



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	関数指導体系に関する基礎的研究
Author(s)	山口, 格; 須田, 勝彦
Citation	北海道大學教育學部紀要, 50, 1-55
Issue Date	1988-02
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/29309
Type	departmental bulletin paper
File Information	50_P1-55.pdf



関数指導体系に関する基礎的研究

山口 格・須田 勝彦

A Study of System for Teaching “Function”

Kaku YAMAGUCHI and Katsuhiko SUDA

目 次

第1章 「量にもとづく数学教育」の到達点について	2
第2章 2次関数の研究	18
第3章 連続関数の研究	30

0. は じ め に

数学教育が学問としての数学を教えることを目的とするという立場を表明する^①なら、それがどのように可能であるのかを具体的に示すことが要求される。それにはさしあたり、私達がこれまで試みてきたいくつかの実験的な授業プログラムと実践報告をもって、その解の一部であると答えるほかはない。しかし、それが答となっているためには、それらの個々のプログラムが、どのような全体の一部であるのかを示さねばならない。

私たちは学問としての数学の歴史的発生を四大文明の発生に見る立場は採らず、労働の発生、人間の発生そのものにさかのぼる立場をとりたい。そしてそのような見方からすれば、子どもにおける学問としての数学も、ある学校段階、ある学年段階から突然始まるものではなく、すでに母の胎内に始まっていると見るべきだろう。このような、始めも終わりも確定し難い過程を、ある全体として提示することは今のところ空想の域を超えない。しかし、学校における意図的な教授活動、とりわけ小学校以降の算数・数学の授業に問題を限定することは無意味なことではないと思われる。

算数・数学の授業は、小学校において開始されたその瞬間から、学問としての数学を教えている。どのようにそれとは異なる目的をたて、学問としての数学を教えることを授業において否定してみても、実質においては数学を教えてきたし、現在も然りである。そしてこれまでの数学教育上の様々な進歩も、数学の内容そのものの進展と、数学論上の検討の深化として記述することができる。このような見方は私たちの作業仮説（方法としての論理主義）にはかならない。

このような方法にもとづき、学校において教授される学問としての数学の全体像を明らかにすることが課題なのであるが、小論においては、これまでの「量にもとづく数学教育」という観点にもとづく数概念についての考察とその延長上にあるいくつかの実践的なプログラム作成の過程に横たわるある種の体系性を持った問題領域について、それがどのような体系性にもとづいて考察されてきたかを明らかにする（第1章——担当・須田）。そしてそれらが今後においていかなる方向において乗り越えられるべきかを示すための視点を、関数指導体系を構成する諸要素がいかなる数学的関連のもとにあるかを示す（第2章、第3章——担当・山口）ことによって模索することを課題としたい。

第1章 「量にもとづく数学教育」の到達点について

§1 最初の選択

数学教育の目的は学問としての数学を教えることにある。そして、そのような目的に立つ数学教育学の確立のために、その研究方法として、主として数学論を概念の枠組として用いることが有効であると予想した。その数学論は、数学そのものを含んだ、数学的諸概念の歴史的あるいは個体的発展、及びその内在的もしくは本質的連関を論ずることをその中心においた哲学の一領域である。^②

とはいっても、数学教育学を実証科学として確立することを諦めて思弁的な哲学に身を委ねることに決めたわけではない。反対に、最も検証を受けやすい概念系を確立するためにこそ、これまでの数学論的諸考察から学ぶことが必要なのである。できる限り明瞭な、かつ意味のある概念系はそのような作業を必要としている。

さて、そのような数学論から「学問としての数学を教える」という見地を具体化するための出発点を選択しよう。これは、目的論に次いで、大きなレベルの作業仮説となる。次の命題を選ぶ。

「数学が対象としているのは、現実の世界の空間諸形式と量的諸関係である。」

これはF. エンゲルスの有名な規定^③にもとづいていることはいうまでもない。19世紀ならいざ知らず、今日においてこのような古典的な命題をふりかざすことに、多くの数学者は反対するに違いない。実際、どのように強弁しようと、もし量を、日常生活の意味において、すなわち長さや重さや面積など、実数のある部分集合と同型なものと考えるならば確かにエンゲルスの規定はせいぜい19世紀までのものだろう。

しかし、それに代るべき、少なくとも数学教育上有効な規定が他になされているわけではないのである。「数学とは、それが何であるかを語ることをのまない学問である」というラッセルの有名なことばもひとつの卓見ではあるが、そこから数学教育にいかなる指針が得られようか。「数学は純粹形式的関係学である」という規定も数学の新しい発展に即応した正当なアイデアを含むが、これは初等、中等教育の場での授業の指針として述べられたものではないことは明白だろう。「数学は構造の科学である」という規定も1930年代から最近まで流行した。しかしこれも、いかなる構造が教えるに足り、いかなる構造が数学者の趣味としては尊重されるべきであるかという、われわれが最も知りたいことがらは経験または断定にゆだねられる。数学教育に有効な規定ではないが、数学そのものの規定としてそれらは真である、ということはできるかも知れない。しかし、われわれの数学論からすれば、数学的概念の現実の形成・発展過程であり、数学者の職業的な営みとしての数学研究と並んで生きた数学的活動であるところの数学教育に無力な数学論は、それ自体数学の本質から離れているといわねばならないのである。

今、エンゲルスの規定に同意するとすればその後の数学の著しい発展に即応した「量」や「空間形式」について、いかにその概念を豊富化するか、という課題が生ずる。これは現代数学論そのものを論ずるに等しい大きな問題であるので、ここでは次のように、基本的観点を示すにとどめたい。

何より、「現実の世界の空間諸形式と量的諸関係」とはいっても、量や空間形式が実在世界の中にそれ自体手で触れられる形において存在していて、たとえば昆虫類という形で生活する動物の一群を生物学者たちが研究するような形で研究するわけではない、という点を指摘しなければならない。

すでに量にしても空間形式にしても、ひとつの抽象による産物なのである。そして、それはいかなる抽象による産物であるのかを述べることは「量」であり「空間形式」なのである。たとえば「量」の最も素朴な形式、数の経験的抽出においても、実在の諸個物そのものに数が存在するわけではなく、個物を個物として区別する主体的行為（定有としての確立）、そしていくつかの個物を、差異における同一性として関係づける主体的行為、そして同一性を確立してはじめて可能な等質性の揚棄という主体的行為、といった諸過程によって実在そのものから幾段階も飛躍しながら、たとえば ○ ○ ○ という量的認識対象を得るのである。そしてこれは未だ量的認識対象（この場合は分離量）であって数ではない。「空間形式」にしても同様である。空間という概念そのものは、「集合」とほぼ同義であり、ほとんど何の意味も持たない。むしろ、空間という思考の形式において、何を抽象し何を考察するか、という点を明確にすることによって、たとえば「位相空間」とか「距離空間」といった形で意味のある考察の対象が生ずるのである。

ここで、上の数学の規定、従ってエンゲルスの数学の規定は、数学を単なる純粹悟性の産物とする立場を批判するに必要な限りで客観的な認識対象の存在を主張したのであって、客観的な認識対象そのものが数学の本質であると主張しているわけではない、ということに注意しなければならない。しかるに、わが国の一部の唯物論的数学論において、エンゲルスの規定に立ちながら、いかなる抽象的数学概念（たとえば n 次元空間）であろうと、実在にその起源を持つことを指摘するにとどまる議論が見られる。このような指摘はおそらくは誤りではないかも知れないが、まったく退屈なのである。現実の数学の活動に関心を持つ立場から問題なのは、起源そのものではなく、いかにそれが実在を離れ、抽象化されるか、という点にこそある。数学的認識の進化の過程（エンゲルスは「それらをその内容からまったく分離しこの内容をどうでもよいものとして度外視」^④するという表現においてそれを指摘している）こそが数学論の中心課題なのであり、唯物論的数学論はこの点に関して、きわめて大きな立ち遅れがあることを認めねばならないであろう。^⑤

すでにプラトンも指摘しているごとく、現実存在する事物そのものとは本質的に異なるものとして数学の対象は存在している。だから、数学をもっぱら觀念の産物、もしくは形式的関係の中に根拠づけようとする考えはその限りで正当なのである。しかし、それは先にもふれたように、数学教育という現実の数学的概念の生成、発展過程を説明するに無力な、いわば「閉じた同語反復」としてのみ正当であるにすぎない。これに比して、量や空間形式が実在を対象としながら、しかも実在そのものとは量および空間形式という抽象のあり方によって異っているとするわれわれの見地は、それを具体的に実証して行く作業を伴うならば「開いた同語反復」として、意味のある作業仮説たりえよう。

他に「数学的真理は、単に主観的に選ばれた諸公理からの形式的推論によって基礎づけられるのではなく、深く宇宙の秩序に根ざしている」とかブートゥルーの「内在的客観性」^⑥といった考え方も、具体化される程度に応じて意味のある、開いた同語反復であろうが、「量と空間形式」といういい方よりもすぐれている点は見出し難い。

このような作業仮説から生ずる第一の作業は、「量にもとづく数学教育」という考え方を吟味することになる。^⑦

§ 2 「量にもとづく数学教育」について

「量にもとづく数学教育」という考え方の起源は確定し難い。というよりはむしろ、いかに量

と数を切り離す考え方の上に立ったとしても、少なくとも数を教える最初においては量をどこかに密輸入しないことにはおよそ教育として成り立たないことは明白である。^⑧それを具体的に示すことは他の機会に譲るとして、それが明確な教育内容構成論上の主張として述べられ、体系的な理論と実践が構築されるようになった1958年の遠山啓の問題提起以降に焦点をあて、それに関連する限りでその前史（数学教育改良運動）にもふれたい。この遠山の問題提起において基本的な論点が提出されているのである。

「量の問題は、小学校の比と比例にも高校の微積分にも関係があり、むしろその基礎をなしていると考えられる…。」^⑨「とくに数学教育を科学技術教育の一環と考える立場をとるなら、量の問題は中心的な重要性をもってくるであろう。理科教育と数学教育の接触点に位置するのが量の問題であるが、それだけにかえて双方から手を出さなかったきらいがある。そうした事情もあって、量の問題の大部分は今のところ未開拓の処女地であるといってよい。」^⑩「大ざっぱにいうと具体的な分離量から、自然数がでてきて、その自然数から分数を引き出そうとすると、どうしても割合分数のようなものがある、しかしこの考え方はむづかしい。…しかし私は分数を直接的に具体的な連続量（長さ、重さ、体積など）につながるものと考えたいのである。……抽象的な自然数の知識の上にだけ分数の理論をきずこうとするのは、クロネッカー—藤沢の系統である。」^⑪「（藤沢の——須田）数学は量の学問にあらずという理論からは、もちろん量の正しい指導法はでてくるはずはない。」^⑫そしてクロネッカー、藤沢、黒表紙を結ぶわが国の算術教育の基本方向について、次のように批判する。「黒表紙の指導原理は決して古くない。かえて新しすぎる点に問題があるのである。それは微分積分をとび越していきなり抽象代数学に結びつく要素をもっているからである。藤沢が絶対の自信をもって『此数へ主義ニ付テハ吾日本ハ先鞭ヲツケタコト思ヒマス』』と言いつつ放ったこともある意味で正しかったといえる。ここで問題は一つの分岐点にくる。一つの道は初等数学から量を追放して、微分積分をとびこしてこれを20世紀の抽象数学に結びつける道がある。もう一つは量を中心において、微分積分に発展し、それを高校までの最高目標とする道である。ところで私は後者を選びたい。割合分数をとなえる人たちはおそらく前者をめざしているのであろう。」^⑬

このように、遠山の問題提起は、(1)自然数について、“数え主義”とは異なり、分離量に基礎をおく立場をとる、(2)分数を連続量から導く、(3)量の正しい指導法を確立して行く、(4)分数の乗除を内包量から導く、(5)比と比例を関数として扱い、微積分学への入門コースに結びつけて行く、等々の、ほとんど初等数学教育の中心のすべてにわたる（幾何を除いて）論点を含んでいたのである。

量から微積分学の入門に至る一連のプロセスは、数学教育の根幹にかかわる体系性を持った問題群としてわれわれに提起されている。われわれはこれまでに、自然数の乗法、小数、分数の入門、内包量、比例、1次関数、2次関数などの具体的なテーマに即して、量にもとづく数学教育の体系を、可能な授業プログラムの形で作成・検討してきた。それらの授業プログラムを貫いて存在すべき縦糸——量の論理の呈示は、未だなされうる準備状況には至っていない。ここでは主として関数の領域に焦点をあて、これまでの研究と実践の発展（その中の一部にわれわれの作成したプログラムも含まれている）を概括することによって課題を一步進めることを目的としたい。そのためにはまず、体系的な理論と実践が構築される以前、いわば問題が未分化な形で、しかもそれだけに豊富な思想、稔り豊かな発展の可能性を含んだ形において提出された時点にさかのぼることにしよう。

§ 3 ペリー、小倉の到達点

量から解析学の入門に至る一連のプロセスが数学教育の現実の中で課題として開花しはじめたのは、19世紀後半の準備段階を経た、今世紀の初頭だった。そこで提出された論点は多岐にわたるが、今日のわが国の数学教育に重要なかわりを持ついくつかの点に限定して紹介してみよう。

J. ペリーの1901年の講演は、それまでのユークリッド流の幾何を中心とした数学教育から関数の概念を中心とする近代的数学教育へ転換する上で記念碑的位置を有していることはいうを待たない。「私は数学の学習において有用なもののうち、明白なものとして私の心に浮かんだものを、大急ぎでまとめた。それは次のようなものである。(1)高尚な情緒をつくり、知的喜びを与える。このことは従来、ほとんどすべての子どもの教育において無視されてきた。(2)物理学の学習において、数学の武器によって助けが与えられる。このことも従来、ほとんどすべての子どもの教育において無視されていた。(3)試験に合格することにおいて、これは、これまで無視されていなかった唯一のものであり、教師たちによって実際に認められていた唯一のものである。(4)手足のように自由に使える知的道具を人々に与える。人々がその生涯を通じて、自分自身を教育し続け、精神と知力を発達させることができるようにし、そしてこの目的のために、彼らのすべての経験を利用できるようにする。(5)これはあるいは(4)に含まれるのかも知れないが、一人の人間に、自分のため以外のことがらを考える重要性を教え、それによって現在の権力の恐ろしい支配から自分自身を解放し、他人に服従していると、他人を支配しているとにかかわらず、彼が最高の存在の一人であることを確信させる。このことは通常、数学の学習以外の仕事だとされていることである。」^⑩

ここで提出されている論点はすべて100年近くも前に解決済みの古いことでは決してない。それどころか、われわれが今日、数学教育の実践的研究を進める上での基本視点とほとんど重なり合っているとさえいえるのである。^⑪とりわけ数学教育の有用性(=目的)の根幹を、人間としての自立、主体性の確立に置こうとしている点については、数学教育が今日いぜんとしてその反対物として機能していることの暴露とあわせて、理論的に深められる必要もあろう。ここでは「ペリーは単純な、通俗的な意味での実用主義者ではなかった。ペリーが唱えた数学の実用方面は、消費者の数学ではなく、主として生産者の数学である」^⑫という小倉金之助の評価の重要性に加えて、実用そのものをも乗り超える契機を内包していたことを指摘するにとどめる。

これらの有用性を実現しうる教育内容・方法はいかにあるべきか。それにはまず、旧来の数学教育の内容(ユークリッド流の幾何学を中心とする)を「彼らがすべて純粋数学者になろうとしているかのように教えている。」^⑬と批判する。「中等教育の数学教師に適する一人の人間をつくるために、一万の太郎や次郎や三郎が精神的に殺され、一人の大数学者をつくるために億万の人間が破滅させられている」^⑭という表現に見られるように、著しく有害なものとして糾弾するのである。

これに代るべきものとして提案した新しい体系を「実用数学」(Practical Mathematics)と自ら呼んでいる。このような立論は、「純粋数学」と「実用数学」の二元論のようにも見える。^⑮しかし、「彼は純粋数学の専門家の楽しみについて、非常にうまい例を使っている。すなわち、ラブラドルの滝を見たことのある白人は、今までにたった9人しかいないのだが、それはナイアガラ滝よりも美しい、というのである。私は、彼のものの見方は、少なからず手前勝手だと思う。同様の例を使って、私の改革案を説明するなら、ラブラドルに鉄道を敷き、橋と道をつくり、鋼索をつくり、足場をきり開くのだ、とでも言えようか」^⑯「将来、大数学者になるかも知れな

い子どもにさえ、改良された教授法のほうがよいと私が言っても、数学者たちはおそらく、私の無礼を許してくれよう。』^⑩といった記述に見られる如く、数学そのものを二元的に分けたのではなく、「純粋数学」者による教育内容体系を打倒すべきスローガンとして「実用数学」があったと見るべきだろう。

「実用数学」の内容を知るために、ペリーの作成した教授細目^⑪を瞥見してみよう。初等数学の課程の中で、まず算術については、最初から小数を用いること、数の計算は観察したり、測定した数を表わすものであり、そこでは省略や近似の方法が重要であることが強調されている。代数では、公式というものを「その中に量を与えれば使用できる」ものとして理解させること、量を算術で扱う方法を言語で述べれば、ことがらを代数的に表わすことができること、などが特徴的である。求積法、幾何学においては、様々な求積公式を物差しと方眼紙を用いてテストしてみること、ユークリッドの諸命題を、方眼紙や測定値の算術計算によってテストしてみることなどを強調した上で、「すぐれた教師は、このような実験を、やりすぎることはないだろう」とも述べている。さらに、何らかの統計量を図に表わしたり、そこから増加率を考えたりグラフを書くことのほか、補間法や誤差の問題をも重視している。高等数学の課程においては近似式、級数を用いた数値計算などから微分・積分の諸法則とそれを用いた関数の研究を中心としながら、簡単な微分方程式の解法へと進む。そこでもまた、「測量、力学、物理学などの実例を、不断に使用」すべきことが強調されている。^⑫

ペリー、クラインらの思想を紹介しながら、独自の数学論を展開しつつ、わが国の数学教育の改善に多大の貢献をなした小倉金之助の所説もまた、量から関数へ至る一連の過程の意味づけと、その内容の豊富化に向けられたものだった。小倉の、旧来の数学教育への批判と改善の方向についての論点は次のようなものであった。

「従来の数学教育においてはあまりに論理のみが尊重されていた。」「生徒をして自ら発見せしめよ。」「これがためには直観の力を高調せねばならない。」「……直観を養成するために最も有効な方法が、経験の上にあることはどうしても疑うことができない。」「それゆえに生徒をしてまず日常経験の前に直面せしめよ。直観の力は彼らをして自ら発見へと導くであろう。』^⑬これらの論述に見られるように、数学教育においては第一に直観、第二に論理、という位置を与え、豊富な直観力を養うために、経験が重要であることを主張するのが第一の論点である。

これとかかわりながら、数学の歴史的発展を孤立主義と融合主義という、二つの対立する理想の交代、あるいは相互浸透としてとらえた上で、旧来の数学教育が孤立主義に従っていることを批判するのが第二点である。孤立主義は数学の各分野をそれぞれの分科の範囲内で論理的に整頓された形に築きあげることを理想とするため、さきの論点の中では論理を第一とする立場と結びつく。これに対して融合主義は、たとえばデカルトによる数と空間の結合や、接線問題と求積問題の、微積分学の形成による結合などに見られるように、「力学的にして、あくまでも直観的」^⑭である。

第三点もさきの二点と関連しているが、数学を正確数学と実用数学、あるいは近似数学とにわけ、その両者の相互浸透、あるいは「永遠に助け相補い相携えて進むべき運命にある双生児」としてとらえ「その一方のみを挙げて一方を貶すべきでない」^⑮と述べることによって、近似数学の相対的位置を高めることの必要を説いている。

これらの論点を総合的に含みながら、第4の論点すなわち数学教育の根本課題が提出されてくる。数学は自然科学ではない。しかしニュートンの微積分学、ベルヌーイの変分学がその根本思

想を力学から求めたことをはじめ、熱の伝導、弦の振動と偏微分方程式、力学や電磁気学とベクトル幾何、等々、数学的諸概念の「発生を顧みるごとに、物理学に対して感謝せざるをえない」関係を有している。「自然を認識せんとする希望が数学発達に最も永久的で、しかも最も有効な影響を及ぼしたものであることを思わない人々は、科学の発達史を全然忘却したものでなければならない。」^②

それでは、なぜ自然科学が数学を要求するのか。自然科学は経験から出発する。経験的事実を分類し、同じ種類の現象を記述する。さらに進んで、一般的普遍的な法則を求めねばならない。そのためには一般化が必要であり、それは正確な類推によらねばならない。これが経験法則であり、これをあらわす量の間の関係が実験公式である。さらに、自然科学の進歩は、一つの現象と他の現象との間に原因結果の関係を求めるようになる。このようにして関数概念こそが、これらの観点から見た数学教育の中心であるべきことが導かれるのである。「われわれは記述的法則（実験公式）においてすでに函数概念を認める。因果の法則に至っては、函数思想の横溢せるを容認せざるをえない。」^③

これらの論述に見られる、量から解析学の入門に至る一連のコースを数学教育の中に位置づけるキーワードは数学の発生的な本質であり、自然的諸科学との交渉であろう。学習者の側については、経験、実験、実測を通した発見の喜びであり「自然を認識せんとする希望」といったことばに見られる自然への主体的態度、すなわち近代的世界観そのものへの発展が構想されているといえるだろう。これらはすべて、数学教育史における過去であるどころか、小倉らにはじまる諸研究の、きわめて長時間にわたる開花の過程であるといわねばならない。その、戦前における実現化及びその困難性については松宮哲夫の研究^④にゆだねることとして、ここでは戦後、とくに数学教育協議会における小倉らの理念の展開と転回について簡単なスケッチを試みたい。

