



Title	自然対数とその指導
Author(s)	大田, 邦郎
Citation	北海道大學教育學部紀要, 63, 115-135
Issue Date	1994-03
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/29428
Type	departmental bulletin paper
File Information	63_P115-135.pdf



自然対数とその指導

大 田 邦 郎¹

The Instruction of Natural Logarithm

Kunio OTA

積分法が、微分法の逆演算としてつくられたのではないと同様に、対数関数も、指数関数の逆関数としてつくられたのではない。対数は、小数の発見を契機として、小数の乗除算を簡便にするための方法として発見されたのである。

対数を、いったん指数関数とは切り離して、より本質的な連関の中に位置づけて教えようというのが本研究の目的である。しかも常用対数からではなく、文字通り自然な、自然対数から教えようとするものである。

授業書「面積と自然対数」は、一応は高等学校の基礎解析程度の、微積分の初歩の知識を前提とする。しかし、証明は読み飛ばしてもかまわないから、読者もぜひ関数電卓と鉛筆を持って、対数計算とお付き合いいただきたい。

1 自然対数指導の基本視点

(1) 自然対数とその位置づけ

ネイピア (J. Napier, 1550 ~ 1617) による対数の発見は、三角法の計算を簡単にし、天文学者の生命を2倍にしたといわれる。いったん対数表さえつくられると、桁数の多い乗除算も、加減算に置き換えて計算することができるのである。

カジョリは『初等数学史』において、「ネイピアが、指数を用いる以前に対数を構成したことは、じつに科学史上の一大驚異である」²という。すなわち、対数は、指数関数とは独立に発見されたものののである。

ネイピアの対数は、自然対数に近い³ものであったが、底の概念には至らず、したがって自然対数の底 e にも至らなかった。しかしそれが、常用対数よりも先に、かつ指数関数とは独立に発見されたということは興味深い。

現在の高等学校の教科書は、指数関数から対数関数へ、常用対数から自然対数へという指導順序を採用している。しかし、数学の歴史は、この教科書の順序が唯一のものではないことを示唆している。

もっとも、数学教育は、数学史の順序通りに展開されるべきものでもない。ある概念を教える際には、他の概念との関連を、さらにはより大きな体系の中での位置づけをも、考慮する必要がある。

自然対数の場合でいえば、これは単なる計算術にとどまるものではない。自然対数が発見されてまもなく、自然対数と双曲線との関連が明らかにされる。また、対数級数によって自然対数の値を求められるようになる。このように、自然対数は数学の体系の中に位置づいているのである。

したがって、歴史的な発生過程を考慮しながらも、より新しい観点からの対数概念の再構成がなされてしかるべきである。このことにより、自然対数という個別の知識が、双曲線などの他の

知識とのつながりにおいて、捉えられるのである。

(2) 自然対数の再構成

そのための具体的な方策については、ドイツの数学者クライン (F. Klein) の『高い立場からみた初等数学』(1908) が参考になる。クラインは、イギリスのペリー (J. Perry) とともに、今世紀初頭の数学教育改造運動の中心人物としても知られている。

クラインは、教育の場においては「双曲線 $s = \frac{1}{t}$ の下の、縦線 $t = 1$ から $t = x$ までの間の面積として、 x の対数を定義する」⁴ という方法を提唱している。すなわち、 $\log x = \int_1^x \frac{1}{t} dt$ と定義することから始めようというのである。

この定義からは、対数の特徴づける関数方程式 $\log xy = \log x + \log y$ (積を和に) も、簡単に導くことができる。クラインは「だれかがこの方法で、なるべく早いうちに、一度学校の授業で実際に試みようとするのを、私は切望している」⁵ という。

専門書の中には、クラインの提唱するように、 $y = \frac{1}{x}$ の積分により自然対数を定義するものもある。しかし、現在の高等学校の微分積分の教科書は、 $y = e^x$ の逆関数として自然対数を定義している。

とくに1970年学習指導要領以降の教科書は、積分法を微分法の逆演算として導入しており、積分の実質的な内容を欠いている⁶。高校数学で、積分による自然対数の定義を採用することは、いっそう困難になっている。

本研究では、自然対数を高校生に教えることをめざしながらも、実験授業は、大学生を対象に実施するという方法をとらざるを得なかった。現在の高等学校の基礎解析または数学Ⅱに欠けている、区分求積法についての補足説明があったほうがよいからである。

もちろん、高等学校において、区分求積法、さらに、リーマン和の極限としての本来の意味における定積分が指導される場合には、高校生にも理解可能であろう。1972年までの高校教科書では、数学ⅡBで一応はこれらの内容が扱われていたことを想起しよう。

授業書「面積と自然対数」は、基本的な展開を、マルクシェヴィチの『面積と対数』⁷ に依拠して構成した。この『面積と対数』は、旧ソ連における大衆的な数学書で、1960年代に、商工出版(現在の東京図書)により、数学新書シリーズの1冊として邦訳・出版されたものである。

この本では、クラインの提唱する方法で自然対数が定義され、対数の値を区分求積のほかに級数で近似計算して求める方法が詳しく述べられている。授業書「面積と自然対数」も、当初は級数計算を扱ったが、なるべく高校数学に合わせるために改訂版では省いた。

そのかわりに、森毅氏による対数の値の簡便な計算法⁸ をとり入れた。また、その検算や、対数表づくりなどに、ひとりひとりに関数電卓を使ってもらうことにした。

以下の授業書とそれにもとづく授業は、クラインの提唱に現代的に応えようとする、ひとつの試みである。

2 授業書「面積と自然対数」と授業過程

授業は、大田自身が、非常勤講師をしている日本大学生産工学部の「数学科教育法」の講義の中で実施した。1991年、1992年、1993年の3回にわたり、受講者はそれぞれ6名、17名、17名であった。授業書は、最終的にB5判13ページ（対数表を除く）で、90分授業3回分である。

ただし、授業書作成者自身による授業であり、また、詳しい授業記録をとっているわけではないので、正しい意味での実験授業とはいえない。本稿では、自然対数の授業書の展開についての提案を主とし、必要な限りで学生の反応などを補うことにしたい。

数学科教育法の講義においては、すでに、分数乗除、連分数、無限集合、二次関数と微積分などを扱っている。とくに、「面積と自然対数」に先立つ「二次関数と微積分」の授業書⁹においては、区分求積から入る積分法にも触れている。

この授業の前に、2つの教科書の定積分の定義についての比較を、学生にさせてみた。教科書は、1969年の「数学ⅡB」と、1986年の「基礎解析」で、ともに数研出版の発行である。

前者は区分求積から入ってのリーマン和による定義、後者は基本定理による天下りの定義である。学生に、高校ではどちらのタイプで教わったかを聞いてみると、前者というもの、後者というもの、覚えていないというものが、ほぼ3分の1ずつであった。

いまの「基礎解析」の多くは後者であるが、「微分積分」で区分求積法を教わったという学生もいる。また、教科書にはなくても、教師の裁量で教えているというケースもあるのだろう。

