



Title	確率の基礎としての同様な確からしさの原理の指導について
Author(s)	高橋, 哲男
Citation	北海道大學教育學部紀要, 72, 73-87
Issue Date	1996-12
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/29520
Type	departmental bulletin paper
File Information	72_P73-87.pdf



確率の基礎としての 同様な確からしさの原理の指導について

高 橋 哲 男

The Teaching of the Principle of Equal Probability as the Foundation of Probability Theory

Tetsuo TAKAHASHI

目 次

第1章 はじめに	73
第2章 確率指導の既存プランの検討	74
第1節 古典的確率論と教科書	74
第2節 主観的確率論と東京地区数学教育協議会プラン	75
第3節 頻度的確率論と矢島昭予の授業プラン『確率入門』	77
第3章 同様な確からしさの原理の指導	80
第1節 確率の基礎としての同様な確からしさの原理	80
第2節 量と幾何学的直観に基づく数学教育	81
第3節 幾何学的確率論とベルトランの逆説の積極的意義	83
第4章 おわりに	86

第1章 は じ め に

本稿の課題は、確率の指導においてどのような確率概念モデルが用いられるべきかについて考察することである。これは、確率さらには統計に関する教育内容を構成するというより大きな課題のなかの、最も基礎的かつ重要な課題である。

現代では、確率論といえば、コルモゴロフが1933年の論文「確率論の基礎概念」によって体系化した、測度論的公理的確率論を指すのが一般的である。しかし、確率論はその誕生当初からこのように公理化されたわけではない。人類が素朴な確率概念を獲得したのがいつ頃であるのかはわからないが、確率が学問として研究され始めたのは、17世紀のパスカルとフェルマーの往復書簡からであるとされる¹⁾。このときからコルモゴロフに至るまで、多くの哲学者や確率論者が、確率論の体系化に向けて様々な確率論(確率観)を展開した。すべての確率論を検討することはできないが、これらはおおよそ、古典的確率論、主観的確率論、頻度的確率論の3種類に分類されると考える。むろん、このような分類がかなり雑なものであることは認めざるを得ない。しかも、これら3種類もそれぞれが強固な一枚岩であるわけでもない。しかし、確率の教育内容・教材構成について考察する上では、これで十分である。確率の授業プランは、古典的確率論、主観的確率論、頻度的確率論のいずれかを教育内容とし、また、それに立脚して構成されていると考

えるからである²⁾。

そこで、第2章では、確率指導の既存の授業プランのなかから、(1)古典的確率論に基づいた教科書、(2)主観的確率論に基づいた東京地区数学教育協議会プラン、(3)頻度的確率論に基づいた矢島昭予の授業プラン『確率入門』を検討する。

第3章では、まず、第2章での検討を受けて、確率指導の際には同様な確からしみの原理を教えることが不可欠であることを主張する。その上で、量と幾何学的直観に基づく数学教育の立場から、面積と確率の類似性に着目し、幾何学的確率論について検討する。これまで、幾何学的確率論は、ベルトランの逆説とよばれる問題を例にあげて、確率の概念モデルとしては不適切であると評価されてきた。しかし、本稿ではそのような見解をとらず、確率の基礎としての同様な確からしみの原理を教える際に、ベルトランの逆説がいかなる役割を果たし得るか、その可能性を示す。

註

- 1) アイザック・トドハンター『確率論史—パスカルからラプラスの時代までの数学史の一断面—』現代数学社、1975年、9頁を参照。
- 2) およそどのような算数・数学の授業プランであっても、対応する分野の数学的理論を教育内容として含んでいる。数学的なものの見方や数学のありがたみを教えようとしても、数学的理論を教えることなしにそれが可能というわけではない。

第2章 確率指導の既存プランの検討

第1節 古典的確率論と教科書

古典的確率は、ラプラス流の確率ともいわれる。P. ラプラスによれば、確率とは、「分子が好都合な場合の数で、分母が可能な場合の総数である一つの分数にほかならない」¹⁾。確率をこのように定義する背景には、「三つまたはそれ以上の事象があるとき、その一つだけが起こるはずだと知ってはいるものの、それがほかのものではなくて、ある特定のものと信ずべき何らの理由もない」²⁾という認識がある。そして、「このように決定できぬ状態では、われわれはそれらの生起について確定的に述べることはできない」³⁾。したがって、われわれは、「同一のジャンルのすべての事象を、同じ程度に可能ないくつかの場合、すなわち、その存在についてわれわれが決定を下しかねる度合いが同じ程度であるいくつかの場合にまとめなおし、確率を求めている事象に好都合な場合の数を決定する」⁴⁾。そして、その数をすべての場合の数で割った値が確率であると、ラプラスはいうのである。