§ 4 数学教育協議会における関数指導研究の展開

関数を教えるとは、結局何を教えることなのか、という問題は数学教育協議会（以下数教協と略す）の初期の頃から論じられている。『数学教室』の創刊号にはすでに石黒富美男が興味ある問題を提起している。石黒は、連立方程式を代数的に解く前に、グラフの交点として解を求めさせる教科書のやり方（これは改造運動の帰結のひとつである——須田）に対して「静的な代数の概念と動的な函数の概念とは式の思考とグラフの思考との違いであり、かなり違うものである。」^⑤と批判している。石黒はここで、「数学教育の核心は函数観念の養成にある」という小倉のテーゼを引用しながら「函数は函数として充分時間をとってやり、方程式は方程式として代数的解法を十分にやるべきである」^⑥ことを主張した。ここには、小倉を引きながらも、融合主義に対する批判が提出されていることは注目に値しよう。函数を教えることの重要性を小倉らから引きつぎながら、しかも単なる専門分科の孤立主義とは異なる立場からの融合主義批判、数教協の関数指導の出発点はここにあったのである。

銀林 浩・銀林美恵子の「函数観念の養成について」という、基本的には融合主義の立場に立つ論文が1956年10月号に発表され、それを受けたかたちで（決して反論や批判の形とはなっていない）橘 謙が明確に「融合主義の欠陥」を指摘するに至る。橘はそこで「代数と解析幾何、方程式と函数の融合主義」が「異質の静的な代数的思考と函数的思考の同時的学習による混乱」^⑦をひきおこす、と結論づける。そして「入学試験のおかげで式とグラフの相互利用は生徒は達者になっています。そういう技術的な面では達者になりすぎている感があります。しかし根本的な

思想というべきものがおろそかになっていたり、自然現象や社会現象への探究に役立たなかったりするのでは、函数概念が王座を占めている趣旨とはおよそ正反対のものになります。』^⑧という指摘は、その後のこの分野の研究の方向を示唆したものといえる。

この時期に日数教では、柴垣和三雄の微積分を高校で必修にすべきことの提案を受けて、柴垣、横地 清、長妻克亘、白石勲司らのプロジェクト研究が進められている。白石は取手一高で実験授業を組み、その結果、基礎計算力がないための障害を除けば、必修の中でも充分微積分を理解させることができることを明らかにした。そして、教科課程改訂の課題として小学校では比と比例の指導を重視すること、中学校では2次関数の中で、1次関数との比較によって変化率の考えを入れること、高校では2次関数の平行移動はやめて2次方程式の終了後すぐに微積分に入れるべきこと、などの重要な提言をしている。^⑨長妻は主に、微積分を入れることによる教材の整理について具体案を作成した。その中のひとつとして1次関数について次のように述べている。「変量の関係を $y = ax + b$ の形であらわすことに中心をおいて中学校でやり解析幾何的な扱い（直線の方程式を求めること）などは高校必修課程で解析幾何としてまとめる。』^⑩

このような研究の前進の、ひとつの到達点は数教協第7回全国研究大会での菊地乙夫の発表に示されている。「外国の改造運動の影響を受けて大正の中頃から小学校にグラフ教材が取り入れられたが、当時の進歩的な人達は関数を扱うという明確な前提の下に取り入れられたにもかかわらず、全般的には関数としてのグラフというよりもグラフそのものが目的となり関数のグラフまでに高められなかった。」「グラフを関数思考の手段として考えるのではなくて解析幾何の入門的内容を横すべりさせた形でグラフの操作が主となり、勾配と y 切片でグラフを書くことに主力がそそがれ、変化量の概念や平均変化率の概念などは取りあげられていない。このような概念を入れないで果たして関数教材として価値があるかどうか甚だ疑問である。』^⑪これらの主張をまとめたものとして「関数と解析幾何の分離」^⑫がこの時期の課題として設定されることになる。そして解析幾何とは独自の関数指導として、変化率の概念を基軸とする実践的研究の展開が試みられるに至る。

しかし、まず方程式と分離され、次に解析幾何と分離された関数の固有の対象は、第9回大会の問題提起に「関数と解析幾何を分離したときの関数の指導体系、指導法、グラフの扱い方を研究しよう」^⑬とあるように、この段階ではほとんど、未だ空白未定のものであったようだ。この問題は1960年から2～3年の間に、次に示す二つの方向に発展して行く。

ひとつは、この時期に画期的な飛躍をとげた量の理論、及び水道方式の理論との内的関連が明確になってきたことである。その代表的な研究として四日市サークル、鳥取八頭数学教育サークルによって進められた研究が発表されている。四日市サークルは、中学校で「1年で外延量や内包量と、それらの量の関係を。2年では、変数や対応の概念を導入して、量の関係を関数としてみていくこと……3年では、2年における1次関数と同じ立場で2次関数（一般の形）を指導する。今後の研究に待たねばならぬが、簡単な無理関数、三角関数も指導したい」^⑭というように、量をバックボーンとした関数指導の内容を提案した。八頭数学教育サークルも同様であるが、さらに「関数の導入にあたっては基本映像を生徒に与えることが大切である。』^⑮と、タイルのある種の一般化と思われることも課題として提出している。

この問題の決定的な前進は、近畿の集団によってなされた。そのひとつの集約ともいえる、京都サークルの中原克己の発表をみよう。「関数の概念は、もともと変動する自然現象の量的記述の必要から生まれたといわれている。特に17世紀における運動学的法則の追求は、局所的变化の

記述として微積分を有力な方法として生み出したのである。義務教育の課程で、関数を“変化の解析”という観点に立って教育することは、関数の生いたちからも、また将来複雑な自然現象・社会現象の量的構造を明らかにする方法の基礎となるという点からも逃がすことのできない観点である。」「量の法則の上に立った微分積分学を中学・高校の必修課程で教えることは、すでに私たちの間では共通の目標である。特に中学校では、変化の解析という観点に立って、運動学的法則の初歩的で基礎的な内容が対象となる。例として、1次関数——等速直線運動、2次関数——落体の運動（等加速度運動）、三角関数——等速円運動……」^④

ここには融合主義批判以来の、一定の結論が集約されている。目標を量変化の解析におき、しかも単なる量変化一般ではなく、運動学的法則を分析の主要な対象として設定したことによって、関数指導の固有の対象を確立したのである。これは第3章、山口 格の「クラス」による関数概念の整理とかかわっていえば、関数指導の対象をまずは連続関数のクラス、そしてとりわけその中の微分可能な関数のクラスとして設定したことになる。

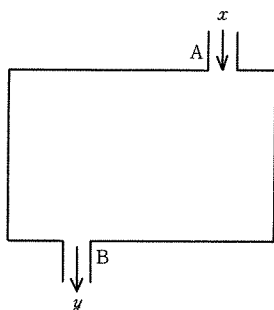
1960年前後のいまひとつの発展方向は、いわゆる関数の定義、一般概念をどのようにおさえるか、という問題であった。

これはまず、菊地乙夫によって、次のように出されている。「従来では一般に“オイラーによる定義→ディリクレによる定義→二つの集合の要素間の対応”を、この順に中・高・大と拡張して行くのが普通だった。しかしこの歴史的な拡張の順が果して教育的に妥当かどうか疑問である。……なるべく早い機会に最も一般的な定義をしておいた方がよい。……たとえば中学校でやるとすれば、順序のない discrete なものの対応→順序づけられたものの対応→連続量の対応のような過程を経て比例関係に進むような方法も考えられるだろう。」^⑤このような考え方は、豊島数学サークルによって実践に移された。豊島サークルは「対応図」の研究から出発することを最も重要と考え、「教科の集合と教師の集合」や、「池田→エンピツ、林→ケシゴム……」等の例で、マルを書いて表わした二つの集合の間の対応図や、直線上に要素を書いた対応図などで関数の一般概念を指導することを試みたのである。^⑥もちろん、そこでは対応一般ではなく、連続的な変化や、その時の変化率等も指導内容の重要な柱に含まれていた。しかし、それらをも対応図で指導するという強引なところも見られる。関数をグラフに矮小化してはならない、という考えは正当であるにしてもグラフの持つ積極的な意義をも否定することには明らかな論理の飛躍がある。

1962年に横地 清らが数教協を退会した後、このような対応を軸とした関数指導への批判が起こる。批判は2種類のものであった。ひとつは、対応図では f 自体があらわれないから関数の一般理念（写像）を表現したことにはならない、という批判、いまひとつは、関数を対応一般に解消することにより、量変化の解析を軸とする視点があいまいになる、というものである。この2つの批判点を集約しながら、関数指導の方向に基本的な転換をもたらしたのが、1963年数教協第11回大会でのパネルディスカッションであった。

§ 5 数学教育協議会における関数指導研究の転回

パネルディスカッション「関数教育をめぐって」は、山口昌哉によって口火が切られる。「一言にしていってしまうと、関数とはブラックボックスである。……なにか中のしかけはわからないんです。図のAから x を入れるとBから y が出てくる。関数とは2つの量の間の対応と変化であるといわれている従来の言い方の一応対応という方を割と重視して考えているわけです。重視してというよりほとんど対応なんです。……こういうふうに書きますと、なにかこの中



にはしかけがあるに違いない。そういうふうな考えが起ってくるわけです。そのしかけを解明しよう、ということからいろんな関数が出てくる。……関数の構造そのものが未知のものであって、そのしかけを知りたい、それを出してくる、そういうしかけを持つものにこのブラックボックスになるのが関数教育の最終目的ではないかと思うんです。微分方程式とはそういうものです。】^⑩

これに対し、森 毅は関数教育を、解析学の内容を持ったものであるべきことを主張している。「教育の問題としては二つに分けた方がいいんじゃないかという気がするんです。二つというのは関数一般というふうなことを考える考え方と、もう一つは解析学という内容を伴ったもの。……ぼくは関数とはどういうものかという、関数のある種の集まりがある。その一つだと思うのです。例えば微分可能な関数というものに関して微分という内容に結びつけた議論がある。……ところが一方、言語みたいなものがある。それはある意味で重要だと思うのです。……例えばこの間日数協の大会の記録を見たんですけど、集合について、集合一般の議論が非常に多いんです。……それはある意味で危険な面もあると思うのです。】^⑪

銀林 浩は山口提案に賛成している。「つまり関数概念一般というのは非常に抽象的で、 x に当るものとか y に当るもの、あるいは中間のからくりですね。こういうものを全部無視して一様に見てしまうものです。しかしいきなりそこへ行ってはいけません、内容を区別する。例えば x が点であるとか集合であるとか……。それから関数概念は本来はこのからくりを無視することにあると思うのですが最初から無視することはやっぱり困難だろうと思うのです。……しかし、からくりを考えないということなんですけれど、それはやっぱりある現象があって、これが変化すればこれが変化する、拘束性があるということはわかるわけですが、問題はその拘束性を具体的に見出すというところにあるわけで、そのために関数を道具として使うわけです。】^⑫

遠山 啓は関数概念の発展の歴史から、関数をブラックボックスと考える必要性があることを指摘している。同時に遠山の強調点はそれ以前にあることに注意しなければならない。「要するに関数を考えるときに最終段階だけを考えてみても何もわからない。長い間の歴史的な発展を考えながらカリキュラムを組んでいけませんと、関数は対応だといって、ああそうか、というだけになっちゃう。うそじゃないだろうがちっともわからん。そういう意味で関数をいろいろに分類すると、どういう関数があるか、それを一つ一つどう系統づけるか、子供には実際どういうふうに理解されるか、というところにもっていかないと、実際教育的にはほとんど意味がないんじゃないかと思います。】^⑬

パネルの時期までの到達点は先の中原克己に加えて、対応一般に関しての横地 清らの実践を批判した松尾 豊の次の見解に集約されうる。「関数の指導は、最初は、量の変化を考察することからはじめることが教育的にもっとも適切であろう。もちろん、量の変化をみる場合でも、そ

の背景には『対応』という問題があることは事実であろう。しかし最初から対応を前面におしたてていくことが教育上好ましいことであるとは思えない。むしろ対応は背景に置いて、前面に出して行くのは量の変化である。』^⑩と述べた上で「基本的な関数関係」を指導して行くべきことを提案している。

同じ松尾 豊が、約1年後、かなりトーンを異にする論文を発表している。「解析学の初歩を教えるという中学校の関数指導の流れの中で、量の変化を基礎にすることは大切であるが、この量の変化も、一般的に関数として見られるようにしておかなければ、量の変化で微積分を導入した場合でも、1つ1つ量について、すべて変化率などを考えて行かなければならなくなり、大そう無駄が多い。どうしても一般的に関数を把握させておくことが必要になってくる。』^⑪そして、「ところで関数とは一体どういうものだろう」という問題について、命題関数やベクトルの関数から f (緑) = 進め、とか、 f (梓みちよ) = こんにちわあかちゃん、に至るまで「ⅰ) 関数のあらゆる意味の拡張に対しても適応できる。ⅱ) 生活の中にしばしば現われて、誰にでもとらえやすい」^⑫という条件をみたすところの f 、及びそのシェーマとしてのブラックボックスが強調される。そして中学校の関数教材の体系の中で、量の変化については「これは、本来量の問題であって、関数という必要はないであろう」という一方、ブラックボックスについては「ここから関数がはじまる」^⑬という位置づけを与えている。同様に高校では坂あつしによる、有限集合間の写像の実践、^⑭小学校では渡辺幸信の自動販売機をブラックボックスに見たてた応用問題立式の指導^⑮など、多くの実践が報告されるようになる。

松尾 豊の、ブラックボックスから関数がはじまるという見解が述べられている『数学教室』の同じ号に、「関数の指導について」という座談会が載っている。そこで遠山 啓は、その後の実践・研究の方向にとって重要な発言をしている。「ブラックボックスを単に導入と考えるべきかどうかの問題ですが、むしろある意味ではブラックボックスのほうが主体じゃないかという気がするわけです。」「ブラックボックスの考えはむしろ、小学校から可能で、今まで実数から実数への関数を主体としておっただけけれども、それを関数の一部分として考え、広い意味の関数を説明したほうが良いという気がするわけです。』^⑯また、松尾の「ブラックボックスの守備範囲が広過ぎちゃって、代入計算とか、構造の問題等も、ブラックボックス的にみれば確かに見やすいということは、よくわかるのですが、狭い意味の関数の問題点も、中学校で残っていると思うのですが。」という問題に対して「僕のいうのは広い方がかえってわかりいいんじゃないかという気がするわけです。実数から実数への関数というのは、ブラックボックスの実際の装置としては非常にまれなんです。』^⑰と答えている。関数指導の中心課題は、量変化の解析から関数一般、あるいは写像の概念をどうつかませるか、という方向に転回されたのである。

その、方法論上の問題点を次に整理してみよう。

§ 6 方法論上の問題

§ 3 の最後に、「これらはすべて、数学教育史における過去であるどころか、小倉らにはじまる諸研究の開花の過程である」ことを指摘しておいた。それは遠山 啓の次のような見解に対する批判の意を込めている。「古い19世紀的な発想がいまだに新しいものと見誤られているのが偽らざる実情である。たとえば19世紀における数学教育のしめくりとして現われてきたペリー運動に、今なおしがみついている人々の多いこともその古さを物語っている。』^⑱

ペリー、クライン、小倉らの所説を「古い」と呼びうるだけの新しいものを創り出すことが現

在の課題であることはその通りである。また、遠山らを先頭に、数教協のメンバーたちが創り出してきた研究と実践の多くが、彼らの水準をのりこえるものであることも認めねばならない。しかし、量から解析学の入門に至る筋道に関する教育学的研究は、未だ彼らを「古い」ものとして扱うことを許す状態にはなっていないのではなかろうか。

まず、関数指導の中心をどこに置くか、という点について。「19世紀数学の主流はこの複素関数論であった。とくにこの複素関数論の発展の頂点をなすのは保型関数論であり、この理論を完成したのはクラインとポアンカレであった。このような背景を考えに入れると、クラインが関数概念を数学教育の主目標にすえたのは、まことに当然のことであった。」^⑧「しかし19世紀の後半から20世紀の初等にかけての正しかったことは20世紀の後半にかけても正しいだろうか。……第一に考慮に入れるべきことは、クラインが王座にすえた関数は、数に数に対応させる狭い意味の関数だった、ということである。……クラインの関数が〈数→数〉の対応を与える狭い意味の関数であったために、彼の改造運動のスケールはせいぜい微分積分の改造や移動の幾何に止まり、数学教育の全域をおおうには至らなかったといえる。」^⑨

実数から実数への関数を「狭い」ということによって何が生ずるだろう。『関数とは何ぞや』という問に答えるためには、一言で答えることは諦めて、数学のなかで関数とみなされ得るすべてのものを列挙して、それぞれの特徴を説明するほかはなさそうである。^⑩

実際、遠山は関数の分類を試みている。有限集合→有限集合、集合の特性関数、順列・組み合わせ論の分配行列、有限集合→実数（ベクトル）、自然数→実数（数列）、整数論的関数、実数→実数などから、最後は超関数に至っている。このように、知られている関数をいくつか列挙し、その特徴を述べるのはさほど難しいことではないだろう。しかし、どのようにそれを行っても、列挙しつくすことはできない^⑪し、またそれぞれについて、§5のパネルにおいて発言した遠山啓自身の課題に答えることも不可能であろう。あらゆる拡張に耐える一般的な関数の定義を与えることは特に反対すべき理由はない。問題は量から解析学へと発展する筋道^⑫そのものだったのである。諸外国も含めて、いわゆる「現代化」の失敗の多くは、量の立場を離れた、無制限な拡張にその原因が求められよう。

次に、遠山 啓による「近代化」批判における方法論上の問題として、「直観と論理」の問題を検討しよう。「ペリーは直観を重んずる立場からユークリッドを激しくこきおろしたのであるが、彼はユークリッドの論理を批判するばかりでなく、一切の論理への不信というところまで走り過ぎる傾向があった。そして数学の核心である論理そのものを否定するようなムードをつくり出しさえした。そういう側面からみるとペリーの主張は生活単元学習にさえ酷似しているとさえいえる。」^⑬

論理数学と実用数学、論理と直観、正確と近似、これらの概念枠を設定した上で、既存の数学教育をその前者の項への一面的傾斜として批判し、後者の項の重要性を強調した「近代化」の論者たちに対する批判として、これは誤りではないかも知れない。そして数学教育において論理に正当な位置づけを与えたのも遠山であった。「ふつう数学は難解で落伍者を出すことも多いが、その原因は数学があまりに論理的であるために、子どもは数学を毛嫌いするからである、といわれている。しかしそれは事実ではなく、反対に、論理の統一性がなく、論理が飛躍している個所であるといっていよう。」^⑭

しかし、論理と直観についての小倉の二分をそのまま認めた上で、論理を軽視したと批判するには必ずしも当を得ていないように思われる。むしろ問題は小倉の数学観そのものの二元論にある

のではなからうか。⑨たとえば小倉の「われわれは数学は純粋な論理的作品であって、そこには抽象的な形式科学として以外に、経験から導かれた何物も残っていない。けれども数学は決して論理のみの産物ではない。その奥底に大なる直観の力が横たわっていることを忘れてはならない。」⑩という論述は明確に二元性を示している。直観という概念を教授学的タームとして承認するか否かという問題以前に、まず P. ブートゥルーによる、直観の二様の意義を挙げておこう。「或種の数学者は、数学的推理の抽象的表示と形象の助を利用する表示とを対立させることを念として、この科学の教育には直観に訴えることが必要だと断定した。この直観といふのは、これから学者の言っている意味では、この科学の理論的命題を形象又は他の具体的な図形表示によって解釈するときに入り込んでくる直観である。之に反して直観といふ名で論理的認識に対立させる理知の操作は、我々の概念の考え方のみに関するもので、我々の形象作用を表現する形式には関しないものである。これは純粋な或ひは超感覚的な直観である。」⑪デカルト、ポアンカレを経て、直観の意味は後者に移ってきている。さらに言うなら、前者の意味における直観も、後者の一形態、すなわち感覚、図形表示等の形象作用に媒介された超感覚的な認識とも考えることができよう。とすると、直観的な理解は必ずしも経験的な事物との対応関係を必要としているわけではないし、しかも論理は必ず直観性を前提としている。直観は、洞察された論理ともいえる。

このことは、直観という概念を、少なくとも数学教育学からは追放し、論理の多様な形態における展開の中にそれを組み込むことを可能にしている。「このあまりに論理的であり、あまりに抽象的であるということは、それは数学者から見れば論理的なのです。であるけれども、生徒にとっては、かえって非論理であるといわざるを得ないのです。」⑫直観の重要性を強調した小倉の理論は、この論述においてはむしろ、数学教育における論理の正当な位置を明らかにした遠山のさきの引用と一致していると見ることができる。ポアンカレが数学者の二つのタイプ、論理型と直観型を、解析学者と幾何学者に対応させたこと⑬は示唆に富んでいる。経験、直観、感性とかいった心理学的タームではなく、量の論理、空間形式の論理、そしてその相互作用の論理として、子どもの数学的認識の発展を記述することが課題となってくるのである。

方法論上の問題の最後に、さきの「転回」の理論的基礎となっていたと思われる遠山の現代数学観に簡単にふれておこう。遠山は数学の発展を、(1)古代よりデカルト以前まで(古代・中世的)、(2)デカルトより19世紀の後半まで(近代的)、(3)19世紀後半より現代まで(現代)と区分している。⑭それぞれの特徴は、(1)不動で静的な数学(ユークリッド幾何、算術)、(2)動的で変化するものの数学(解析学)、(3)集合論と公理的方法によって可能となった構造主義として要約されよう。そして、このような区分から見て、ペリー、クライン、小倉らの共通の弱点として(3)の段階の数学を彼らの数学教育論にとり入れていない点にあると主張している。⑮しかし、集合論、公理的方法(さらには構造を含めるにしても)などが現代数学に属することは明らかであるとして、それらが(2)の段階の数学をどのように消化・吸収しえたのか、という点についてはほとんど言及がなく、若干の例示にとどまっていることは大きな弱点といわねばならない。

ヴェ・エム・ブラジス⑯は、F. エンゲルスの数学規定にもとづきながら、かつその後の数学の発展に関するコロモゴロフの所説を紹介しつつ、遠山 啓とはほぼ同じ時期区分に対する、異なった説明を与えている。第一の段階は、現実の数、量、形の概念の形成や研究が行なわれた時期であり、原始人の行った集合論的諸操作からはじまって自然数の演算、分数、直線の長さ、面積、体積などの概念の形成に至る、ほぼ17世紀はじめまでの長い時代にわたっている。第二の段階は、量の変化と幾何学的変換に関する科学としての数学の時代である。第三の段階が「数学が現実の