この教科書比較が、実質的に区分求積法についての補足説明となった。これにより、区分求積法からはいっていくことがスムーズにできた。

(1) $f(x) = \frac{1}{x}$ の積分

〈1ページ〉

面積と自然対数

〈1 $f(x) = \frac{1}{x}$ の積分〉

$n \neq -1$ のとき、 $f(x) = x^n$ の原始関数が $F(x) = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$ であることは、すでに高等学校の「基礎解析」で学んでいる。

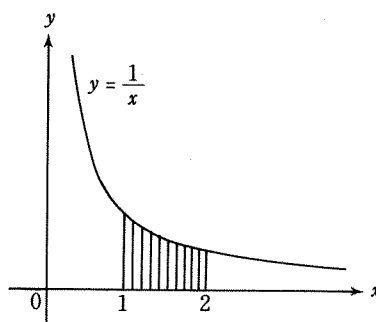
$n = -1$ の場合については「微分・積分」の範囲であるが、ここでは「基礎解析」までしか知らないものと仮定して、話をすすめていく。

【問題1.1】 $\int_1^a \frac{1}{x} dx$ の近似値を、区分求積法で求めてみよう。

【電卓計算1.1】 区間 $1 \leq x \leq 2$ を10等分し、小区間ごとに細長い台形であるとみなして、10個の台形の面積の総和を求める。

たとえば、小区間 $1.5 \leq x \leq 1.6$ 上の台形の面積は、つぎのようになる。

$$\left(\frac{1}{1.5} + \frac{1}{1.6} \right) \times 0.1 \times \frac{1}{2} \quad (\text{上底} + \text{下底}) \times \text{高さ} \times \frac{1}{2}$$



〔電卓計算 1. 2〕 区間 $1 \leq x \leq 3$ を 20 等分し，小区間ごとに細長い台形であるとみなして， $\int_1^3 \frac{1}{x} dx$ の近似値を求めてみる。

中学生・高校生に教えることを想定させても，大学生は，自分が知っている知識を総動員して教えようとしがちである。あらかじめ，「基礎解析」までの知識しかないものと仮定しておく。

さっそく【問題 1. 1】に取り組む。授業書には $f(x) = x^{-1}$ としてあったが，説明の際には $f(x) = \frac{1}{x}$ ということが多かったので，授業後に書き改めた。

区分求積法はふつう，長方形で近似するのであるが， $f(x) = \frac{1}{x}$ は単調減少であるから，台形近似の方がよい。〔電卓計算 1. 1〕から，関数電卓の出番である。1/x キーを用いる。

$$\left(\frac{1}{1.0} + \frac{1}{1.1}\right) \times 0.1 \times \frac{1}{2} + \cdots + \left(\frac{1}{1.9} + \frac{1}{2.0}\right) \times 0.1 \times \frac{1}{2}$$

$$= \left(\frac{1}{1.0} + \frac{2}{1.1} + \frac{2}{1.2} + \cdots + \frac{2}{1.8} + \frac{2}{1.9} + \frac{1}{2.0}\right) \times 0.1 \times \frac{1}{2}$$

ここで，電卓ではまず，かつこの中を

$$[1.0][2ndF][1/x][+][1.1][2ndF][1/x][\times][2][+]\cdots[+][2.0][2ndF][1/x][=]$$

と求める。さらに， $\times 0.1 \times 0.5 =$ と押していく。この値は電卓にもよるが，シャープの 10 桁表示のものでは，0.693771403 と出る。

〔電卓計算 1. 2〕は，この計算を 3.0 まで続ける。1.09935221 と出る。電卓を使っても，計算する速さは学生によって異なる。なかには，ポケットコンピュータでさっとプログラミングして，数値だけ入れていくものもある。

この電卓計算は，〔1. 1〕が全員できればよい。手順が増えるだけの〔1. 2〕は，何人かが同じ値を出したらあとは各自で確認してもらうことにして，次に進むことにする。

なお，〔電卓計算 1. 1〕は試験問題にも出した。全員，式はできていた。しかし有効数字を指定しなかったので，学生により数値はまちまちであった。

$$\int_1^x \frac{1}{x} dx = \ln x \quad (x > 0) \text{ とおく。}$$

〈2 ページ〉

$\ln x$ の値は関数電卓でも求められる。たとえば $\ln 2$ の値は，電卓のキーを，〔2〕〔ln〕とい

う順に押すと得られる。

【電卓計算 1.3】 $\ln 2 =$ _____ $\ln 3 =$ _____

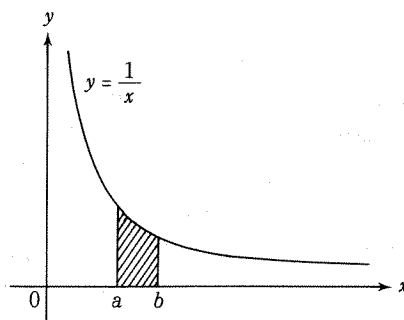
※前ページでの近似計算の精度は{よかった こんなもの よくない}

〈2 自然対数の定義と性質〉

【問題 2.1】 【定理 1】を、面積図を利用して証明しなさい。

$$\text{【定理 1】} \quad \int_a^b \frac{1}{x} dx = \int_a^c \frac{1}{x} dx \quad (a, b, c > 0)$$

【証明】



【問題 1.1】の近似計算の精度を知るために、関数電卓で正確な値の10桁分の表示をしてみる。

そのために、ここでは $\int_1^x \frac{1}{x} dx = \ln x$ と表わされるということだけ示しておく。

【問題 1.1】において、 $\ln 2 \doteq 0.693771403$ 、 $\ln 3 \doteq 1.09935221$ と求められたのであるが、この【電卓計算 1.3】では、 $\ln 2 = 0.693147181$ 、 $\ln 3 = 1.098612289$ と求められる。

前ページでの近似計算の精度は、私はほとんどの学生が{よかった}とするだろうと期待していたが、全員が{こんなもの}であった。さすがに数値計算に慣れた工学系の学生である。

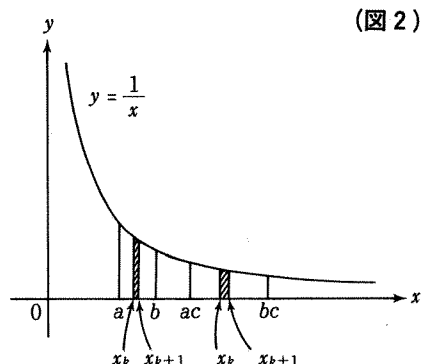
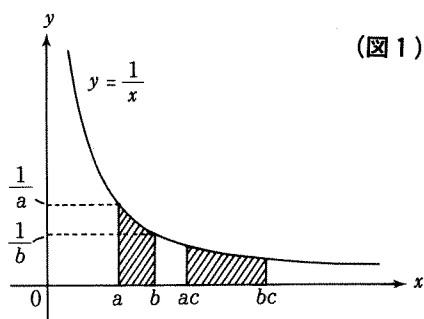
(2) 自然対数の定義と性質

