HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	数学教育の観点から見たアルキメデスの公理
Author(s)	山口, 格; 須田, 勝彦
Citation	北海道大學教育學部紀要, 49, 25-42
Issue Date	1987-03
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/29305
Type	departmental bulletin paper
File Information	49_P25-42.pdf



Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

数学教育の観点から見たアルキメデスの公理

山口　格・須田勝彦

The Archimedes' Axiom from a Viewpoint of Mathematics Teaching

Kaku YAMAGUCHI and Katsuhiko SUDA

目　次

0．はじめに …… 25
1．数学教育研究における論理的方法について …… 26
2．アルキメデスの公理について …… 30

0．はじめに

教授学の研究も，その基礎領域たるべき教科教育研究も，未だ厳密な実証科学としての内容及び方法を確立していない現在，数学教育の研究もまたその一部分であるから，多くの試行錯誤を含んだ，多様な接近方法が試みられなければならない。わが国の算数・数学教育の確立において最も重要な貢献をなした人物の一人である藤沢利喜太郎の著作を見ても，その論点，方法論的基盤が次のように広汎かつ多岐にわたっていることはその意味からも注目に値する。

「数学ノ学術ニ，技芸ニ，軍事ニ，航海術ニ，工業ニ必要ナルハ今更ニ事珍ラシク述ブルマデモナシ，其他文明社会ニ於ケル有形ノ事業ニシテ，数学ノ知識ヲ要セザルモノハ，仮令ヘ之レアリトスルモ，絶ダ罕ナリ」(1)「生業上有益ナル知識ヲ与フルコト，例ヘバ，度量衡制度ノ如キ，金銭受授ノ間ニ於ケル慣例條規中ノ普通日用的ナルモノノ如キ，有価証券，各種会社ノ性質ノ概略ノ如キ，此レ等ハ何人ト雖トモ，苟モ中等以上ノ社会ニ棲息スル人ノ知ラザルベカラザル知識ニシテ……」(2)

これらの言明は数学の社会的有用性にかかわった教科の目的論に属する。これらの言明が一般的に検討され，吟味される領域は教育学，あるいはその中における「教科の成立根拠」とでも呼ぶべき領域だろう。

「実際小学校ニ於テハ，最初ノ二三年間ハ，正シキ数ノ概念ヲ与フルコトヲ力メザルベカラズ，然ル後チ除ロニ簡単ナル計算ヲ教ヘ，生徒ノ充分ニ之レヲ理解スルヲ期セザルベカラズ，万一誤ツテ余リムヅカ敷キ事柄ヲ教ヘントスルトキハ，會々児童ノ精神ヲ惑乱シ，其ノ極，寧ロ之レヲ学ブヨリハ之レヲ暗誦スルノ已ムヲ得ザルニ至ラシム…」(3)「数学ヲ学ブニ，多少精神的伸張ヲ要スルハ，即チ数学ノ精神的鍛練ニ功能アル所以ナリ，然レドモ精神的伸張過度ナルトキハ，却ツテ，精神発達ヲ害毒ス，甚シキハ，学ブ者ヲシテ，心労ニ堪ヘズ，自暴自棄，終ニ彼ノ教育上最モ忌ムベキ，其ノ意ヲ悟ラズシテ，其ノ辞ヲ暗誦スルノ已ムヲ得ザルニ至ラシム…」(4)

これらの言明は，その後に普及した「学習」という教育学のことばを用いるならば，学習者と

しての児童の知的発達とのかかわりにおける算数・数学のカリキュラム問題に属する。「児童ノ精神ヲ惑乱」するとか,「自暴自棄」という状態については,教育心理学がその研究対象としているであろう領域に属する。

「算術ニ於テハ格段ナル数及ヒ其ノ計算法ヲ講シ,代数ニ於テハ一般ナル数即文字ニアラザレハ表ハスコト能ハサル数ヲ論シ,併セテ文字ヲ使用スルコト絶対的ニ必要ナラザルモ,文字ヲ使用セザルトキハ困難ナル事柄ヲ文字ノ媒介ニヨリテ解説ス」(5)「今日ハ最早,外物ノ補助ヲ借ラズシテ,純粋ノ数学的道行キニヨリ不盡数ヲ整数分数ヨリ導キ来ルコトヲ得ル様ニナレリ,算術,代数,整数論,微積分等ノ数ヲ論スル数学諸学科ヲシテ,数以外ノ観念ヨリ純粋ニセントスル数学社会多年ノ希望ハ満足セラレタリ」(6)「量ト云フ様ナル外物ノ数学……ニ不必要ナルハ数学其ノ物ノ性質中ニ存在スルモノニシテ,従ツテ此ノ量ト云フ様ナル外物的観念ヲ数学中ヨリ放逐スルコト(方便トシテ存スルハ勿論別事ナリ)ハ数学者,教育家ノ多年希望セルトコロナリシ,而シテ此ノ希望ハ最早満足セラレタルモノナリ」(7)

そしてこれらは,数学の内部の領域間の関連の問題,さらには数学的認識の問題にもふれた,数学の新しい発展の概括など,いずれも数学論と呼ぶべき研究領域に属する言明である。

このように,すでに藤沢利喜太郎の理論の内に,数学教育研究を成立せしめる基礎的領域として,数学教育の目的を吟味する教育学,児童・生徒の学習,発達の過程を吟味する心理学,そして数学教育の内容それ自体を吟味する数学論,などの必要性が示唆されていたと見ることができよう。さらに云うなら,藤沢以後,わが国の算数・数学教育の研究が果して藤沢をのりこえたのか,という問題さえあるといわねばならない。ここに引用した言明はすべて,そのいいまわしを少し現代的に改めるだけで,現在のわが国の「数学科教授法」の講義内容たりうるし,また「多年の実践経験を積んだベテラン教師の味わいのあることば」にも翻訳できる。そして数学教育によって生じた意味のない「暗誦」や「自暴自棄」は今日ますますわれわれの身近な存在とさえなってきている。

小論は,数学教育(8)の研究を模索する試行錯誤のひとつとして,主に数学論的方法による教育内容研究の可能性を「アルキメデスの公理」に焦点をあてた形で検討するものであるが,その前に,われわれのいう「数学論的方法」について吟味し,その意味を明確にしておこう。

1．数学教育研究における論理的方法

§1．目的に関する教育学的問題とのかかわり

いかなる数学教育の研究も,数学教育に関する何らかの目的を持っているに違いない。そしてその目的は,児童・生徒の認識発達をどうとらえるか,あるいは教育内容をどのように構成するか,といった問題領域から独立でないばかりでなく,密接に関連しあっているだろう。さらに,おそらくは多様に成立しているであろう様々な目的について,それを整理したり,吟味をしようと思えば,その作業自体が何らかの目的論に規定されざるを得ないことを認めねばならないだろう。(9)だから,数学教育研究全体にかかわる作業仮説の意味においても,数学教育の目的を設定しなければならない。

設定されるべき目的として,きわめて稔りが多いと予想しうるものに,遠山　啓の「数学教育は数学を教える教科である」(10)という主張がある。何より,数学教育研究の問題として,このような設定は魅力的である。なぜならばそこからは「思考を精密にする」とか「数理思想を開発する」とか「数学的考え方を育てる」とかいった,いかなる種類の研究によってもその概念の明確

