教材を配列し、内容を構成する事が第一の問題である」⁴⁾と述べている。ここには問題解決の過程から数学的概念を形成するという視点がみられるのである。しかし「問題」の設定のしかたについてみれば、島田は「国民学校に模型飛行機が取り入れられ」たことから「航空機の理論を中等学校に取入れることを主張したい」と述べ、「力の釣合」にはじまって「揚力」「抗力」「迎角」等へと展開

している。⁹⁾これは、「現実の問題」の設定を、数学的内容の設定に優先させるという、まさに実用主義的な教育内容編成論にほかならない。

もっとも、戦時体制下においても「実用主義」の主張ばかりがなされていたわけではなかった。この時期にもとくに以下のようなすぐれた研究をみることができる。

第17巻 (1935年) 佐藤三郎「中等教育数学に微積分の初歩を加えよ」(第17回総会発表要項)

第24巻 (1942年) 山本博之「中学校に於ける微積分教授」(第23回総会発表予定要項)

第28巻 (1946年) 大照完「中学校に於ける微積分教授の二つの要点」(第25回総会発表要項)

「殊に科学の応用の広い軍事兵器については世界を相手にしようとする今日、誰に縋り何処を頼みますか。自ら発明し自ら創造してゆくより外に発展の途がないではないか」⁶⁾(佐藤)、「(中学校への微積分の初歩の導入により—引用者) 数学教育は一期を画し二期を画して、皇運扶翼の旗の下に現代化されるものと言えろ」⁷⁾(山本)などと、時代を反映した前書きはありながらも、「中等程度でその概念だけを与えて置けば、愈ほんとうに微積分を学ぶ際の理解が早く且つよく解ろう」⁸⁾(佐藤)、「考察処理の対象として連続的に変化する事象にぶつかった時、その解決の方法に即して自然に極限の観念が生れその方法を発展せしめる裡に、従来微積分と呼ばれて来た数学の一分科の初歩の部分が自然に構成されるに到するという立場を取るべきである」⁹⁾(大照)というように、微積分を中等段階で一般教養として教える方向で、「発生的」視点からの検討がなされているのである。これらは、1920年代の石沢らの研究を継承するものといえよう。

戦時体制下における中等数学教育は、その「理念」においては「実用主義」であったが、「内容」においては、「発生的」視点にもとづく関数・微積分中心の再編成の立場からの研究もつづけられていた。そして、この「対立」が顕在化されないまま、1940年の数学教育再構成研究会の発足、そして1942年教授要目の成立へと展開していくのである。

註

- 1) 『日本中等教育数学会雑誌』第19巻 5号, 1937年, 373~375ページ。
- 2) 同上, 第19巻 6号, 432ページ。
- 3) 同上, 第21巻 3号, 1939年, 136ページ。
- 4) 同上, 第24巻 1号, 1942年, 6ページ。
- 5) 4), 7~14ページ。
- 6) 同上, 第17巻 6号, 1935年, 390~391ページ。
- 7) 同上, 第24巻 2号, 1942年, 80ページ。
- 8) 6), 396ページ。
- 9) 『日本数学教育会雑誌』(誌名変更) 第28巻 1号, 1946年, 13ページ。

第2章 教育内容構成の視点

中等学校の数学教育課程に微積分を導入する際、高等教育の内容の初歩的な部分をそのまま導入することを避けるとすれば、教育内容構成のレベルにおいてもあらたな視点がもとめられる。従来の中等数学教育史の研究において、この側面からの検討はほとんどなされてこなかった。「融合主義」といった、教育課程編成論および教育内容構成論の両レベルにまたがる漠然としたカテゴリーによっては、中等教育における微積分の内容構成に関する当時の研究の進展

の過程を把握することは困難である。

前章で、教育課程に微積分を導入する論理について検討したが、数学の歴史と構成の研究をふまえての、微積分を中心とした再編成の主張は、教育内容構成における「発生的方法」の提唱をとまなうものであった。そして、この方法こそが、実用主義の影響を受けつつも基本的な視点としては、微積分の内容構成に関する研究において、有効なものであったといえよう。

第1節 「量」と微積分——力学との関連

微積分の「発生的」側面からも、また「実用的」側面からも、力学との関連をどのように捉え、教育内容の構成にどのように反映させるかという問題を避けて通ることはできない。この問題の解決の仕方として、大きく分けて二つの方法が採用された。ひとつは、力学とは一応別に、数学的概念としての微積分の概念を与え、それを力学的な素材に「適用」させるという方法であり、もうひとつは、力学的素材を提示し、その法則性の把握から微積分の概念を導くという方法である。