マルクシェヴィチの『面積と対数』は、 $\int_1^x \frac{1}{x} dx$ の数値計算の前に、以下の定理や系を扱っている。この授業書も、1991年度版ではこれらの定理や系を先にしていた。

しかし、 $\int_1^x \frac{1}{x} dx$ が実際にどのような値をとるか、自分の手で計算してみたうえでその性質を考察するほうがよいと考えて、順序を変更した。実際、【定理 1】の証明を考えるためにも、区分求積法による数値計算を先にしておいたほうがよい。

【定理 1】は、面積図を(図1)のように書いたうえで、証明を考えさせる。2つの曲線図形をそれぞれ台形とみなすと、面積が等しいということに気づく学生が、数名いた。たしかに、台形の幅はc倍になるが高さはc分の1になるので、台形の面積は等しい。

しかし、〈台形の面積が等しいから曲線図形の面積も等しい〉といえるのか。これには、区分



求積の考え方が必要である。

区間 $[a, b]$ および $[ac, bc]$ を n 等分し、それぞれの区間で台形の面積を求めて総和をとる。 k 番目の台形 (図 2) の面積はそれぞれ、

$$\left(\frac{1}{x_k} + \frac{1}{x_{k+1}}\right) \frac{b-a}{n} \frac{1}{2}, \left(\frac{1}{cx_k} + \frac{1}{cx_{k+1}}\right) \frac{bc-ac}{n} \frac{1}{2}$$

で、やはり幅は c 倍になるが、高さは c 分の 1 で等しい。したがってそれらの和も等しく、 $n \rightarrow \infty$ としたときの極限である曲線図形の面積も等しい。以上が証明の概略である。

この証明を試験問題にしたのであるが、(図 1) の台形の面積が等しいことを示しただけのものが 4 名、小区間どうしても等しいことを文章で述べたものが 8 名、小区間の面積を式で表わして説明したものが 5 名であった。

<3 ページ>

ここで、あらためて定義しよう。

【定義】 自然対数 $\ln x = \int_1^x \frac{1}{x} dx$ ($x > 0$)

定義より明らかに、(1) $a > 1$ のとき、 $\ln a > 0$ 。

(2) $\ln 1 = 0$ 。

(3) $0 < a < 1$ のとき、 $\ln a < 0$ 。

【問題 2.2】 定理 2 を証明しなさい。なお、ここでは積分の性質について、高等学校の基礎解析までの知識を前提としている。

【定理 2】 $\ln(ab) = \ln a + \ln b$

【証明】

対数の〈積を和に〉の法則が【定理2】であるが、やはり対数記号を用いて表わしたほうがよいから、ここで自然対数を定義しておく。【定理2】の証明は、定義より積分形式にもどったうえで、【定理1】を用いる。

$$\text{すなわち、定義より、右辺} = \ln a + \ln b = \int_1^a \frac{1}{x} dx + \int_1^b \frac{1}{x} dx。$$

$$\text{ここで【定理1】より} = \int_1^a \frac{1}{x} dx + \int_a^{ab} \frac{1}{x} dx = \int_1^{ab} \frac{1}{x} dx = \ln ab = \text{左辺。}$$

これも、試験に出したが、全員できていた。ただし、〈定理1を用いた〉ということを、きちんと書いていないものが9名で、減点した。なお、左辺から上記の逆の式変形をしていったものが2名いた。

〈4, 5 ページ〉

【問題2.3】 つぎの系を証明しなさい。

① $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

② $\ln \frac{b}{a} = \ln b - \ln a$

③ $\ln a^k = k \ln a$ (k は正の整数)

④ $\ln \sqrt[k]{a} = \frac{1}{k} \ln a$ (k は正の整数)

⑤ $\ln a^{\frac{q}{p}} = \frac{q}{p} \ln a$ (p, q は正の整数)

⑥ $\ln a^k = k \ln a$ (k は負の整数または負の分数)

⑦ $\ln a^0 = 0$

※ k が正または負の実数のときにも $\ln a^k = k \ln a$ が成り立つことは、証明なしに認めることにしよう。

対数法則が証明されたところで、これを用いていくつかの公式を証明しておく。これらは、以降の対数計算で必要になる。【問題2.3】では、キーとなる①と④の証明を示し、あとは学生に黒板に書かせて添削した。残りの証明は、マルクシェヴィチ『面積と対数』を参照されたい。

①の証明： $\ln 1 = 0$ より、 $\ln \left(a \times \frac{1}{a} \right) = \ln a + \ln \frac{1}{a} = 0$ 。ゆえに、 $\ln \frac{1}{a} = -\ln a$

④の証明： $b^k = a$ とおくと、 $\ln b^k = k \ln b = \ln a$ 。よって、 $\ln b = \frac{1}{k} \ln a$ 。 $b = \sqrt[k]{a}$ だから、 $\sqrt[k]{a} = \frac{1}{k} \ln a$ 。

(3) 自然対数の近似値

< 6 ページ >

< 3 自然対数の近似値 >

自然対数の値は、関数電卓で簡単に求められるが、電卓がなくてもおおざっぱな値は得られる。思い切って $\ln 2 = 0.6931471806 \cdots \doteq 0.7$ として、これを用いて $\ln 3$ の近似値を求める方法を考えてみよう。

そのために、 $2^m \doteq 3^n$ となるような m, n の値をさがしてみる。

m, n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10...
2^m	2	4	8	16	32	64	128	256	512	...
3^n	3	9	27	81	243	729...				

目をつぶって $3^2 \doteq 2^3$ とすると、 $\ln 3^2 \doteq \ln 2^3$ 。

系③ ($\ln a^k = k \ln a$, k は正の整数) より、 $2 \ln 3 \doteq 3 \ln 2$ 。

ゆえに、 $\ln 3 \doteq \frac{3}{2} \ln 2 \doteq \frac{0.7 \times 3}{2} = 1.05 \doteq 1.1$ 。

【問題 3.1】 $\ln 3 \sim \ln 10$ の近似値を、有効数字 2 桁で求めてみよう。

【鉛筆計算 3.1】 $3^5 \doteq 2^8$ として、 $\ln 3$ の近似値を求める。

【鉛筆計算 3.2】 $4 = 2^2$ から、 $\ln 4$ の近似値を求める。

【鉛筆計算 3.3】 計算 3.1 と同様の方法で、 $\ln 5$ の近似値を求める。

【鉛筆計算 3.4】 $6 = 2 \times 3$ から、 $\ln 6$ の近似値を求める。

【鉛筆計算 3.5】 工夫して $\ln 7$ から $\ln 10$ までの近似値を求める。

前節で得られた道具を使って、自然対数の値を計算する。マルクシェヴィチの『面積と対数』では、級数による計算方法が述べられているが、関数電卓を用いても計算がかなりめんどうである。ここでは、森毅氏の、常用対数の「手作り対数表」¹⁰を参考にして、おおざっぱな手計算を試してみる。