化がおよそ期待できず，よりあいまいなことばといくつかの恣意的な用例が従うのみの用語が排除されているからである。

ところで，上の目的論はごくあたりまえの，稔りをもたらさない無内容なトートロジーのように見えるかも知れない。しかし，そのように見えるとすれば，数学を「数学教育によって教えられているもの」と定義しているか，わが国の数学教育の現実を知らないか，のどちらかであろう。これまでのわが国の数学教育の現実と歴史は，いかにして上の目的の設定を否定するか，いかにして数学とは異なるものとして目的を設定しうるか，という問題に焦点が向けられていたといっても過言ではないからである。(11)

従って，どのような根拠をもって「数学教育は数学を教える教科である」という目的を設定しうるのかという問題に答えねばならない。しかし，現在のところ，このような教育学的問題に何らかの形で答えうる理論を，われわれは未だ持っていない。従ってこれは教育内容研究における作業仮説の位置にとどめたい。

§ 2．目的論から導かれる教育内容研究の視点

上のように目的を設定しても，次にできることは，それにもかかわらず，その意味の不明確さ，不確実さを確認することであろう。それは数学教育に固有なことではなく他の教科教育研究においても共通に存在している困難さである。たとえば社会科教育を「社会科学を教える教科である」ということは，数学教育の場合と同様の歴史的リアリティを持った主張たりうる。しかし，明らかに「社会科学」は歴史学，経済学，法律学，地理学，社会学，農業経済学，教育社会学……といった社会諸科学の総称であろうし，その「……」が一体，いかなる広がりにおいて存在しうるのかさえも明確ではないのである。このような困難さは，数学においても他教科と同じ程度に存在しているのであって，他の教科教育研究者から「数学はその内容がはっきりしているから研究しやすいだろう」と誤解されるのは心外である。たとえば数学は，数学というひとつの科学なのか，数学的諸科学の総称かという問題からすでに，歴史的に揺れ動いているのであり，その意味では社会科以前の状態にあるといわねばならない。

だから，さきの目的設定の唯一の意義は，出発点が明らかになるというよりは，いつまでも到達しそうもない目標，すなわち「この命題の意味を明らかにすること」が定まることにあろう。ただ，われわれは今，真空中でものを考えているのではなく，明治以降のわが国の数学教育の発展の中に身を置いていると考えるならば，その現実に即して接近が可能となるだろう。換言すれば，これまでの数学教育が，そして現在の数学教育が，その教育内容・教材の構成において，いかに数学を教えてきたのか，あるいは教えてこなかったか，そしていかに教えることが可能であるのか，という問題として検討可能となるのである。

まず，目的を「数学を教える」ことにおいた。そのことによって，教育内容，教材の研究に数学という規範または分析枠を得る。しかし，数学教育の研究にとってはそれで十分とはいえず，数学そのものから，数学論にまで枠を広げることが必要だろう。そしてこのことは，われわれの独創的アイデアではない。すべての意味のある教育内容・教材への言及は数学そのものを含みながらもそれを拡げた論点，たとえば次のような問題への言及を含んでいることは，さきに引用した藤沢の数学論を想起すれば十分であろう。「数学はどのように領域区分されるか」「その中で『基礎的』なことがらは何か」「ある数学的概念は，いかなる関連の中にあるか」これらの問題群を取り扱う学問領域は数学論，あるいは数学に関する哲学的研究と呼ばれている。

それでは，かかる数学論的概念としてどのような概念が検討され，そこからどのような数学教

育上の知見を得ることが可能であるのか。学問としての完成度を期待するならば，そこに数学の原基的形態＝細胞を設定し，その展開のうちに現代までの数学的諸研究の成果を再構成する課題を想定するかも知れない。しかし，数学教育の研究，あるいは数学論の研究の現状からして，少なくとも当面は，そのような作業からは奇怪な空想と思弁の産物以上のものを産み出せないことは明白である。問題ははるかに困難なのである。

例えば，数学論的概念として「数学の論理性」という側面について考えてみる。このような側面，即ち，数学教育における，数学の論理性の側面の重要性は最近では遠山　啓の指摘したところである。「ふつう数学は難解で落伍者を出すことも多いが，その原因は数学があまりに論理的であるために，子どもは数学を毛嫌いするからである，といわれている。しかし，それは事実ではなく，反対に，論理の統一性がなく，論理の飛躍している個所であるといってよいだろう。」(12)

このような視点の有効性は明白であった。論理的に教育内容・教材を再構成する視点の中に水道方式が案出され，演算指導の論理の統一性を得る視点の中に量の理論がつくりだされたのである。そして，これまでの数学教育上の進歩は，このような意味における論理の精密化の豊富な実例で満たされているとさえいえるだろう。いわゆる「黒表紙教科書」も，それに先立つ様々な算術教科書とくらべて，計算問題の配列への工夫において格段の精密化がなされたこと，演算の，新しい数範囲への拡張において，形式不易の原理が意識されたこと，など，枚挙にいとまない。そしてこれらが論理的精密化であったからこそ，より高次の精密化へと移行しえたのだろう。しかし，この視点を，たんに水道方式と量の理論を説明するにとどまらず，たとえば「関数」の概念をどう教えるか，解析学の指導体系をいかに構成するか，幾何学への入門コースをどのように設定するか等，そこから一歩進んだ問題をたてるや否や，思わぬ無力ぶりをさらけだすのである。それは「論理」の意味が少しも明白ではないことに帰因する。

§ 3．数学教育研究における論理的方法について

論理的であるとは何か。これを明らかにするために，いかなる学問を参照すべきか。まず，数学それ自身であることは確かである。数学は少なくとも古代ギリシア以来，論理性を失ったことはない。(13)しかし，それはまた，その故にその無力さの根拠にほかならないのである。

論理的であることの意味を明確にすることをめざして，論理学という学問を参照するのは有効だろうか。論理学の最も発展した形態と考えられるのは，記号論理学であろう。記号論理学は，今世紀初頭の集合論のパラドックスをめぐるいわゆる“数学の危機”に際し，それに解決を与える，即ち数学を厳密な形式的論理学へ還元するプログラムのもとに著しく発展・整備された。しかし，このようなプログラム自体は必ずしも成功したわけではなく，むしろ記号論理学が数学の一領域として定着したのである。ここではこの点についてこれ以上詳しく論ずるのはやめて，論理学が数学の中で占めるべき位置を端的に表現している，ルザービンのことばを引用しておく。「形式的体系の構造と性質とは，結局のところ，この体系を形式化としてもつような内容的理論の特性にかかっている。」(14)

さて，論理の意味の確定を論理学にもとめてみても数学の全体像を照らすことはできないとすれば，「数学は論理的な学問である」という言明を貫くことは，形式論理の範囲では不可能となる。一方で，数学という学問の本質上，形式論理学にそむくこともまた不可能であろう。従って，数学教育における論理は，内容的な，子どものつくる数学としての展開それ自身のうちにある生きた論理，もしくは小文字の論理としてのみ実証的に検討されうるだろう。

このような考え方に基づく研究方法をわれわれは仮に「方法としての論理主義」とよんでおく。

数学基礎論でいう論理主義とは正反対に近いから，より適切な名前があるだろうが，藤岡信勝と坂元忠芳の学力論争のさい城戸幡太郎が，認識対象の内容的分析を基本におく研究方法として論理主義の名を用いたので，ここではそれに従っておく。このような意味における論理主義と対になるのは，対象よりは，それに働きかける主体の活動の側の法則性からアプローチしようとする方法としての心理主義であろう。共通な数学教育研究上の関心から，この二つの方法によるかみあった議論が成立することは望ましいことであろうが，現在のところはその点よりは，それぞれの研究方法を確立することが先決だろう。(15)