世界の最も一般的な量的関係と空間形態についての科学となった時期」であり、これが群論やトポロジーによって特徴づけられる現代数学である。

「最も一般的な量的関係と空間形態」という形で、(1)や(2)の段階との区別と関連、連続性を述べるブラジスと、(1)や(2)が構造の例示としてしかあらわれない遠山では、少なからぬ数学論の立場の違いがあることを指摘できるだろう。そして、数学を構造の科学と見る立場が多くの批判と反省を生みだしている現在、それを数学教育の理論上の問題として解決して行く必要に迫られている。^④

§ 7 関数指導体系の課題

これまで、数学を「量と空間形式についての科学」であると考えた立場から、関数に焦点をあてて問題点を明らかにしてきた。同時に、これから解かれて行くべき問題もいくつか明らかになってきた。要約的に挙げてみよう。

数学を量と空間形式についての学としておさえた時、関数を量あるいは空間形式のいかなる発展のレベルに位置づけるか、という大きな問題が生ずる。これはこれまでに作成してきた教授プログラムに加えていくつかの未開拓の領域を埋めて行く作業が前提となることは言うまでもないが、それを通して、いかに量の理論、あるいは空間形式の理論を再構成しうるか、という問題にはかならない。このような量の理論の数学論的再構成は、量を感じ、直観、経験などのことばで位置づける「近代化」の立場からはそもそもその射程外のことである。量の指導体系は「近代化」が遂行すべきであったが、やるべくして怠ったというよりは、「近代化」の守備範囲内におさまる限りにおいて作られていたと見るべきだろう。そして「現代化」においては、量の理論はほとんどまだ形をさえないのが現状なのである。

まず、量概念そのもの、出発点からしてすでに不明確である。たとえば「『量とはものの一側面である』と考える。ものにはいろいろな側面があろう。質的な側面もあれば、量的な側面もある。」^⑤という説明がある。量がものの一側面であることはよいとして、質と並んで存在する側面であるという説明は、アリストテレスのレベルにとどまっているのではなかろうか。少なくともヘーゲルの論理学は、量的認識の発生について、アリストテレスをのりこえているのであり、このような遺産を学びとることが必要だろう。「量は規定性そのものがもはや有そのものと同一なものとしてではなく、揚棄されたもの、あるいは無関係なものとして指定された純有である。」^⑥

従ってまた、量の分類についても、量を分離量と連続量に、連続量を外延量と内包量に分類する根拠、あるいは有効性は必ずしも明確になっているわけではない。そして最も重要な、量の指導過程についての教育内容論・教材論的研究も未だ確定したものが得られているというのにほど遠い。^⑦単位導入の四段階指導という考え方は、きわめて優れたアイデアを含むにしても、それでは個々の量の、いかなる質を教えるべきか、というもっとも重要な問題はほとんど未開拓なのである。

関数概念の実践的研究はブラックボックスによる混乱にもかかわらず、その後も注目すべき実践が蓄積されている。^⑧そこでその到達点と課題を要約してみよう。まず、「近代化」に対する批判は、次のように要約できるだろう。「関数概念を解析学の視点で体系づけていくという立場ではなく、関数の空間的表現としてのグラフだけがはっきり打ち出されており、このため、伝統的な方程式中心の代数優位の立場は崩れずにグラフは方程式の根の説明に使う程度の従属的位置にある。」「グラフの内容は『解析幾何』的グラフとの区別が明らかでない。」「生活単元学習の時期

を除けば、この伝統は基本的に変わることなく踏襲されてきたといってよい。総じていえば、改良運動の立場——近代化には、量の変化の解析という解析学の視点は貫かれていないこと（代数は方程式中心で方程式のグラフ解法としてグラフを位置づけていること）、微積分への一貫性がなく微積分に微分方程式、Taylor展開がないこと、概念のみが強調され、それを裏づける内容と体系がないこと、過度の融合主義に陥っている（関数のグラフと解析幾何のグラフとの混同）ことを指摘できる。〕^⑥

このような近代化批判に立って、正比例関数を量から関数への発展のかなめとして位置づけ、素材としての典型性（一様変化を法則のもっとも単純かつ基本的なものとする）および解析学の方法の基礎（一般的な法則を局所的に一次化する）という観点から指導する実践、1次関数を一様変化の中で初期値を最も初歩的に扱うことができるという観点からの実践、2次関数を等加速度運動から定式化し、その中で微分、積分の基本的な考え方にふれさせる実践など、豊富な成果を蓄積している。

主要な成果は主に、量変化から関数を導く部分に集中しているが、指数、対数、三角関数などを含めて、さらに多様な実践が開拓されねばならない。しかし、微分方程式、Taylor展開などはほとんど未開拓のまま残されている。山口昌哉によるブラックボックスの提起はそもそも、これら解析学の、もっとも解析学らしい部分に焦点をあててなされたのであるが、その後写像の一般概念に拡散した経過はすでにふれた。未知関数を既知関数で近似して行くこと、あるいは近似そのものの本質などについて、教授プログラムの開発が必要とされている。

本章の最後に指摘しておかねばならないことは、われわれの数学論における関数の指導は、あれこれの関数を、導入場面において物理的対象を考察し、量的な分析によって立式させることで終るわけではない、ということである。量は、より高次の、より一般的な量へと移行・発展する。量から導かれた関数はその数学的形式の自立性によって他の関数を生み出し、また、他の関数との諸関連の中に位置を占める。あるいは空間諸形式の中における関数ともまた、必然的に関連を生ずるようになる。量としての関数概念の発展について、このようなヘーゲルの思弁の形で語ることはもうやめよう。それが数学自身においてどのように整理されるかを次章以下に見ることにする。新しい教授プログラム開発の視点を探ることが現在の課題なのである。

〔注〕

- ① たとえば、山口 格・須田勝彦「数学教育の観点から見たアルキメデスの公理」、北海道大学教育学部紀要第49号、1987年。
- ② 同上論文参照。
- ③ 「純粋数学が対象としているのは、現実の世界の空間諸形式と量的関係であり、したがってきわめて実在的な素材なのである。」マルクス・エンゲルス全集、第20巻、37ページ。
- ④ 同上書38ページ。これを量の論理と呼ぶなら、量自身、より高次の量概念へ、量の論理で発展して行く。これを数学の内容に即して展開しようとしたのが今野武雄「数学論」であろう。
- ⑤ 江戸山也「数学方法論への唯物論的接近のために」、『日本の科学者』1984年、No. 4に同様の指摘がある。
- ⑥ 「我々は科学の構築には依存しない数学的事実の存在を仮定しないわけにはいかない。我々はどうしても数学的概念に真の客観性を賦與しなくてはならぬ。この客観性を我々は実験的認識に関する客観性と混同しないことを示すために内在的と呼ぶことにする。」ピエル・ブートゥルー、河野伊三郎訳「数学思想史」、1943年、岩波書店、228ページ。

- ⑦ 「空間形式」については未だ研究が緒についたばかりだから本稿ではふれない。なお、「空間形式」を量のカテゴリーの独特な形態とした上で、数学を量（質的無関与性）についての学であるとする考え方もある。しかしこれは平板な見解といわねばならない。たとえば空間の確立→空間の量への還元→空間への回帰といった数学的認識の発展過程こそが興味ある数学教育上の問題なのであり、量一元論からはこのような対立は消えてしまう。連続と不連続、有限と無限など同様に、量と空間形式もまた静間良次のいう「矛盾」の一形態として捉えたい。静間良次「数学における連続の問題」武谷三男編『自然科学概論』第2巻、1960年、勁草書房、参照。
- ⑧ 拙稿「教育内容の問題としての教材—量の問題を中心に」鈴木秀一編『よい教材・悪い教材』1985年、日本標準、参照。
- ⑨ 遠山 啓「量の問題について」、『数学教室』No. 44、1958年8月、国土社、大会のための問題提起：
- ⑩ ペリー「数学的教育」丸山哲郎訳、ペリー、クライン『数学教育改革論』、1972年、明治図書、17ページ～18ページの要約。
- ⑪ 例示にはこと欠かないが、例えば1986年北海道合同教研集会での高橋洋輔のレポートには、次のようなリアルな感想が述べられている。「私が教員になる前は数学教育に対して夢を持っていました（今、全く失ったわけではありませんが）。受験体制に左右されることなく数学の概念発生過程を生徒とともに味わいたい、数学のすばらしさ、おもしろさを生徒とともに味わいたい、等。しかし、現実は、かなりかけはなれたものになってしまってます。……」
- ⑫ 小倉金之助・鍋島信太郎「現代数学教育史」1957年、大日本図書、53ページ。
- ⑬ ペリー、前掲書⑩、19ページ。
- ⑭ 同上書、20ページ。
- ⑮ 大田邦郎「数学教育の内容史研究に関する試論——改造運動における微積分の問題を中心に」、北海道大学教育学部紀要、No. 44、1984年。「なお、ペリーは『純粋数学』……に『実用数学』を対置しているが、それは中等段階においてであり、『純粋数学』の意義はそれ自体として認めている。つまり、数学を『純粋』と『実用』の二元論において捉えているのである。」（22ページ）
- ⑯ ペリー「教員養成所における数学教育の教科課程」、前掲書（⑩）による。
- ⑰ F. クラインをも含めて、中等教育へ微分・積分を導入しようとする思想がいかに育ち、いかにわが国に具体化されたかについての端緒的な検討は松宮哲夫（⑳），大田邦郎（⑮）などを参照。
- ⑱ 小倉金之助著作集4，数学教育の根本問題，1973年，勁草書房，64ページ。
- ⑲ 同上，66ページ。
- ⑳ 同上，72ページ。
- ㉑ 同上，74ページ。
- ㉒ 同上，78ページ。
- ㉓ たとえば松宮哲夫「大正時代における中学校数学科教授要目改正中止の事情についての覚え書」，大阪教育大学数学教室『数学教育研究』第2号，1972年など。
- ㉔ 石黒富美男「方程式について」，『数学教室』1955年，2月創刊号，19ページ。
- ㉕ 同上，20ページ。
- ㉖ 橘 謙「式・グラフ・函数」——『函数概念の養成について』を読んで——，数学教室，1957年2月，33ページ。
- ㉗ 白石勲司「必修9単位内における微積分の指導」，『数学教室』1958年6月，同「必修9単位で微積分を指導して」，『日本数学教育会誌』，1958年9号参照。

- ⑳ 長妻克亘「微積分指導についての諸問題」『数学教室』1958年6月、及び同「教科課程近代化に関する諸問題」、『日本数学教育会誌』1958年第7号参照。
- ㉑ 『数学教室』1959年10月増刊、数教協第7回研究大会特集、36ページ。
- ㉒ 菊地乙夫「関数教材の新編成」、『数学教室』1960年4月、46ページ。
- ㉓ 菊地乙夫「中学校・高校の関数」、『数学教室』1961年5月、68ページ。
- ㉔ 四日市サークル「中学校の関数指導について」、『数学教室』1961年6月増刊号、24～5ページ。
- ㉕ 鳥取八頭数学教育サークル「中学校の関数」同上誌、35ページ。
- ㉖ 中原克己「中学校の関数——量から微積分へ」、『数学教室』1963年12月、29ページ。
- ㉗ 菊地乙夫、前掲(㉒)論文、70ページ。
- ㉘ 豊島数学サークル「中学校における関数指導(1)」、『数学教室』1961年11月。
- ㉙ 『数学教室』1963年10月増刊。29～30ページ。
- ㉚ 同上、30～31ページ。
- ㉛ 同上、31～32ページ。
- ㉜ 同上、36ページ。
- ㉝ 松尾 豊「中学校における微分指導のいくつかの問題点」、『数学教室』1963年8月、32ページ。
- ㉞ 松尾 豊「ブラックボックスについて」、『数学教室』1964年、28ページ。
- ㉟ この意味づけは遠山の次の論文を引用しながら述べられている。遠山 啓「現代数学講座、関数について(1)」、『数学教室』1964年2月、101ページ、及び同「教師のための数学入門」1965年、国土社、51ページ。
- ㊱ 松尾、前掲論文(㉞)、35ページ。
- ㊲ 坂あつし「教室から——アミダでショーチュー会」、『数学教室』1964年2月。ただこの報告は「有限集合からの量の関数へのつながりと発展についてはまだ考えていない」と、慎重な限定を付した上での、楽しい授業実践である。
- ㊳ 渡辺幸信「算数とブラックボックス」、『数学教室』1964年5月号。この報告では、注㉟に付した遠山の論文を読んで、いかに写像が普遍的なものであるかについての再発見が新鮮に語られている。
- ㊴ 座談会「関数の教育について」、『数学教室』1964年7月号、58ページ～59ページ。
- ㊵ 遠山 啓「教師のための数学入門」関数・図形編、1965年、国土社、11ページ。
- ㊶ 同上書、47ページ。
- ㊷ 同上書、48ページ。
- ㊸ 同上書、50ページ。
- ㊹ それは、「すべての集合の集合」というものを数学としては認められないのと同様である。
- ㊺ 遠山は量を否定したのではもちろんない。量を「構造」の「素子」として位置づけられると考えたのである。しかしそのことによって、量が新しい展開を見せたというよりは、「構造」一般についての常識的な説明の中に埋没させられたと見るべきだろう。前掲書(㊹)、7ページ。
- ㊻ 遠山 啓、前掲書(㊹)、13～14ページ。なお、ここで指摘されている「生活単元学習」との関係は、初等教育と中等教育にわけて、厳密に検討されるべき課題であろう。
- ㊼ 遠山 啓「数学教育の基礎」、岩波講座『現代教育学』9、1960年、7ページ。
- ㊽ 岡部 進によって、この点に関する詳細な検討がなされている。岡部「小倉金之助その思想」1983年、教育研究社。
- ㊾ 小倉金之助、前掲書(㊹)、62ページ。

- ⑤⑧ P. ブートゥルー, 前掲書 (⑥), 243~244ページ。
- ⑤⑨ 小倉金之助「数学教育の基調」, 前掲書 (⑬), 207ページ。
- ⑥⑩ ポアンカレ「科学の価値」, 吉田洋一訳, 岩波文庫, 19~20ページ。
- ⑥⑪ 遠山, 前掲書 (④⑧), 34ページ, なお, 遠山の「数学は変貌する」1970年, 国土社では古代と中世(ターレス以後)が区分されている。
- ⑥⑫ 同上書, 36~39ページ。
- ⑥⑬ ヴェ・エム・ブラジス「数学教授法概論」, 宮本敏雄・狩野孝一共訳, 1960年, 新評論。ただし, ブラジスはこの著作で関数指導について何か重要なことを述べているわけではない。
- ⑥⑭ 藤井淳一も, 遠山がその数学論的基礎をブルバキに求めていること, 関数をブラックボックスで教える考えはそこから生じていることなどを指摘している。「小倉もペリーも『数学教育の中で力学をやろう』と主張していた……。その内容論からみれば, ブラックボックス的な関数の見方がいかに形式的で貧弱なものかわかるだろう。…また, 具体のない抽象ほどくだらないものはない。……『ブルバキとピアジェ』は, 世界の数学教育現代化のモデルでもあった。科学教育を忘れた現代化が失敗に陥るのは……明らかなことである。」, 藤井淳一「関数教育の根本問題」, 大阪教育大学数学教室『数学教育研究』第16号, 1986年, 80ページ。なお, 「具体のない抽象ほどくだらないものはない」という指摘は, 小論 § 5 に紹介した山口昌哉の提案に対する, 遠山 啓の意見と同趣旨であることは興味深い。
- ⑥⑮ 銀林 浩ほか編「算数・数学科の自主編成」3, 量の学習, 1972年, 明治図書, 24ページ。
- ⑥⑯ この点の指摘は拙稿「基礎学力の指導過程」, 講座日本の教育6, 1976年, 新日本出版, および須田・堀岡「教育内容の問題としての教材」(⑧) 参照。
- ⑥⑰ その一端はたとえば大田邦郎「高等学校における微積分の初歩としての二次関数の指導過程」, 北海道教育学部紀要第40号, 1982年に紹介されている。
- ⑥⑱ 山口昌哉, 中原克己編「関数指導現代化入門」1, 初等関数, 1970年, 明治図書, 26~27ページ。

第2章 2次関数の研究

§1 はじめに

数学教育の対象として2次関数をどう教えるかという問題は, 現場の教師にとっても, 数学教育の研究者にとっても大きな問題である。しかし2次関数をどう教えるかという教育の方法に関する問いかけの前に, 2次関数とは何であるのかという, 数学論的問題意識が存在するはずである。

数学論的問題意識とは, まず2次関数とは何であるのか, その他の関数と異なる点は何か, 何故それが必要なのか等の問題に答えることである。

従来の研究実践は, この2次関数に関しては多数あるが, その代表的なものを挙げると次のようになる。

第一に民間教育研究団体で主張され実践された考え方で, 量の変化の法則としての関数の中の一つに2次関数を位置づけるという立場である。宮本敏雄が1971年に書いたものによると次のようになっている^① 関数指導に対するわれわれの態度をいくつかにまとめてみると, つぎのようになる。

- (1) 量の変化の法則としての関数, つまり狭い意味での解析学での関数と, 広い意味での一般

の写像とを一応区別する。(中略)

(2) 量の変化の法則としての関数については、自然や社会で、最も基本的な量の変化の法則は何かということをまず問題にしなければならない。われわれはそのような基本的な変化の法則として、一様変化、一様加速変化、一様倍変化、一様周期変化などをとりたいと考えている。それらはそれぞれ、1次関数(正比例関数はその特殊な場合である)、2次関数、指数関数、三角関数などの素関数に相当する。

(3) (省略)

(4) (前略) 子どもたちに関数というものを1つの実体としてつかませるシェーマが必要で、この点でブラックボックスは重要な働きをすると考えられる。(中略)

(2)について、これまでの官側の関数指導では、式から入ることが多かった。たとえば、1次関数は1次式で表わされる関数、2次関数は2次式で表わされる関数というふうであった。われわれは量の変化の基本的な法則から関数を導入することを主張する。たとえば1次関数は一様変化(一様分布)の法則として、つまり内包量一定の関係として導入される。(中略)さらに2次関数も、変化率が一様変化する法則(一様加速変化)として導入される。(中略)さらに指数関数は一様倍変化として導入される。)

この考え方による実践報告は榎 忠男や小野良高によって各々1974年になされている^②。榎は等加速運動の分析から2次関数を導入しようと試み、小野は三角水槽から2次関数を導いている。

第二には近数協による集団的研究で、微分方程式を解くことによって、加速度一定の運動から2次関数を導こうと試みている。用いられるモデルは水道栓モデルである。ここで特徴的なものは区分的一次関数の極限として2次関数を得ようとしたこと及び、微分方程式を積分することを中学校で実践しようと試みていることである。

第三は大田邦郎の高等学校での実践報告で上の二つの70年代の実践の長所を継承し、発展させたものである^③。すなわち等加速運動の解析と微積分の方法の導入で2次関数を扱ったものである。

本稿の目的はこれら従来の2次関数に対する考えの筋道から離れて、数学本来の立場から、2次関数を特徴付ける性質を探究して、実践の論理的前提を用意することである。ここに要約した過去の業績はいずれも共通して、量の変化の解析という視点に立っている。この視点は大切な視点ではあるが、この視点だけではもの足りないのではなかろうか。現代数学の立場からみると、そのような不安が感ぜられるのである。

§ 2 正比例関数について

2次関数の特徴を論議するために、対比の対象として正比例関数についてここで要約して述べておく。

まず、正比例関数の定義を述べよう。 R を実数全体の集合として、通常の距離空間と考え位相空間と考えておく。 R から R への写像 f が次の2つの性質をみたすとする。

$$(1) f(x+y) = f(x) + f(y) \quad (x, y \in R)$$

(2) 任意の実数 α について

$$f(\alpha x) = \alpha f(x)$$

このとき f を正比例(線型)関数という。これが普通の正比例関数の定義である。さて正比例関数は $f(x) = ax$ という形に表わされるのであるがこのことを導いてみよう。 R を R 上のベ

クトル空間と考えると、(2)より

$$f(\alpha \cdot 1) = \alpha f(1)$$

$f(1) = a$ とすると

$$= \alpha a$$

従って $f(\alpha) = \alpha a$ 新たに $\alpha = x$ とおくと $f(x) = ax$ が導かれたことになる。 $f(x) = ax$ であれば、この f は(1)をみたすことは明らかである。

このように(2)だけから $f(x) = ax$ となることを導くことができる。

実はこの場合(2)から直接(1)を出すこともできる。 $x \neq 0$, $y \neq 0$ のとき $y = \alpha x$ と書けるから

$$\begin{aligned} f(x+y) &= f(x+\alpha x) = f((1+\alpha)x) \\ &= (1+\alpha)f(x) = f(x) + \alpha f(x) \\ &= f(x) + f(\alpha x) \\ &= f(x) + f(y) \end{aligned}$$

である。このように(2)を仮定すると(1)が出ることがわかった。

そうすると正比例関数の定義は(2)だけで良いのではないかということが問題になる。本質を正しく見極めるために次元を一般にして考察してみよう。実数体 R 上の有限次元ベクトル空間を考えてみよう。すなわち n 次元ベクトル空間 V^n は和と実数倍という二つの基本演算を持つ空間で、その中に内積が定義されていて、ベクトルの長さや、角などが定義されるものとする。このような n 次元ベクトル空間は n 次元ユークリッド空間 R^n に同型であるから、イメージとしては R^n と考えておいて良いだろう。さて二つのベクトル空間 V^m と W^m に対して、写像 $f: V^m \rightarrow W^m$ を考え、次の定義を行う。

定義 $f: V^m \rightarrow W^m$ が V^m 内のベクトル X , Y に対して

- (1) $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$
- (2) $f(aX) = af(X)$ (a は実数)