すでに【問題 1.1】で、 $\ln 2$ と $\ln 3$ の近似値を求め、関数電卓でも確認している。 $\ln 2 = 0.7$ として、これをもとにして、 $\ln 3$ 以降の近似値を手計算で求めていく。

【鉛筆計算 3.1】 $3^5 \doteq 2^8$ とすると、 $\ln 3^5 = \ln 2^8$, $5 \ln 3 = 8 \ln 2$ 。これに $\ln 2 = 0.7$ を代入すると、 $\ln 3 = 1.12 \doteq 1.1$ 。

【鉛筆計算 3.2】 $4 = 2^2$ より、 $\ln 4 = \ln 2^2 = 2 \ln 2 = 1.4$ 。

【鉛筆計算 3.3】 $5^3 \doteq 2^7$ を用いる。 $\ln 5^3 \doteq \ln 2^7$, $3 \ln 5 \doteq 7 \ln 2$ 。 $\ln 2 = 0.7$ を代入すると、 $\ln 5 \doteq 1.6$ 。

【鉛筆計算 3.4】 $6 = 2 \times 3$ より $\ln 6 = \ln (2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3 = 0.7 + 1.1 = 1.8$ 。

【鉛筆計算 3.5】 $7^2 \doteq 50 = 5^2 \times 2$ とすると、 $\ln 7^2 \doteq \ln (5^2 \times 2) = 2 \ln 5 + \ln 2$ 。

これより、 $\ln 7 \doteq 1.95$ 。また、 $7^2 \doteq 48 = 2^4 \times 3$ としても同様の値が得られる。

$8 = 2^3$ より、 $\ln 8 = \ln 2^3 = 3 \ln 2 = 2.1$ 。 $9 = 3^2$ より、 $\ln 9 = \ln 3^2 = 2 \ln 3 = 2.2$ 。

$10 = 2 \times 5$ より、 $\ln 10 = \ln (2 \times 5) = \ln 2 + \ln 5 = 0.7 + 1.6 = 2.3$ 。

試験には、これらを前提にして $\ln 17$ を求める問題を出した。学生がどう工夫するか楽しみにしていたのだが、17名中10名までが、 $17 \div 2^4$ すなわち $17 \div 16$ として計算していた。 $17^2 \div 2^8$ などとしたのが5名で、これも同じことである。また、無回答が1名。

それ以外には、 $17^2 = 289 \div 288 = 2^5 \times 3^2$ として計算したものが1名いただけであった。

〈7 ページ〉

$\ln 2 \div 0.7$ だけ覚えておけば、右の表くらいは鉛筆ですぐに計算できる。

一番めんどろな $\ln 7 \div 2$ も、自然対数は $(2, 7)$ と、あわせて覚えるとよい。 $(2, 7)$ は、もう一度出てくる。

$$\ln 1 = 0$$

$$\ln 2 \div 0.7$$

$$\ln 3 \div 1.1$$

$$\ln 4 \div 1.4$$

$$\ln 5 \div 1.6$$

$$\ln 6 \div 1.8$$

$$\ln 7 \div 2.0 \text{ (1.9)}$$

$$\ln 8 \div 2.1$$

$$\ln 9 \div 2.2$$

$$\ln 10 \div 2.3$$

〔電卓計算 3.1〕 検算がわりに、電卓で $\ln 1$ から $\ln 10$ までたたいて、上の値とくらべてみよう。

$$\ln 1 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\ln 2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\ln 3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\ln 4 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\ln 5 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\ln 6 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\ln 7 = \underline{\hspace{2cm}}$$

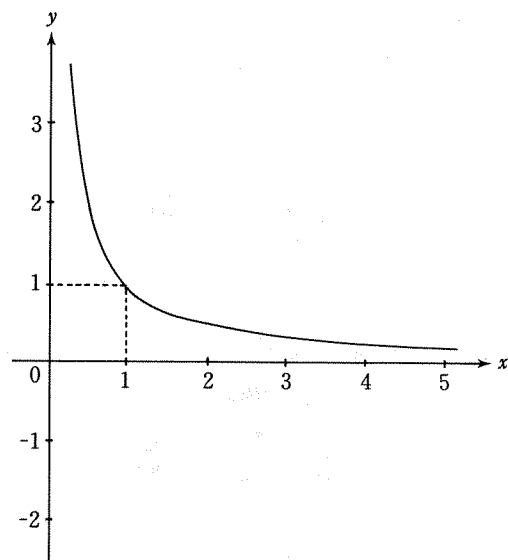
$$\ln 8 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\ln 9 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\ln 10 = \underline{\hspace{2cm}}$$

〔作図 3.1〕 $f(x) = \frac{1}{x}$ のグラフに、 $f(x) = \ln x$ のグラフを重ねて書いてみよう。

$x < 1$ の部分については、適当に関数電卓で求めてよい。

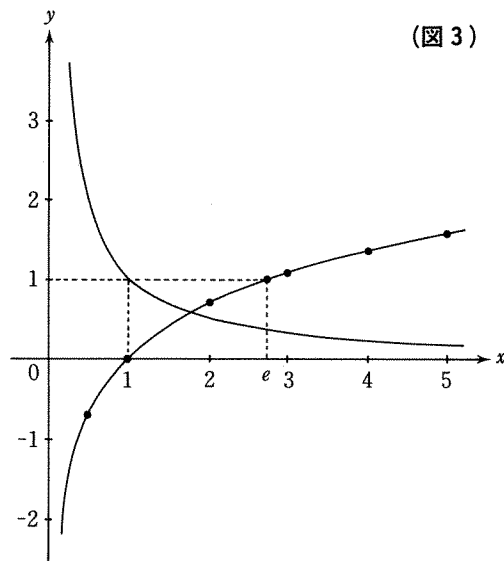


2 から 9 までの自然対数は、小数第 2 位の数字がちょうど、四捨五入をためらわずにできる数

字である。ただし、 $\ln 7$ だけは1.95となる。関数電卓では、1.9459...である。これだけは、1.9, 1.95, 2.0を臨機応変に使い分けることにする。なお、常用対数では、こううまくはいかない。

自然対数のグラフは、実際の授業では扱わなかった。しかし、 $f(x) = \frac{1}{x}$ のグラフと $f(x) = \ln x$ のグラフを比べてみることに意義があるので、[作図 3.1] を付け加えたい。(図 3) のようになる。

そうすると、【問題 3.1】の手計算にも、 $\ln \frac{1}{2}$ などを加えたほうがよいだろう。



(4) e とその値

〈8 ページ〉

〈4 e とその値〉

【問題 4.1】 問題 3.1 の計算方法や、その結果得られた数値などを利用して、 $\ln x = 1$ ，すなわち $\int_1^x \frac{1}{x} dx = 1$ となるような x の値の、近似値を求めてみよう。

【鉛筆計算 4.1】 $\ln 2 \approx 0.7$ ， $\ln 3 \approx 1.1$ より、 $2 < x < 3$ であるから、まず、2 と 3 の中間をとって、 $\ln 2.5$ の近似値を求めてみる。