方法としての論理主義の立場から，これまでにいくつかの研究がなされてきた。それは主に遠山　啓らの開拓した「量の理論」の延長に沿う，自然数の乗法，分数，小数，面積，内包量，比例，二次関数と微積分，などの指導過程についての実証的研究である。量の理論，及びその延長上の問題としては，たとえば数概念は量の概念から導かれること，あるいは四則演算の方法が量的事実に対応して説明が可能であること，などを具体的に示すことが課題となる。しかし，この中で，たとえば面積に関する研究や，乗法の指導過程の研究から，あるいは微積分指導の研究から，ここには収りきらない問題群，すなわち，何らかの数学的性質を，量，あるいは空間諸形式から導くことが可能であるとしても，それではいかなる数学的性質を教育内容として設定すべきか，またいかなる他の諸性質との関連においてそれをとりあげるか，といった問題群が生じていた。遠山らの水道方式，及び量の理論では，この点は「有理数，及びその四則計算を数える」という，もっとも手堅い目標と結びついたが故に，それほど表面にはでてこなかったように思われる。課題が量から解析学へ進む，あるいは課題を幾何学や代数学の中に設定するに従い，このような，より高次の問題が中心的な位置を占めるようになる。そして，このレベルでの研究は有理数及びその四則計算の指導体系の見直しを迫ることも容易に予想できる。(16)

このような問題領域を開拓するにあたって，たとえば「面積」の指導プログラム作成においてはヒルベルトの「幾何学の基礎」が主な理論的指針として用いられた(17)ことに見られるように公理的接近方法(18)が，次第に重要性を増すようになってきている。次章では，「面積をどう教えるか→面積についての公理系の研究」という筋道とはまた異なり，公理そのものの研究から数学教育の教育内容・教材論の問題点を洗い出そうとする，新しい試みを紹介する。テーマとして，数論，幾何学，解析学の諸領域の要に位置する「連続」の概念の一表現形態である「アルキメデスの公理」が設定された。

〔注〕

(1)　藤沢利喜太郎「算術條目及教授法」，明治28年，三省堂書店，1ページ。なお，旧字体は可能なかぎり新字体に直した。以下同様。なお，この著作の位置と周辺のことについては，次の研究が参考になった。横畑知己「藤沢利喜太郎の算術教育論に関する一考察」東京大学教育学部教育史・教育哲学研究室『研究室紀要』第9号，1983年。

(2)　同上書，7ページ。

(3)　同上書，6ページ。

(4)　同上書，26ページ。

(5)　同上書，54ページ。

(6)　同上書，137ページ。

(7)　同上書，140ページ。

(8)　算数・数学教育をここではたんに数学教育と呼んでおく。

(9) これまでの目的論の変遷を，何の目的もなく並列しただけの研究者の著作もあるが。

(10) 遠山啓「数学教育の基礎」(岩波講座『現代教育学』9，1960年)，7ページ。

(11) 拙稿「算数の教科書のあり方－算術から数学へ」(柴田義松編『教科書』，昭和58年，有斐閣) 参照。

(12) 遠山 啓，前掲書。

(13) 「原理に向って反省的に収れんする。しかも，この原理からの論証は，……個別的になされるのではなく，……普遍的な形で遂行される，……こうした問題の一般化とこの一般化された次元での論証……これがオリエント数学からギリシア数学への転移を示す二つの大きな特徴である。」伊東俊太郎「数学史」筑摩数学講座18，1975年，57ページ。

(14) G. I. ルザービン，山崎三郎・柴岡泰光訳「数学論」1977年，岩波書店，94ページ。

(15) 論理主義の立場から主体の活動性そのものが捨象されるわけではない。何より「子どものつくる数学としての展開それ自身のうちにある生きた論理」は主体（子ども）の活動性を内包している。そして重要なのは，認識対象である数学それ自身のうちにも，たとえば写像概念の豊富な特殊的現象形態（変換，対応づけ，オペレーター，さらには埋め込み，同一視など）として，認識主体（子ども）の活動性が含まれているということである。捨象されるのは主体の活動性そのものではなく，それを心理学的に理論化するさいの概念系にすぎない。

(16) 拙稿「分配法則を軸とした乗法指導の試み」，北大教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』No. 2，1984年，及びその(2)，同No. 4，1986年，にその端緒的展開を試みた。

(17) 氏家英夫「比較と測度の構成による面積概念の指導過程」，1981年，北大教育学部修士論文。

(18) ここでいう「公理的接近方法」とは，たとえば「構成的方法」と対立する意味とは異なって，諸理論に対して行なわれた数学的整理の結果（通常では公理的方法をとることが多い）から数学教育上の知見を得る，という程度の，広い，漠然とした意味で用いている。

2．アルキメデスの公理について

§1．アルキメデスの公理とは

実数を公理的に記述すれば例えばディュドネによれば次のようになる。[1]

集合 $\mathbf{R}$ はつぎの公理群をみたすように1° $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への2つの写像 $(x, y)\mapsto x+y$ および $(x, y)\mapsto xy$ と，2° $\mathbf{R}$ の要素の間の関係 $x\leq y$ ($y\geq x$ とも書く) の定義されているものである。

(Ⅰ) $\mathbf{R}$ は体である。すなわち：

(Ⅰ, 1) $x+(y+z)=(x+y)+z$

(Ⅰ, 2) $x+y=y+x$

(Ⅰ, 3) 任意の $x\in\mathbf{R}$ について $0+x=x$ となる要素 $0\in\mathbf{R}$ がある。

(Ⅰ, 4) 各 $x\in\mathbf{R}$ にたいし，$x+(-x)=0$ となるような，$-x\in\mathbf{R}$ がある。

(Ⅰ, 5) $x(yz)=(xy)z$

(Ⅰ, 6) $xy=yx$

(Ⅰ, 7) 任意の $x\in\mathbf{R}$ について $1\cdot x=x$ となるような $\mathbf{R}$ の要素 $1\neq 0$ がある。

(Ⅰ, 8) $\mathbf{R}$ の各 $x\neq 0$ にたいし，$xx^{-1}=1$ となるような，$x^{-1}\in\mathbf{R}$ ($1/x$ と書くこともある) がある。

(Ⅰ, 9) $x(y+z)=xy+xz$

(Ⅱ) $\mathbf{R}$ は順序体である。すなわち，つぎの公理がなりたつ。

（Ⅱ，1）$x \leq y$で$y \leq z$なら$x \leq z$

（Ⅱ，2）“$x \leq y$且つ$y \leq x$”は$x = y$と同値。

（Ⅱ，3）**R**の要素x，yは，$x \leq y$か$y \leq x$のどちらかである。

（Ⅱ，4）$x \leq y$なら$x + z \leq y + z$。

（Ⅱ，5）$0 \leq x$で$0 \leq y$なら$0 \leq xy$。

（Ⅲ）**R**はアルキメデス順序体である。すなわち，つぎのアルキメデスの公理をみたす。

任意の実数$0 < x$および$0 \leq y$にたいし，$y \leq n \cdot x$となる整数nが存在する。

（Ⅳ）**R**は区間縮小公理をみたす。

閉集合列（$[a_n, b_n]$）が各nについて$a_n \leq a_{n+1}$，$b_{n+1} \leq b_n$のとき，この列の共通部分は空でない。

以上の公理をみたす**R**を実数体といい，**R**の各要素を実数というのである。本稿の主題となるアルキメデスの公理とは，上の公理（Ⅲ）に述べたものを意味する。上の公理からわかるようにアルキメデスの公理は実数の順序に関する一性質であるということができる。この性質は古くから知られており，ユーリッド原論（Ⅴ．定義4）にも記載されている。アルキメデスの名が付いているが，アルキメデスの発見したものではなく，エウドクソス Eudoxos（BC 408－355頃）によるとされている。(2)