次に、教科書を検討する。高等学校において確率の基本的な性質が教えられる科目は、1994年度から施行された高等学校学習指導要領によって必修となった「数学Ⅰ」であり、多くの教科書が確率をラプラス流に定義している。

数研出版の「数学Ⅰ」の教科書⁵⁾の確率を扱った章の第2節「確率の意味」では、30個の白玉と20個の黒玉の入った袋から1個の玉を取り出す試行を例として、確率の意味を多角的に理解させようとしている。ここで早くも確率の「意味」を越えて、定義らしきものが登場している。「ある1つの試行において特定の事象に着目し、その事象の起こることが期待される割合を数値で表したとき、この数値をその事象の起こる確率という」。すなわち、「この試行では、玉の取り出し方は50通りの場合があり、その各場合がこの試行の根元事象である。その中で白玉が取り出され

る場合は30通りある。よくかき混ぜて取り出すので、50個の玉のうちどの玉が取り出されるかは、同じ程度に期待される。したがって、白玉を取り出すという事象は、白玉を取り出す場合の数30を、起こりうるすべての場合の数50で割った値 $\frac{30}{50}$ 、すなわち、0.6の割合で起こることが期待される」。また、古典的確率を語るときに欠かせない「同様に確からしい」という概念については、次のように述べられている。「確率の値を定めるには、上のように、ある試行によって起こる根元事象がいずれも同じ程度に期待されることに基づいて行うことが多い。これを同様な確からしさの原理という」。

続く第3節「確率の定義」では、確率が次のように定義されている。

一般に、試行の根元事象のうち、どれが起こることも同様に確からしいとき、その試行における任意の事象 A について、 A の起こる確率 $P(A)$ を次の式で定める。

$$P(A) = \frac{\text{事象}A\text{の根元事象の個数}}{\text{全事象}U\text{の根元事象の個数}} = \frac{n(A)}{n(U)}$$

以上に、教科書における確率の意味と定義について見てきた。教科書の問題点は、古典的確率論の問題点と同一視できる。それは、いい古されたことであるが、古典的確率の定義のなかに含まれる同様な確からしさの原理の不透明さである。一般的には、同様な確からしさの原理は、経験的直観やさいころの対称性などから裏づけられていると考えられる。しかし、同様な確からしさの原理をもちだす根拠は、「一つだけが起こるはずだと知ってはいるものの、それがほかのものではなくて、ある特定のものと信すべき何らの理由もない」という、主観的な判断なのである。これは、「同様に確からしくない」と判断するべき十分な理由がないということであって、理由不十分の原理といわれる。しかし、これでは、同様な確からしさの原理が成り立つための客観的条件にはならない。この原理を用いて確率論の理論的構築を試みたラプラス自身も、出生数の性別比が1:1ではないことを発見したこともあり、その点に関しては微妙な問題であると考えていたといわれる⁶⁾。「確率についての哲学的試論」においても、「等しいと考えられている機会の間に存在するかもしれない不均等について」という章を設け、できる限りこの問題を解決しようと考察を加えている。しかし、まったく解決されていない⁷⁾。そのため、同様な確からしさの原理の不合理な適用により、『火星に人がいる確率』も『明日死ぬ確率』も、それぞれ、『いるかないか』、『死ぬか死なないか』の2通りのいずれかが起こるのであるから、 $\frac{1}{2}$ である」とする、直観に反する解答がしばしばなされるのである。

第2節 主観的確率論と東京地区数学教育協議会プラン

主観的確率論は、古典的確率論の同様な確からしさの原理に含まれる問題点を克服しようとして生まれたものである。主観的確率論は、同様な確からしさの原理を使えるか否かを個人の判断にまかせ、ある個人の、その人のもつ「情報」のもとでの、その事象が起きると信じている「信頼度」を実数区間 $[0, 1]$ に対応させようとする理論である。主観的確率論には、確率と賭との関係によって説明される実践的側面、すなわち、確率を、不確かな状況下における「行為決定のためのひとつの指針（みちびき）」⁸⁾として利用しようという意図が含まれている。

主観的確率論を最初に提唱したのは F. ラムゼーであり、この後、de フィネッティーを経て L. J. サヴェジが大成したとされる⁹⁾。サヴェジは、「確率は、特定の個人が、例えば、明日雨が降るというような特定の命題の真実性に対してもつ信頼度を測定するものである。この見解は、当の個人が何らかの形で『合理的』であることを要求するが、同じ情報に直面している2人の合