クラインは、基本的には前者の立場であったといえよう。クラインは『高い立場からみた初等数学』において、微積分を「無限小」計算としての側面から考察している。このことはもちろん、彼の「発生的方法」に位置付くものであるが、しかし微積分学成立のひとつの契機としての力学の役割についてはほとんど触れていない。クラインは次のようにいう。

「われわれは $y=f(x)$, $\frac{dy}{dx}$, $\int ydx$ という記号であらわされる概念が、(中略)生徒たちにとって親しいものになることを切望している。だから、14, 15歳の生徒に関数 $y=ax+b$ (a , b は定数)や $y=x^2$ を方眼紙に書かせて詳しく取り扱わせ、傾きや面積の概念をゆっくり発展させることから始めるべきである。」¹⁾

傾きや面積による微積分の「概念」が親しいものになってから、力学等の素材に適用するというのがクラインの内容構成論である。

クラインの指導のもとに書かれたベーレンドゼン、ゲッチング『新主義数学』も、微積分は直線の向上率から曲線の向上率、さらに計算によって向上率すなわち微分商を求めることから始まる。そしてそのあとで「微分商の別意義」として、運動の速度や加速度を扱うのである。

「等加速度運動に於ては各瞬間に対して経過せる行程は次の函数式にて表さる。

$$s = \frac{a}{2} t^2$$

茲に a は加速度即単位時間 (例えば 1 秒) に於ける速度の常増加を表す。(中略)速度は精々商 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ によりて唯近似的に与えらるるのみ。(中略)真の速度は次式によりて与えらるべし。

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

然るに此極限値は行程を時間の函数として考えた時の微分商 $\frac{ds}{dt}$ に外ならず。故に等加速度運動に於ける速度は

$$v = \frac{d\left(\frac{at^2}{2}\right)}{dt} = \frac{2at}{2} = at$$

ならざるべからず」。²⁾

ペリーの『初等実用数学』も、微分法は直線の勾配より曲線の勾配を考えることから始まる。しかしそれに続いて、時間と距離のグラフの勾配が速さを表わすものとして計算し、瞬間の速さの概念と、微分係数の概念とを同時に導入する。

「例題 ユーストン去った汽車の運動は、

$$s=300t^2$$

のようである。但し s はユーストンからの哩数であり、 t は同地を去ってからの時間数である。

0.1時間の終りに於て、汽車の速度毎時 v 哩を求めよ。」³⁾

ペリーは、「実際の速度」は平均の速度 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ の極限值 $\frac{ds}{dt}$ であるとし「即ち t が増加するときの s の変化の割合であって、換言すれば t に関する s の微分係数であり、之を時間 t における速度と呼ぶ」⁴⁾としている。これは、速度と微分係数を混同しているのではなく、むしろ物理学的概念である速度と、その数学的表現である微分係数との関係を示そうとしたものである。ペリーの場合は、実在の法則から数学的概念を導くという後者の立場に接近しているといえよう。

さらにこの立場をおしすすめたと考えられるのは清水清である。清水は1925（大正14）年の日本中等教育数学会第7回総会において、注目すべき研究発表を行なっている。彼は「微係数の概念は学理的に定義された明確なものを得るまでには種々の順序をふんで分解的に先ず其の概念を養わねばならない」として、「微係数の思想は坐標を離れた日常生活に於て此の考えにふれしむることを得ると思います」⁵⁾と述べている。すなわち、「グラフの傾き」から微分法に入るのではなく、速さの概念から入ることを主張しているのである。

「例えば一時間に30哩の速度で走って居るということは現在から一時間後に30哩の地点に達すると言う意味の様に取易いが実は左様な意味ではなく斯の如き数値的割合の速さで目前を通過しつつあると言う事になります。尚次の如くすれば増量の意味を分解的に授け入れる階段となります。

$$\text{時} \quad -\frac{1}{30}, -\frac{1}{60}, -\frac{1}{90} \cdots 0 \cdots \frac{1}{120}, \frac{1}{90}, \frac{1}{60}, \frac{1}{30}$$

$$\text{哩} \quad -1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{3} \cdots 0 \cdots \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1$$

x 時間中に進行した距離を y 哩とすれば現在より経過したる時間(正, 又は負)が如何に小

なりとも $\frac{y \text{ の変化 }}{x \text{ の変化 }} = 30$ にして、此が目前を通過した瞬間の速度と言うことが出来る。」⁶⁾