実数の性質については様々な整理の方法があって，アルキメデスの公理を表面に出さないような実数の公理系もある。しかしどのような公理系を用いようとも，アルキメデスの公理で表現された性質は包含されているのである。

§2．数学教育とアルキメデスの公理

小学校から大学までの数学教育にとって，実数の性質を教えるということは，一つの大きな目標となっている。本来このことは，教育を受ける者の発達段階に応じて様々に変化する必要があろう。例えば実数の演算に関する性質について述べれば，小学校での四則演算の指導と，大学での体に関する公理的取扱いは大いに異なっているのは当然である。実数の順序に関する性質は，中学校・高等学校で不等式の取扱いを通じて教えられている。現在の不等式の基本的性質としての実数の順序の指導はあまりおもしろみがないとはいえ，教えられていることはたしかである。区間縮小公理にあたる性質も，高等学校ではさみうちの原理「$a_n \leqq c_n \leqq b_n$，$a_n \to a$　$b_n \to a$ならば$c_n \to a$」のような形をとっておしえられている。もっともこれが公理であるということは意識されていないようである。デュドネの実数の公理に即して云えば，（Ⅰ）**R**は体であること，（Ⅱ）**R**は順序体であること，（Ⅳ）区間縮小公理はその扱い方の是非は別にして，小学校から高等学校までの数学教育に登場しているのである。しかしながらデュドネの公理系の（Ⅲ）アルキメデスの公理に相当するものは，小学校から高等学校までの教材に，はっきりした形をとって登場することはないようである。高等学校の教科書にアルキメデスの性質と云うような用語は見られず，「$0 < x$および$0 \leq y$に対し，$y \leq n \cdot x$となる整数nが存在する」という記述もない。この公理は自明とも思える性質について述べているので，公理の性質を使用したことを意識せずに，使用されることが多いのではなかろうか。例えば$\delta > 0$のとき，$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n\delta} = 0$という事実はアルキメデスよの公理を用いているのであるが，そのことは高等学校の数学教育では自覚されていない。いずれにせよ数学教育の場ではこの公理のことはあまり話題になっていないようである。しかし実際にはアルキメデスの公理は陰にかくれた形で，数学教育の要所要所に用いられているのである。本稿では，このアルキメデスの公理が実際にはたしている役割を数学教育の光をあて

て明らかにしようと試みたものである。

§3．実数の連続性とアルキメデスの公理

解析学というのは実数の連続性を土台にして展開された数学の分野である。実数の連続性は同値な様々の形に述べられているが，公理の形に整理して用いられている。ここではこれらの様々な形の連続性とアルキメデスの公理との論理的位置付けを明らかにしておこう。

実数の連続性の公理

公理Ⅰ　デデキントの切断

公理Ⅱ　（ワイエルシュトラス）上に有界な集合は上限をもつ。

公理Ⅲ　上に有界な単調非減少数列$\{a_n\}$は収束する。

公理Ⅳ　区間縮小法（§1の公理Ⅳ）

公理Ⅴ　コーシーの収束判定法　コーシー列は収束列である。

公理Ⅵ　ワイエルシュトラスーボルツァノの公理　有界数列は収束部分列をもつ。

以上の連続性の公理とアルキメデスの公理（これを公理（A）と書く）との論理関係は次のとおりである。

（Ⅰ），（Ⅱ），（Ⅲ），（Ⅵ）は各々（Ⅴ）と（A），（Ⅳ）と（A）の各々に同値である。[3]

$$
\begin{array}{ccc}
(\mathrm{I}) & \longleftrightarrow & (\mathrm{VI}) \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
(\mathrm{II}) & & (\mathrm{IV})+(\mathrm{A}) \\
\updownarrow & & \updownarrow \\
(\mathrm{III}) & \leftarrow & (\mathrm{V})+(\mathrm{A})
\end{array}
$$

実数の性質を活用するという立場では上のように公理として用いるが，実数の構成的理論では，でき上った体系がこれらの性質をもっていることを証明する必要がある。構成的実数論には，デデキントによる有理数の切断，カントルによる有理数の基本列，バッハマンによる有理数の縮小区間列などが知られているが，例えば有理数の切断を用いて**R**を構成するときに，**R**が公理Ⅱをみたす順序体となることを証明するのに用いられる**Q**（有理数体）の性質は，**Q**がアルキメデス的順序体であるという事実だけである。

§4．アルチンーシュライエルの研究

体の順序についてはアルチンとシュライエルの研究がある。[4] 体の与えられた順序について，体の各要素aに対して，自然数$n > a$が存在するとき，この体の順序はアルキメデス的であると彼らは定義した。そしてアルキメデス的順序体と非アルキメデス的順序体を研究している。そして彼等の得た次の結果はよく知られている。[5]

すべてのアルキメデス的順序体は，実数の部分体に順序同型である。

このことから**R**は最大のアルキメデス的順序体としても特徴づけられる。

アルキメデス的順序体の例として，有理数体がある。非アルキメデス的順序体の例は次のようなものがある。[6]

例. 有理係数の多項式$f(t)$について，不定元tの最高次の係数が正のとき，$f(t)$は正であると定義する。こうすると多項式環$\mathbf{Q}[t]$の順序が定義され，したがって，*)商体$\mathbf{Q}(t)$にも順序が定義される。この$\mathbf{Q}(t)$の順序は非アルキメデス的である。

（いかなる自然数をとっても，$t-n>0$だから，$t>n$が成り立つ。すなわちtは無限大の要素となり，アルキメデスの公理は成り立たない。）

このように非アルキメデス的順序体においては，いかなる有理数よりも大きい無限大の要素が存在する，またいかなる正の有理数より小さく，しかも0よりは大きい無限小の要素が含まれて

いる。

＊）補題，Rが順序環でKをRの商体とすると，Rの順序を保存するように，Kにただ1通りに順序を定義することができる。Van der Waerden (2) p. 275。

§5．アルキメデスの公理から導かれる初等数学の諸命題

ここではアルキメデスの公理から直接に導かれる初等数学の諸命題を列挙しよう。学校数学ではこれらは，いずれも自明のこととして，アルキメデスの公理を仮定したことは意識されていないものである。みやすいようにもう一度，アルキメデスの公理を書いておく。

命題1．（アルキメデスの公理）任意の二つの実数 $a>0$，$b>0$ に対して，$na>b$ となる自然数 n が存在する。

これより直ちに

命題2． $a>0$ ならば，$\lim_{n\to\infty} an=+\infty$

を得る。どんなに大きな正の数 b に対しても $na>b$ とすることができるからである。そして，$a=1$ とすると

命題3． $\lim_{n\to\infty} n=+\infty$

ともアルキメデスの公理は同値である。

命題4． $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

$\varepsilon>0$ に対してある正の整数 n があって，$\frac{1}{n}<\varepsilon$ とすることができるから。

命題5． x を任意の実数とするとき，$n>x$ となる正の整数 n が存在する。

これも $1>0$，$x>0$（$x<0$ のときは自明）に対してアルキメデスの公理から $n\cdot 1>x$ を得る。

命題6． $\lim_{n\to\infty} 2^n=+\infty$　　$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}=0$

任意の $n\in N$ に対し，$n\leqq 2^n$，$n^{-1}\geqq 2^{-n}$ は数学的帰納法を用いて直ちに確かめられる。従って $\lim_{n\to\infty} 2^n=+\infty$　　$\lim_{n\to\infty} 2^{-n}=0$ が導かれる。$(n)_{n\in N}$ は単調増加列だから命題6から逆に命題3が導かれる。従って命題6の二式のどちらもがアルキメデスの公理と同値である。