理的な個人が同じ命題の真実性に対して異なった信頼度をもち得ることを、否定しない」¹⁰⁾と述べている。ここでいう「合理的」ということを賭に関連させて、確率の定め方をわかりやすい例で述べているのが D. V. リンドレーである。それによると、確率は、以下の手続きによって定められる。

まず、壺のなかに100個のボールが入っており、ボールは必ず黒または白に塗られており、しかも、同時に両方の色が塗られていることはないとする。ここで、この壺から1個のボールを取り出す試行を考え、「取り出したボールが黒である」という事象を B とする。このとき、どのボールも等質であり、平等に取り出されるチャンスをもつと考えられる。一方、われわれが確率を知りたいと関心をもつ事象として、例えば、「明日ロンドンに雨が降る」を考え、これを E とする。このとき、事象 B が起こればある一定の賞金を受け取り、起これなければ何ももらえないという賭と、事象 E が起こればそれと同額の賞金を受け取り、起これなければ同じく何ももらえないという賭を考える。どちらの賭についても参加料が不要である場合、「あなたがどちらか一方の賭に参加するとすれば、あなたはどちらを選ぶだろうか。[この選択は] 黒いボールの数 b にかかっているだろう。もし黒いボールがまったくなければ、雨[事象 E] に関する賭を選ぶのがよいであろうし、すべてが黒いボールであるというもう一方の極端な例の場合は、壺[に関する賭] を選ぶ方がよいであろう。一般に、黒いボールが多ければ多いほど、壺に関する賭を選ぶ方が有利である。次のことが容易にしたがう。『2つの賭のどちらを選んでもよいような、黒いボールの数が一意に存在する』。この数を b とおこう。もし、 $(b+1)$ 個の[黒い] ボールが壺のなかにあるならば、壺に関する賭は有利になり雨に関する賭[を選ぶ] より優るであろう。また、[壺に入っている黒いボールが] $(b-1)$ 個ならば、壺に関する賭は不利になる。事象 B の確率は、 $\frac{b}{100}$ 、または、 $b\%$ である。いま、2つの賭は、すべての点に関して無差別であるから、事象 E の確率、すなわち、明日ロンドンに雨が降る確率もまた、 $b\%$ である」¹¹⁾。

さて、リンドレーが主観的確率を賭との関係で述べたのと同様に、賭の要素を取り入れて確率の指導を行う授業プランがある。「数学教育の現代化」のスローガンのもとに学習指導要領が改訂され、「集合」、「論理」とともに「確率」が新教材として小学校に登場することになった1970年頃、数学教育協議会では、確率の指導目標・内容・方法が、小学校、中学校、高等学校のそれぞれの段階について盛んに議論された。その様子は、数学教育協議会が編集する雑誌『数学教室』から知ることができる。そこからわかる、当時の、特に東京地区数学教育協議会における確率指導の考え方は、クジこそが確率概念理解のシェーマであり、確率とは、クジの1本あたりの「あたりやすさ」を表現した内包量であるというものであった。そして、この考え方に基づいた確率指導の実践とその報告が行われている。

確率を内包量として導入する実践はいくつか行われているが、ここでは、理論的な枠組みと実践の概要の両方が述べられている、松井幹夫の「確率の導入について」¹²⁾を検討する。それによれば、クジを引いてあたる確率とは「あたりやすさ」という予測の量である。そして、「予測の量としての“あたりやすさ”を量として(数値化され得るものとして)確立するためには、クジ A なら A の中では、どのクジもクジ1本について、あたりやすさが均等分布していることを確認しなければならない」¹³⁾。この確認を行うことによって、例えば10本中あたりが6本あるクジ A において、6本分のあたりを10本のクジに均等に分配する割り算として、 $6 \div 10 = \frac{6}{10}$ の計算ができるのである。以上が、確率を内包量としてとらえ、その数値化を行う筋道である。

しかし、内包量としての確率の指導には、“あたり”の均等分布ということをいかに理解させ

るかという問題がある。内包量が考えられるためには、その性質から考えて均等分布という大前提は必要不可欠である¹⁴⁾。“あたり”が均等分布していることを教えることなくして、確率を「クジ1本あたりの“あたりやすさ”を表す内包量」としてとらえさせることはできない。したがって、“あたり”が均等分布をしていることを教える部分が授業のヤマ場であって、様々な実践のなかから、苦心の跡をうかがい知ることができる。しかし、そもそも、“あたり”が均等分布していることを教えることができるのであろうか。