ここでは、等速運動における速さの概念が、正しく捉えられているということだけでなく、当時、関数を教えることをグラフを扱うこととほとんど同一視するものが多かった中で、微積分を幾何学的概念から切り離して捉え、それにかえて運動の解析から微分法を導入するという視点が明確にうち出されている。

また、積分について清水は、「大別して微分の逆算として進むのと和の極限として進むのと二方面」あり、「多くの著書は微分の逆として論じ然して後和の極限との関係が種々な方法によって比較してある様に見られ」るが、「私は積分の観念を明確にすること及び中等学校では積分によって種々な和を求むることを主としたい」⁷⁾として、和の極限から入る方法を採用する。そのために清水は、運動する物体の進む距離を求めることから、積分法を導入するのである。

「問題 静止の状態にある列車が44秒間に44ft/secの速度に達したとき44秒間に進行した距離は何程になるか。」⁸⁾

この問題は、まず1秒ごとの区間に区切り、進んだ距離を上下から近似し、さらに時間を $\frac{1}{2}$ 秒、 $\frac{1}{10}$ 秒ごとに区切っていく。そしてその極限として $\int_0^x x dx$ や $\int_0^x x^2 dx$ を代数的に求めるのである。

清水の、接線・面積によらない微積分指導の方法は、戦時体制下の運動の中でもある程度継承されている。1942（昭和17）年に山本博之は、ニュートンが「運動学的に微積分を建設した事は教育上銘記せねばならぬ」⁹⁾として、次のように述べている。

「直線運動の速度の考察はニュートンが之より微積分を建設したのであるが、生徒には甚だ興味あり、必要感に迫られる。又経験によりて、予想外に納得の行くものである。勾配より入るか速度よりするか、生徒による建設の立場からすれば後者であろう。」¹⁰⁾

ここでいう「生徒による建設の立場」とは、「我が国独自の精神、独自の形態」¹¹⁾による数学教育に位置付けられたものではあるが、山本はクラインを参考に数学史を説くなど、「発生的方法」を意識してこのように述べているものと思われる。しかし、積分については微分の逆演算として導入するとしており、必ずしも一貫していない。

ともかく、微積分を運動に「適用」することから、さらに運動の解析を通じて微積分を導入することにより、関数＝グラフという認識を克服してきたのが、1920年代以降の改造運動の流れであったということができらるだろう。

註

- 1) クライン、遠山啓監訳『高い立場からみた初等数学』1960年、東京図書、299ページ。
- 2) ペーレンドゼン、ゲッチング、文部省訳『新主義数学下巻』1916年、国定教科書共同販売所、344～345ページ。
- 3) ペリー、新宮恒次郎訳『初等実用数学』1930年、山海堂、199ページ。
- 4) 3)、200～201ページ。
- 5) 清水清「函数変化より微積分へ」『日本中等教育数学会雑誌』第7巻4号、1925年、184ページ。
- 6) 5)、184～185ページ。
- 7) 5)、188ページ。
- 8) 5)、189ページ。
- 9) 山本博之「中学校に於ける微積分教授」同上、第24巻2号、1942年、83ページ。
- 10) 9)、84ページ。
- 11) 9)、80ページ。

第2節 微分法と積分法との関連——基本定理の位置付け

数学史における微積分学の成立の指標を、微分法と積分法とが互いに逆の演算であることの発見におくとすれば、微分法の逆演算として積分法を導入するやり方は、たしかにひとつの方法であろう。しかし、積分法はそれ自身、微分法とは独立に生成・発展してきたものであって、このやり方だけが正当ではないはずである。

この問題は、積分法の内容構成のあり方と不可分であり、原始関数、不定積分、定積分の、

三つの積分を、どのような順序で構成するか、さらに、微分法とどのように関連させるかという問題に収れんされるものである。

ペリーの積分の導入は、原始関数を求めることから始まる。

「時々吾々は積分する事を要求される。即ち $\frac{dy}{dx}$ が与えられているときに y を求める事を要求される。」

「 α の積分は αx であり、 βx の積分は $\frac{1}{2}\beta x^2$ 、 γx^2 の積分は $\frac{1}{3}\gamma x^3$ である。」¹⁾