命題7． x を任意の実数とするとき，$n\leqq x<n+1$ をみたす整数 n が一意的に存在する。

証明）命題5より，$x<m$ となる整数 m が存在する。また $p<x$ となる整数 p の存在が云える。それは，$-x<k$ となる整数の存在がいえるから，$-k<x$ となり，$p=-k$ とすればよい。このようにして $p<x<m$ となり p と m は整数である。$m-p$ は正の整数であるから，$p<x<p+(m-p)$ を得る。S を次の様な集合とする。

$$S=\{\ell\in N \mid x<p+\ell\}$$

明らかに $S\neq\phi$ である（$m-p\in S$ だから）。だから S は正の整数からなる空でない集合である。そこで S には最小数がある。それを n_0 としよう。$n_0=1$ であれば，$p<x<p+1$ を得る。そこで p が命題の n ということになる。$n_0>1$ であれば，n_0-1 は正の整数である。$n_0-1<n_0$ であるから n_0 が S の最小数ということから $p+n_0-1\leqq x<p+n_0$ となる。$n=p+n_0-1$ とおけば，$n+1=p+n_0$ で，$n\leqq x<n+1$ となる。これで命題の n が存在することがわかった。次に $n\leqq x<n+1$ をみたす整数 n の一意性を証明しよう。ある整数 n_1 について $n_1\leqq x<n_1+1$ としよう。$n_1\neq n$ であれば $n_1<n$ か $n<n_1$ である。はじめの場合は，$n_1<n\leqq x<n_1+1$ となる。しかし $n_1<n<n_1+1$ は n と n_1 が整数ではおこりえない。したがって $n_1<n$ は誤りである。同様にして $n<n_1$ も誤りであることがわかる。このようにして

$n_1 \neq n$は誤りであって，$n_1 = n$であることがわかった。(証明終)。

ここで任意の実数xに対して$n \leq x < n+1$をみたす整数nを，最大整数$\leq x$と呼んで，$[x]$と書こう。そうすると，

$$[x] \leq x < [x] + 1 \quad (\forall x \in \mathbf{R})$$

で

$$0 \leq x - [x] < 1 \quad (x \in \mathbf{R})$$

となる。

命題8.（ユークリッドの定理）aとbを任意の整数で$b > 0$とする。そのとき整数qと整数rが一意的に存在して次の式を満たす。

$$a = bq + r, \text{ ここに } 0 \leq r < b \text{ である。} \tag{1}$$

（証明）qを最大整数$\leq a/b$，すなわち$q = [a/b]$とする。そうすると

$$q = \left[\frac{a}{b}\right] \leq \frac{a}{b} < \left[\frac{a}{b}\right] + 1 = q + 1$$

である。

それ故

$$bq \leq a < bq + b$$

である。これより$0 \leq a - bq < b$を得る。rを$r = a - qb$とおこう。qとrは，$a = bq + r$をみたす整数で，$0 \leq r < b$も明らかである。この(1)の表現の一意性を証明しよう。$a = bq_1 + r_1$で，$0 \leq r_1 < b$となる整数q_1，r_1があったとする。

$$bq_1 + r_1 = bq + r$$

という等式が成り立つことになる。これより

$$b(q_1 - q) = r - r_1 \tag{2}$$

を得る。$0 \leq r < b$で$-b < -r_1 \leq 0$より

$$-b < r - r_1 < b$$

がわかる。このことと(2)より

$$-b < b(q_1 - q) < b$$

を得る。従って$-1 < q - q_1 < 1$になる。$q - q_1$は整数であるから$q - q_1 = 0$に外ならない。このようにして$q = q_1$を，そして(2)より$r = r_1$を導けば証明は終了する。(証明終)

この定理の証明には最初の部分に命題7を使っている。したがってこのユークリッドの定理はアルキメデスの公理の直接的な結果と考えることができる。整数論においてはこのユークリッドの定理は一番基本的な定理といってもさしつかえないのである。

§6．アルキメデスの公理と実数の位相的性質

数直線の基本的な位相的性質は，アルキメデスの公理の結果として導かれる。先ず数直線**R**の部分集合がコンパクト集合であるための必要十分条件を定めた有名なBorel-Lebesgueの定理（Heine-Borelの定理とも云う）がそうである。

定理（Borel-Lebesgue）数直線**R**の部分集合がコンパクトであるためには，有界閉集合であることが必要十分である。

この定理の十分性の証明にはアルキメデスの公理が用いられる。またこの定理の系として次の性質がでる。

系1. 数直線**R**の部分集合は，有界であるときのみ相対コンパクトである。

系2．数直線は局所コンパクトであるが，コンパクトではない。

次に**R**の連結性に関する性質もアルキメデスの公理から導かれる。

定理　**R**の部分集合Aが連結であるためには，Aが区間であることが必要十分である。

系1　数直線は連結で局所連結である。

系2　**R**のコンパクト連結集合のみが有界閉区間である。

以上の定理の証明はここに述べないが，アルキメデスの公理を用いた証明については，例えばブルバキの位相2を参照したらよい。

以上のことから位相の言葉でアルキメデスの公理に相当するものは局所コンパクト性ということになる。

§7．ユークリッドの原論とアルキメデスの公理

ユークリッド（Euclid，エウクレィデス）の原論（ストイケイア）は紀元前300年頃に出来たものだといわれている。日本では従来は「幾何原論」「幾何原本」といわれていた。1971年に池田美恵等によるギリシア語原典（ハイベルク版）からの日本語訳が最初の全13巻の完訳として現れた際「原論」という表題がついていたので，これにならってここでもユークリッドの原論と呼ぶことにする。ユークリッドというと初等幾何の代名詞のように思われているが，原論全13巻の内容は幾何学だけでなく，一般量の比例論，数論，無理量論などが含まれ古代ギリシヤ数学の集大成である。邦訳が出て以来ユークリッド原論の内容は日本の数学者の間でよく話題にされるようになった。ここではアルキメデスの公理が述べられている第5巻についてふれてみたい。ユークリッド原論第5巻には一般の量についての比例論が扱われている。

第5巻冒頭の「定義」の中に次の様に述べられているのをみよう。(7)

「　　定義

1．小さい量は，大きい量を割り切るときに，大きい量の約量である。

2．そして大きい量は，小さい量によって割り切られるときに，小さい量の倍量である。

3．比とは同種の二つの量の間の大きさに関するある種の関係である。

4．何倍かされて互いに他より大きくなりうる2量は相互に比をもつといわれる。

5．第1の量と第3の量の同数倍が第2の量と第4の量の同数倍に対して，何倍されようと，同順にとられたとき，それぞれ共に大きいか，共に等しいか，または共に小さいとき，第1の量は第2の量に対して第3の量が第4の量に対すると同じ比にあるといわれる。」

ここに表わされた内容を現代の記号で書き替えてみよう。いま量を表わすのにa，b，c……などの小文字を，整数に表わすのにA，B，C……などの大文字を使うことにしよう。そして量aが量bより大きいことをa＞bと表わそう。そうするとこれらの定義はつぎのようになる。(8)

1．量aが量bの約量であるとは，適当な整数Nが存在して，Na＝bとなることである。

2．量aが量bの倍量であるとは，適当な整数Mが存在してa＝Mbとなることである。

4．二つの量a，bが互いに比をもつとは，a＜bである場合には，適当なNが存在してNa＞bとすることができることである。

5．量の比a：bがc：dに等しいとは，次の条件が成り立つことである。すなわち任意の整数M，Nに対して

$$Ma > Nb \quad \text{ならば} \quad Mc > Nd$$
$$Ma = Nb \quad \text{ならば} \quad Mc = Nd$$
$$Ma < Nb \quad \text{ならば} \quad Mc < Nd$$