確率の理論を知らないことからくる誤った直観にはいくつかあるが、そのなかに、「クジを引いてあてるのが得意な人がある」というものがある。このような誤った直観を廃し、理論の正しさを認識させようという「目標」をもって構成される確率の授業プランは多い。松井も、確率の授業を行う前に子どもの確率概念に関する予備調査を行っているが、そのなかに、「みなさんの中に、うたのじょうずな人や、計算のとくいな人などがいます。では、クジを引くのに、うまい人がありますか」という質問項目がある。調査の結果、小学校6年生の約3分の1が、「いる」と答えているのである。この調査結果は、子どもが必ずしも“あたり”の均等分布の概念をもってはいえないことを示している。したがって、この場合には内包量を考える必然性はなく、当然の帰結として、内包量としての確率を認識することはできないのである。

第3節 頻度的確率論と矢島昭予の授業プラン『確率入門』

頻度的確率は、統計的確率、もしくは経験的確率ともいわれる。頻度的確率論は、例えばコイン投げで表の出る確率が $\frac{1}{2}$ であるとする理由を、コイン投げの反復試行あるいは大量試行の結果、表の出る相対的頻度が $\frac{1}{2}$ に近づいてゆくという統計的・経験的判断に求める理論である。

頻度的確率論もまた、確率論をできるだけ純粋に数学的な形式に近づける試みから生まれた。その代表的なものの1つに、R. v. ミーゼスの理論がある。ミーゼスの理論は、日本にも早くに紹介され、ミーゼスの確率の定義を採用した授業も行われている。ここでは、まず、ミーゼスの確率の理論を、末綱恕一『確率論』から紹介しておく¹⁵⁾。

ミーゼスの確率論の基礎をなすものは集団 (Kollektiv) なる概念である。最初は簡単のために標識が唯二つの場合を考え、その一つの標識を例えば0で表わし他の方を1で表わす。例えば普通の銅貨を投げ上げ表が出るのを0とし、裏が出るのを1とする。銅貨を繰返し繰返し投げ上げてみることにし、その第一回・第二回…を夫々 $e_1, e_2, \dots$ で表わせば

$$e_1, e_2, \dots$$

なる無限の系列が出来る筈で、その各項は0か1かの標識をもつのである。ここで n 回のうち0なる標識のものが n_0 、1なる標識のものが n_1 あるとし

$$\frac{n_0}{n}, \quad \frac{n_1}{n}$$

なる分数を作れば、 n が限りなく大きくなるとき二つの分数は相等しくなる。数学的に言表わすには極限概念を用いなければならない。即ち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_0}{n} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_1}{n} = \frac{1}{2}$$

集団とはかくの如く各標識に関して極限值が存在する無限の系列である。しかし単に極限值があるばかりではまだ確率論の対象にはならない。例えば或る長い線路に沿って

100m毎に小さい石を、1000m毎に大きい石を置くとき、前者を0で表わし後者を1で表わせば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_0}{n} = \frac{9}{10}, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_1}{n} = \frac{1}{10}$$

なる極限值が存在する。しかし石を一つずつ飛ばして数えるならば、 n' 回のうち1なる標識をもつものの数を n'_1 とすると、もし奇数番目の小石から始めるならば

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{n'_1}{n'} = 0$$

で、偶数番目の小石から始めるならば

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{n'_1}{n'} = \frac{2}{10}$$

となる。即ちこの場合にはもとの系列から適当な部分系列を取出すと、同一の標識に関する極限值が違って来る。これでは確率論は出来ないので、銅貨を投げ上げる場合の如きはその何回目取出すかを予め規定して、限りなく続けるうち表の方を裏よりも必ず度度現れるようにすることはできない。今或る系列から部分系列を取出すに、 n 番目の項 e_n を取るか取らないかは e_n 自身の標識には無関係にただ e_{n-1} までの結果によって定まる場合に、これを特に項位選出 (Stellenauswahl) と呼ぶことにする。

定義1. 唯二つの標識0, 1をもつ無限系列があって、次の二つの条件を満足するときこれを単純集団という:

- 1) 最初の n 項のうち0, 1なる標識をもつ項の数を夫々 n_0, n_1 とするならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_0}{n} = p, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n_1}{n} = q$$