をみたすとき f を線形写像という。とくに V^m から V^m への線形写像を線形変換という。

このように一般の有限次元での線形写像を定義したのち、最も簡単な場合として $V = W = R^1$ の場合を考察しよう。(本質的にははじめにやったことのくり返しであるが、次の2次元の場合と対比させるために改めて述べる。) $f: R^1 \rightarrow R^1$ を線形変換とする。この f を決定することを考察したい。すなわちこの f を特徴付ける具体的形を求めてみたい。まず R^1 にベクトル空間としての基底を一つ定める。すなわち座標原点 0 を定め、単位ベクトル e を定めて、 R^1 上の任意のベクトルを $X = x \cdot e$ と表す。この x は基底 e による X の座標表現である。

$$f(X) = f(x \cdot e) = x \cdot f(e)$$

であるから、 $f(e) = a \cdot e$ とすれば、

$$x \cdot f(e) = x \cdot (a \cdot e) = (x \cdot a) \cdot e = (ax) \cdot e$$

となる。すなわち $f(X)$ を Y とかけば、 $Y = y \cdot e$ であるとして

$$y \cdot e = (ax) \cdot e$$

この基底 e を省略して表したら $y = ax$ となる。前にも述べたようにこの1次元の場合は(2)の性質 $f(X+Y) = f(X) + f(Y)$ は用いていない。1次元の場合、線形変換は正比例関数に他ならない。この a 倍するということが、正比例関数を特徴づけることであるかどうか検討してみよう。このために R^1 の別の基底による表現を考察する。これを e' と書こう。 f をさっきの a 倍する線形変換とする。 $e' = b \cdot e$ とする。 $X = x \cdot e = x' \cdot e' = x' b \cdot e$ より $x = b \cdot x'$ 。 Y に

についても同様に $y = b \cdot y'$ となる。 $y = ax$ の式に代入して

$$by' = ax = a(b \cdot x') = (ab) \cdot x'$$

を得る。よって基底 e' に関する X , Y の座標 x' , y' については

$$y' = \left(\frac{1}{b} \cdot a \cdot b\right) x'$$

となるが、実数の積は可換であるから (2次元ではこうならないことに注意するため当然のことを書いたのである), $\frac{1}{b} \cdot a \cdot b = a$, すなわち

$$y' = ax'$$

となり、新しい基底 e' についても f はやはりベクトルを a 倍するといつてよいことがわかった。この値 a は線形変換 f に固有な値で、 f の固有値と呼ぶ。

次に次元をあげて2次元の場合を考察する。 $f: R^2 \rightarrow R^2$ を線形変換とする。 R^2 の基底を e_1, e_2 とする。

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

である。 R^2 のベクトル X を e_1, e_2 を用いて表わすと、

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

である。これを

$$x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

と書く。

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ は X の基底 e_1, e_2 に関する座標である。この表記法により上の線形変換 f はどのように表わされるだろうか。

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

であるから

$$f(X) = f(x_1 e_1 + x_2 e_2) = f(x_1 e_1) + f(x_2 e_2)$$

となる。注意すべきは、ここで条件(1)(2)の両方を用いたことである。

$$f(e_1) = a e_1 + c e_2 = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$$

$$f(e_2) = b e_1 + d e_2 = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$$

とすれば

$$f(X) = Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

として、

$$Y = x_1(a e_1 + c e_2) + x_2(b e_1 + d e_2) = (a x_1 + b x_2) e_1 + (c x_1 + d x_2) e_2$$

となる。行列の積を用いると

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

となる。 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = A$ と書けば

$$Y = AX$$

と表わせることになる。この A を f の表現行列という。よって R^2 から R^2 への線形変換は A を比例定数とする正比例関数の形になっていることがわかった。このことは一般に $R^n \rightarrow R^m$ なる線形写像についても成立し、 $f: R^n \rightarrow R^m$ なる線形写像はある (m, n) - 行列 A を用いて

$$Y = AX \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} \cdots a_{1n} \\ \vdots \\ a_{m1} \cdots a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表わせる。

さて2次元の場合基底を変えるとどうであろうか。 R^2 の標準的な基底を e_1, e_2 とし、 R^2 のベクトル X を

$$X = x_1 e_1 + x_2 e_2$$

とする。 R^2 のもう一組の基底を e_1', e_2' とし、

$$e_1' = p e_1 + r e_2, \quad e_2' = q e_1 + s e_2$$

とする。

$$\begin{aligned} X &= x_1 e_1 + x_2 e_2 = x_1' e_1' + x_2' e_2' \\ &= x_1' (p e_1 + r e_2) + x_2' (q e_1 + s e_2) \\ &= (x_1' p + x_2' q) e_1 + (x_1' r + x_2' s) e_2 \end{aligned}$$

したがって

$$x_1 = x_1' p + x_2' q$$

$$x_2 = x_1' r + x_2' s$$

行列を用いると

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

となる。前の式

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

に代入して

$$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix}$$

$\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$ を P とかくと

$$PY' = APX'$$

となる。 P は正則だから、 $Y = (P^{-1}AP)X$ を得る。つまり R^2 の基底をかえると f を表わしている行列は、 A から $P^{-1}AP$ にかわってしまうのである。 X を A 倍する写像が f というい方は今度はできないのである。この場合1次元とちがって、行列は積が交換可能でないことが、本質的になることに注意したい。つまり $P^{-1}AP = A$ となるとはかぎらないのである。

さてわれわれは次元を上げて考察することによって、線形変換はやはり(1), (2)両方の性質が定義として必要なことが明らかに出来たのである。

数学教育の論議で正比例関数の定義を、「倍々」すなわち(2)の性質からのみ行って(1)の「加法性」に注意を向けなかったり、 $y = ax$ の a の量的性質「内包量一定」のみを重く考える傾向がよくみられるが、定義が多次元の場合にも見通せる本質的なものかどうかを検討することも必要であろう。

§ 3 2次関数について

第1節に述べたように、2次関数と正比例関数は、量的には各々等加速運動と等速運動のように、別々のものとして意識され教えられることが多い。ここでは主としてこの2つの対象の内的な結びつきというものを探る形で論を進めることとする。

前と同じように R を実数体とする。 V を R 上の n 次元ベクトル空間として、双1次形式 $f: V \times V \rightarrow R$ を考える。これは $x \in V$, $y \in V$ に対して $f(x, y)$ は R の元であって、次の条件をみたす。

$$(1) f(x+x', y) = f(x, y) + f(x', y)$$

$$(2) f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y)$$

$$(3) f(x, y+y') = f(x, y) + f(x, y')$$

$$(4) f(x, \beta y) = \beta f(x, y)$$

ここに $\alpha, \beta \in R$ である。

このようにして定義された双1次形式は、 V 上の変数 x, y の各々に対して線形写像になっているといってもよい。

双1次形式 $f(x, y)$ が任意の $x, y \in V$ に対して、 $f(x, y) = f(y, x)$ となるとき、 $f(x, y)$ を対称双1次形式という。

$\{x_1, \dots, x_n\}$ を V の一つの基底とし、 $f(x_i, x_k) = \alpha_{ik}$ とおけば、 $x = \sum \xi_i x_i$, $y = \sum \eta_k x_k$ に対して

$$f(x, y) = \sum \alpha_{ik} \xi_i \eta_k$$

となる。すなわち $x = {}^t(\xi_1, \dots, \xi_n)$, $y = {}^t(\eta_1, \dots, \eta_n)$, $A = (\alpha_{ik})$ とおけば

$$f(x, y) = {}^t x A y$$

と表わされる。 A を、座標系 $(x_1, \dots, x_n)$ によって双1次形式 f を表現する行列という。

$f(x, y)$ が対称双1次形式のとき、任意の i, k に対して、 $\alpha_{ik} = \alpha_{ki}$ が成り立つ。このとき A は対称行列になる。

$f: V \times V \rightarrow R$ が双1次形式のとき、 $Q(x) = f(x, x)$ を V 上の2次形式という。つまり

$$Q(x) = \sum \alpha_{ik} \xi_i \xi_k$$

である。

$Q(x)$ が V 上の2次形式のとき次の性質がなりたつことはみやすい。

$$(1) Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x) \quad (\lambda \in R, x \in V)$$

$$(2) Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \text{ は双1次形式である。}$$

逆に(1), (2)の条件をみたす関数 $Q: V \rightarrow R$ に対して, $B(x, y) = \frac{1}{2}(Q(x+y) - Q(x) - Q(y))$ は対称な双一次形式となり, かつ $Q(x) = B(x, x)$ となる。従って Q は2次形式となる。この関係によって, V 上の2次形式の全体と $V \times V$ 上の対称な双一次形式全体とが1対1に対応する。

前節で述べたように線形写像を特徴づける性質は

$$(1) f(X+Y) = f(X) + f(Y)$$

$$(2) f(\alpha X) = \alpha f(X)$$

の2つであった。これと同様に2次形式を特徴づける性質は

$$(1) Q(\lambda x) = \lambda^2 Q(x) \quad (\lambda \in R)$$

$$(2) Q(x+y) - Q(x) - Q(y) \text{ は双1次形式}$$

なのである。

さてこれまで R 上の n 次元ベクトル空間 V 上の2次形式について述べて来たが, V の次元が1次元の場合が2次関数になるのである。 R を R 上の1次元ベクトル空間と考えて写像

$$f: R \rightarrow R$$

が

$$(1) f(\lambda x) = \lambda^2 f(x)$$

$$(2) f(x+y) - f(x) - f(y) \text{ が } R \text{ 上の双1次形式}$$

の2つの条件をみたすものが2次関数であるとするのである。

$$B(x, y) = \frac{1}{2}(f(x+y) - f(x) - f(y))$$

は対称な双一次形式となり $f(x) = B(x, x)$ となる。今の場合 $B(x, y) = axy$ になる。但し $a = f(e, e)$ で $R \ni X = xe$, $R \ni Y = ye$ とする。 $B(x, x) = ax^2$ で, $f(x) = ax^2$ を得る。

線形写像の場合, 次元数が1次元のとき, 正比例関数は, (2)の条件だけで $f(x) = ax$ という形が決定できたが, 二次形式の場合は V の次元数が1のとき, すなわち2次関数においては(1)の条件だけで形を決定できる。それは(1)より

$$f(\alpha x) = \alpha^2 f(x) \quad \alpha \in R$$

$$f(\alpha) = \alpha^2 f(1)$$

ここで $f(1) = a$ とおくと

$$f(\alpha) = \alpha^2 \cdot a$$

ここで α を改めて x とおくと

$$f(x) = ax^2$$

を得る。したがって正比例関数や2次関数を考察する際, 次元数が1のため, 表面にあらわれない性質(正比例関数にあっては(1), 2次関数にあっては(2))に注意を向ける必要がある。

§ 4 3次関数について

今まで述べて来たことは3次関数についても成立する。 V を前と同様に R 上 n 次元のベクトル空間として, F を $V \times V \times V$ 上の三重一次形式とする。 $F(x, y, z)$ が x, y, z のどんな置換に対しても不変なとき対称という。対称3重一次形式全体の空間を $\mathfrak{S}$ と表わす。 $S \in$

めに対し

$$C(x) = S(x, x, x)$$

とおくことにより、 V 上の3次形式 C が得られる。2次形式 $Q(x)$ の $(2)Q(x+y) - Q(x) - Q(y)$ は双1次形式に相当する式を出してみよう。

$$\begin{aligned} C(x+y+z) &= C(x) + C(y) + C(z) \\ &\quad + 3\{S(x, x, y) + S(x, x, z) + S(x, y, y) \\ &\quad + S(x, z, z) + S(y, y, z) + S(y, z, z)\} \\ &\quad + 6S(x, y, z) \end{aligned}$$

が成立する。この中間項を消去するために

$$C(x+y) = C(x) + C(y) + 3S(x, x, y) + 3S(x, y, y)$$

および $C(x+z)$, $C(y+z)$ を考えれば直ちに

$$\begin{aligned} (1) \quad C(x+y+z) - C(x+y) - C(x+z) - C(y+z) + C(x) + C(y) + C(z) \\ = 6S(x, y, z) \end{aligned}$$

という関係式が得られる。

このような方法で3次関数を特徴づけることができるのであるが、1次関数(正比例関数)、2次関数、3次関数と進んで来たように一般に n 次関数を対称 n 重一次形式から n 次形式を得る方法により、作ることができる。そうすると従来の学校教育に於ける考え方とは異なる一本の太い線で1次関数、2次関数、3次関数、…、多項式関数を統一的に考察することができることになる。

そこで問題は多項式とは何かということになる。

§ 5 テンソル代数と多項式

前節末に提起した問題、すなわち「多項式とは何か」ということを考えるためにテンソル代数の記述法をかいついで述べよう^④。 V を体 K 上の n 次元ベクトル空間とする(体 K としたが $K=R$ の場合を想定しておいてもさしつかえない)。 V 上の(斉)一次関数、すなわち V から K への一次写像全体の集合を V^* で表わす。 $f, g \in V^*, \alpha \in K$ に対し、和 $f+g$ およびスカラー倍 αf を

$$\begin{aligned} (1) \quad (f+g)(x) &= f(x) + g(x) \\ (\alpha f)(x) &= \alpha \cdot f(x) \quad (x \in V) \end{aligned}$$

により定義する。そのとき V^* は上の演算に関して K 上の n 次元ベクトル空間になる。この V^* を V の双対空間という。

V, W, T を K 上のベクトル空間、 $\dim V = n, \dim W = m$ とする。双一次写像 $\Phi: V \times W \rightarrow T$ を次の条件で定義する。

$$(2) \quad \begin{cases} \Phi(x+y, x') = \Phi(x, x') + \Phi(y, x') \\ \Phi(x, x'+y') = \Phi(x, x') + \Phi(x, y') \\ \Phi(\alpha x, x') = \Phi(x, \alpha x') = \alpha \cdot \Phi(x, x') \quad (x, y \in V, x', y' \in W) \end{cases}$$

この双一次写像 Φ に関して次の条件を考えよう。

$$\begin{aligned} (T1) \quad x_1, \dots, x_r \in V \text{ が一次独立ならば, } y_1, \dots, y_r \in W \text{ に対して} \\ \sum_{i=1}^r \Phi(x_i, y_i) = 0 \Rightarrow y_i = 0 \quad (1 \leq i \leq r) \end{aligned}$$

(T1') $y_1, \dots, y_r \in W$ が一次独立ならば, $x_1, \dots, x_r \in V$ に対して

$$\sum_{i=1}^r \Phi(x_i, y_i) = 0 \Rightarrow x_i = 0 \quad (1 \leq i \leq r)$$

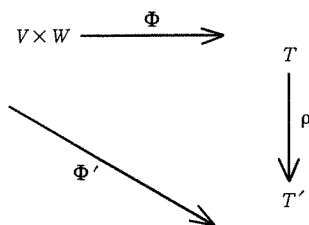
(T2) T は $\Phi(x, y) (x \in V, y \in W)$ によって生成される。

そうすると次の定理が成立する。

定理 与えられた V, W に対し, 条件 (T1) (T1'), (T2) を満たすベクトル空間 T と双一次写像 $\Phi: V \times W \rightarrow T$ は必ず存在する。しかもそのような (T, Φ) は次の意味で“普遍的” (universal) である。すなわち任意のベクトル空間 T' と双一次写像 $\Phi': V \times W \rightarrow T'$ に対し, 条件

$$(3) \quad \Phi'(x, y) = \rho(\Phi(x, y)) \quad (x \in V, y \in W)$$

を満たすような一次写像 $\rho: T \rightarrow T'$ が一意的に定まる。



(3) を満たす ρ は同型写像であり, T と Φ の組 (T, Φ) が同型を除いて一意的に定まるのである。よって与えられた V, W に対し (T1) (T2) を満たす組 (T, Φ) を一つ対応させ, それを V, W の テンソル積 といい, 記号

$$T = V \otimes W, \quad \Phi(x, y) = x \otimes y \quad (x \in V, y \in W)$$

で表わす。

定理の証明は容易である。 T を任意の nm 次元ベクトル空間, $(e_{ij}) (1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m)$ をその一つの底とする。 $(e_i) (1 \leq i \leq n), (f_j) (1 \leq j \leq m)$ を V, W の底とし

$$x \in V, \quad x = \sum_i \xi_i e_i \quad \xi_i \in K$$

$$y \in W, \quad y = \sum_j \eta_j f_j \quad \eta_j \in K$$

に対し

$$(*) \quad \Phi(x, y) = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j e_{ij}$$

とおけば, 双一次写像 $\Phi: V \times W \rightarrow T$ が定義される。この (T, Φ) は条件 (T1),

(T1'), (T2) を満たす。逆にこれらの条件を満たす (T, Φ) はすべてこのようにして得られる。以上が存在である。次に普遍性について述べる。任意の双一次写像 $\Phi': V \times W \rightarrow T'$ が与えられたとき, 一次写像 $\rho: T \rightarrow T'$ を

$$(**) \quad \rho\left(\sum_{i,j} \xi_i \eta_j e_{ij}\right) = \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \Phi'(e_i, f_j)$$

によって定義すれば, (*), (**) から明らかに

$$\begin{aligned} \rho(\Phi(x, y)) &= \rho\left(\sum_{i,j} \xi_i \eta_j e_{ij}\right) \\ &= \sum_{i,j} \xi_i \eta_j \Phi'(e_i, f_j) \\ &= \Phi'(x, y) \end{aligned}$$

よって(3)が成立する。逆に(3)を満たす一次写像 ρ があれば

$$\rho(e_{ij}) = \rho(\Phi(e_i, f_j)) = \Phi'(e_i, f_j)$$

であるから (**) が成立する。よって ρ は一意的に定まる。(証明終)

この定理の意義は $V \times W$ 上の任意の双一次写像 Φ がテンソル積 $V \otimes W$ 上の一次写像 ρ によって表されるということである。今上の定理を R 上 1 次元のベクトル空間 V, W に適用してみよう。

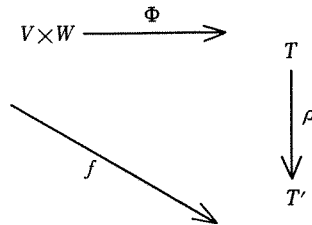
$$f: V \times W \rightarrow T'$$

を $f(x, y) = axy$ という双一次写像とする。中学校の数学では複比例関数といっているものである。 xy から作った空間がテンソル積 $T = V \otimes W$ である。 $xy \in V \otimes W$

$$\rho: T \rightarrow T'$$

を $\rho(xy) = axy$ として定義すると

$$(3') \quad f(x, y) = \rho(\Phi(x, y))$$



になる。つまり $\Phi(x, y) = xy$, $f(x, y) = axy$ より (3') を得る。このことは、「 x と y に複比例することは、 xy に正比例すること」を意味しているのである。

ベクトル空間の間の乗法としてのテンソル積は、交換の法則や結合の法則が数の積と同様に成立する。結合の法則は

$$(V \otimes W) \otimes U \cong V \otimes (W \otimes U)$$

という同型対応の形で与えられる。この同型を用いて

$$V \otimes W \otimes U = (V \otimes W) \otimes U = V \otimes (W \otimes U)$$

によって 3 個のベクトル空間のテンソル積を定義する。一般に s 個のベクトル空間 $V_1, \dots, V_s$ が与えられたとき、そのテンソル積を同様に定義して

$$\bigotimes_{i=1}^s V_i = V_1 \otimes \dots \otimes V_s$$

によって表わす。

さて一般にベクトル空間 $V_1, \dots, V_s, W$ が与えられたとき、直積空間 $V_1 \times \dots \times V_s$ から W の中への写像 Φ で、 $\Phi(x_1, \dots, x_s)$ ($x_i \in V_i$) がどの変数 x_i についても線型であるようなものを重一次写像 (multilinear mapping) という。($s=2$ の場合が双一次写像である。) $s \geq 3$ の場合も、 $s=2$ の場合と同様に次の定理が成り立つ。

定理 任意の重一次写像

$$\Phi: V_1 \times \dots \times V_s \rightarrow W$$

に対し、一次写像

$$\rho: V_1 \otimes \dots \otimes V_s \rightarrow W$$

で条件

$$\rho(x_1 \otimes \dots \otimes x_s) = \Phi(x_1, \dots, x_s) \quad (x_i \in V_i)$$

を満たすようなものが一意に存在する。

次に r 階反変テンソル空間を定義しよう。 V を K 上の n 次元ベクトル空間とする。 V から出発して二つの操作、双対空間を作ること、テンソル積を作ることを行って有限回繰返して得られるベクトル空間 T を一般にテンソル空間という。テンソル空間は一般に

$$T = V_1 \otimes \cdots \otimes V_r, \quad V_i = V \text{ または } V^*$$

の形に表わすことができる。 $V_i = V$ となる因子が p 個、 $V_i = V^*$ となる因子が q 個あるとき T を p 階反変、 q 階共変テンソル空間といい $p+q=r$ をその階数という。 T の元を r 階のテンソルという。特にすべての V_i が V のとき、 T を r 階の反変テンソル空間、すべての V_i が V^* のとき、 T を r 階の共変テンソル空間という。

r 階の反変テンソル空間

$$T^r = T^r(V) = \overbrace{V \otimes \cdots \otimes V}^r$$

を考える。 r 文字 $\{1, \dots, r\}$ の置換群 $\mathfrak{S}_r$ を次のようにして T^r に作用させることができる。 V の底 (e_i) に対応する T^r の標準底

$$\bar{e}_{i_1} \cdots \bar{e}_{i_r} = e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_r} \quad (i_1, \dots, i_r = 1, \dots, n)$$

をとり、 $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対して T^r の一次変換 P_σ を

$$P_\sigma(\bar{e}_{i_1} \cdots \bar{e}_{i_r}) = \bar{e}_{i_{\sigma(1)}} \cdots \bar{e}_{i_{\sigma(r)}}$$

によって定義する。そうすると、 V の任意の元 $x_1, \dots, x_r$ に対し

$$P_\sigma(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r) = x_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes x_{\sigma(r)}$$

が成立する。従って実際 P_σ の定義は底 (e_i) のとり方に関係しないことがわかる。

r 階反変テンソル $t \in T^r$ はすべての $\sigma \in \mathfrak{S}_r$ に対して $P_\sigma(t) = t$ であるとき対称テンソルという。 r 階の反変対称テンソル全体の集合は T^r の部分空間を作る。それを $S^r = S^r(V)$ で表わす。 T^r における一次変換 $\mathfrak{S}$ を

$$\mathfrak{S} = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_r} P_\sigma$$