【鉛筆計算 4.2】 $2.5 < x < 3$ ということがわかったから、この間でさがしてみる。

【作図 4.1】 前ページの [作図 3.1] で書いたグラフで、 $f(x) = 1$ となる x の値を、作図で x 軸上に示しなさい。

【問題 4.1】 では、 $\ln x = 1$ になるような x の値、すなわち e の値を手計算で求める。まず、 $2.5 = \frac{5}{2}$ より $\ln 2.5 = \ln \frac{5}{2} = \ln 5 - \ln 2 = 1.6 - 0.7 = 0.9$ 。2.5 よりは大いことがわかる。

つぎに、 $\ln 2.7 = \ln \frac{3^3}{10} = 1.0$ 。また、 $\ln 2.8$ は、 $\ln 7$ の値のとりかたによって、 $\ln 2.8 = \ln \frac{4 \times 7}{10} = 1.0 \sim 1.1$ 。どうやら2.7あたりらしい。

試験に、 $\ln 2.7$ を手計算で求める問題を出したが、全員ができていた。なお、[作図4.1] は、授業後に追加したものである。

〈9 ページ〉

〔電卓計算4.1〕 $\ln 2.7$ ， $\ln 2.8$ を，電卓でたたいてみよう。

$\ln 2.7 =$ _____ $\ln 2.8 =$ _____

どうやら、 $\ln 2.7 \approx 1$ とするのがよさそうだ。

$\ln x = 1$ となる x の値を e で表わす。

この値は、2.718281828459041... という無理数であることが知られている。

e を，自然対数の底という。

〔電卓計算4.2〕 2.718281828459041... をできるだけ電卓に入れて，[ln] キーを押す。

$\ln 2.718281828 =$ _____

〔電卓計算4.3〕 関数電卓で e の値を表示するには，どのキーを押すとよいか。また，その方法で e の値を表示して [ln] キーを押すと，1 になるだろうか。

自然対数と指数関数

自然対数 $\ln x$ は、 $f(x) = \frac{1}{x}$ の 1 から x までの積分であったが、これを、別の角度から見よう。

$y = \ln x$ とおくと $\ln e = 1$ より、 $y = y \ln e = \ln e^y$ 。したがって、 $\ln x = \ln e^y$ ，ゆえに $x = e^y$ 。

すなわち、 $\ln x$ とは、 x が e の何乗であるか（ e を何乗したら x になるか）を表わすものでもある。

$y = \ln x$ と $x = e^y$ ($y = e^x$) とは、互いに逆関数である。 $y = e^x$ を，指数関数という。

関数電卓で e の値を確認する。 $\ln 2.7 = 0.993251773$ ， $\ln 2.8 = 1.029619417$ 。

また、 $\ln 2.718281828$ は、10桁表示の電卓なら、 $= 0$ となるだろう。

関数電卓に e の値を表示するには、 e^x キーを用いる。このキーは [2ndF] [ln] で入力される。すなわち、 e^x は $\ln$ の逆関数扱いなのである。したがって $e = e^1$ は、[1] [2ndF] [ln] = 2.718281828 と出てくる。

関数電卓で、対数の方が指数関数よりも優位にあるのは、この授業書にとって心強い。ここで、自然対数から指数関数 $y = e^x$ を導く¹¹のは自然な流れであろう。

〈10ページ〉

関数電卓で、指数関数 $y = e^x$ の値を求めてみよう。

たとえば e^3 の値は、[3][2ndF][ln] で求められる。

[2ndF] は、逆関数キーである。

高等学校では、対数関数 y は、指数関数 $y = e^x$ の逆関数として定義される。しかし電卓では逆に、指数関数が対数関数の逆関数になっている。

これは、対数関数のほうが使用頻度が高いということを表わしている。

[電卓計算 4.4] 問題 3.1 の自然対数の値を、指数関数で検算してみよう。

① $e^0 =$	⑦ ₁ $e^{1.9} =$	$\ln 1 = 0$
		$\ln 2 \doteq 0.7$
② $e^{0.7} =$	⑦ ₂ $e^{1.95} =$	$\ln 3 \doteq 1.1$
		$\ln 4 \doteq 1.4$
③ $e^{1.1} =$	⑦ ₃ $e^{2.0} =$	$\ln 5 \doteq 1.6$
		$\ln 6 \doteq 1.8$
④ $e^{1.4} =$	⑧ $e^{2.15} =$	$\ln 7 \doteq 2.0$ (1.9)
		$\ln 8 \doteq 2.1$
⑤ $e^{1.6} =$	⑨ $e^{2.2} =$	$\ln 9 \doteq 2.2$
		$\ln 10 \doteq 2.3$
⑥ $e^{1.8} =$	⑩ $e^{2.3} =$	

〈5 対数計算〉

対数は、乗除算、とくに三角法の計算を簡単にするために考え出された。ただし、あらかじめ対数表をつくっておく必要がある。

有効数字 2 桁の計算なら、対数表は、0.1 きざみで 1.1 から 10.0 まであればよい。有効数字が 3 桁なら、0.01 きざみで 1.01 から 10.00 までの表がある。

10 以上、また 1 未満の数の対数は、 x が 10 倍 (10 分の 1) になるごとに、 $\ln x$ の値が 2.302585... ずつ増える (減る) という性質を利用して求められる。

電卓で、 e^x キーの使い方を練習する。ここで $y = e^x$ のグラフも扱えないわけではないが、主要な目的ではないので、あえて扱うことを避けた。

(5) 対数計算

対数の役割は乗除算の簡略化にあったとしても、この授業書は、複雑な計算ができるようになることを目指すものではない。それは計算機にまかせて、ここでは、対数計算の意味がわかればよいことにする。

1991 年度の授業では、対数表は既成のものを印刷して配付した。1992 年度には、ひとりひとりに電卓で簡単な対数表をつくってもらった。そして 1993 年度は、パソコンを持っている学生に打ち出してもらったものを使用した。

3通りの授業をしてみて、やはり、ひとりひとりにつくってもらったのがよかった。自分の手で扱える範囲での対数計算という趣旨にも合致する。

自然対数表なら、有効数字2桁の計算で1.0から10.0まで0.1きざみとすると、対数値は3桁あれば十分である。常用対数表だと、有効数字2桁の計算に、4桁の対数値が必要である。