そして「積分の応用」として面積が扱われ、微分法と積分法の関係が示される。図の HPEG の面積を A とし、動点 $P(x, y)$ の x 座標の関数とすると、 $EE' = \Delta x$ として、

「 ΔA は面積 $PP'EE'$ である。

併し、 Δx が漸次小さくなるに従って、

$$\Delta A = PE \times \Delta x = y \cdot \Delta x$$

は益々真である事を知る。故に

$$\frac{dA}{dx} = y.$$

即ち、曲線の縦線は、其の面積の微分係数である。換言

すれば、曲線の面積 A は曲線の縦線 y の積分である。」²⁾

積分に関しては、ペリーは求積から入り、運動については例題で $v = at + c$ (v : 速さ, a : 加速度, t : 時刻) の積分が $s = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + s_0$ (s : 位置) であることをとりあげているにとどまっている。それはともかく、ペリーの積分法の構成はこのように、原始関数から、求積が微分の逆演算であることを示し、定積分へと展開していくのである。

なお定積分は面積を求めることから導くのであるが、「積分の記号」のところでペリーは、 x と y の表から $y \cdot \Delta x$ を求め、次のように説明している。

「 $\Sigma y \cdot \Delta x$ は細長片の面積の総和を意味する。ここにギリシヤ文字 Σ 即ち「シグマ」 Σ は「同様な総ての項の和」を表わすに用いられる。吾々が或る面積を正確に知るとき、即ち無限に狭い細長片を無限に多く集めるときには、 Σ の代りに英文字 s の長文字即ち $\int$ を用いる。」

「比等の場合に s 或は Σ を用いるのは『加え合す』(sum up)の頭文字をとったものである。」³⁾

ペーレンドゼン、ゲッチングもまた同様に

「されば x に従属して変ずる面積 J は当に曲線函数 $f(x)$ の積分函数と云うべきなり。此関係を

$$J = \int f(x) dx$$

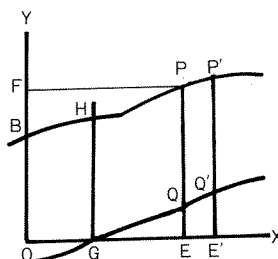
という記号を以て表し、之を『 J は $f(x) dx$ の積分に等し』と読む。」⁴⁾

として、積分関数 (不定積分)、さらに定積分へと展開していくのである。ここでも

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_0^a f(x) \Delta x = \int_0^a f(x) dx$$

という定積分の定義の際、ペリーと同様の、記号の意味の説明がなされている。

これらの、微分法の逆演算としての積分法の導入に対して、和の極限、すなわち定積分から導入することを提唱したのが、前節でも述べたように、清水清であった。清水は「積分の観念を明確にすること及び中等学校では積分によって種々な和を求むることを主としたい」とし



て、次のような順序を提起したのである。⁵⁾

1. 和の近似計算をなさしむること
2. 近似計算より和の極限を肯定せしむること
3. 代数的に積分の値を求むること
4. 求め得た積分を x の函数として其を微分し、原函数と比較せしむること
5. 一般に微分と積分との関係を考えしめること

清水は「学理として厳密な積分学をやるにしても学生を指導する以上は之だけの順序を与え」⁵⁾ 必要があると述べている。

前節で引用したように、清水の積分法の指導は等加速運動する列車の進行距離を求める問題からはじめられる。ここでは $\int_0^{44} x dx$ を、 $\Sigma x \Delta x$ の極限として近似し、数列の和の公式から

$$\int_0^x x dx = \frac{1}{2} x^2, \quad \int_0^{44} x dx = \frac{1}{2} (44^2) = 968$$

と、不定積分、定積分を求めるのである。また

$$\int_0^x x^2 dx = \frac{1}{3} x^3, \quad \int_1^4 x^2 dx = \int_0^4 x^2 dx - \int_0^1 x^2 dx = \frac{4^3}{3} - \frac{1^3}{3} = \frac{65}{3}$$

と求め、不定積分を微分するととの関数になることを確かめる。最後に面積関数の変化率が y 座標に等しいことから、面積関数 Z について $\frac{dZ}{dx} = y = x^2$ とすると

「 $\frac{dZ}{dx} = x^2$ となるべきにより Z は x の函数にして微分すれば x^2 となるべきものである。

$\frac{1}{3} x^3$ を微分すれば x^2

$\frac{1}{3} x^3 + 2$ を微分すれば x^2

$\frac{1}{3} x^3 + 5$ を微分すれば x^2

一般に $Z = \frac{1}{3} x^3 + C$ を微分すれば x^2 となるべきものである。

$$\therefore \int_a^x x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 + C \quad \text{「}^6\text{」}$$