によって定義する。

次に、テンソル空間 $T^r(V)$ ($r=0, 1, \dots$) の無限直和

$$T(V) = \bigoplus_{r=0}^{\infty} T^r(V)$$

を考えよう。ただし $T^0(V) = K$ とおく。上式右辺の直和は

$$t = (t_0, t_1, \dots), \quad t_r \in T^r(V)$$

のような無限列でその成分 t_i が殆んどすべて (すなわち有限個の例外を除いて) $= 0$ となるようなものの全体の集合を表わす。 $T(V)$ は演算

$$(t_0, t_1, \dots) + (t_0', t_1', \dots) = (t_0 + t_0', t_1 + t_1', \dots),$$

$$\alpha(t_0, t_1, \dots) = (\alpha t_0, \alpha t_1, \dots)$$

によって (無限次元) ベクトル空間になる。

$t_r \in T^r$ を

$$t = (0, \dots, 0, t_r, 0, \dots) \in T(V)$$

と一致させることにより、 $T^r(V) \subset T(V)$ とみなすことができる。一般に $t = (t_0, t_1, \dots)$

において $t_r = 0$ ($r > r_0$) ならば、 $t = \sum_{r=0}^{\infty} t_r$ と表わされる。これを形式的に

$$t = \sum_{r=0}^{\infty} t_r$$

とかくことにする。

さて $t_r \in T^r$ 、 $t_{r'} \in T^{r'}$ とすれば、 $t_r \otimes t_{r'} \in T^{r+r'}$ であるから、一般に $t = \sum_{r=0}^{\infty} t_r$ 、 $t' =$

$\sum_{r=0}^{\infty} t_r \in T(V)$ の積を

$$t \otimes t' = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{r+r'=s} t_r \otimes t'_{r'} \right)$$

によって定義する。ただし $\xi \in T^0 = K$ に対し $t_r \otimes \xi = \xi \otimes t_r = \xi t_r$ とおく。この乗法は双一次的であり結合の法則を満足する。一般に (必ずしも有限次元でない) ベクトル空間 A にこのような双一次的、かつ結合法則を満たす乗法が定義されているとき A を K 上の (結合) 代数 (associative algebra) または多元環という。ここに述べた $T(V)$ をテンソル代数といい、 $T(V)$ は単位元をもつ非可換、無限次元の多元環である。

$T(V)$ の部分空間として対称テンソル空間の直和

$$S(V) = \sum_{r=0}^{\infty} S^r(V)$$

を考えよう。 $S(V)$ はやはり無限次元で積 $\otimes$ に関しては閉じていない。そこで新しい積を導入する。

$t = \sum t_r, t' = \sum t'_{r'} \in S(V)$ に対して

$$(4) \quad tt' = \sum_{s=0}^{\infty} \left(\sum_{r+r'=s} \frac{1}{r!} (t_r \otimes t'_{r'}) \right)$$

(但しここに $\otimes = \frac{1}{r!} \cdot$ とする) によって積を定義する。これは双一次的であり、結合の法則、交換の法則も成立する。

$S(V) = \sum_{r=0}^{\infty} S^r(V)$ は (4) で定義される乗法に関して単位元をもつ無限次元、可換多元環になる。 $S(V)$ を V の対称代数という。 $T(V)$ から $S(V)$ への写像 $t = \sum t_r \rightarrow \mathfrak{S}'(t) = \sum \mathfrak{S}'(t_r)$ は

$$\mathfrak{S}'(t \otimes t') = \mathfrak{S}'(t) \cdot \mathfrak{S}'(t') \quad (t, t' \in T(V))$$

を満たし、従って多元環の準同型写像になる。 (e_i) を V の底とすると、対応する $S(V)$ の標準底は

$$e_{i_1} \cdots e_{i_r} \quad (1 \leq i_1 \leq \cdots \leq i_r \leq n; r = 0, 1, \dots) \text{ によって与えられるが、これをまた} \\ e_1^{v_1} \cdots e_n^{v_n} \quad (v_i = 0, 1, \dots; 1 \leq i \leq n)$$

の形に書くこともできる。よって $S(V)$ は K 上の多元環として n 変数 $X_1, \dots, X_n$ の多項式環 $K[X_1, \dots, X_n]$ と同型である。

多項式とは何かという問に対する一つの答えとして、対称テンソルからなる対称代数の元であるということができるのである。この観点から一次式、二次式、三次式をみると § 2, § 3, § 4 の特徴付けが重要になって来る。

§ 6 2 次関数と空間の形式

直交座標系を持つ平面において、原点と点 (x, y) の間の距離の平方は、ピタゴラスの定理によって、 $x^2 + y^2$ で与えられる。 n 次元空間 R^n においては、原点と点 $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$ の間の距離 $l(\mathbf{x})$ の平方は

$$l(\mathbf{x})^2 = x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 = \sum_{i=1}^n x_i^2$$

で与える。このような距離を持つ空間 R^n を n 次元ユークリッド空間とよんでいる。この空間において、二つのベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)$ の間の関係を調べるときに、

$$\Sigma (x_i + y_i)^2 = \Sigma x_i^2 + \Sigma y_i^2 + 2 \Sigma x_i y_i$$

であるから、ベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ との内積

$$(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

は重要な役割を果たす。たとえばこの内積により、ベクトル $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ のなす角度が定義される。

$l(\mathbf{x})^2 = (\mathbf{x}, \mathbf{x})$ であり、 $\mathbf{x}$ が原点 0 でなければ、 $l(\mathbf{x}) > 0$ だから、 $(\mathbf{x}, \mathbf{x}) > 0$ が言える。このことは内積 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ が正値性を持っていることを示している。ユークリッド空間においては、距離を変えない変換（合同変換）は重要である。合同変換の中で、原点を固定するものは直交変換と言われる。一般の合同変換は平行移動と直交変換の合成として得られるから、直交変換は特に重要である。直交変換全体は直交群と言われるコンパクトな群をなす。すなわち正値な内積 $(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ に対して、直交群が自然に定義される。

§ 1 に述べたように、これまでの数学教育における 2 次関数の認識は、等加速運動などの量的表現としてつかまえることが多かった。本稿ではこれに対して、2 次関数を 2 次形式と対応する双一次形式（内積）と考えた。これは等加速運動を量的関係と考えるに対して、空間の形式として 2 次関数を認識したことに相当する。

2 次関数は等加速運動としてもあらわれるが、空間の形式を定める双一次形式としてもあらわれる。等加速運動は数学としては微積分の中に、双一次形式は数学の分野としては複線形代数の中に含まれる。これらの数学の分野をどう教えるかという見通しの中で、2 次関数をどう教えるかということが問題とされるべきであろう。

注

- ① 宮本敏雄，数学教育現代化の基礎 3 「関数・空間」（遠山 啓・銀林 浩編）国土社刊，1971年，p 20—p 22。
- ② 榊 忠男「「2 次関数」の授業」数学教室，1974年 8 月号。
小野良高「2 次関数の指導」数学教室，1974年 11 号増刊号。
- ③ 大田邦郎「高等学校における微積分の初歩としての二次関数の指導過程」，北海道大学教育学部紀要 第 40 号，1982 年。
- ④ 佐武一郎，「線型代数学」裳華房刊，1974 年 第 V 章によった。

第 3 章 連続関数の研究

§ 1 はじめに

高等学校までの数学教育には、さまざまな関数が登場してくる。正比例関数，1 次関数，2 次関数，3 次関数，指数関数，対数関数，三角関数，無理関数，分数関数等である。これらは初等関数とよばれているものの一部である。これらの関数はいったいどういう理由で教えられることになっているのであろうか。これらの関数について知っておくことは、将来どんな役に立つのであろうか。またこれらの関数を教える方法はこれまでのやり方でいいのだろうか、等の問題についていくつかの論点を整理することにした。これらの問題は、数学教育の中で数学論に関わる問題意義ということになる。

ところで上にあげた関数は、数学では初等関数とよばれているものであるが、初等関数というのは次のようなものをさして云っている。代数関数（有理関数，無理関数等），指数関数，対数関数，三角関数，逆三角関数，およびこれらの関数の有限回の合成で得られる実数または複素変数の関数を初等関数という。したがって、通常微積分学で現れる最も普通の関数のことを初等関数といっているのである。この初等関数ということばは次の様に用いると便利である。「初等関数の微分はいつでも初等関数の範囲内で行える。しかし初等関数の積分は必ずしも初等関数ではない。」初等関数以外の関数は、高等学校までの数学教育では登場しないが、楕円関数，ガン

マ関数、ベツセル関数等重要な関数が多くある。

この初等関数とそれ以外の関数という区別は数学的にあまり意味のあるものではない。関数の区分を考える場合、関数のもっている性質にもとづいた区分を考えた方が有用である。たとえば、微分可能性、連続性に焦点をあてると C^∞ 級、 C^1 級、 C^2 級…、 C (連続関数のクラス) 等、整級数展開可能性を考えると、実解析的、複素解析的などの関数の区分ができる。その他にも Support (台) を考えに入れて分類することもある。これらの区分は排他的なものではなく、一つの関数はいくつもの級に属することが普通なのである。本稿ではこれらの級の中でもっとも広い区分である連続関数のクラスに焦点をあてて考察することになる。例えば多項式で定義される関数は、連続関数であるから C に属するが、導関数が連続であるから C^1 にも属する。同様に C^∞ にも属するし、実解析的でもある。しかしここでは専ら連続性を中心に考察してゆくのであるから、この関数の C に属する関数としての性質を中心に見てみようとするのである。

§ 2 関数の定義について

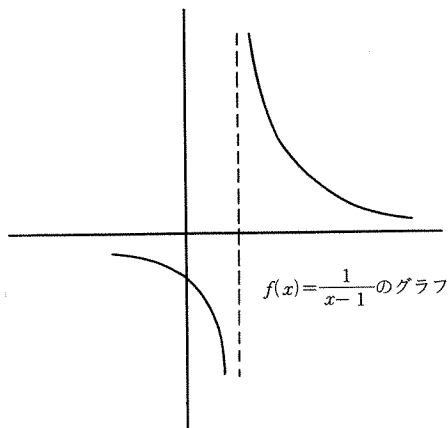
集合 X , Y があって X の要素 x に対して Y の要素 $f(x)$ が決まるとき、写像

$$f: X \rightarrow Y$$

と書くことにする。要素の間の対応には

$$x \mapsto f(x)$$

という記号を用いよう。 X , Y が実数または複素数の集合のときこの写像 f を関数とよぶ。関数 $f: X \rightarrow Y$ のとき、 X を f の定義域という。関数の定義の方法についてここでたちいった論議をするつもりはないが、関数が与えられたとき X , Y は明確に意識されていないといけないことを注意しておく。例えば $f(x) = \frac{1}{x-1}$ で定義される関数は連続かどうかと考えるとき、 $x=1$ という点は定義域の外の点だから、この関数は各点で連続ということになる。「不連続点はグラフのつながっていない点だから、 $x=1$ は不連続点である」などと考える必要はないのである。



高等学校の教科書では現在でも $y=f(x)$ を独立変数、 y を従属変数といい、 y は x の関数であるといった記述が残っているが、定義域と値域の集合間の写像という定義と比較してみると、定義域が明確に意識されているかどうかが問題点になる。

もちろん上に述べた関数を写像として定義するやり方を、高等学校などでそのまま用いることをここで主張しているのではなく、現代数学では、そうなっていると述べているのである。そし

て本稿は関数の様々な性質について言及するのであるから、関数の定義はできるだけ抽象的な方が論をすすめるのに都合がいいのである。

§ 3 関数概念の発達段階について

前節で述べた関数の定義は、歴史的に見た関数概念の発達の諸段階をふまえて理解されるべきであろう。その為に関数概念の発達のスケッチをここに試みてみよう。

アレクサンドロフによれば数学の発展は4つの段階に分けられている^①。第1の段階は、自立的な、純理論的な科学としての数学の誕生の時期である。ギリシヤの数学や原論などで紀元前500年頃までの時代である。第2の段階は初等数学の時期、不変量の数学の時期として特徴づけられる。これは17世紀までである。

第3期は解析学の誕生と発展の時期、第4期は現代数学の時期である。

この第3の段階、16世紀ごろになると、自然科学の研究の中心的な課題は運動の研究になっていた。あたえられた軌道、たとえば直線に沿った物体の運動の法則は、物体のたどる距離が時間の経過とともにどのように増加するか、によって記述することができる。ガリレイ(1564-1642年)は、落下する物体のたどる距離は時間の2乗に比例して増加することを、すなわち落体の法則を発見した。この法則はつぎの式で表わされる。

$$s = \frac{1}{2}gt^2 \quad (1)$$

(ここに g は 9.81 m/sec^2 という定数である) 一般に運動法則は時間 t のあいだに通過する距離をきめる法則である。この場合時間 t と距離 s は具体的な二つの変量である。変量の数学が生まれた最初の決定的な一歩は1637年のデカルトの著者「幾何学」の出版である。しかしここでは数学の歴史に話を深入りさせないで、関数の概念の発達と区分の方に話を限ることにする。

他の例をあげると、運動する物体のエネルギー E は、つぎの公式によって、質量 m と速度 v によって表わされる。

$$E = \frac{1}{2}mv^2 \quad (2)$$

あたえられた物体のエネルギーは速度 v の関数である。

同様によく知られた法則から、導線を電流がとおるときに単位時間に発生する熱の量 Q は次の式によりあたえられる。

$$Q = \frac{1}{2}RI^2 \quad (3)$$

ここに I は電流の強さ、 R は導線の抵抗である。

他にも、あたえられた鋭角 α 底辺 x をもつ直角三角形の面積 S は次の式によってあらわされる。

$$S = \frac{1}{2}x^2 \tan \alpha \quad (4)$$

変数および関数という数学的概念は、具体的な変量(時間、距離、速度、回転角、図形の面積、エネルギー、熱の量など)およびこれらの変量の間の従属関係(距離の時間にたいする従属関係等)の抽象化、一般化にはかならない。

上記の(1)から(4)までの式において、 t 、 s 、 E 、 Q 、 V 等々の具体的な変量から、 x 、 y という一般的な変量への移行を行うと、(1)~(4)は

$$y = \frac{1}{2}ax^2 \quad (5)$$

というひとつの式にまとめることができる。これは具体的な関数関係(1)~(4)から一般的なかたち(5)への移行である。力学および電気の理論が具体的な量と結びついた具体的な式(1), (2), (3)を問題にするのにたいし、数学では一般的な式(5)を問題にし、この式をなんらかの具体的な量にむすびつけたまま考察しようとはしない。

次の段階は

$$y = \frac{1}{2}ax^2, \quad y = \sin x, \quad y = \log x$$

などのような、 y の x にたいする具体的な関数関係ではなくて、

$$y = f(x) \quad (6)$$

という、 y の x に関する一般的な関数関係が考察されるようになる。個別の具体的な関数だけではなく、任意の関数が数学の対象になる。これはギリクレなど19世紀の数学の特徴である。アレクサンドロフはこの抽象化の意義を次の様に述べている。「関数とはある量の他の量にたいする従属関係の抽象的なかたちであるから、解析学は、変量のあいだの従属関係をいろいろの具体的な量のあいだの従属関係ではなくて、その内容が捨象された変量一般のあいだの従属関係を研究対象とするということができる。この捨象によって解析学の応用範囲の広さが確保される。なぜなら、この捨象——抽象によってあるひとつの定理のうちに無限の多くの可能なかぎりの具体的な事例がえられるからである。」

現代数学の段階になると、集合と写像を用いて数学を記述する方法によって、 $y = f(x)$ は、

$$f: X \rightarrow Y \quad (7)$$

という写像の形に一段と抽象化が進む。ここで X や Y は、一般的な変量(実数など)ではなく、任意の集合となっているのである。

§ 4 関数のクラスについて

前節で述べたように現代数学では、関数は一般に写像として与えられる。2次関数や3角関数などの個別の関数とちがって、写像には一意対応以外の性質はプリミティブに与えられていない。そこで関数の性質を代表するいくつかの指標を考えて、その指標となる性質を付与された関数を考えることになる。それは、連続性であり C^∞ 性であり、解析性ということになる。そしてそのような性質を付与された関数の全体を考察することになる。つまり個別の関数の研究をする場合とは異なり連続という性質なら、連続という性質をもった関数の全体の集合を考察の対象にする。この様に集合を考察の主対象にするのは、現代数学の一つの著しい特徴であって、例えば連続関数の全体の集合は一つのベクトル空間をなしているのである。そのような連続関数の全体のつくるベクトル空間の諸性質を幾何学のように研究することができる。整関数や三角関数のような個別の関数は、この連続関数の全体のつくるベクトル空間に属する要素であるが、これらの関数はこの空間の中で固有の役割をはたしていることがわかる。このことについては後節において詳しく検討する。

§ 5 連続関数の定義について^③

連続関数ないし連続写像は、どの場で考えるかによって様々な表現が可能である。

定義 1 (連続性の第 1 の定義) 数直線 E^1 の閉区間を $[\alpha, \beta]$ とするとき、関数 $f: [\alpha, \beta] \rightarrow E^1$ が $[\alpha, \beta]$ の 1 点 t_0 において連続であるとは、 t_0 に収束するような $[\alpha, \beta]$ 内の任意の数列 $\{t_n\}$ について、その像からなる点列 $\{f(t_n)\}$ が (E^1 の中で) 点 $f(t_0)$ に収束することである。すなわち、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} t_n = t_0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(t_n) = f(t_0)$$

が成り立つことである。そして関数 $f: [\alpha, \beta] \rightarrow E^1$ が、 $[\alpha, \beta]$ の任意の点 t_0 において連続のとき、関数 f は $[\alpha, \beta]$ で連続であるという。

定義 1 において $f: [\alpha, \beta] \rightarrow E^1$ としたが、 $f: [\alpha, \beta] \rightarrow E^3$ とすると連続写像 (連続曲線) の定義を得る。 E^1 とか E^3 とか書くのは、 R や R^3 を距離空間 (ユークリッド空間) と考えたときの意味である。

定義 2 (連続性の第 2 の定義) 関数 $f: [\alpha, \beta] \rightarrow E^1$ が、 $[\alpha, \beta]$ の 1 点 t_0 において連続であるとは、任意の $\varepsilon (> 0)$ について適当な $\delta (> 0)$ をとれば、条件

$$|t - t_0| < \delta \Rightarrow |f(t) - f(t_0)| < \varepsilon$$

が、任意の $t \in [\alpha, \beta]$ について成り立つことである。関数 $f: [\alpha, \beta] \rightarrow E^1$ が、 $[\alpha, \beta]$ のすべての点 t_0 において連続のとき、関数 f は $[\alpha, \beta]$ で連続であるという。

定義 2 を写像 $f: [\alpha, \beta] \rightarrow E^3$ に対して書いてみよう。

定義 2' 写像 $f: [\alpha, \beta] \rightarrow E^3$ が、 $[\alpha, \beta]$ の 1 点 t_0 において連続であるとは、任意の $\varepsilon (> 0)$ について適当な $\delta (> 0)$ をとれば、条件

$|t - t_0| < \delta \Rightarrow d(f(t), f(t_0)) < \varepsilon$ が、任意の $t \in [\alpha, \beta]$ について成り立つことである。ここに d は E^3 における距離を表わす。写像 $f: [\alpha, \beta] \rightarrow E^3$ が、 $[\alpha, \beta]$ のすべての点 t_0 において連続のとき、 f は連続である、あるいは、連続写像であるという。

定義 1 では点列や数列の収束の概念を用いている。ここでその概念の数学的な定式化を与えておく。

定義 3 (点列の収束) 点列 $\{p_n\}$ が p_0 に収束するとは、任意の $\varepsilon (> 0)$ について、適当な番号 N を選べば、

$$n \geq N \Rightarrow d(p_n, p_0) < \varepsilon$$

が成り立つことである。

このように点列や数列の収束の概念を正確にしておくと、定義 1 と定義 2 の 2 つの連続性の定義は実は同値であることを証明することができる。(実は選択公理をここで用いるのである。)^②

次に連続曲線 $f: [\alpha, \beta] \rightarrow E^3$ の拡張として、距離空間 X から距離空間 Y への写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続であるということを定義しよう。まづ距離空間の定義から始めよう。

定義 4 集合 X の任意の 2 要素 p, q について、ひとつの実数 $d(p, q)$ が定まり、それが次の(i)(ii)(iii)の性質をもつとき、 d を X 上の距離とよぶ。

(i) $d(p, q) \geq 0$, そして $d(p, q) = 0$ は $p = q$ と同値である。

(ii) $d(p, q) = d(q, p)$

(iii) $d(p, r) \leq d(p, q) + d(q, r)$ (三角不等式)。

距離 d が、ひとつ指定されている集合 X を距離空間という。

距離空間 X から距離空間 Y への写像 f が連続であることを定義する方法は前と同じく、点列によるものと ε - δ 論法によるものの 2 通りを与える。

定義 5 距離空間 X の点列 $\{p_n\}$ が、点 $p_0 (\in X)$ に収束するとは、番号 n が大きくなるに従って p_n が限りなく p_0 に近づくことである。正確に言えば、任意の $\varepsilon > 0$ について、適当な番号 N を選ぶと、

$$n \geq N \Rightarrow d(p_n, p_0) < \varepsilon$$

が成り立つことである。(d は X の距離)

この点列の収束を使った連続性の定義は次のようになる。

定義 6 (連続性の第 1 の定義) X, Y を距離空間とする。

(i) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が点 $p_0 (\in X)$ において連続であるとは、 p_0 に収束する X 内の任意の点列 $\{p_n\}$ について、像の点列 $\{f(p_n)\}$ が (Y の点列として)、点 $f(p_0)$ に収束することである。記号で書けば、 $\lim_n p_n = p_0 \Rightarrow \lim_n f(p_n) = f(p_0)$ が成り立つことである。

(ii) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が X のすべての点 p_0 において連続のとき、 f は連続である、あるいは、連続写像であるという。

とくに、距離空間 X から距離空間 E^1 (数直線) への連続写像 $f: X \rightarrow E^1$ を X 上の連続関数とよぶ。また、点 $p \in X$ の f による像 $f(p) \in E^1$ を、 p における関数 f の値という。—

次に、 ε - δ 論法による連続写像の定義を述べよう。距離空間 X, Y の距離をそれぞれ、 d_X, d_Y と書くことにする。

定義 7 (連続性の第 2 の定義)

(i) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が点 $p_0 (\in X)$ において連続であるとは、任意の $\varepsilon (> 0)$ について、適当な $\delta (> 0)$ を選ぶと、条件

$$d_X(p, p_0) < \delta \Rightarrow d_Y(f(p), f(p_0)) < \varepsilon$$

が、任意の $p \in X$ について成り立つことである。

(ii) 写像 $f: X \rightarrow Y$ が X の任意の点 p_0 において (上の意味で) 連続のとき、 f は連続であるという。 f は連続写像であるということもある。—