いずれにせよ、100回電卓を打つのであるが、それほど時間はかからない。

〈11ページ〉

【問題 5.1】 有効数字3桁の自然対数表を用いて、乗除算の近似値を工夫して求めてみよう。

【表計算 5.1】

(例1) 2×3

(例2) 5×7

(1) 67×780

(2) $0.19 \div 83$

(3) 23^7

(4) $\sqrt[5]{100}$

【電卓計算 5.1】 以上の計算を、電卓で検算してみよう。

$67 \times 780 =$

$0.19 \div 83 =$

$23^7 =$

$\sqrt[5]{100} =$

自然対数表

1.0	0.00	4.0	1.39	7.0	1.95
1.1	0.10	4.1	1.41	7.1	1.96
1.2	0.18	4.2	1.44	7.2	1.97
1.3	0.26	4.3	1.46	7.3	1.99
1.4	0.34	4.4	1.48	7.4	2.00
1.5	0.41	4.5	1.50	7.5	2.01
1.6	0.47	4.6	1.53	7.6	2.03
1.7	0.53	4.7	1.55	7.7	2.04
1.8	0.59	4.8	1.57	7.8	2.05
1.9	0.64	4.9	1.59	7.9	2.07
2.0	0.69	5.0	1.61	8.0	2.08
2.1	0.74	5.1	1.63	8.1	2.09
2.2	0.79	5.2	1.65	8.2	2.10
2.3	0.83	5.3	1.67	8.3	2.12
2.4	0.88	5.4	1.69	8.4	2.13
2.5	0.92	5.5	1.70	8.5	2.14
2.6	0.96	5.6	1.72	8.6	2.15
2.7	1.00	5.7	1.74	8.7	2.16

2.8	1.03	5.8	1.76	8.8	2.17
2.9	1.06	5.9	1.78	8.9	2.19
3.0	1.10	6.0	1.79	9.0	2.20
3.1	1.13	6.1	1.81	9.1	2.21
3.2	1.16	6.2	1.82	9.2	2.22
3.3	1.19	6.3	1.84	9.3	2.23
3.4	1.22	6.4	1.86	9.4	2.24
3.5	1.25	6.5	1.87	9.5	2.25
3.6	1.28	6.6	1.89	9.6	2.26
3.7	1.31	6.7	1.90	9.7	2.27
3.8	1.34	6.8	1.92	9.8	2.28
3.9	1.36	6.9	1.93	9.9	2.29
				10.0	2.30

この授業は、大学生が、〈対数計算をはじめて教わる高校生に教えるにはどうしたらよいか〉を考えるための授業でもある。だから、問題のつくりかた、配列のしかたにも口頭で触れる。学生は「先生が勝手な数字を並べてつくったと思っていた」という。

(例1) 2×3 は、対数表だけで間に合う計算。対数をとると、 $\ln(2 \times 3) = \ln 2 + \ln 3 = 0.69 + 1.10 = 1.79$ 。ここで、対数が1.79になる数を、対数表で逆にさがすと、 $1.79 = \ln 6$ が見つかる。したがって、 $\ln(2 \times 3) = \ln 6$ 、ゆえに、 $2 \times 3 = 6$ 。

(例2) 5×7 は、対数値が対数表からはみだす計算。 $\ln(5 \times 7) = \ln 5 + \ln 7 = 1.61 + 1.95 = 3.56$ 。しかし、対数表にあるのは2.30まで。ここで、 $3.56 = 1.26 + 2.30$ 。対数が1.26になるのは約3.5 (3.5の対数が1.25, 3.6の対数が1.28), 2.30になるのはもちろん10。ゆえに、 $= \ln 3.5 + \ln 10 = \ln(3.5 \times 10)$ 。ここで、有効数字について説明し、 $a \times 10^n$ ($1 \leq a < 10$) という記法を教える。

- (1) $\ln(67 \times 780) = \ln 6.7 + \ln 7.8 + \ln 10^3 = 1.90 + 2.05 + 3 \times 2.30 = 10.85$ 。2.30が4回引けるから、 $10.85 = 1.65 + 2.30 \times 4 = \ln 5.2 + \ln 10^4 = \ln(5.2 \times 10^4)$ 。ゆえに $67 \times 780 \approx 5.2 \times 10^4$ 。
- (2) $\ln(0.19 \div 83) = \ln 1.9 - \ln 8.3 - \ln 10^2 = 0.64 - 2.11 - 2 \times 2.30 = -6.07 = 0.83 - 3 \times 2.30 = \ln 2.3 - \ln 10^3 = \ln(2.3 \times 10^{-3})$ 。ゆえに、 $0.19 \div 83 \approx 2.3 \times 10^{-3}$ 。
- (3) $\ln 23^7 = 7 \ln(2.3 \times 10) = 7(0.83 + 2.30) = 21.91 = 1.21 + 2.30 \times 9 = \ln(3.4 \times 10^9)$ 。ゆえに、 $23^7 \approx 3.4 \times 10^9$ 。
- (4) $\ln \sqrt[5]{100} = \frac{1}{5} \ln 10^2 = \frac{2}{5} \ln 10 = 0.4 \times 2.30 = 0.92 = \ln 2.5$ 。ゆえに、 $\sqrt[5]{100} \approx 2.5$ 。

試験には、自然対数表を用いて、 72^8 と、 $\sqrt[32]{10000}$ の近似値を求める問題を出した。17名中、14名がケアレミスを除けば両方ともできていた。1名は累乗根をわり算と勘違いしていた。あとの2名は、この部分の授業を欠席して対数表の利用法を理解していなかった。

(6) 常用対数

〈12ページ〉

〈6 常用対数〉

乗除算を簡単にするという目的のためには、自然対数には不便な点がある。10倍ごとに2.302585…ずつ増えるというのでは、たしたり、ひいたりの計算がわずらわしい。

そこで、10倍ごとに1ずつ増えるようにしたのが常用対数 $\log x$ である。これは、 $\log 10 = 1$ となるだけで、あとは自然対数と同じ数学的性質をもつものである。

$\log 10 = 1$ より、 $\log x = y$ とおくと、 $y = y \log 10 = \log 10^y$ であるから、 $\log x = \log 10^y$ 、ゆえに、 $x = 10^y$ 。

つまり、常用対数 $\log x$ とは、 x が10の何乗であるか（10を何乗したら x になるか）を表わすものである。

常用対数 $y = \log x$ の逆関数が、指数関数 $y = 10^x$ である。

自然対数を常用対数に変換するには、簡単な式がある。 $\ln 10 \doteq 2.302585$ で、 $\log 10 = 1$ だから、 $\ln a \doteq 2.302585 \log a$ と予想はつくが、一応、証明しておこう。

$\ln a = x$ 、 $\log a = y$ とすると、 $a = e^x$ 、 $a = 10^y$ だから、 $e^x = 10^y$ 。

ここで両辺の自然対数をとれば、 $\ln e^x = \ln 10^y$ 、 $x = y \ln 10$ 。

ゆえに、 $x \doteq 2.302585 y$ で、 $\ln a \doteq 2.302585 \log a$ 。

ちなみに、 $\log 2 \doteq \ln 2 \div 2.302585 \doteq 0.301030$

〔電卓計算 6.1〕 小数点以下第5位まで。

$\log 1 =$	$\log 6 =$
$\log 2 =$	$\log 7 =$
$\log 3 =$	$\log 8 =$
$\log 4 =$	$\log 9 =$
$\log 5 =$	$\log 10 =$