このユークリッド原論第5巻の比例論は，通約量，不可通約量の如何にかかわらずなりたつ理論である。この不可通約量は今日の数学における無理数に対応するものである。

いま上の定義5において，a：b＝xとおけば，Ma＞Nb，Ma＝Nb，Ma＜Nbはそれぞれ$x>\frac{N}{M}$，$x=\frac{N}{M}$，$x<\frac{N}{M}$と同等である。c：d＝x'とおいてみれば，定義5は2つの正の実数x，x'について

$$x=x'$$

ということを，任意の有理数$\frac{N}{M}$に対し

(i) $x>\frac{N}{M}$ ならば $x'>\frac{N}{M}$

(ii) $x=\frac{N}{M}$ ならば $x'=\frac{N}{M}$

(iii) $x<\frac{N}{M}$ ならば $x'<\frac{N}{M}$

によって定義したことになる。

このうち(ii)が成り立つのはx自身が有理数のときである。(ii)が成り立てば，$x=x'$は明らかに成りたつ。xが無理数のときは，2つの無理数x，x'の相等をつぎのように定める。無理数xより小さい有理数全体の集合をX_1，xより大きい有理数全体の集合をX_2としよう。X_1とX_2をそれぞれxの「下組」，「上組」とよぶことにする。x'に対しても同様にその下組をX_1'，上組をX_2'とする。そのとき

$$X_1=X_1',\quad X_2=X_2'$$

ということで

$$x=x'$$

を定義する。あるいは，無理数xをその下組X_1と上組X_2によって定義するとしてもよい。これはデデキントによる切断を用いた無理数の定義になる。ユークリッドの原論第5巻の定義5が無理数を定義していることは，デデキントの「連続性と無理数（Stetigkeit und irrationale Zahlen）」(1872) に既に述べられていることである。

さてこのようにギリシヤの実数論は19世紀にデデキント等によって再発見されたともいえる実数論を内包していたのであるが，ギリシアの実数論においても，アルキメデスの公理はユークリッド原論第5巻定義4として重要視されている。定義4は2つの量が比をもつということを定義しているのであるが，ユークリッドにあっては順序関係はアルキメデス的なもののみを考えているのである。ユークリッドの原論は数学の古典の中の古典として，すばらしい内容をもっているが，時代の制約として欠陥がないわけではない。その欠陥として有名なのは，順序の公理がないことである。ユークリッド原論第1巻に公理として次の様に述べられている。

公理（共通概念）

1．同じものに等しいものはまた互いに等しい。

2．また等しいものに等しいものが加えられれば，全体は等しい。

3．また等しいものから等しいものがひかれれば，残りは等しい。

〔4．また不等なものに等しいものが加えられれば，全体は不等である。

5．また同じものの2倍は互いに等しい。

6．また同じものの半分は互いに等しい。〕

7．また互いに重なり合うものは互いに等しい。

8．また全体は部分より大きい。

〔9．また2線分は面積をかこまない。〕

ここで4～6及び9は括弧でかこってあるが，後世の付加または，原典の異本にみられるものであろう。§1に述べた現代数学における順序の公理と比較してみると，その不備は明らかになる。例えば（Ⅱ，1）にある推移律「$x \leq y$で$y \leq z$なら$x \leq z$」に相当するものがないのである。順序に関する公理はユークリッドにあっては，弱点をもっているのであるが，アルキメデスの公理が第5巻に述べられているのは著しいことといえる。ヒルベルトは19世紀の末に，ユークリッド原論を研究して，アルキメデスの公理の意義をきわめようとした。

§8．ヒルベルトの幾何学基礎論とアルキメデスの公理

ヒルベルトの「幾何学の基礎」（1899年初版）はユークリッド原論の現代版とも云うべき内容をもち，数学における今日の公理主義を導く役割を果した。このことをヒルベルトは同書の序において次の様に述べている。(9)

「幾何学は――数論と同様に――その論理的構成には，少数の簡単な基本命題のみを必要とする。この基本命題を幾何学の公理という。幾何学の公理を設定し，その相互関係を研究することは，ユークリッド以来，数学の文献における数多くのすぐれた論文において論究されている問題である。この問題は，われわれの空間的直観を論理的に解析することにほかならない。

以下の研究は，幾何学に対し完全な，できうるかぎり簡単な公理系を設け，これらから最も重要な幾何学の諸定理を導くと同時に，その際，種々の公理群の意義と各個の公理から導かれる結論の限界とを明確にしようとする，一つの新しい試みである。」

ヒルベルトは上に述べたように，≪幾何学に対し完全な，できるだけ簡単な公理系≫として21個の公理を5個の群に分けてあげている。それは次のようなものである。

Ⅰ．結合の公理（公理I_1～I_8）

Ⅱ．順序の公理（公理II_1～II_4）

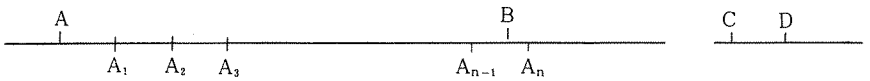
Ⅲ．合同の公理（公理III_1～III_5）

Ⅳ．平行線の公理

Ⅴ．連続の公理（公理V_1～V_2）

アルキメデスの公理は公理群Ⅴ，連続の公理の中におかれている。それは次のようである。

「V_1≪測度の公理，またはアルキメデスの公理≫。ABとCDが任意の線分のとき，直線AB上に点列A_1，A_2，A_3……，Anが存在して，線分AA_1，A_1A_2，A_2A_3……，$A_{n-1}A_n$は線分CDと合同であり，かつBはAとAnの間にある。



」

ヒルベルトは上に引用した序にあるようにアルキメデスの公理の意義と限界を研究し，明らかにした。古代ユークリッドにあっては比例論はアルキメデスの公理の上に築かれていたが，ヒルベルトによれば，ユークリッドの比例論はアルキメデスの公理なしに基礎づけることが可能であるとされた。彼の著書「幾何学の基礎」の第3章比例論ではアルキメデスの公理はどこにも使われていない。しかし彼はアルキメデスの公理の意義を，同書第3章末に次のように書いた。

「この第3章では，これまでアルキメデスの公理はどこにも使わなかったが，いまこの公理を仮定すると，空間内の任意の直線上の点に実数を次のように対応させることができる。

直線上に任意の2点を選び，これに0と1を対応させる；次のこの2点が決定する線分0 1を

2等分し，このとき生ずる中点に½を対応させ，さらに線分0（½）の中点に¼を対応させる，等々；このいき方をn回繰り返して得られた点には，$1/2^n$を対応させることになる。そこで線分$0\frac{1}{2^n}$を0から始めて，直線上の点1のある側にも，また反対側にもたとえばm回順次に移し，このとき生ずる点に数値$m/2^n$あるいは$-m/2^n$を与えれば，アルキメデスの公理からこの対応によって，直線上の各任意の点には一つの実数が一意に対応し，しかもこの対応では：A，B，Cが直線上の任意の3点でα，β，γが対応する実数であってBがAとCとの間にあるならば，これらの数は常に$\alpha<\beta<\gamma$か$\alpha>\beta>\gamma$の不等式を満足する，という性質をもつことになる。」このようなわけでヒルベルトはアルキメデスの公理のことを測度の公理とも名付けているのである。小学校で扱う「直線」は現実にある直線を想起しているから，それを測ることはいつでも可能である。しかし，数学としての直線（中学幾何以降で学ぶ）や数直線（実数全体の集合）を扱うためには，測度を与えるためにアルキメデスの公理を必要とするのである。上の引用において「実数」ということばが出ているが，「実数」の公理系も実はヒルベルトが出したのであった。1900年のJahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereingungにのった彼の「数の概念について」という論文で彼は次の様にのべた。