上に述べた定義 6 と定義 7 の 2 つの連続性も同値である。

X が距離空間であるとき、 X の部分集合であって、点列の収束に関して ‘閉じている’ ようなものが閉集合である。すなわち次のようになる。

定義 8 X の部分集合 C が次の性質 $(*)$ を持つとき, C を X の閉集合という。

$(*)$ C に含まれる点列 $\{p_n\}$ が, X の点列として $p_0 \in X$ に収束すれば, その極限点 p_0 も C に含まれる。

閉集合と連続写像は密接な関係がある。

定理 9 X, Y を距離空間とする。写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続であるための必要十分条件は, Y の任意の閉集合 C について, C の f による逆像 $f^{-1}(C)$ が X の閉集合になることである。

この定理 9 をみると, 写像の連続性を, 閉集合を使って次のように定義してもよいことがわかる。

定義 10 (連続性の第 3 の定義) X, Y を距離空間とする。写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続であるとは, Y の任意の閉集合 C について, f による逆像 $f^{-1}(C)$ が X の閉集合になることである。—

定理 9 は, この第 3 の定義と第 1, 第 2 の定義の同値を述べている。閉集合と対をなす概念に開集合がある。開集合を使って連続性の定義をすることができる。開集合を定義するため, まず ε -近傍を定義しよう。

定義 11 X を距離空間とし, $\varepsilon > 0$ を任意の正の実数とする。 X の点 p_0 を中心とする ε -近傍 (ε -neighborhood) とは, p_0 からの距離が ε 未満であるような X の点全体のなす部分集合のことである。記号で $N_\varepsilon(p_0, X)$ と表わす。式で書けば

$$N_\varepsilon(p_0, X) = \{p \in X \mid d_X(p, p_0) < \varepsilon\} \quad (C \subset X)$$

である。—

この ε -近傍を用いて開集合を定義する。

定義 12 距離空間 X の部分集合 U が X の開集合であるとは, U の任意の点 p について, 適当な $\varepsilon > 0$ を選べば $N_\varepsilon(p, X) \subset U$ が成り立つことである。

この開集合に対して次の定理がなりたつ。

定理 13 X, Y を距離空間とする。写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続であるための必要十分条件は, Y の任意の開集合 U について, U の f による逆像 $f^{-1}(U)$ が X の開集合になることである。

定理 13 により, 連続性を次のように定義することも可能になる。

定義 14 (連続性の第 3 の定義: 開集合を用いた) X, Y を距離空間とする。写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続であるとは, Y の任意の開集合 U について, $f^{-1}(U)$ が X の開集合になることである。

定義10や定義14をみると、距離空間 X , Y の間の写像 $f: X \rightarrow Y$ の連続性は開(閉)集合という言葉だけで定義することができたことに気がつく。この定義には X や Y の距離は表面に表われない。そこで距離にかかわりなく開集合、閉集合という概念が与えられていれば、連続性は定義できることがわかる。位相空間はそのような考えから定式化された空間である。それは、距離が必ずしも決っていない集合 X に‘開集合系’に相当するものを天下一的に指定したものである。

定義15 X を集合とする、 X の部分集合を要素とするある集合 $\mathcal{O}$ が、次の3性質を持つとき、対 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とよび、 $\mathcal{O}$ をその位相という。

- (i) $\phi \in \mathcal{O}, X \in \mathcal{O}$
- (ii) $U_1, U_2, \dots, U_r \in \mathcal{O} \Rightarrow U_1 \cap U_2 \cap \dots \cap U_r \in \mathcal{O}$
- (iii) 族 $\{U_\lambda\} \lambda \in \Lambda$ について、 $U_\lambda \in \mathcal{O} (\forall \lambda \in \Lambda) \Rightarrow \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{O}$ 。—

集合 $\mathcal{O}$ の要素 U を X の開集合とよぶ。(ここで U はもちろん X の部分集合であるが、それ以上‘開集合’とは何かとは問わない。指定された $\mathcal{O}$ に属する部分集合 U のことを単に‘開集合’とよぶだけである。) 距離空間 X については ε -近傍を用いて定義12のように開集合が定義され、そのような開集合の全体 $\mathcal{O}_x$ は上の定義15の(i)(ii)(iii)をみたすのである。したがって $(X, \mathcal{O}_x)$ は位相空間である。すなわち距離空間は自然に位相空間になる。

さて、位相空間 X から位相空間 Y への‘連続写像’をどう定義したらよいかはもはや明らかであろう。

定義16 $(X, \mathcal{O}), (Y, \mathcal{O}')$ を位相空間とする。写像 $f: X \rightarrow Y$ が連続であるとは、任意の $U \in \mathcal{O}'$ について、 $f^{-1}(U) \in \mathcal{O}$ が成り立つことである。—

本節では冒頭にのべたように、連続関数ないし連続写像は、どの空間で考えるかによって様々な表現が可能であることを見て来た。連続ということの本質を深く見つめることによって、考える空間の概念を広げることができることがわかったのである。

§ 6 コンパクト空間と最大値の定理

前節でいろいろな空間での連続関数の定義を述べておいたのは、一つにはこれから連続関数の性質を研究するのに、それらの性質がもっとも見やすい場面において考究できることを目指したためでもある。連続関数の性質で最初に述べるのは最大値の定理である。ここではコンパクト性が重要な役割をする。まずコンパクト性の定義を述べよう。

定義17 距離空間 X が次の性質をもつときコンパクトであるという： $\{p_n\}$ を X の中の任意の点列とすると、 $\{p_n\}$ の中に、 X のある点に収束する部分点列 $\{p_{n(i)}\}$ が必ず存在する。

コンパクトでない例をあげよう。

例18 数値線 E^1 はコンパクトでない。

なぜなら、 E^1 の中に点列として $\{1, 2, \dots, n, \dots\}$ を考えると、この中から E^1 の点に

収束する部分列を取り出すことができないから。

例19 开区間 (α, β) もコンパクトでない。

なぜなら、 (α, β) の中の点列を $t_n = \alpha + (\beta - \alpha) / 2^n$ とおくと、この点列のどんな部分列も (α, β) の点には収束しないから。(この点列の部分列は、 E^1 の数列として α に収束するが、 α は开区間 (α, β) に属していない。)

これに対して、コンパクトな空間の例は、次のようなものがある。

例20 閉区間 $[\alpha, \beta]$ はコンパクトである。

例21 m 次元ユークリッド空間 E^m 中の有界な閉集合 X はコンパクトである。(E^m の部分集合 X が有界であるとは、原点を中心とする m 次元球体 D_r^m で半径 r が十分大きいものを考えれば、 $X \subset D_r^m$ となることを云う。)

例20, 21の証明は長くなるので書くことができないが、 E^m 中に有界な閉集合はいくらでもあるから、コンパクトな距離空間はその例にこと欠かない。

コンパクト空間の著しい性質は、その上で連続関数にたいする最大値の定理が成立することである。

定理22 (最大値の定理) X をコンパクトな距離空間、 f を X 上の連続関数とすると、 f は X 上のどこかの点で最大値と最小値をとる。つまり (最大値とよばれる) 実数 M と (最小値とよばれる) 実数 m が存在して、次の(i)(ii)が成り立つ。

(i) すべての $p \in X$ について $m \leq f(p) \leq M$ である。

(ii) 適当な点 $p_0 \in X$ と $p_1 \in X$ があって、 $f(p_0) = m$, $f(p_1) = M$ となる。—

定理22の証明 最大値に関する主張のみを証明する。(最小値についても証明は同様である。) 証明を2つの部分 (I) (II) に分ける。

(I) まず、連続関数 $f: X \rightarrow E^1$ による X の像 $f(X)$ が上に有界なことを示そう。つまり、十分大きな実数 β を選べば、すべての $p \in X$ について $f(p) < \beta$ となることをいう。

このような β が存在しないと仮定して矛盾を出す。このような β がなければ、どんな実数 β についても、 $f(p) \geq \beta$ となる点 $p \in X$ が (β をきめるごとに) 少なくともひとつあるはずである。とくに各自然数 n について $f(p_n) \geq n$ となる点 $p_n \in X$ がある。こうして X の点列 $\{p_1, p_2, \dots, p_n, \dots\}$ を得る。 X がコンパクトであるから $\{p_n\}$ から収束する部分列 $\{p_{n(i)}\}$ を選び出すことができる。その極限点を $p_0 (\in X)$ とする: $p_0 = \lim_{i \rightarrow \infty} p_{n(i)}$, 点列 $\{p_n\}$ の作り方から $f(p_{n(i)}) \geq n(i)$ である。とくに数列 $\{f(p_{n(i)})\}$ はどんどん大きくなり、収束しない。これは $p_0 \in X$ における f の連続性 $f(p_0) = \lim_{i \rightarrow \infty} f(p_{n(i)})$ に矛盾してしまう。これで $f(X)$ が上に有界なことが示された。

(II) 連続関数 f の最大値の存在を証明する。つまり、ある実数 M があって、(i) すべての $p \in X$ について $f(p) \leq M$ が成り立ち、かつ、(ii) 実際に f が値 M をとる点 p_1 が存在する: $f(p_1) = M$ 。この2つの性質をもつ M の存在を示すのである。

(I) により、適当な実数 β をとれば、すべての $p \in X$ について $f(p) < \beta$ が成り立つことがわかった。このことを簡単に $f(X) < \beta$ と書くことにしよう。

$f(X) < \beta$ であるような β をひとつ固定する。また、勝手な点 $\bar{p} \in X$ をひとつ選んで固定し、 $\alpha = f(\bar{p})$ とおく。

区間 $[\alpha, \beta]$ と像 $f(X)$ の、数直線 E^1 における位置関係は図1のようにになっている。

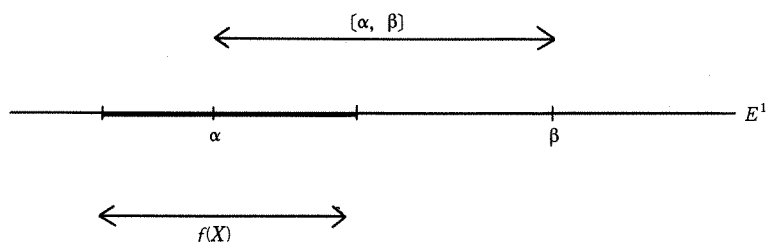


図1

次に、この区間 $[\alpha, \beta]$ を等分して行くことによって、 $\beta_1 = \beta$ から始まる単調減少数列 $\{\beta_n\}$ を構成する。この数列は、像 $f(X)$ にしだいに近づくように作られる。

まず、区間 $[\alpha, \beta]$ を2等分する。端点もこめた3つの分点 $\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}, \beta$ のうちのひとつを β_2 にするのであるが、 β_2 は、この3点のうち、 $f(X) < \beta_2$ であってしかもできるだけ小さいものとする。(図2)

次に区間 $[\alpha, \beta]$ を4等分する。分点 $\alpha, \frac{3\alpha+\beta}{4}, \frac{\alpha+\beta}{2}, \frac{\alpha+3\beta}{4}, \beta$ のうちひとつを β_3 にする。 β_3 は、この5点のうち、 $f(x) < \beta_3$ を満たし、しかもできるだけ小さいものにする。

(図2)

以下同様に、区間 $[\alpha, \beta]$ を 2^{n-1} 等分し、得られる $2^{n-1} + 1$ 個の分点の中から β_n を選ぶのだが、 β_n は、 $f(X) < \beta_n$ であって、しかもできるだけ小さいものにする。(図2) この操作を限りなく続ける。

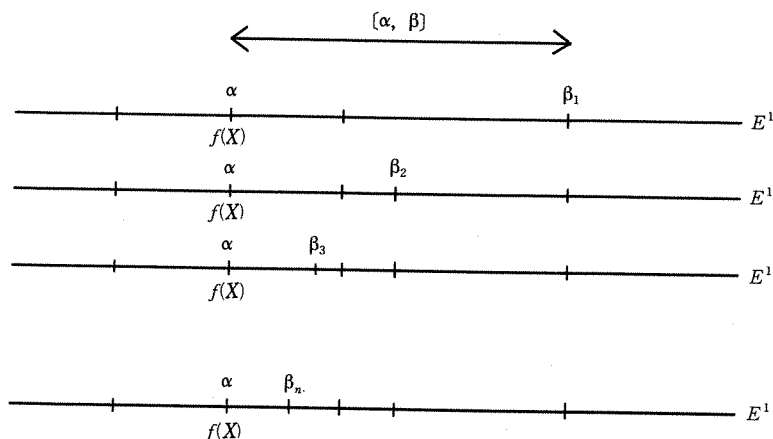


図2

得られた数列 $\{\beta_n\}$ は明らかに単調減少であって

$$\alpha \leq \dots \leq \beta_n \leq \dots \leq \beta_3 \leq \beta_2 \leq \beta_1$$

を満たす。よって連続性の公理(下に有界な単調減少数列は収束する)により、極限值 $\lim_n \beta_n$ が存在する。これを M とおく: $\lim_n \beta_n = M$

すべての $p \in X$ について $f(p) \leq M$ が成り立つことを証明しよう。

数列 $\{\beta_n\}$ は, $f(X) < \beta_n (\forall n)$ であるように構成された。とくに p を X の勝手な点とすると, $f(p) < \beta_n (\forall n)$ である。したがって $f(p)$ は数列 $\{\beta_n\}$ のひとつの下界であり, $f(p) \leq \lim_n \beta_n = M$ が成り立つ。

最後に, X の少なくともひとつの点 p_1 について $f(p_1) = M$ となることを証明しよう。

β_n は, 区間 $[\alpha, \beta]$ の 2^{n-1} 等分点のひとつであった。それは $f(X) < \beta_n$ を満たすもののうちなるべく小さいものをとったから, β_n よりも小さな隣の 2^{n-1} 等分点 β'_n はもはや, $f(X) < \beta'_n$ を満たさない。いいかえれば, 小区間 $[\beta'_n, \beta_n]$ の中に, 少なくともひとつ, $f(X)$ の点がある。 X の点 q_n で, $f(q_n) \in [\beta'_n, \beta_n]$ となるようなものが少なくともひとつあるわけである。 M は, $f(q_n) \leq M \leq \beta_n$ を満たす。よって, M も $f(q_n)$ と同じく小区間 $[\beta'_n, \beta_n]$ に属するから,

$$|M - f(q_n)| \leq ([\beta'_n, \beta_n] \text{ の長さ}) = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} |\alpha - \beta|$$

が成り立つ。

$n = 1, 2, 3 \dots$ と動かすと, 上で選んだ点 q_n は X の点列 $\{q_n\}$ をなす。 X はコンパクトと仮定してあるから, 点列 $\{q_n\}$ から収束する部分点列 $\{q_{n(i)}\}$ が選びだせる。 $p_1 = \lim_i q_{n(i)}$ とおく。 p_1 は X の点である。 f の連続性によって,

$$\begin{aligned} |M - f(p_1)| &= \lim_i |M - f(q_{n(i)})| \\ &\leq \lim_i (1/2)^{n(i)-1} |\alpha - \beta| = 0 \end{aligned}$$

ゆえに, $f(p_1) = M$ 。

上の最大値の定理は実数の連続性という性質に基づいて証明されることを注意しよう。

最大値の定理の応用例を示す。

19世紀末, イタリアの数学者 G. Peano (ペアノ) は不思議な曲線を発見した。彼の発見した曲線はペアノ曲線とよばれている。ペアノ曲線は, 正方形 $[0, 1] \times [0, 1]$ をすきまなく埋めつくす連続曲線である。すなわち連続な全射 $\varphi: [0, 1] \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ である。

この発見は, 次元や連続性についての素朴な観念に深刻な反省をうながし, 今日の位相幾何学が成立するひとつのきっかけになった。

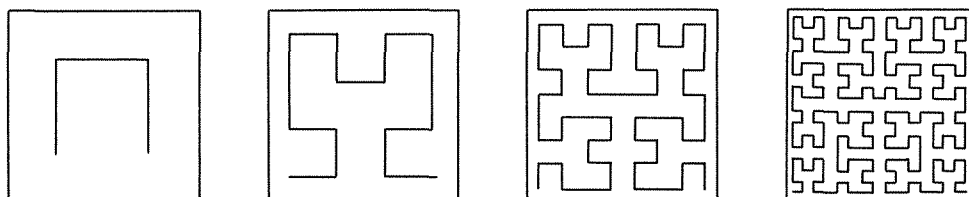


図3 ペアノ曲線

正方形を I^2 とする: $I^2 = [0, 1] \times [0, 1]$, ペアノ曲線は I^2 を埋めつくす連続曲線であったが, I^2 に1点 p_0 を定め, p_0 だけは通らずに p_0 以外の I^2 の点をすべて通過するような連続曲線は構成できるだろうか。すなわち全射 $\varphi: [0, 1] \rightarrow (I^2 - \{p_0\})$ は存在するだろうか。この問題の答は否である。最大値の定理を使ってこれを証明してみよう。連続な全射 $\varphi: [0, 1] \rightarrow (I^2 - \{p_0\})$ があると仮定して矛盾を出せばよい。 $t \in [0, 1]$ に対応する点 $\varphi(t)$

は決して p_0 に一致しない。よって $\varphi(t)$ と p_0 との距離 $d(\varphi(t), p_0)$ は常に正である。したがってその逆数の関数 $1/d(\varphi(t), p_0)$ は t を変数とする $[0, 1]$ 上の連続関数になる。

ところが、 $\varphi(t)$ は $I^2 - \{p_0\}$ のすべての点を通過するから、とくに p_0 にいくらでも近い点を通過する。いいかえれば、距離 $d(\varphi(t), p_0)$ はいくらでも 0 に近くなる。これはその逆数の関数 $1/d(\varphi(t), p_0)$ がいくらでも大きい値をとることを意味するから、最大値の定理に矛盾する。

実数上の連続関数について最大値を求める問題を解くとき、最大値の存在を仮定しておいて、微分によって求めてよいことは最大値の定理に根拠をおいている。ところが18世紀に発展した変分問題、すなわち関数を変数とする最大値問題にあつては、関数空間では最大値の定理が一般に成立しないので、それが成立するような集合を考えねばならない。そのために、19世紀には関数族の理論が追求されて、20世紀における関数解析の萌芽となった。

最大値の定理の根拠は、ボルツァノーワイエルシュトラスの定理にあり、無限次元の場合に収束列を選出するために対角線論法が開発された。

ところが対角線論法という表現法は関数列に限定されていて、一般的な定式になりにくい。そこで20世紀になると、一般的な収束の性質として、「位相空間」を定式化して論じようとするのが、フレシェの「一般解析学」として始まる。ここでボルツァノーワイエルシュトラスの定理の成立を意味するのがコンパクト概念なのである。

§ 7 中間値の定理と連結性

閉区間で定義された実数値の連続関数については、2つの定理が有名である。それは最大値の定理と中間値の定理である。前節で最大値の定理について述べたので、ここでは中間値の定理とその応用について述べよう。

定理23 (中間値の定理) f を閉区間 $[\alpha, \beta]$ ($\alpha < \beta$) 上の連続関数とし、 $f(\alpha) \neq f(\beta)$ であるとする。このとき、 $f(\alpha)$ と $f(\beta)$ の間の任意の値 c 、すなわち、 $f(\alpha) < f(\beta)$ であるか $f(\alpha) > f(\beta)$ であるかに応じてそれぞれ $f(\alpha) < c < f(\beta)$ または $f(\alpha) > c > f(\beta)$ であるような任意の実数 c について、 $c = f(\gamma)$ となる $\gamma \in [\alpha, \beta]$ が少なくともひとつ存在する。

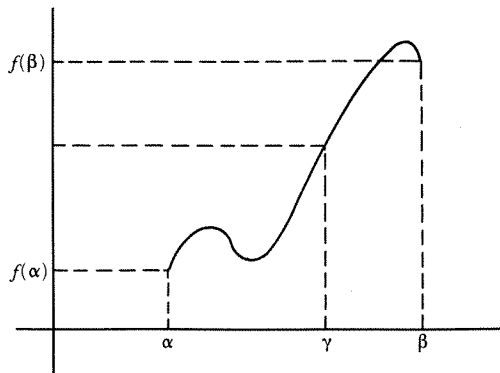


図 4

中間値の定理の証明はどの解析学の教科書にも出ているので、証明をここに述べることはしないが、実数の連続性と $[\alpha, \beta]$ のコンパクト性が重要な役割を演ずる。

中間値の定理の応用として、ユークリッド空間 E^1 (数直線) の連結性を証明してみよう。

連結性はコンパクト性とならんで位相不変な性質であるから、トポロジーなどには基本的な性質になる。連続性は空間が全体としてひとつながりかどうかに関する性質と云える。

定義24 (i) 位相空間 X が連結でないとは、 X が空でなくしかも互いに重なり合わない (X の) 開集合 U, V に分かれていることである。正確に述べると、

X が連結でないとは、次の3条件(a)(b)(c)を満たす X の開集合 U, V が存在することである。

(a) $U \neq \phi, V \neq \phi,$

(b) $U \cap V = \phi,$

(c) $U \cup V = X$

(ii) 上の条件(a), (b), (c)を満たす X の開集合 U, V が存在しないとき、 X は連結であるという。

次の補題はなかなか便利である。

補題25 位相空間 X が連結でないための必要十分条件は、次の(i)(ii)を満たす X 上の連続関数 $f: X \rightarrow E^1$ が存在することである。

(i) f は0または1の値しかとらない。

(ii) 適当な点 $p_0 \in X$ と $p_1 \in X$ があって、 $f(p_0) = 0, f(p_1) = 1$ 。—

中間値の定理の応用として、 E^1 が連結なことを証明しよう。

定理26 E^1 は連結である。

証明 E^1 が連結でないと仮定して矛盾をだす。 E^1 が連結でなければ、 E^1 上の連続関数 $f: E^1 \rightarrow E^1$ でその像が $\{0, 1\}$ であるようなものが存在する (補題25)。 $f(\alpha) = 0, f(\beta) = 1$ であるような $\alpha, \beta \in E^1$ がある。 $\alpha < \beta$ または $\alpha > \beta$ という2つの可能性が考えられるが、ここでは $\alpha < \beta$ と仮定しよう。($\alpha > \beta$ の場合も、以下の議論は全く同じ。) 上の連続関数 f を E^1 の閉区間 $[\alpha, \beta]$ に制限すると、閉区間 $[\alpha, \beta]$ 上の連続関数を得る。これを再び f と書こう。