なる極限值が存在する。

- 2) その系列から或る項位選出によって部分系列を作るとき、その中でもとと同じ極限值が存在する。即ちその部分系列に於て最初 n' 項のうち0, 1なる標識をもつ項の数を夫々 n'_0, n'_1 とすれば

$$\lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{n'_0}{n'} = p, \quad \lim_{n' \rightarrow \infty} \frac{n'_1}{n'} = q$$

この極限值 p, q をこの集団に於て夫々標識0, 1の現れる確率という。

単に平均値を問題にするのであれば2)なる条件は必要がないけれども、確率というためにはこれがなければならないのである。

ミーゼスのコレクティブ (単純集団) は、確率を考えるための条件をうまく表現している。条件の第1は、不規則な現象も大量に観察した場合には規則性が現れるという直観を、数学的な表現である極限値の存在でいかにしている。また、条件の第2は、いわゆるランダム性であり、系列中の各項がある標識をもつかどうかはそれ以前の項によらないことを述べている。

次に、頻度的確率論に基づいた矢島昭予の授業プラン『確率入門』¹⁶⁾の検討を行う。この授業プランは、ペテル君とマルサさんが、「自然にまかせ偶然に従う」という掟があるルーレットブルグの町のなかで、ドスト博士に助けられながら、確率の知識を身につけてゆくというストーリーになっている。『確率入門』では、確率は次のように定義されている¹⁷⁾。

コインを投げると、その結果として「表」か「裏」かが出ます。(当たり前ですが)。

このように、結果が得られる過程を《試行》といって、試行の結果のことを《事象》といいます。

例えば、コイン投げでは、「表が出る事象」と「裏が出る事象」があります。

又、何回も試行をくり返したとき、その回数を n とし、その内、事象 A が、 r 回起きたとすれば r のことを事象 A の起る《度数》といい、 $\frac{r}{n}$ のことを、事象 A の起る《相対度数》といいます。

実験の結果からわかるように、相対度数 $\frac{r}{n}$ は、 n の大きさが、うーんと大きくなると、安定した値 (a とする) をとることがあります。

このような時、事象 A の起る確率は a であるといって

$$P(A) = a \text{ と書きます。}$$

サチコフは、「確率は事象の頻度を通じてのみ、現実と関連づけられうる」¹⁸⁾と述べている。確かに、相対的頻度の極限值として確率が定義されるとき、確率はその物質的基礎を得たかに見える。しかし、頻度的確率論と『確率入門』における確率の定義には、観測値と直観値の違いをどうするかという問題がある。すなわち、コイン投げの実験を多数回行っても、表の出る相対的頻度がちょうど $\frac{1}{2}$ になるわけではない。 $\frac{1}{2}$ にならない可能性の方が決定的に大きい。しかし、10000回コイン投げの結果例えば表が5005回出たとき、表の出る確率を $\frac{5005}{10000}$ とすることは、妥当的とは考えられない。また、ミーゼスの理論に忠実になろうとしても、コイン投げの実験を無限回行うこともできないのである。「相対度数 $\frac{r}{n}$ は、 n の大きさが、うーんと大きくなると、安定した値 (a とする) をとる」と説明してみても、生徒は、本当に安定した値をとるのか、その値がなぜ a であるとわかるのかと、疑問に思うかもしれない。そこで、教師が、「 $\frac{1}{2}$ に近づいてゆくことが知られている」などと説明してみても、結論の押しつけになりかねない。生徒の側から見れば、有限回の実験データから無限回の実験の結果を、予想することも許されずに、教え込まれることになるのである。

註

- 1) ラプラス「確率についての哲学的試論」、『世界の名著』第65巻、中央公論社、1973年、166頁。
- 2) 同上。
- 3) 同上。
- 4) 同上。
- 5) 井川満・伊関兼四郎・伊藤清三・大島利雄・加藤順二・塩田徹治・廣瀬健・渡辺信三『高等学校新編数学Ⅰ』数研出版、1994年。なお、この教科書から引用する場合、いちいち註を付すことはしない。
- 6) 武隈良一「古典的確率論の基礎」、小樽商科大学人文科学研究室『人文研究』第2集、1951年、30頁を参照。
- 7) ラプラスは、次のように述べている。「どちらかの面が他方よりも出やすくなるような不平等がこの貨幣にあるとしても、この不平等のために出現しやすくなったのがどちらの面であるかをわれわれが知らない限り、一回目に表が出る確率は依然として $\frac{1}{2}$ となるであろう。それはこの不平等がどちらの面に便宜を与えるかを知らないという状況では、もしそれが「表」に好都合ならばこの単純事象の確率は増えるのであるが、もし逆に「表」に好都合でないならば、その分だけこの確率は減るからである」(前掲ラプラス「確率についての哲学的試論」180-181頁)。
- 8) 内井惣七「賭・確率・帰納法—主観主義確率論の基礎—」、京都大学人文科学研究所『人文学報』