「ここで数論における公理的な方法を述べてみよう。

ある対象の集まりを考えて，その対象を数とよび，記号a，b，c，……で表わす。これらの数の間には，これから述べる公理系によって規定されるところの，関係が存在するものとする。

Ⅰ．演算の公理

Ⅰ1．2数a，bに対して，“加法”によって定まる一つの数cが存在する。記号で

$$a+b=c \quad \text{または} \quad c=a+b$$

と書く。

Ⅰ2．2数a，bに対して

$$a+x=b \quad \text{および} \quad y+a=b$$

となる数xおよびyが，それぞれ一つ，かつただ一つ存在する。

Ⅰ3．ある定まった一つの数0が存在して，すべてのaについて

$$a+0=a \quad \text{および} \quad 0+a=a$$

が成り立つ。

Ⅰ4．2数a，bに対して，さらに“乗法”という演算によって定まる一つの数cが存在する。記号で

$$ab=c \quad \text{または} \quad c=ab$$

と書く。

Ⅰ5．2数a，b（ただしaは0ではない）に対して

$$ax=b \quad \text{および} \quad ya=b$$

となる数xおよびyが，それぞれ一つ，かつただ一つ存在する。

Ⅰ6．ある定まった数1が存在して，すべてのaについて

$$a\cdot 1=a \quad \text{および} \quad 1\cdot a=a$$

が成り立つ。

Ⅱ．計算の公理

任意の3数a，b，cに対して，次の等式が成り立つ。

Ⅱ1．$a+(b+c)=(a+b)+c$

Ⅱ 2．$a+b=b+a$

Ⅱ 3．$a(bc)=(ab)c$

Ⅱ 4．$a(b+c)=ab+ac$

Ⅱ 5．$(a+b)c=ab+bc$

Ⅱ 6．$ab=ba$

Ⅲ．順序の公理

Ⅲ 1．相異なる2数 a，b に対して，どちらか一方，たとえば a が，他方，すなわち b より大きい，b は a より小さい，という関係が成り立つ。記号で

$$a>b \quad \text{または} \quad b<a$$

と書く。

またどんな数 a についても，$a>a$ ではない。

Ⅲ 2．$a>b$ かつ $b>c$ ならば，$a>c$ である。

Ⅲ 3．$a>b$ ならば，つねに

$$a+c>b+c \quad \text{かつ} \quad c+a>c+b$$

である。

Ⅲ 4．$a>b$ かつ $c>0$ ならば，

$$ac>bc \quad \text{かつ} \quad ca>cb$$

である。

Ⅳ．連続の公理

Ⅳ 1．（アルキメデスの公理）任意の2数 $a>0$，$b>0$ について，a を何回か加えて，その和を b より大きくする。すなわち

$$a+a+\cdots+a>b$$

ならしめることができる。

Ⅳ 2．（完全性の公理）以上の公理を満たす数の集まりに，何か新しい対象の集まりを付け加えて，しかも以上の公理Ⅰ，Ⅱ，Ⅲ，Ⅳ 1 をすべて満たすようにすることはできない。いいかえると，以上の公理を満たす数の集まりを，それらの公理を満たしたままで拡大することは不可能である。」

この公理系のⅠ，Ⅱ，Ⅲの部分は順序体の公理系である。公理Ⅳ 1（アルキメデスの公理）は，有限個数あるいは自然数の概念を内包している。ヒルベルトはこの引用のすぐあとの部分で，

「乗法についての交換の法則（公理Ⅱ 6）は公理Ⅰ，Ⅱ 1－5，ⅢおよびⅣ 1 からは導かれるが，公理Ⅰ，Ⅱ 1－5 およびⅢだけからでは導かれない。つまり乗法の交換の法則は，アルキメデスの公理を仮定して，初めて残りの公理から導かれる。」

と述べている。このことは「幾何学の基礎」第6章に証明がある。

公理Ⅳ 2（完全性の公理）は，§ 1 に述べたディユドネによる実数の公理系と相異している。このような次元の高い公理を他の公理と同列に置くことは，今日からみると奇異な感がする。「幾何学の基礎」の訳者である大西正男は「公理系が無限の要素からなるモデルをもてば，いかなる高い濃度のモデルをももつ」というモデル論の定理と抵触すると云っている。

ヒルベルトが「幾何学の基礎」で述べたことの中で，アルキメデスの公理とかかわって，数学教育の方面から一番興味深く思われるのは平面における面積の理論である。ヒルベルトの研究の主要な結果は，ユークリッドの面積論は連続の公理とは独立に基礎づけることが可能であるとい

うことであったが，このことはアルキメデスの公理の必要性（教育における）をいささかもそこなうものではない。ヒルベルトは平面の面積の理論を，分割等積と補充等積という概念を用いて研究しているが，その中で次の事実を指摘している。すなわち「等底等高の三角形は分割等積である」という命題の証明はアルキメデスの公理なしには不可能であることに注意したのである。実際彼は非アルキメデス幾何学で等底等高であり（したがって補充等積ではあるが）分割等積ではないような二つの三角形をつくっている。

空間の測度論において，アルキメデスの公理の排除は不可能であることをヒルベルトは予想していた。これは有名なヒルベルトの第3問題である，「数学の問題」という1900年のパリでの講演で23個の問題を述べた第3番目としてヒルベルトは次の様に云っている。

「Gauss は Gerling にあてた二通の手紙の中で，体積を求めるいくつかの定理は，とりつくしの方法，すなわち現代の表現でいえば連続の公理，あるいはアルキメデスの公理に依存していることに不満の意を表している。Gauss は特に同じ高さの三角錐の体積は，底面積に比例するという Enclid の定理に注意している。さて平面の同様の定理は〔分解合同により，連続の公理なしで〕完全にすまされる。そしてまた Gerling は，対称な多面体を合同な部分に分割することによって，等積性を証明するのに成功している。しかし上記の Euclid の定理を一般にこのような形で証明することは不可能であり，むずかしい不可能性の証明を扱うことになるのではないかと思われる。これはもしも次のことが示されれば，ただちに証明される：同じ高さと同じ底面積をもつ二つの四面体で，お互いに分解合同でないもの，すなわちそれぞれを四面体に分割して，それらの小片が〔適当な対応づけて〕お互いに合同になるようには決してできないものがある；あるいはこれに合同な四面体を付加することにより，自分自身で合同な四面体に分割されるものに限定してもよい。」(10)

デーンはこの証明に成功した。(11) したがって，平面測度ではアルキメデスの公理なしですませることが可能であったが，空間的測度論を基礎づけるためには，アルキメデスの公理が必要であることになった。

§9．現代の量の理論とアルキメデスの公理

我々は前2節に古代ギリシヤの量の理論であるユークリッドの原論と，それの20世紀初頭における現代化であるヒルベルトの幾何学の基礎をみてきた。ここでは，現代数学の立場からブルバキによるこれらのことがらの整理を簡単に述べておこう。ブルバキは自らの著作を Élements de Mathématique と名付けたことからもわかるように，ユークリッドの原論（The Elements）の現代的再現をもくろんでいる。したがってその数学原論の中に量の理論が含まれるのは当然であろう。ブルバキの数学原論，位相　第5章　§2にそれがある。ここでブルバキは次の様に述べている。