〈13ページ〉

【問題 6.1】 常用対数表を用いて、乗除算の近似値を求めてみよう。

〔表計算 6.1〕 常用対数表を用いて、乗除算の近似値を求める。

- | | |
|---------------------|---------------------|
| (1) 67×780 | (2) $0.19 \div 83$ |
| (3) 23^7 | (4) $\sqrt[5]{100}$ |

この授業プリントでは、つぎのような順序で進んできた。

自然対数 $y = \ln x$

↓

指数関数 $y = e^x$

↓

常用対数 $y = \log x$



指数関数 $y = 10^x$

これは、現在の高等学校での指導順序とまったく逆である。ものごとをさかさまに見ると、ふだん見えなかったことが見えてくることもある。君たちには何が見えただろうか。

常用対数表

1.0	0.000	4.0	0.602	7.0	0.845
1.1	0.041	4.1	0.613	7.1	0.851
1.2	0.079	4.2	0.623	7.2	0.857
1.3	0.114	4.3	0.634	7.3	0.863
1.4	0.146	4.4	0.644	7.4	0.869
1.5	0.176	4.5	0.653	7.5	0.875
1.6	0.204	4.6	0.663	7.6	0.881
1.7	0.230	4.7	0.672	7.7	0.887
1.8	0.255	4.8	0.681	7.8	0.892
1.9	0.279	4.9	0.690	7.9	0.898
2.0	0.301	5.0	0.699	8.0	0.903
2.1	0.322	5.1	0.708	8.1	0.909
2.2	0.342	5.2	0.716	8.2	0.914
2.3	0.362	5.3	0.724	8.3	0.919
2.4	0.380	5.4	0.732	8.4	0.924
2.5	0.398	5.5	0.740	8.5	0.929
2.6	0.415	5.6	0.748	8.6	0.935
2.7	0.431	5.7	0.756	8.7	0.940
2.8	0.447	5.8	0.763	8.8	0.945
2.9	0.462	5.9	0.771	8.9	0.949
3.0	0.477	6.0	0.778	9.0	0.954
3.1	0.491	6.1	0.785	9.1	0.959
3.2	0.505	6.2	0.792	9.2	0.964
3.3	0.519	6.3	0.799	9.3	0.969
3.4	0.532	6.4	0.806	9.4	0.973
3.5	0.544	6.5	0.813	9.5	0.978
3.6	0.556	6.6	0.820	9.6	0.982
3.7	0.568	6.7	0.826	9.7	0.987
3.8	0.580	6.8	0.833	9.8	0.991
3.9	0.591	6.9	0.839	9.9	0.996
				10.0	1.000

歴史的にもあとから出てきた常用対数であるが、 $\log 10 = 1$ となるようにしてあるため、計算が楽であることを実感させる。

一番最後の、指導順序について触れた部分は、授業後に付け加えた。1993年度の授業について、学生の書いた文章からヒントを得たものである。

3 授業書の評価について

3回の授業のあと、試験までのあいだに1回分の授業時間があった。その時間には、授業書の修正版（自然対数のグラフ等は未収）を新たに配って、復習してもらった。試験問題とそのできぐあいについては、前章で適宜紹介した。平均点はちょうど80点であった。

この授業書は、概念形成が主たる目的であるから、証明や計算を主とする筆記試験では評価が困難である。そこで、授業書に対する意見を直接的に聞いて評価する方法¹²が考えられる。いずれは、質問紙を作成して詳しく問う方法へ展開していく予定である。

今回は、答案用紙の最後に「この授業で扱った対数と、君たちが高校時代に学んだ対数との違いについて」という題で小文を書いてもらった。以下、学生の記述をいくつかのカテゴリに分け、代表的なものを紹介して考察するという方法をとることにする。

(1) 公式暗記主義批判

高校での対数指導については、ほとんどの学生が批判的であった。そのなかでも、公式の暗記が中心で、意味をあまり考えなかったという批判が大半である。

(長倉) 高校時代では、確かに $(\ln x)' = \frac{1}{x}$ と覚えた記憶はあるが、その時は、どうしてそうなるのかを何も考えずに、微分・積分の問題で出てきたらこのように答えればよいと丸暗記していたので、対数とはどんなものであるかがわからなかった。

(荒堀) 対数の意味、使い道が当時よくわからなかった。よく、 $a * b = (a + b) \times 2$ ということとすると、 $3 * 5$ を求めよといった問題を中学の時に見かけたが、 $\log$ もそれと同じような感じで受けとめていた。 $a^b = c$ とするとき、 $\log_a c = b$ とするのだと、ただそれだけを理解していた。 $\ln(a \times b) = \ln a + \ln b$ も、覚えてだけでなぜわからなかった。

長倉は、意味を理解せずに丸暗記だったというのであるが、これにたいして荒堀は、約束ごととしての暗記だったという違いがある。

つぎの安藤の文は、高校では答えが $\ln 2$ と求められればそれで終わり、 ≈ 0.7 とすることが少ないという批判である。

(安藤) 高校で学んだ対数は、常用対数、自然対数を問わず、対数表示のままで答えとすることが多く、対数を数値に変換することはまれであった。大学に入ってから、そういった対数の形で結果を出すときもあるが、今回やった授業のように、 $\ln 1 = 0$ はもとより、 $\ln 2 \approx 0.7$ と近似したものをもとに、そこから $\ln 3$ 以降をつくっていくことはなかったため、対数というものの感じが少しは身近になった気がする。

(2) 授業書内容の理解

つぎに、直接この授業書の内容に関する部分を取りあげる。まず、積分による自然対数の定義について。

(最上) 面積計算で $\int_1^2 x^{-1} dx = \ln 2 = 0.7$ と求めるにしても、面積を1個1個の台形的面積をたしあわせた結果の0.7の近似値である。ただ、公式と対数表だけで求めてきたことが、意味深いものとなりました。

(中野) また、[問題3] ($\ln 2$ の近似値を区分求積法で求める問題—大田) のような計算をすることで、対数と積分の関係もわかる。このような作業を通じて、体系的な知識を身につけなければいけないと思う。

中野は、対数と積分の関係がわかることが体系的な知識を身につけることであるという認識に至っている。

授業書の内容に関するものでとくに多かったのは、自然対数値の手計算について触れたものである。

(岸本) この授業では、たとえば $\ln 2$ を与えられたとしたら、それをもとに、他のどんな数も自分の手計算で求められるようにしたり、図をもとに証明したりと、かなり対数の本質にせまれたと思う。

(中本) この授業では、初めて対数の値を求めて、次にその値を用いてある数の近似値を求めることをやったが、こんな方法で近似値が求めることができるとは知らなかったのも、とてもおもしろかった。

(藤田) この授業でしていることは、実際に役に立つようなことを対数を用いてしている。 $\ln a = 1$ である a の値が、 $2.7\cdots = e$ であることの求め方を高校のときはしていなかった。ただ、 $e = 2.7\cdots$ であると教えられただけのような記憶がある。