第37号、1974年、4頁。

- 9) 伊藤陽一「確率に関する諸見解について—確率主義批判のために—」、経済統計研究会『統計学』第14号、産業統計研究社、1965年、52頁を参照。
- 10) Leonard Jimmy Savage, *The Foundations of Statistics*, Dover, 1972, page 3.
- 11) Dennis Victor Lindley, *Making Decisions*, Wiley, 1985, page 18.
- 12) 松井幹夫「確率の導入について」、数学教育協議会『数学教室』第197号、国土社、1970年。
- 13) 同上 44頁。
- 14) 須田勝彦は、次のように述べている。「内包量を考えることができるのは、なんらかの一樣な世界、素朴な比例感覚の成り立つ世界、1 当たりが一定の世界が前提となります。1 当たりがどこもばらばらで、定まっていない世界では内包量を考えることはできません」(須田勝彦「内包量指導の課題」、北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第11号、1993年、49頁)。
- 15) 末綱恕一『確率論』岩波書店、1941年、175-177頁。なお、引用の際、旧字体を新字体に、旧仮名遣いを現代仮名遣いに改めている。
- 16) 矢島昭予「高等学校における『確率』の基礎概念の指導過程について」、北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学研究シリーズ』第7号、1982年。
- 17) 『確率入門』3頁。
- 18) H.O.B. サチコフ「確率論の基礎づけについて」、科学方法論研究会『確率論』1967年、5頁。

第3章 同様な確からしさの原理の指導

第1節 確率の基礎としての同様な確からしさの原理

前章での検討を整理しておく。古典的確率論においては、同様な確からしさの原理が成立することは、確率が定義されることの必要条件である。しかし、同様な確からしさの原理が成立する条件については、理由不十分の原理の成立ということ以外にはなにも述べられていない。主観的確率論に基礎をおいた東京地区数学教育協議会プランでは、確からしさをクジの“あたりやすさ”に還元している。そして、「どのクジもクジ1本について、“あたりやすさ”が均等分布していることを確認」させて、同様な確からしさの原理を認識させようとしたが、成功していない。一方、頻度的確率論と矢島昭予の授業プラン『確率入門』では、反復試行あるいは大量試行におけるあるメルクマールの相対的頻度の安定値を確率と定義している。これは、同様な確からしさの原理の成立条件を物質的側面から示したともいえる。しかし、有限回の実験の結果からいかに無限回の実験の結果を予測するかという、数学教育上きわめて困難な問題を生じている。以上から、3つのプランいずれも、同様な確からしさの原理をいかに認識させるかという点で、問題を含んでいることがわかる。

ところで、確率は、長さや面積と同じく現実世界から抽象された量、すなわち、あるものの量であるといえる。そして、ものの量である確率を定めようとしているならば、そのものに対して何らかの一樣な世界、均等な世界を描いているはずである。なぜなら、そのような世界を想定しなければ、量を測定することはできないからである。長さを測定するとき、「ある単位線分で区切られたどの区間も同じ長さを有している」ということを承認しなければ、長さを測定することはできない。また、承認していなければ、そもそも長さを測定しようという行為は起こらないはずである。同様に、確率を測定しようとする場合にも、なんらかの均等な世界の存在を承認していなければならない。検討した3種類の授業プランがいずれも、同様な確からしさの原理をどう

認識させるかという問題を抱えていた理由は、ここにある。同様な確からしさの原理が確率存在の必要条件となるのは、古典的確率論に限ったことではなく、確率論一般についていえることである。その意味で、同様な確からしさの原理は確率の基礎である。

まとめると、同様な確からしさの原理とは、決して物理学的諸法則から導かれるようなものではなく、均等な世界の存在の承認という主体的な行為のことなのである。そして、この行為がなければ、確率を測定することはできないのである。このことは、確率の定義に関する様々な問題を解決した、コルモゴロフの測度論的公理的確率論からも理解することができる。コルモゴロフの定めた確率論の公理系は、以下の通りである¹⁾。

Ω を要素 ω の集合とし、 F を Ω の部分集合を要素とする集合族とする。このとき、 ω を根元事象といい、 F の要素を確率事象（または単に事象）、 Ω を標本空間という。