また $x = a$ のとき $Z = 0$ となるから、 $\frac{1}{3} a^3 + C = 0$, $C = -\frac{1}{3} a^3$, $\therefore \int_a^x x^2 dx = \frac{1}{3} x^3 - \frac{1}{3} a^3$ 。

「故に $\int_a^b x^2 dx$ を求めるには微分して x^2 となる函数の一つ $\frac{1}{3} x^3$ をとり其れに b の値を入れた

ものより a を代入したるものを減じたるものとも見ることが出来る。故に $\frac{dZ}{dx} = x^2$ となるべき

$\frac{1}{3} x^3$ を求むることを不定積分といい $\int x^2 dx$ と書き表し此に対し a より b までの範囲の積分を定積分という。」⁷⁾

清水は原始関数 $\int x^2 dx$ を「不定積分」といい、本来の不定積分 $\int_a^x f(x) dx$ には名前を付けていないが、⁸⁾ ともかく和の極限としての定積分から入り、上端を変数にすることによって不定積分を代数的に求めるという構成により、 $\int_a^x f(x) dx$ と $\int f(x) dx$ とが正しく区別されて扱われている

ことは注目される。

1926 (大正15) 年の寺崎久造の研究発表も、定積分から入っているが、1935 (昭和10) 年の佐藤三郎、1942 (昭和17) 年の山本博之の研究は原始関数から入るものであった。

一方、柴垣和三雄は『実践数学』⁸⁾ (1934=昭和9年) において、微分法の前に定積分を扱うという構成をとっている。この本の第8章、「微分積分の方法の基礎」の構成を引用しておこう。

第一節 積分

1. 面積としての積分 2. A_a^b の存在及び解析的な式 3. 定積分の例 4. 積分の一般定義及び記号 基本定理 5. $\int_a^b f(x) dx$ の性質 6. $x^m, \sin x, \cos x$ の積分 7. 立体の体積 (積分の応用)

第二節 微係数 (略)

第三節 微係数の応用 (略)

第四節 導関数 高階の微係数及び導関数 (略)

第五節 不定積分, 基函数及び微分積分法の基本定理

20. 積分 $\int_a^b f(x) dx$ の上端 b を変数と見ること 不定積分 21. 不定積分の導関数 22. 基函数 23. 基函数を用いて定積分を求める基本定理

柴垣はこの順序を採用した理由については触れていないが、竹内端三が「序言」で次のように述べている。

「本書では微分法を説く前に積分を述べてある。普通の教科書などの順序とは違う。併し数学史を按ずるに面積や体積の計算が微分法よりも先に考えられたことは東西ともに其揆を一にする。されば実践を標榜する著者がこの自然的順序を採ったことは当然であろう。」⁹⁾

積分の先行は、単に歴史的順序によるだけではなく、論理構成のあり方としても積極的なものをふくんでいるといえよう。また清水の構成も、積分先行としても不都合が生じないうえに、積分によって距離 $S(t)$ を求め、これを用いて不等速運動の速度を扱うことも可能になるのである。

註

- 1) ペリー, 新宮恒次郎訳『初等実用数学』1930年, 山海堂, 204ページ。
- 2) 1), 208ページ。なお, ペリーは増分記号として δ を用いているが, Δ にあらためた。以下同様。
- 3) 1), 211ページ。
- 4) ベーレンドゼン, ゲッチング, 文部省訳『新主義数学下巻』1916年, 国定教科書共同販売所, 348~349ページ。
- 5) 清水清「函数変化より微積分へ」『日本中等教育数学会雑誌』第7巻4号, 1925年, 188~189ページ。
- 6) 5), 194ページ。
- 7) 5), 195ページ。
- 8) 柴垣和三雄『実践数学』1934年, 丸善。
- 9) 8), 2ページ。

第3節 「無限小」の概念——微分法の導入

中等学校で微積分を教える際、もっとも問題となることのひとつに「無限小」の問題がある。すなわち、極限をどのように扱うかという問題であり、端的には、微分係数の計算における極限移行の扱い方にあらわれるものである。