「量の測定の問題が実数の概念のはじまりにあることは前に述べた。(第4章，歴史覚えがき)。もっと正確に言うと，いろいろな種類の量が，実用的または理論的理由から，次第に研究されてきたが，最初はそれらはばらばらに考察されていた。そしてそれらをすべて同じ一つの数体系によって測定することができるかどうかは，ギリシヤの数学者達がそれを厳格な証明の対象にするという大胆な考えを案出するまでは，実験的に確かめるべきものとみなされていた。ギリシヤの数学者達によってうち立てられた公理的理論では，量の観念は算法（同じ種類の量の≪加法≫）および順序関係（≪A は B より小さい≫という関係，いわゆる量の比較関係）にあるとみなされた。われわれは，ここでも同じ問題を扱う。すなわち，ある集合 X が R の部分集合 X′ —— R

の加法と関係≦をX′に導入しておく――に同型になるにはX上の内算法と順序関係がどんな条件をみたすべきかを調べよう。X上に与えられる算法が可換であることを最初からは仮定しないので，それを乗法の形で書くことにする。それを除けば，量の測定の古典的理論とほとんど変わらない。」(12)

ユークリッドでは，ある与えられた種類の量は，一つの内算法（加法）をもった体系を形づくっているが，この体系はまた，量の比を作用素とする一つの外算法をもっていて，その作用素はアーベル乗法群をなすと認められる。比があらゆる種類の量に作用する作用域を形づくるということは，比例式の第4項の存在の公理と同値である。以上のような歴史的考察に立ってブルバキは次のように述べる。

Xを順序関係$x \leq y$をもつ全順序集合とし，最小元ωをもつとする。Iとして，Xの部分集合で，$\omega \in I$，かつ≪$x \in I$，$y \leq x$なら$y \in I$≫をみたす集合をとる。Xの中に算法$(x, y) \mapsto xy$が与えられていて，積xyはIの任意の二元に対して定義されている（xyはXに属するが，必ずしもIに属さなくてもよい）。ブルバキは量の理論に次の4つの公理をおく。

（GR_1）　ωは単位元であって，（任意の$x \in I$につき，$\omega x = x\omega = x$），算法は結合律をみたす，（$x \in I$，$y \in I$，$z \in I$，$xy \in I$，$yz \in I$のとき，$x(yz) = (xy)z$）。

（GR_2）　Iの元の間に関係$x < y$があれば，任意の$z \in I$につき，$xz < yz$かつ$zx < zy$が成り立つ。

（GR_3）　Iの元で$> \omega$であるものの全体は空でなく，また最小元をもたない。そして，$x < y$であるような任意のx，$y \in I$に対し，$z > \omega$，$xz \leq y$をみたす元zが存在する。

（GR_4）　≪アルキメデスの公理≫任意の$x \in I$，$y \in I$，ただし$x > \omega$に対し，x^nが定義されて$x^n > y$が成立するような整数$n > 0$が存在する。

このような公理群をみたす例が存在することは次の例をみればよい。

今Xとして，0およびいくらでも小さい数> 0を含むような，実数≥ 0のある集合をとり，Iとして0を含むRの区間で一点だけでないものとXとの共通分をとり，算法としてIの二数の加法をとり，$x \in I$，$y \in I$なら必ず$x + y \in X$であると仮定すると，公理（GR_1），（GR_2），（GR_3），（GR_4）がみたされていることは明らかである。

これとは逆に，次の命題が成り立つ。

命題.　Xを全順序集合で最小元ωをもつとする。IはXの部分集合で$\omega \in I$，かつ≪$x \in I$，$y \leq x$なら$y \in I$≫をみたすものとする。Xの算法$(x, y) \mapsto xy$が$x \in I$，$y \in I$に対し定義されているものとする。このとき，もし公理（GR_1），（GR_2），（GR_3），（GR_4）がみたされるなら，Iから実数≥ 0の全体R_+への真に増加する写像fが存在して，$x \in I$，$y \in I$，$xy \in I$なる限り

$$f(xy) = f(x) + f(y)$$

が成立する。さらに，bをIの任意の元とするとき，$f(I)$とR上の区間$[0, f(b)]$との共通分はこの区間において密である。

この命題の証明はここに述べない。（ブルバキ　位相3，第5章　命題1を見よ。）この任意の二元x，yが与えられて，$y \neq \omega$とするときy^nが定義されて$\leq x$であるような整数$n \leq 0$のうちの最大のものを$(x : y)$と書こう。このような整数はアルキメデスの公理（GR_4）によって存在する。X＝Iが自然数の全体の集合で，算法が加法である場合には$(x : y)$は$\frac{x}{y}$の整数部分にほかならない。または同じことだが，xのyによる誤差が1以内の下からの近似商と

いってもよいのである。この命題の証明にブルバキはこの（x：y）を用いている。さらにブルバキは公理（GR_1）～（GR_4）について次のような注をつけている。「実験科学に出てくる≪量≫の集合では，公理（GR_1）と（GR_2）は少なくともある近似をもって実験的に確かめることが一般に可能である。それに反し，≪いくらでも小さい≫量の存在を要請する公理（GR_3）は，明らかに同じ方法では正当化できない。それは先験的に設定する純粋の要求である，公理（GR_4）に関しては，≪小さすぎない≫量に関する，実験的に験証できる事実の≪外挿≫と考えられる。」というわけで，ブルバキはこの命題1「量の測定」という題を付けているのである。そして測定にはアルキメデスの公理が必要となるのである。

最後に民間教育団体の数学教育協議会では量の分類として

$$量 < \begin{matrix} 分離量 \\ 連続量 \end{matrix}$$

に大別しているが，数学的には上のブルバキの命題に内包されることであろう。

〔注〕

(1) Foundation of modern analysis. J. Dieudonné (1969) Academic Press . 訳書 森毅訳 ディュドネ 現代解析の基礎1 東京図書（1971）。

(2) アルキメデス 球と円柱について 科学の名著9 朝日出版社。

(3) 例えば「解析学序説」梶原壌二 森北出版 など。

(4) E. Artin, O. Schreier : Algebraische Konstruktion reeller Körper. Abh. Math. Sem. Hamburg. 5 (1926) p. 83 ～ 115.

(5) van der Waerden Algebra. Erster Teil p 245.

(6) 同上 p 238。

(7) ユークリッド原論 中村幸四郎 寺阪英孝 伊東俊太郎 池田美恵訳・解説 共立出版（1971）。

(8) 同上解説（中村）を一部修正した。

(9) ヒルベルト 幾何学の基礎 寺阪英孝 大西正男訳 共立出版 現代数学の系譜7（1970）。

(10) ヒルベルト 数学の問題 一松信訳 現代数学の系譜4 共立出版（1969）。

(11) M. Dehn : Über raumgleiche Polyeder, Göttinger Nach, 1900 および Über den Rauminhalt. Math. Ann. Bd 55, 1902.

(12) ブルバキ 数学原論 位相3 笠原皓司訳 東京図書（1968）。

他に次のものを参照した。

小平邦彦 幾何のおもしろさ 岩波書店（1985）。

彌永昌吉 数の体系（上） 岩波書店。

彌永昌吉 ユークリッド原論の功罪 数学セミナー 81年2月号。

デデキント 数について 河野伊三郎訳 岩波文庫（青）。

Fischer, Intermediate Real Analysis, Springer.

〔付記〕

小論の0，1章は須田が，2章は山口が執筆した。