I. F は集合体である²⁾。

II. F の各集合 A に、非負の実数 $P(A)$ が定められている。この数 $P(A)$ を事象 A の確率という。

III. $P(\Omega)=1$

IV. A と B とが共通の要素をもたないとき

$$P(A+B)=P(A)+P(B)$$

が成り立つ。

V. F の減少事象列

$$A_1 \supseteq A_2 \supseteq \cdots \supseteq A_n \supseteq \cdots$$

において

$$\bigcap_n A_n = \phi$$

ならば、次の等式が成り立つ。

$$\lim_n P(A_n) = 0$$

コルモゴロフは、第2の公理で、「 F の各集合 A に、非負の実数 $P(A)$ が定められている。この数 $P(A)$ を事象 A の確率という」と述べている。これによると、「同様な確からしさの原理」も「あたりやすさ」の均等分布も「相対的頻度の安定値」も、確率を定めるためには必要のないものである³⁾。したがって、測度論的公理的確率論の定理は、標本空間 Ω 上の集合体に対して公理を満たすように確率 $P(A)$ を定めた場合、いかなる帰結が得られるかを述べたものであるといえる。すなわち、定理は、「もし確率が p であれば、次のことが成り立つ」というように、確率 p の値を仮定した上での命題にすぎない。確率論が賭や運まかせのゲームだけではなく、科学の様々な分野で応用されるようになった理由は、ここにある。確率の値は確率論を利用する側が定めればよい。コルモゴロフの確率論は、確率の具体的な定め方については何も述べないで、ただ、豊かな理論を提供しているだけなのである。

第2節 量と幾何学的直観に基づく数学教育

前節までに、確率を定めるための「正しい」手続きが存在しないこと、確率を定めるためにはまず同様な確からしさの原理を承認しなければならないことが明らかになった。したがって、数学教育の立場からは、同様な確からしさの原理をごく自然に承認できるような場面をいかに設定するかという課題に答えなければならない。この課題に答えるために、以下では、面積の理論を検討する。

数学教育協議会は、「量に基づく数学教育」を提唱してきたが、それは、「図形に基づく数学教育」と置き換え可能なものであった。なぜなら、タイルによる数指導においては、黒板に描かれた正方形がタイルの代りをする。分配法則や展開・因数分解の指導では、面積図の力が借りられる。さらに、「量に基づく」関数の教育でさえも、グラフを用いない指導は考えられないからである。そして、以上のような、数学教育が依拠してきた幾何学的要素のなかでも、とりわけ面積の果たす役割は大きい。「面積という量は、その直観性によって数学的認識の形成に決定的な役割をもっている」⁴⁾ということを示す事実は、枚挙にいとまがない。したがって、確率指導の場にも面積を登場させようとすることは、自然な発想であるといえる。

しかし、そのような発想の根拠は、単に、数学教育の多くの場面での成功に見習おうということだけではない。より大きな根拠は、面積と確率がいくつかの共通性を有することである。というのは、面積と確率は、ともに、ルベグの測度空間を前提として存在しているのである。

ルベグの測度空間は、以下のように定義される⁵⁾。

定義1 S は任意の集合を表すとする。このとき、

$$2^S \stackrel{\text{def}}{=} \{X | X \subset S\}$$

定義2 $F \subset 2^S$ であるとき、 F を S 上の部分集合の族という。

定義3 S 上の部分集合の族 F が、

- 1° $S \in F$ 、および $\phi \in F$
- 2° $M_1, M_2 \in F$ ならば、 $M_1 \cup M_2, M_1 \cap M_2 \in F$
- 3° $M \in F$ ならば、 $M^c (= S \setminus M) \in F$

を満たすとき、 F を S 上の集合体という。

定義4 S 上の部分集合の族 M が、

- 1° M は S 上の集合体である。
- 2° $M_1, M_2, \dots \in M$ ならば、

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n \in M, \bigcap_{n=1}^{\infty} M_n \in M$$

を満たすとき、 M を S 上の σ 集合体という。

定義5 S 上の σ 集合体 M の1つを特出して考えているとき、 (S, M) を可測空間という。

定義6 可測空間 (S, M) が与えられているとき、 M の各集合に対して1つずつ値を対応させる次のような関数 μ を M 上の測度という。

- 1° $M \in M$ に対し、 $\mu(M)$ は、非負の実数、または ∞ である。
- 2° $\mu(\phi) = 0$
- 3° $M_1, M_2, \dots \in M$ 、 $M_j \cap M_k = \phi$ ($j \neq k$) ならば、