数学史のうえでは、ライプニッツ流の「0であって0でない」実体的存在としての「無限小」は神秘的なものとし、19世紀になってコーシーにより極限概念が確立されてはじめて微積分学が基礎づけられたとされる。しかし、コーシー流の極限概念—— ϵ - δ 論法を中等教育で扱うことにはならなかった。

ペリーの極限の説明はいささか混乱している。『初等実用数学』では、 $s=300t^2$ の微分について、 $s+\Delta s=300(t+\Delta t)^2$ から次の式を得る。

$$\frac{\Delta s}{\Delta t}=600t+300\cdot\Delta t$$

「吾々が、或る事物が『限りなく小さくなる』と言うときには、それが『0となる』事を意味する。即ち零を表わす。故に極限に於て $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ は真に $600t$ である。 Δt が漸次小さくなるとき、 $\frac{\Delta s}{\Delta t}$ の極限値を $\frac{ds}{dt}$ と呼ぶ。」¹⁾

ところが、このように述べながらペリーは、次のようにもいう。

「“ Δs を0ならしめ、又 Δt を0ならしめよ”と言ってはならない。何となれば、0で0を割る事は何事をも意味しないからである。」²⁾

増分 Δt について、一方では「0となる」としながらも、他方ではそれを否定するのである。

ベーレンドゼン、ゲッチングもまた、苦しい説明を行なっている。

「真の向上率は其近似値 $\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{f(x+\Delta x)-f(x)}{\Delta x}$ に於て Δx を任意に十分零に接近するものと思うことにより之を得。当面の差商が $\Delta x=0$ となる際に到達する所の極限値は即真の向上率を表す。」³⁾

「限りなく小さくなる」「任意に十分零に接近する」という言い方では極限値には「到達」できず、やむなく「0となる」といわざるを得なかったのであろう。

クラインはこの問題に関して、すぐれた歴史的考察を行なっている。ここでの基調となっているのは、現在の解析学がコーシー流の極限概念によって基礎づけられているにもかかわらず、アルキメデス以来の「不可分量——現実的無限小」によって、求積法が発展し、また、ライプニッツの微積分の体系がつくられたことの強調である。少しくわしくみていこう。

「今日の科学的な数学は、いままで概観してきたような（ニュートンからコーシー、ワイエルシュトラスに至る——引用者）一連の発展の上に築かれている。しかし微積分という本質的に異なった概念は、数世紀にわたってこれと平行に走ってきたのである。」⁴⁾

このように述べてクラインは、極限による微積分に「平行に走ってきた」、不可分量——現実的無限小による微積分について考察している。

連続体を究極的に分割不可能な微小部分からなっているとする考えは古代から存在し、スコラ学派等によってひろめられた。この特徴的な例としてクラインは、カバリエリの『連続的不可分量の幾何学』（カバリエリの原理——底面から同じ距離の断面積がすべて等しいとき、こ

の2つの立体の体積は等しい——が述べられている)をあげている。

「微積分学の創始者の栄誉をニュートンとわかっライプニッツもまた、この考えを使った。彼の思考のもとになったのは、極限として考えられた微分商ではなかった。彼においては変数 x の微分 dx が、横座標軸の究極的に分割不可能な部分、つまりいかなる有限量よりも小さく、しかも0ではない量(現実的無限小量)として現実存在していたのである。(中略)不可分量の理論によって、曲線 $y=y(x)$ と横軸で囲まれた面積は個々の座標 y の和である。ライプニッツが、積分についての彼の最初の手稿の中で、 $\int ydx$ と書かずに $\int y$ と書いたのは、この見方によるのである。」⁵⁾

ライプニッツ流の無限小計算は、微積分学の一番最初の教科書である、ロピタル『曲線を理解するための無限小解析』をはじめ、ヴォルフ、ポアッソン、リュプゼン、ヴェルナーらの教科書にも採用されていることを説明して、クラインは、この方法が地位を保った理由について、次のように述べている。

「その理由は、極限の方法の抽象的論理的定式化をこえて、連続量本来の性質にまではいりこみたいという、広く人々がいただいていた要求に発しているとみられ、さらにたずねれば、極限概念を決定する上に、心理的契機のための強調によってえられるものよりもさらに明確な無限小のイメージを形成したいというにあったろう。」⁶⁾

歴史的、心理的分析からだけでなく、クラインは当時の数学研究においても、現実的無限小の研究が行なわれていると述べている。それは、現代数学の創始者ともいわれるヒルベルトの『幾何学基礎論』においてであり、そこでは無限小をふくむ数体系の上での数学の構築が検討されているのである。