$f(\alpha) = 0, f(\beta) = 1$ であり、しかも $[\alpha, \beta]$ 上で、 f は0または1の値しかとらない。閉区間 $[\alpha, \beta]$ 上にこのような連続関数が存在するということは、明らかに、中間値の定理に矛盾する。

§ 8 連続関数の空間^④

実変数 t のある区間で連続な関数 $u(t)$ を考える。 $u(t)$ の値は複素数としておく。複素数値関数の連続性の定義は、実数値関数と同様にできる。 $u(t)$ が $t = t_0$ で連続であるというのは、どんな正数 ε を与えても、適当な正数 δ をとれば、 $|t - t_0| < \delta$ であるかぎり $|u(t) - u(t_0)| < \varepsilon$ が成立するということである。 $u(t)$ が t のある区間で連続であるというのは、この区間の各点で連続であることである。この定義は実数値関数の連続性の定義と形式上

はまったく同じである。したがって実数値関数に対して成立する諸定理が、複素数値関数にも同じ方法で証明することができることが多い。(但し微分学の平均値の定理のように例外もある。)

今後は $[a, b]$ という閉区間で連続な関数のみを考えることにする。 $u(t)$, $v(t)$ が $[a, b]$ で連続なとき, $\alpha u(t) + \beta v(t)$ (α, β は複素数) という関数も $[a, b]$ で連続である。つまり $[a, b]$ で連続な関数の全体はベクトル空間を作るのである。このベクトル空間を $C[a, b]$ あるいは簡単に C と書く。くわしく云えば次のようになる。

定義1 (線形空間またはベクトル空間) 要素 $x, y, z, \dots$ の (空でない) 集合 L がつぎの条件をみたすとき, L は線形空間またはベクトル空間といわれる。

I. 任意の二要素 $x, y \in L$ に対して, それらの和とよばれる第三の要素 $z = x + y$ が一意的にきまる。ただし和はつぎの性質をもつものとする。

- 1) $x + y = y + x$ (交換法則)
- 2) $x + (y + z) = (x + y) + z$ (結合法則)
- 3) L には, すべての要素 $x \in L$ に対して $x + 0 = x$ を満たす一定の要素 0 が存在する。
- 4) すべての要素 $x \in L$ に対して $x + (-x) = 0$ なる要素 $(-x) \in L$ が存在する。

II. 任意の複素数 α および任意の $x \in L$ に対して要素 $\alpha x \in L$ (要素 x と数 α との積) がきまり, これについてつぎの関係が成立する。

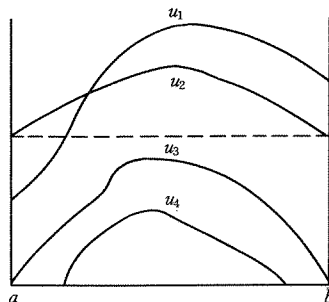
- 1) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$, 2) $1 \cdot x = x$,
- 3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$, 4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ 。

閉区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $u(t)$, $v(t)$ に和 $u(t) + v(t)$ と, 複素数との積の $\alpha u(t)$ を次のように定義する。 $t \mapsto u(t)$, $t \mapsto v(t)$ によって二つの関数 u, v が与えられたとき, $t \mapsto u(t) + v(t)$, $t \mapsto \alpha u(t)$ で定義される関数をそれぞれ $u + v$, αu と定義するのである。この和と積に対して上の定義の I, II の諸性質をみたすことがすぐわかるのである。

ベクトル空間 L の空でない部分集合 L' が, L で定義されている和および数との積によってベクトル空間となる場合に L' を L の部分空間といい, $L' \subset L$ と書く。連続関数にさらに制限を加えると, ベクトル空間 $C[a, b]$ に含まれるベクトル空間, すなわちその部分空間が作られる。

例2 $u(a) = u(b)$ を満足するような $u \in C[a, b]$ の全体は部分空間を作る。これを $CP[a, b]$ と書くことにしよう。さらに $u(a) = u(b) = 0$ を満足する u の全体も部分空間を作る。これを $\dot{C}[a, b]$ と書く。(CC CP)。また a, b の近くで恒等的に 0 になる関数 $u \in \dot{C}$ の全体を $\ddot{C}[a, b]$ と書く。つまり $u \in \ddot{C}$ なら

$\exists \delta > 0 : a \leq t \leq a + \delta$ または $b - \delta \leq t \leq b$ ならば $u(t) = 0$ である。



$u_1 \in C, u_2 \in CP$
 $u_3 \in \dot{C}, u_4 \in \ddot{C}$

例 3 連続な導関数 u' をもつ $u \in C[a, b]$ の全体を $C'[a, b]$ と記す。これも $C[a, b]$ の部分空間である。連続的な第 m 階までの導関数 $u^{(m)}$ をもつ $u \in C[a, b]$ の全体を $C^{(m)}[a, b]$ と書く。 $C^{(2)}$, $C^{(3)}$ の代りに C'' , C''' などとも書く。すべての $C^{(m)}$ の共通部分すなわち任意階数の連続な導関数をもつ u の全体を $C^\infty[a, b]$ と書く。

また $[a, b]$ で解析的な関数、すなわち $a \leq t_0 \leq b$ のような任意の t_0 の近くで収束する $t - t_0$ の巾級数に展開できる関数の全体を $A[a, b]$ と書く。これらはすべて C の部分空間で次の関係がある。

$$C \supset C' \supset C'' \supset \cdots \supset C^{(m)} \supset C^{(m+1)} \supset \cdots \supset C^\infty \supset A$$

C の要素である関数 (ベクトル) $u_1, \dots, u_n$ に対して, (ここで n は自然数とする) $\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n$ (α_i は複素数) の形に表わされる関数を $u_1, \dots, u_n$ の一次結合という。定まった $u_1, \dots, u_n$ の一次結合の全体はひとつの部分空間を作る。これを $u_1, \dots, u_n$ の張る部分空間とよぶ。より一般に有限個または無限個のベクトルの集まり $S \subset C$ が与えられたとき, S に属する有限個の関数を任意にとって一次結合を作るとき, えられる関数の全体 M は部分空間を作る。これを S の張る部分空間という。

例 4 区間 $[a, b]$ で $u_0(t) = 1$, $u_1(t) = t$, $\dots$, $u_n(t) = t^n$ とすれば, $u_0, u_1, \dots, u_n$ の張る部分空間は次数が n をこえない多項式の全体である。これを $P_n[a, b]$ あるいは簡単に P_n と書く。 $u_0, u_1, \dots$ の張る部分空間は多項式の全体である。これを $P[a, b]$ あるいは P と書く。これらの部分空間の間には

$$P_0 \subset P_1 \subset \cdots \subset P_n \subset P_{n+1} \subset \cdots \subset A$$

という関係がある。

関数 $u_1, \dots, u_n$ に対し

$$\alpha_1 u_1 + \cdots + \alpha_n u_n = 0$$

が, すべて 0 でない複素数の組 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ によって成立すれば, $u_1, \dots, u_n$ は一次従属であるという。 $u_1, \dots, u_n$ が一次従属でないとき, 一次独立であるという。無限集合 S に対しては, その中に一次従属な有限個の関数が一組でもあれば, S は一次従属であるといい, そうでなければ一次独立であるという。例 4 の関数 $u_0, u_1, \dots, u_n, \dots$ は一次独立である。

一般にベクトル空間 X が, n 個の一次独立なベクトルを少くとも一組含むが, その任意の $n+1$ 個のベクトルは一次従属である, というとき, X は n 次元であるという。このような非負の整数 n が存在しないとき X は無限次元 (∞ 次元) という。関数空間 $C[a, b]$ をはじめ, 例 2, 例 3 の部分空間はすべて無限次元である。 P_n は $n+1$ 次元である。

有限次元のベクトル空間 X において, その次元を n とすれば, n 個の一次独立なベクトル $u_1, \dots, u_n$ をとれば, 任意の $u \in X$ は

$$u = \xi_1 u_1 + \cdots + \xi_n u_n$$

の形に一意的に表わされる。このとき $u_1, \dots, u_n$ を X の基底, $\xi_1, \dots, \xi_n$ を u の (基底 $u_1, \dots, u_n$ に関する) 成分という。

無限次元の空間 X でも同様の基底を考えることができる。その方法には二通りの考え方がある。第一に代数的な方法は, 可算個あるいはそれ以上の一次独立なベクトルの集まり $u_1, u_2,$

…を考えて、その一次結合（有限個の一次結合しか考えられない）によって任意の $u \in X$ を表わすことを試みる。第二の方法は解析的な方法で、任意の $u \in X$ がこのような一次結合で直接表わされなくても、その極限として表わされればよいと考える。応用上はこの第二の方法のほうが便利であるが、極限というのはこの場合何かということを明らかにして考えなければならない。これは単なるベクトル空間には含まれない概念であって、ベクトル空間で極限を考える道を導入する必要がある。これを空間に位相を入れるという言葉で表現している。われわれの扱っている関数空間では、自然な方法で位相を入れることができる。そのことを次節に述べよう。

§ 9 連続関数の一様ノルム

一般にベクトル空間を X とし、 X の任意の要素 u, v に対して非負の実数 $\|u\|, \|v\|$ が定義されていて次の(1)~(3)を満たすとき X をノルム空間、 $\| \cdot \|$ をノルムという。

(1) $\|u\| \geq 0$ で $\|u\| = 0$ となるのは $u = 0$ のときそのときに限る。

(2) $\|\alpha u\| = |\alpha| \|u\|$

(3) $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ (三角不等式)

(3)式において u の代りに $u - v$ とおいた式を考えれば

(4) $\|u - v\| \geq \|u\| - \|v\|$

を得る。これらの性質によって、 $\|u\|$ をベクトルの長さと考えていいことがわかる。そして $\|u - v\|$ を二点 u, v の距離と考えることもできる。(3)より

$$\|u - w\| \leq \|u - v\| + \|v - w\|$$

を得るから、三角形の二辺の和には第三辺より小さくない。

さて我々の考察の対象であるベクトル空間 $C[a, b]$ につぎのようなノルムを考える。 $u \in C[a, b]$ ならば $|u(t)|$ も t の連続関数であるから、実数値連続関数に関する最大値の定理によって $|u(t)|$ が最大値を $[a, b]$ 内のある点でとる。その最大値を $\|u\|$ の値と定義する。

$$\|u\| = \max |u(t)|$$

である。定義によって $\|u\|$ は決して負にならない実数である。 $\|u\| = 0$ となるのは $|u(t)|$ の最大値が 0 になる場合、すなわち恒等的に $u(t) = 0$ 、 $u = 0$ の場合にきがる。また $u + v$ のノルムは

$$\begin{aligned} |(u+v)(t)| &= |u(t) + v(t)| \leq |u(t)| + |v(t)| \\ &\leq \|u\| + \|v\| \end{aligned}$$

が任意の t に対して成り立つから、左辺の最大値も右辺をこえない。故に $\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|$ である。最後に $|u(t)|$ が $t = t_0$ で最大値 $\|u\|$ をとれば、 $|(\alpha u)(t)| = |\alpha u(t)| = |\alpha| |u(t)|$ も同じ t_0 で最大値 $|\alpha| \|u\|$ をとることがわかる。従って $\|u\|$ は(1)~(3)の性質をみたしていることがわかった。このノルムのことを C の一様ノルムといって、関数空間 C を考えるときは、特にことわらないかぎりこのノルムを前提としていることが多いのである。

ベクトル空間 C においてノルムを上のように定義すると、二点間の距離という概念が定義される。これをもとにして、形式的にふつうのユークリッド空間と同じように、いろいろな位相幾何学的概念を導入することができる。定点 u_0 に対し、不等式 $\|u - u_0\| < \rho$ ($\rho > 0$) を満足する点 u の全体を開球といい、 u_0 をその中心、 ρ を半径とよぶ。同様に $\|u - u_0\| \leq \rho$ によって閉球、 $\|u - u_0\| = \rho$ によって球面が定義される。開球と閉球とを総称して球という。点 u_0 を中心

とする球を含むような点集合を、 u_0 の近傍ということがある。点集合 S がある球の中に入っていれば、 S は有界であるという。点集合 S があって、 S の各点 u に対して S が近傍になっているとき、いいかえれば S の各点 u に対して u を中心とする十分小さい球が S に含まれるとき、 S は開集合であるといわれる。

点列 $u_1, u_2, \dots$ (これを略して $\{u_n\}$ と書く) と点 u とがあって、 u を中心とするどんな球をとっても、有限個の例外を除いて u_n が全部その球の中に入っているとき、いいかえれば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_n - u\| = 0$$

であるとき、 $\{u_n\}$ は u に (強) 収束する、あるいは $\{u_n\}$ の (強) 極限が u であるといい、記号で、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u \text{ (強)}, \lim_{n \rightarrow \infty} u_n = u, u_n \rightarrow u$$

などと表わす。 $\lim_{n \rightarrow \infty} u_n$ は存在すれば、ただ一通りにきまる。

点集合 S の点からなる点列の極限に等しいような点の全体を S の閉包とよび、 $\overline{S}$ と書く。 $u \in S$ の時、 $u_i = u$ ($i = 1, 2, 3, \dots$) なる点列 $\{u_i\}$ は u に収束するから $u \in \overline{S}$ である。故に $S \subset \overline{S}$ である。 $u \in \overline{S}$ であるためには、 u の任意の近傍に S の点が少なくとも一つあることが必要であり、また十分である。 $\overline{S} = S$ のとき、 S は閉集合であるという。任意の S に対して $\overline{\overline{S}}$ は閉集合である (すなわち $\overline{\overline{S}} = \overline{S}$)。特に部分空間が閉集合ならば、これを閉部分空間という。前節例 2 で定義した部分空間 CP 、 C は C の閉集合である。 $\tilde{C}$ および例 3 の C' 、 C'' は閉集合でない。

$u_n \rightarrow u$ すなわち $\|u_n - u\| \rightarrow 0$ ということは、 $|u_n - u|$ の最大値が 0 に収束することであるから、任意の正数 ε に対して、適当な正の整数 N をとれば、 $n \geq N$ ならば t が何であってても、 $|u_n(t) - u(t)| \leq \varepsilon$ が成立するということである。すなわち $u_n \rightarrow u$ は関数列 $\{u_n\}$ が区間 $[a, b]$ において u に一様収束することに他ならない。

一様収束についてよく知られた Cauchy の条件によると、関数列 $\{u_n\}$ がある関数に一様収束するために

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} |u_m(t) - u_n(t)| = 0 \text{ が一様に成立することが必要かつ十分である。}$$

この結果 $\{u_n\}$ がある u に強収束するためには、 $\lim_{n \rightarrow \infty} \|u_m - u_n\| = 0$ が必要かつ十分である。

この条件が必要であることは不等式

$$\|u_m - u_n\| \leq \|u_m - u\| + \|u_n - u\|$$

からすぐわかる。しかし条件が十分であることは、このように簡単に証明することができない。実際その証明には関数空間 C の特別の性質が用いられるのであって、収束の定義とノルム空間の性質だけを用いたのでは決して証明できないのである。

このような C の特性を表わすのに完備という言葉が用いられる。一般にノルム空間 X の点列 $\{u_n\}$ が Cauchy の条件 $\|u_n - u_m\| \rightarrow 0$ を満足するとき、これを Cauchy 列または基本列という。 X の任意の Cauchy 列が X の点に強収束するならば、空間 X は完備であるといわれる。完備なノルムの空間を Banach 空間という。この定義によると、われわれの関数空間 $C[a, b]$ は完備なノルム空間である。

完備なノルム空間の閉部分空間 X_1 は、完備なノルム空間である。この証明は容易である。同様にして次の定理が証明できる：ノルム空間 (完備でなくてもよい) X の部分空間 X_1 が完備ならば、 X_1 は閉集合である。例 2 の CP 、 C は (C と同じノルムを用いて) 完備なノルム空間である。

空間 R が完備できないとき、ある一定の方法によってこれを完備な空間 R^* の中に埋めこむことができる。これを完備化という。これは有理数の全体は完備でないが、有理数の Cauchy 列を新しい数とみなして実数を作る方法と同じである。このようにして作られた実数の全体は完備になる。

§ 10 ノルムの空間の幾何学

1. 有限次元部分空間 ノルム空間 X の有限 n 次元部分空間 X_n のもつ諸性質を考察する。

定理 5 ノルム空間 X の n 次元部分空間 X_n は完備なノルム空間であり、したがって閉部分空間である (これは X が完備であるか否かには関係しない。)

証明 数学的帰納法を用いる。0 次元部分空間は 0 ベクトルだけしか含まないから、完備であることは明らかである。 n 次元部分空間 X_n が完備であると仮定して、 $n+1$ 次元部分空間 X_{n+1} が完備であることを示す。

X_{n+1} は 1 次元部分空間と n 次元部分空間との直和として表わされる。つまり X_{n+1} の適当な 1 次元部分空間 X_1 と、 n 次元空間 X_n に対して、 X_{n+1} の任意の元は X_1 の元と X_n の元との和として表わされ、しかもその表わし方はただ一通りである。このような X_1 , X_n をみつけるには、 X_{n+1} の基底 $u_1, \dots, u_{n+1}$ をとり、 u_1 の張る 1 次元部分空間 X_1 と $u_2, \dots, u_{n+1}$ の張る n 次元部分空間 X_n をとればよい。

仮定によつては X_n は完備であるから、結局われわれの定理は次の定理に帰着する。ノルム空間 X において、完備な部分空間 M と、任意の定元 $u_0 \in X$ との張る部分空間 M_1 は完備である。

もし $u_0 \in M$ であれば $M_1 = M$ となるから結果は明らかである。よつて u_0 が M に含まれない場合を取り扱えばよい。また M は完備であるから閉集合である。さて M_1 の元からなる Cauchy 列 $\{u_n\}$ を考える。これに対して $u_n \rightarrow u$ のような $u \in M_1$ があることを示せばよい。

u_n は次の形に表わされる：

$$u_n = v_n + \alpha_n u_0, \quad v_n \in M \quad (1)$$

ここで複素数の列 $\{\alpha_n\}$ は有界である。もし有界でないとすれば、その適当な部分列が ∞ に発散するから、改めてこの部分列に相当する $\{u_n\}$ の部分列をとったものとすれば、 $\{u_n\}$ が Cauchy 列であるという事実はそのまま、はじめから $|\alpha_n| \rightarrow \infty$ と考えてよい。すると (1) からえられる式

$$u_0 = \frac{1}{\alpha_n} u_n - \frac{1}{\alpha_n} v_n$$

において、 $\|u_n\|$ は有界であるから (収束する実数列は有界)、 $(1/\alpha_n) u_n \rightarrow 0$ である。したがって

$$u_0 = \lim \left(-\frac{1}{\alpha_n} v_n \right)$$

となるが、 $-(1/\alpha_n) v_n \in M$ でしかも M が閉集合であるから $u_0 \in M$ という矛盾が生ずることになる。

$\{\alpha_n\}$ が有界であることがわかったから、Bolzano-Weierstrass の定理によつて、 $\{\alpha_n\}$ の適当な部分列を取り出して、ある複素数 α に収束させることができる。上に行ったように、 $\{u_n\}$ を部分列でおきかえることによって、はじめから $\alpha_n \rightarrow \alpha$ であつたと考えて差支えない。(1) によつ

て $\{v_n\}$ も Cauchy 列でなければならない。 M は完備という仮定であるから $v_n \rightarrow v$ のような $v \in M$ がある。したがって(1)によって

$$u_n = v_n + \alpha_n u_0 \rightarrow v + \alpha u_0 \in M_1$$

となる。

例6 n 次以下の多項式の全体 P_n は C の $n+1$ 次元部分空間であるから完備でありしたがって閉である。故に n 次以下の多項式が $[a, b]$ で一様収束ならば、その極限はやはり n 次以下の多項式である。

2. コンパクト性 上に用いたように、直線あるいは平面上では、有界な点列は収束する部分列を含む、という Bolzano-Weierstrass の定理が成り立つ。この性質を表わすのに、直線あるいは平面は局所コンパクトであるという。一般にノルム空間の点集合 S があって、 S の点からなる任意の点列が、必ず S の点に収束する部分列を含むならば、 S はコンパクトであるという。直線あるいは平面上では任意の閉球（あるいは一般に有界な閉集合）はコンパクトである。これが局所コンパクトという名のもとである。

一般に有限次元のノルム空間は局所コンパクトである。これを証明するのに、第一項で行ったのと同様にして、次元数による数学的帰納法を用いる。その論法をふり返ってみると、結局次の定理を証明すればよいことがわかる：ノルム空間の部分空間 M が局所コンパクトならば、定ベクトル u_0 と M との張る部分空間 M_1 も局所コンパクトである。

これを証明しよう。前と同様に u_0 が M に含まれない場合を考えれば十分である。 M_1 の点からなる有界な点列 $\{u_n\}$ が与えられたとすれば、 u_n は(1)の形に表わされる。前と同様にして $\{\alpha_n\}$ が有界であることがわかるから、 $\{u_n\}$ の適当な部分列をとることによって、はじめから $\alpha_n \rightarrow \alpha$ が成立するとしてさしつかえない。すると $\{u_n\}$ も $\{\alpha_n u_0\}$ も共に有界であるから $\{v_n\}$ も有界となる。 M が局所コンパクトという仮定によって、 $\{v_n\}$ の適当な部分列をとれば、 M のある点 v に収束させることができる。これに相当する

$\{u_n\}$ の部分列をとれば、これは $v + \alpha u_0 \in M_1$ に収束する。故に M_1 においても Bolzano-Weierstrass の定理の成立することがわかった。

集合のコンパクトという性質が極めて重要であることは、§6でも述べたが、微積分学、関数論などで Bolzano-Weierstrass の定理が演じる役割を考えれば明らかであろう。いま有限次元のノルム空間は局所コンパクトであることを説明したが、実はノルム空間が局所コンパクトであるのは有限次元のものに限られるのである。