さらに、累乗や累乗根の計算を、自然対数や常用対数を用いて求めたことについての記述も見られる。

(風間) 72^8 などでも対数表があればすぐに計算でき、大きい数の計算に対数は有効に活用できることがわかりました。

(石橋) 常用対数は自然対数より大きい数を計算するときに便利であることも知った。

以上、授業書の意図するところは、ほぼ伝わっているものと思われる。

(3) 数学観・数学教育観

授業書内容の理解にとどまらず、数学観、数学教育観にかかわる記述も見られた。必ずしも、この授業に肯定的なものばかりではないが。

つぎの黒田の文は、授業書の最後の部分に付け加えた文章のヒントになったものである。

(黒田) この授業では、自然対数を $\ln x = \int_1^x x^{-1} dx (x > 0)$ と定義した。

高校時代は、対数関数が指数関数の逆関数であると定義した。すなわち、 $y = a^x$ の逆関数を $y = \log_a x$ とした。そして、底が e の対数 $y = \log x$ を自然対数とした。

この授業では、自然対数→常用対数の順で扱ったが、高校時代では、一般の、底が a の対数→常用対数→自然対数の順に学んだ。逆の順番になった。

(中野) 高校の授業では、対数を計算するときの定義ばかりでなく、対数が必要になった背景や、その利用方法などにも触れるべきだと思う。

授業中、口頭では数学史の話もしたのであるが、授業書の中にも書いておいたほうがよかった。数学史の上では、三角比の計算を簡単にする必要から対数が出てきたこと、自然対数→常用対数の順であることなどである。また、実際に三角比の計算を、対数を使う場合と使わない場合とでやってみるのもよいだろう。

越田は、この授業を受けたことによる自分自身の数学観の変化について述べている。積分による自然対数の定義が、印象的だったようである。

(越田) 前期に行った微分・積分でもそうだったが、公式というものは、ほんのうわべだけの数式にしかすぎない。定義があつての定理であり、定義がないものには何の諸定理も生まれてこない。だがその定理は薄い皮のようなものだ。

対数においてもそうであつて、対数の本来の持つ意味を学ぶと、定理がはかないものに思えてくる。高校の頃はあれほど公式に精通し、定理が大事だと理解し、計算を速くこなしていたものの、今、数学の本質を学ぶと定義の大きさがうかがえる。

やはり数学はおもしろい。数の魔力ともいうべき力が数学にはある。定理を使わずとも、定義を理解しておけば、定理はおのずと出てくるものだ。

学生の中には、とまどいを見せるものもある。太田の文章は、高校数学教育への批判のようにも見えるが、実は、〈こんなに時間をかけて教えてよいのか〉という、授業書方式への批判なのである。

(太田) 数学科教育法で扱った対数は、初めに $\ln x = \int_1^x x^{-1} dx (x > 0)$ とおき、その値の近似値を求め、最後に電卓などを用いて検算を行なってきた。また近似値で作成した対数表を用いて計算をしてきた。

高校で学ぶ対数は、教科書にある公式を理解させ、実際の値を式の中に入れて計算を行なうだけであった。

実際のところ、数学科教育法みたいな授業をおこなうことで、理解度は増えるけれど、高校では対数だけを取り扱うわけではないので、軽くさらりと学習するのである。

このような批判は、日大の学生には少ないが、私の勤務する教員養成学部の学生には多い。教科書をまんべんなく消化しなければならないという固定観念を打ち破るのは、教育学教育の大きな課題である。

先に、対数の近似値計算に賛成する安藤の文を紹介したが、荒堀は近似値にたいしてとまどいを見せている。工学系の学生にも、近似値が苦手なものがあるようだ。

(荒堀) ここで学んだことは、数値が等しくなることを用いているので、わかりやすかったことは確かだが、どうしても近似計算になってしまうので、高校で教わっていたとしても、はたして理解できたかどうか。

おそらく、近似値のように大体等しいという考えではハッキリしないので、自分ならば不満で文句を言うであろう。しかし、ハッキリした数値を用いても、例えば $\log_2(4 \times 8) = \log_2 4 + \log_2 8$ でやったとしても、他はどうだという話になるので、近似値でやるしかないだろう。

近似値は、中学校で扱われなくなって久しい。きっちり答えが出なければ気が済まないという数学観が形成されるのは、高校以下の教育にも問題がある。しかし、大学入試もそのような歪んだ数学観の形成に、一役買っていないだろうか。

付 記

本研究は、教授学研究グループの、数学サブグループにおける1980年前後の研究の成果を土台としている。当時、指数関数・対数関数にかかわったメンバーといえば、西谷、服部、国安、広田らの学生諸君の顔がランダムに浮かんでくる。

この分野の研究は、当時助手の須田勝彦さんがまとめて指導していた。当時院生の私は「二次関数と微積分」に取り組んでいたこともあって、ゼミには出ていたものの指数関数・対数関数は十分に理解しきれていなかった。本研究は、その復習でもある。

結果として、国安さんの対数直線による授業書とは異なる展開となったが、私の依拠したマルクシェヴィチの『面積と対数』は、国安さんがゼミで紹介したものである。

高村泰雄さんは、全盛期の数学グループをニコリとして見守ってくださった。鈴木秀一さんはコックリとして……。

須田さんのスマートな数学にたいして、私はタダモノ論的な数学が好みで、「二次関数と微積分」の際は高村さんにもいろいろ教えていただいた。この「面積と自然対数」についても、高村さんは例の調子で「ぼくはずっと前からこうやればいいと思ってたんですけどね」と言われるだろうか。

1 千葉大学教育学部

2 カジョリ、小倉金之助補訳『初等数学史(下)』小山書店、1956年、39ページ。

3 ネイピアの対数を $\log x$ すると、 $\log x = 10^7 \cdot \log_e \frac{10^7}{x}$ となる。注2の43ページ。

4 クライン、遠山啓監訳『高い立場からみた初等数学2』1960年、商工出版、212ページ。なお、訳はより原文に忠実になるように改めた。F. Klein “Elementarmathematik von höheren Standpunkte aus I” Verlag von Julius Springer, Berlin, 1968 による。

5 注4の213ページ。改訳。

- 6 田村二郎「微積分学の基本定理」『数学セミナー』1980年4月号，日本評論社，参照。
- 7 宮本敏雄・北原泰彦訳『マルクシェヴィチ面積と対数・シェルヴァトフ双曲線関数』1961年，東京図書。
- 8 森毅『指数・対数のはなし』1989年，東京図書，参照。
- 9 大田邦郎「高等学校における微積分の初歩としての二次関数の指導」『北海道大学教育学部紀要』第40巻，1982年，参照。
- 10 注8の35ページ以降。なお，この授業書で採用した計算方法は千葉県立生浜高校の佐瀬光広先生による。
- 11 $y = e^x$ の x が実数値をとることについては，5ページの問題2.3の付け足しで，つぎのように触れている。〈 k が正または負の実数のときにも $\ln a^k = k \ln a$ が成り立つことは，証明なしに認めることにしよう〉
- 12 注9でも試みている。