「このような数系から出発して、無限小量を扱う微積分の伝統的基礎を修正し、厳密性に対する現代数学の要求を満足する形態を与えることができるかどうかという問題が当然起こってくる。別のことばでいうと非アルキメデス的解析学を構成する問題である。」⁷⁾

クラインは肯定的な結果は出ていないと述べているが、1960年代、ロビンソンによってはじめられた超準解析の理論⁸⁾を予見していたといってもよいだろう。

微積分法の内容構成のレベルではくわしく述べていないが、ともかくクラインは、数学の発展の歴史と構造の分析から、無限小による微積分の果たした役割を積極的に評価するとともに、さらに、教職志願者に対して次のような警告を与えている。

「数学の具体的な基礎や、隣接分野との生き生きした関係についてよく知っていなかったり、とりわけ歴史的発展について何も知らなかったりすれば、諸君は足もとが危なくなる。すると諸君は、もっとも現代的な純粋数学に基づくところまで退却してしまって、学校数学について何もわからなくなってしまうたり、あるいは襲撃に屈して、諸君が大学でならったことを放棄してしまうだろう。諸君の授業の中にも古くさい因習がしのびこんでくるのである。」⁹⁾

日本の改造運動においては、微分係数を求めるところではペリーや、ペーレンドゼン、ゲッチングのような説明が多い中で、佐藤三郎や山本博之は「無限小」を用いることを提唱している。佐藤は次のようにいう。

「極限論を委しくやらずにやるため、又同じ量を表わすのに h があつたり、 Δx 、それから dx となるというような事は、生徒をまごつかせる因だと思ひます。ですから厳密な意味でいえば最初から dx を用ふことは誤りでしようが、この辺の処は実用に左程影響のない処です

ら、我慢して貰うことにします。」¹⁰⁾

これはまだ、混乱を避けるための議論であるといえよう。

一方、山本はライプニッツに着目している。

「彼に取って最初のは極限として考えられた微分商で無かった事、変数 x の微分 dx は彼には如何なる有限の量よりは小さく然も 0 でない様な x 軸の窮極的の不可部分である現実的存在であった事（現実的無限小）、従って $\int y dx$ でなくて $\int y$ であったし $f(x+dx) - f(x) = f'(x) dx$ であった。」¹¹⁾

「歴史的発展の形態を常に個人の発展に於て其の儘繰返す可しと主張するものではないが、此の場合に於てはニュートン（運動学的に微積分を建設した事——引用者）、ライプニッツの状況は刮目す可きである。」¹²⁾

山本はこのように、数学の歴史をとり入れて教材を構成し、授業を行なっている。そしてその結果についても触れている。微分商について述べているところを引用しよう。

「之は微分商の名を活かして微分の商が最も適當せる事が分った。優れた生徒は増分の商の極限の方がよく解るとも言うが、やはりライプニッツの思想も同様であったが、(2)（増分—引用者）と関連して厳密なる数学とは離れるも建設の意味に於て第一次の近似値迄とった二つの増分の商が宣しい。平均変化率より進んだ変化率の意も亦了解し得る。」¹³⁾

この山本の研究と実践は、「発生的方法」による内容構成と、その「わかりやすさ」の授業による検証という、ひとつの研究の方法を示しているともいえよう。

註

- 1) ペリー、新宮恒次郎訳『初等実用数学』1930年、山海堂、200ページ。
- 2) 1), 201ページ。
- 3) ベーレンドゼン、ゲッチング、文部省訳『新主義数学下巻』1916年、国定教科書共同販売所、342ページ。
- 4) クライン、遠山啓監訳『高い立場からみた初等数学』1960年、東京図書、287ページ。
- 5) 4), 288ページ。
- 6) 4), 292ページ。
- 7) 4), 294ページ。
- 8) 実数の拡大体として「無限小」をふくむ超実数体を構成し、その上で解析学を展開する方法をとっている。斉藤正彦『超積と超準解析』1976年、東京図書等参照。
- 9) 4), 317ページ。
- 10) 佐藤三郎「中等教育数学に微積分の初歩を加えよ」『日本中等教育数学会雑誌』第17巻6号、1935年、399ページ。
- 11) 山本博之「中学校に於ける微積分教授」同上、第24巻2号、1942年、83ページ。
- 12) 11), 83ページ。
- 13) 11), 85ページ。

(以下次号)