§11 一様近似^⑤

解析学では、いろいろな関数を扱うが、これらの関数を性質のよく知られた関数、すなわち多項式や三角関数など、で近似することは、実用上からも理論を展開する上からも、非常に大切である。

与えられた関数 $f(x)$ を他の関数で近似するというのは、 $f(x)$ に「近い」関数を求めることである。「近い」ということはどういう意味で近いのか、その意味を解明する必要がある。そしてそのような関数を求める方法等の問題が考えられる。

$f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で定義された関数とする。同じ区間で定義された別の関数 $g(x)$

があって

すべての $x \in [a, b]$ について, $|f(x) - g(x)| \leq \varepsilon$
 ということが成立するとき, $g(x)$ は $f(x)$ を一様近似するという。

特に f, g が $C[a, b]$ に属する連続関数なら上の条件は

$$\|f - g\| \leq \varepsilon$$

と表わすことができる。

次の定理は近似問題を論ずるとき, 最も基本になる定理である。

定理7 (ワイエルストラスの多項式近似定理)

閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して, これを任意の近さで一様近似する多項式が存在する。

この定理の証明法はいろいろある。ここではベルンシュタインによる証明を与える。まず区間 $[a, b]$ は $[0, 1]$ にとっておいてよいことを注意しよう。それは, $x \in [a, b], t \in [0, 1]$ に対して, 変換

$$x = a + (b - a)t, \quad t = \frac{x - a}{b - a} \quad (1)$$

を考え, $f_1(t) = f(a + (b - a)t)$ に対して, $[0, 1]$ で $\|f_1 - p_1\| \leq \varepsilon$ であるような多項式 $p_1(t)$ をとって, $p(x) = p_1(\frac{x-a}{b-a})$ とすれば, $p(x)$ も $p_1(t)$ と同じ次数の多項式で, $[a, b]$ で $\|f - p\| \leq \varepsilon$ を満たすことになるからである。

補題8 $0 \leq p \leq 1, n$ は自然数とする。

いま, $p_k = {}_n C_k p^k (1 - p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, 2, \dots, n)$

とすれば,

$$\sum_{k=0}^n p_k = 1 \quad (2)$$

$$\sum_{k=0}^n k p_k = np \quad (3)$$

$$\sum_{k=0}^n (k - np)^2 p_k = np(1 - p) \quad (4)$$

$$\text{証明} \quad {}_n C_k = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \frac{n}{k} {}_{n-1} C_{k-1} = \frac{n(n-1)}{k(k-1)} {}_{n-2} C_{k-2}$$

であることに注意すれば,

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^n p_k &= \sum_{k=0}^n {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} = \{p + (1-p)\}^n = 1 \\ \sum_{k=0}^n k p_k &= \sum_{k=1}^n k {}_n C_k p^k (1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^n n {}_{n-1} C_{k-1} p^k (1-p)^{n-k} \\ &= np \sum_{k=0}^{n-1} {}_{n-1} C_k p^k (1-p)^{n-1-k} = np \{p + (1-p)\}^{n-1} \\ &= np \\ \sum_{k=0}^n k(k-1) p_k &= n(n-1) p^2 \sum_{k=2}^n {}_{n-2} C_{k-2} p^{k-2} (1-p)^{n-2-k} \\ &= n(n-1) p^2 \end{aligned}$$

したがって, また

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^n (k-np)^2 p_k &= \sum_{k=0}^n k(k-1)p_k + \sum_{k=0}^n kp_k - 2np \sum_{k=0}^n kp_k + n^2 p^2 \sum_{k=0}^n p_k \\ &= n(n-1)p^2 + np - 2n^2 p^2 + n^2 p^2 = np(1-p)\end{aligned}$$

補題9 (チェビシェフの不等式)

$$p_k \geq 0 \quad (k=0, 1, 2, \dots, n), \quad \sum_{k=0}^n p_k = 1$$

であるとき,

$$m = \sum_{k=0}^n kp_k, \quad \sigma^2 = \sum_{k=0}^n (k-m)^2 p_k$$

とおけば, 任意の $c > 0$ に対して, $|k-m| \geq c\sigma$ を満たす k についての p_k の和をとると, 次の不等式が成立する。

$$\sum_{|k-m| \geq c\sigma} p_k \leq \frac{1}{c^2} \quad (5)$$

$$\begin{aligned}\text{証明} \quad \sigma^2 &= \sum_{k=0}^n (k-m)^2 p_k \geq \sum_{|k-m| \geq c\sigma} (k-m)^2 p_k \\ &\geq c^2 \sigma^2 \sum_{|k-m| \geq c\sigma} p_k\end{aligned}$$

この両辺を $c^2 \sigma^2$ で割って(5)を得る。

定理の証明 いま近似の近さを ε とする。そして, 自然数 n に対して, 次の多項式 $q_n(x)$ を考える。

$$q_n(x) = \sum_{k=0}^n {}_n C_k f\left(\frac{k}{n}\right) x^k (1-x)^{n-k}$$

$q_n(x)$ はたかだか n 次の多項式である。ここで n が十分大きいとき, これが, $f(x)$ の ε 以下の近似式を与えることを示そう。 $f(x)$ は有界閉区間 $[0, 1]$ で連続な関数であるから, 有界であり, かつこの区間内で一様連続である。したがって, $\delta > 0$ を適当にとれば,

$$x, x' \in [0, 1], \quad |x-x'| \leq \delta \text{ のとき}$$

$$|f(x) - f(x')| \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (6)$$

であるようにすることができる。

さて, $x \in [0, 1]$ に対して, (2)より

$$\begin{aligned}|f(x) - q_n(x)| &= \left| f(x) \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n f\left(\frac{k}{n}\right) {}_n C_k x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &= \left| \sum_{k=0}^n \left(f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right) {}_n C_k x^k (1-x)^{n-k} \right| \\ &\leq \sum_{k=0}^n \left| f(x) - f\left(\frac{k}{n}\right) \right| {}_n C_k x^k (1-x)^{n-k}\end{aligned} \quad (7)$$

であるが, ここで右辺の和を, $|x - \frac{k}{n}| \leq \delta$ の部分と, $|x - \frac{k}{n}| > \delta$ の部分に別けて評価しよう。 $|x - \frac{k}{n}| \leq \delta$ が成立する部分では, (6)によって $|f(x) - f(\frac{k}{n})| \leq \frac{\varepsilon}{2}$ であるから,

$$\sum_{k: |x - k/n| \leq \delta} |f(x) - f(\frac{k}{n})| {}_n C_k x^k (1-x)^{n-k}$$

$$\begin{aligned} &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k: |x - k/n| \leq \delta} {}_n C_k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k=0}^n {}_n C_k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{\varepsilon}{2} \end{aligned}$$

また、 $|x - \frac{k}{n}| > \delta$ が成立する部分では、 $|f(x)| \leq \|f\|$ 、 $|f(\frac{k}{n})| \leq \|f\|$ 、および補題 9 を用いて、この場合 $\sigma^2 = nx(1-x)$ であるから、 $c\sigma = n\delta$ すなわち、

$$c = \frac{\sqrt{n\sigma}}{\sqrt{x(1-x)}}$$

ととれば

$$\begin{aligned} &\sum_{k: |x - k/n| \geq \delta} |f(x) - f(\frac{k}{n})| {}_n C_k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq 2 \|f\| \sum_{k: |nx - k| \geq n\delta} {}_n C_k x^k (1-x)^{n-k} \\ &\leq 2 \|f\| \frac{x(1-x)}{n\delta^2} \leq \frac{\|f\|}{2n\delta^2} \end{aligned}$$

したがって、 $n \geq \frac{\|f\|}{\varepsilon\delta^2}$ とすれば、この部分も $\varepsilon/2$ より小となる。以上より、 $n \geq \frac{\|f\|}{\varepsilon\delta^2}$ ならば、(7)によって、 $\|f - q_n\| \leq \varepsilon$ となることがわかる。

§12 三角多項式による一様近似

ワイエルストラスの証明したもう一つの一様近似に関する定理は、三角多項式を用いるものである。

三角多項式とは、

$$\begin{aligned} &a_0 + a_1 \cos t + a_2 \cos 2t + \cdots + a_n \cos nt \\ &+ b_1 \sin t + b_2 \sin 2t + \cdots + b_n \sin nt \end{aligned} \quad (1)$$

という、 $1, \cos t, \cos 2t, \dots, \cos nt, \sin t, \sin 2t, \dots, \sin nt$ という形の三角関数の一次結合になっているものをいう。

(1)の関数を $s_n(t)$ と書くと、これは周期 2π の周期関数だから、これによって近似される関数も、当然 2π を周期にもつ関数でなければならない。

しかし、たとえば区間 $[-\pi, \pi]$ で定義された関数 $u(t)$ は、もし、

$$u(-\pi) = u(\pi) \quad (2)$$

を満たしていれば、任意の定数 t に対して、 $(2k-1)\pi < t \leq (2k+1)\pi$ であるような整数 k があるわけだから、これに対し

$$\tilde{u}(t) = u(t - 2k\pi)$$

として定義を拡張してやれば、これによって、 2π を周期とする周期関数 $\tilde{u}(t)$ が得られる。これを周期的に拡張された関数という。もとの $u(t)$ が連続関数ならば、この周期的に拡張された関数も、連続関数である。したがって次の定理で、 2π を周期とする連続関数の中には、(2)を満たすような $[-\pi, \pi]$ で定義された連続関数も、同時に含まれて考えられていることになる。

定理10 (ワイエルストラスの三角多項式近似定理)。 2π を周期とする連続関数 $u(t)$ に対して、これを任意の近さで一様近似する三角多項式が存在する。

いま $u(t)$ は、 $[-\pi, \pi]$ で定義され、(2)を満たしている関数である、と考えてよい。 $t \in [-\pi, \pi]$

に対して $(\cos t, \sin t)$ は 2 次元平面 R^2 の単位円周上の点を表している。 $t (-\pi < t \leq \pi)$ はこの点と一対一の対応をなし、したがって、 $u(t)$ は、この単位円周上で定義された関数と思つてよい。 R^2 上の点 (x, y) を極座標を使って

$$x = r \cos t \quad y = r \sin t \quad (3)$$

と書けば、 $u(t)$ は、平面全体に

$$f(x, t) = r u(t) \quad (4)$$

と定義を拡張して、 R^2 全体で定義された連続関数と見ることができる。

そこでこの定理を証明する方針は、この $f(x, y)$ をワイエルストラスの多項式近似定理と同様に、 x, y の多項式によって一様近似し、ついでそれを(3)によって、 r, t の式に書き直し、 $r=1$ として、さらに $\cos t, \sin t$ の多項式の形で得られた式を(1)の形に直す、ということになる。

補題11 R^2 上の閉区間 $[a, b] \times [c, d]$ で定義された連続関数 $f(x, y)$ に対して、これを任意の近さで一様近似する x, y の多項式が存在する。

証明は前節定理とほとんど同じであるから改めて述べない。

補題12 n, m は正の整数、または 0 とする。 $\cos^n t \sin^m t$ は、 m が偶数ならば、 $\cos(n+m)t, \cos(n+m-2)t, \dots$ の一次結合で表され、 m が奇数ならば、 $\sin(n+m)t, \sin(n+m-2)t, \dots$ の一次結合で表される。

n が偶数のとき、 $\cos nt$ は $1, \cos^2 t, \dots, \cos^n t$ の一次結合で、 $\sin nt$ は $\sin t, \sin^3 t, \dots, \sin^{n-1} t$ の一次結合 $\times \cos t$ で表される。

n が奇数のとき、 $\cos nt$ は $\cos t, \cos^3 t, \dots, \cos^n t$ の一次結合で、 $\sin nt$ は $\sin t, \sin^3 t, \dots, \sin^n t$ の一次結合で表される。

証明 m が偶数なら、 $m=2k$ として、 $\cos^n t \sin^m t = \cos^n t (\sin^2 t)^k = \cos^n t (1 - \cos^2 t)^k$ これは $\cos^{n+2} t, \dots, \cos^{n+m} t$ の一次結合になる。

$$\cos t = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} \quad \sin t = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}$$

を用いると、

$$\begin{aligned} \cos^l t &= 2^{-l} (e^{it} + e^{-it})^l = 2^{-l} \{ (e^{ilt} + e^{-ilt}) + {}_l C_1 (e^{i(l-2)t} + e^{-i(l-2)t}) + \dots \} \\ &= 2^{-l+1} \{ \cos lt + {}_l C_1 \cos(l-2)t + \dots \} \end{aligned}$$

であるから、結局、 m が偶数のときは、 $\cos^n t \sin^m t$ は $\cos(n+m)t, \cos(n+m-2)t, \dots$ の一次結合になる。

m が奇数のときは、まず $\cos^n t \sin^{m-1} t$ を $\cos lt$ の一次結合に表しておいて、 $\cos lt \sin t = 2^{-1} \{ \sin(l+1)t - \sin(l-1)t \}$ を用いればよい。

ド・モワブルの公式を用いて

$$\begin{aligned} \cos nt + i \sin nt &= e^{int} = (e^{it})^n = (\cos t + i \sin t)^n = \cos^n t - {}_n C_2 \cos^{n-2} t \sin^2 t + {}_n C_4 \cos^{n-4} t \sin^4 t - \dots \\ &\quad + i({}_n C_1 \cos^{n-1} t \sin t - {}_n C_3 \cos^{n-3} t \sin^3 t + \dots) \end{aligned}$$

から、実部と虚部を分け、さらに $\sin^2 t = 1 - \cos^2 t$ を使えば、補題が証明される。

定理の証明 いま(4)のように $f(x, y)$ という関数を定義すれば、これは R^2 で連続な関数であるから、特に $[-1, 1] \times [-1, 1]$ という閉区間上の関数として連続である。したがっていま近似の近さを ε とするとき、補題 1 によって、 $f(x, y)$ はこの区間上で x, y のある多項式 $q_n(x, y)$ によって近似される： $\|f - q_n\| < \varepsilon$

これは(3)より r, t で書けば

$$|ru(t) - q_n(rcost, rsint)| \leq \varepsilon \quad (5)$$

ということである。単位円周 $r=1$ は、いま考えている区間内に含まれるから、単位円周上で(5)は成立する。したがって(5)で $r=1$ とおくと

$$|u(t) - q_n(cost, sint)| \leq \varepsilon \quad (-\pi \leq t \leq \pi) \quad (6)$$

ここで $q_n(cost, sint)$ は $cost, sint$ のたかだか $2n$ 次の多項式、したがって $\cos^h t \sin^k t$ ($h+k \leq 2n$) の一次結合であるから、補題 2 によって、これは、 $1, cost, sint, \cos 2t, \dots$ の一次結合、すなわち三角多項式 $s(t)$ として表わされる。故に(6)より、 $u(t)$ に対して三角多項式 $s(t)$ があって、 $[-\pi, \pi]$ 上で、あるいは R 全体で

$$\|u - s\| \leq \varepsilon$$

となる。

この定理の系として閉区間 $[a, b]$ で定義された $f(a) = f(b)$ を満足する連続関数は

$\cos \frac{2k\pi}{b-a}t, \sin \frac{2h\pi}{b-a}t$ ($k=0, 1, 2, \dots$) の一次結合 (三角多項式) で一様近似されることがわかる。

§13 最良近似多項式

Weierstrass の定理によると、任意の連続関数が多項式によって任意に一様近似されるが、近似度を高めようとするれば、多項式の次数は当然高くなる。もし次数を制限して、 n 次またはそれ以下の多項式しか許されないとすれば、任意の関数をいくらでも精密に近似するわけにはいかない。

いま関数を一様近似するために、ある種の近似方式、たとえばたかだか n 次の多項式で近似するとか、または $1, cost, \dots, \cos nt, sint, \dots, \sin nt$ の一次結合で近似するとか、そのように近似方式をきめて、いろいろ近似式を考えたとき、その近似の近さが最も小さくなる近似式、いいかえると、いちばん近似のよい式があれば、それをミニマックス近似という。次の定理を証明なしに述べよう。

定理13 閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して、自然数 n を固定して、 $f(x)$ を x のたかだか n 次の多項式で近似する問題を考えるとき、ミニマックス近似を与えるものが存在する。

この定理で保証される、 $f(x)$ に対して、そのミニマックス近似を与える多項式を、 $f(x)$ の最良近似多項式という。最良近似多項式の存在は上の定理に保証されるが、これを求めることは一般に容易でない。一般論として求め得ることはほとんどなく、試行錯誤的に実用となるものを見いだすのである。このことを例によって解説してみよう。

例14 $\sin x$ ($0 \leq x \leq \pi/2$) の近似多項式を考えるのに、すぐ思いつくのは、テイラー級数を途中で打ち切った多項式である。

$$\sin x = x - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{120}x^5 - \frac{1}{5040}x^7 + \frac{1}{362880}x^9 - \dots$$

しかし、これは、この区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ の中で考えて、最良近似多項式というには程遠い。

テイラー展開よりも、チェビシェフ展開を用いるほうが、一般により近似を与えるといわれる。
 $\sin ax$ の場合、チェビシェフ展開は

$$\sin ax = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} 2 J_{2k-1}(a) J_{2k-1}(x) \quad (0 \leq x \leq 1)$$

となる。ここで J_n はベッセル関数である。 $a = \pi/2$ として、5項目までで打ち切った場合、たしかに最良近似が得られることがわかっている。

§14 数学論的まとめ

高等学校の微分積分と大学初年級の微分積分学の相異はいろいろあるが、高等数学に登場しない抽象的概念として「位相」の概念がある。ここでいう位相とは *topologie général* の意味で用いている。実際位相の概念は解析学での極限、連続、近傍などの直観的概念に数学的意味を与えるために生れた。位相の基本概念としては三つの c ということがよくいわれる。すなわち連続性 (continuity)、コンパクト性 (compactness)、連結性 (connectedness) がそれである。本稿では連続関数を主題に、連続性が連結性、コンパクト性とどのように関っているかを整理してみた (§5, §6, §7)。

古典的な微分積分学の発展として現代の解析学では関数解析学がある。関数解析学とは微分積分学を無限次元の空間で行うものと云えよう。

解析学において無限次元の線形空間が自然にあらわれるのは、ある性質をもった関数の全体が作る集合を考えるときである。§8においてわれわれは $C[a, b]$ という線形空間を考察した。これには、 $1, t, t^2, \dots, t^n, \dots$ という無限個の一次独立な元が含まれるので無限次元となる。

$C[a, b]$ で最大値ノルム $\|u\| = \max |u(t)|$ を導入すると、 $dis(f, g) = \|f - g\|$ を定義することによりこの空間に距離が導入され、また

$$u_n \rightarrow u \Leftrightarrow \|u_n - u\| \rightarrow 0$$

により点列の収束が定義される。この収束の定義は微分積分学における $[a, b]$ 上の連続関数列の一致収束を現代風にいい換えたものであり、 $C[a, b]$ は完備性をもつことがわかる。

いま $\{u_n(t)\}$ を $C[a, b]$ の一つの基本列とする。これは $\varepsilon > 0$ をとると、 $n, m > N$ なるすべての n, m に対して

$$|u_n(t) - u_m(t)| < \varepsilon$$

が $a \leq t \leq b$ なるすべての t に対して成立するような N が存在することである。したがって、

$\{u_n(t)\}$ は一様に収束し、その極限は連続関数で $C[a, b]$ に属する。これを $u(t)$ とすれば、すべての t および N より大きいすべての n に対して

$$|u_n(t) - u(t)| \leq \varepsilon$$

となる。ところがこれは $\{u_n(t)\}$ が $C[a, b]$ において $u(t)$ に収束することにほかならない。

関数解析において空間の完備性は大変重要で、何かある問題の答として $C[a, b]$ の元を得たいとき、その近似解の列でコーシー列となるもの（すなわち近似解どうしの差のノルムがどんどん小さくなってゆくようなもの）を作りさえすれば、その極限として必然的に真の解が得られることを意味している。これは実数の集合 R の完備性を仮定して e や π などの超越数を定義するのと同じ発想法であり、関数解析におけるあらゆる論法も結局のところこの近似の原理に帰着するといえよう。

豊富な内容をもった解析学を一つの考え方の筋で要約するのはもとより正しくないが、敢てここで一つの筋をクローズアップすれば、それはここに述べた近似の問題である。微分積分法は、だいたい数列の収束が話の主体となって組み立てられる。この収束問題が関数列にもちこまれたのが、次の段階で近似の問題である。フーリエ展開や、バナッハ空間論、ヒルベルト空間論、常微分方程式論、偏微分方程式論をつらぬく一つのテーマ、方法論が近似の問題といえよう。

実数全体の空間の中で、有理数の全体の集合は重要な役割をはたしている。それは実数は有理数で任意に近似することができるという意味においてである。このことを有理数の集合は実数の集合において稠密であるといい表わす。同様のことが $C[a, b]$ において、多項式の作る集合 P においてみられる。多項式の全体は $C[a, b]$ で稠密であった (§ 11)。これと同様なことが、三角関数系についてもいえた (§ 12)。このことは、多項式と三角関数の重要性を示している。（これは § 1 において述べた問題にたいする一つの解答である。）

有限次元の線形空間は完備であり、 R^n とほぼ同様の構造をもっている。それは n 次以下の多項式の全体の集合 P_n や、有限次元のノルム空間が局所コンパクトであることを示したことでわかる。古典的な微積分学が個別的に関数を扱ったのに対し、近代的な解析学は総括的方法をもっていることがこの例からもわかる。

そして近似の問題は、解析性（テイラー展開）をもって代替は出来ないことをミニマックス近似は語っているのである。

〔注〕

- ① ア・デ・アレクサンドロフ、「数学とはどのような学問か」 遠山啓編「数学の世界」、大月書店、国民文庫810.
- ② 選択公理が微分積分学において、このような基本的なところに用いられることは、通常の微分積分学の教科書にふれられていない。ここでは通常は無意識的に選択公理が用いられている。
- ③ § 5～§ 7 の記述には次の本を参照引用した。松本幸夫「トポロジー入門」、岩波書店。
- ④ § 8～§ 10 の記述には次の本を参照引用した。加藤敏夫「位相解析」、共立出版。
(この節以降は関数空間の話になるので、定理や例の番号を新しくする。)
- ⑤ § 11～§ 13 の記述には次の本を参照引用した。竹之内脩「フーリエ展開」、秀潤社。