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} M_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(M_n)$$

定義7 測度の導入された空間 (S, M, μ) を測度空間という。

ルベグの測度論における S は、面積論では平面にあたる。 M は、平面の可測な部分集合である⁶⁾。一方、確率論では、 S は標本空間とよばれ、 $\mu(S) = 1$ を満たす。コルモゴロフは、「確率論は空間全体の測度が1であるような測度空間の理論である」として、確率論の公理化を行ったのである⁷⁾。

実際に面積の性質を考えてみると、確率との共通性はより明らかになる。それでは、そもそも

面積のもつ性質とはどのようなものであるのか。一松信は、次のように述べている⁸⁾。

面積とは平面図形の『広さ』を表す量といった漠然とした感覚を、もう少し精密にする必要がある。すなわちそれは平面図形 A に対して定まるある実数量 $\mu(A)$ であり、次のような性質をもつものと了解してよいだろう。

$$1^\circ \quad \mu(A) \geq 0$$

$$2^\circ \quad A \text{ と } B \text{ と [ママ] 合同ならば } \mu(A) = \mu(B)$$

$$3^\circ \quad A \text{ と } B \text{ とに共通部分がなければ、} A \text{ と } B \text{ との合併 (和集合) } C \text{ について}$$

$$\mu(C) = \mu(A) + \mu(B) \quad (\text{加法性}) \quad (1)$$

$$4^\circ \quad \text{一辺が長さ 1 の正方形 } Q \text{ については } \mu(Q) = 1$$

実用上では 3° をさらに強くして

$$3''^\circ \quad A \text{ と } B \text{ との共通部分が有限個の線または点のみならば、} A \text{ と } B \text{ との合併 } C \text{ について (1) が成立する。}$$

としてよいだろう。面積とはこのような性質をもつ図形の「拡がり」を示す量である。

これから A が B の部分集合なら $\mu(A) \leq \mu(B)$ といった性質が導かれる。

1° は、コルモゴロフの第 2 の公理のなかの、「集合 A に、非負の実数 $P(A)$ が定められている」に対応する。面積も確率も非負の実数で表されるのである。 3° は面積の加法性であり、確率の加法定理とよばれる第 4 の公理に対応している。

上に見てきたように、面積と確率は、いずれも、いくつかの条件を満たす集合に対して与えられた測度である。この事実は、面積を考える世界と確率を考える世界を同一視する可能性を示している。確率指導の際に、面積的な要素を利用する可能性である。そこで、面積を中心とする幾何学的直観に依拠した、幾何学的確率論について検討する。

第 3 節 幾何学的確率論とベルトランの逆説の積極的意義

幾何学的確率は、事象をある図形に対応させて、その測度を、全事象に対応する図形の測度で割って得られるものである。このような確率が考えられたのは、「確率の古典的定義をなんとか変形して、考えられる試行の結果 (事象の起こり方) が無限の多様性をもつ場合にも使えるような確率の概念をつくりあげる必要」⁹⁾ に迫られてのことであった。古典的確率論における事象の有限性を、無限の場合に拡張した理論であるともいえる。

幾何学的確率は、次のように定義される¹⁰⁾。

平面上にある可測な領域 G があり、その中に領域 g が含まれているとする。領域 G の中へ 1 つの点が無作為に投げこまれるとき、その点が領域 g の中へおちる確率はいくらか、という問題が考えられる。ここで、“1 つの点が領域 G の中へ無作為に投げこまれる”という言葉の意味は、投げこまれる点は領域 G 内の任意の点へおちることができ、それが G 内のある部分の中へおちる確率はその部分の測度だけに比例し、その部分の位置や形には依存しないということである。

したがって、この定義によれば、領域 G の中へ無作為に投げこまれた 1 つの点が領域 g の中へおちる確率は

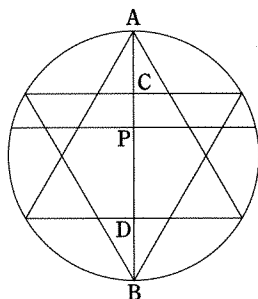
$$p = \frac{\text{mes } g}{\text{mes } G}$$

で与えられる。ただし、 $\text{mes } g$ は g の測度という意味である。

このように、事象を図形に対応させる幾何学的確率論の考え方は、大変自然で便利なものである。「mes g は g の測度という意味である」とはいうものの、実用上は、mes g として、慣れ親しんでいる g の長さや面積を考えれば十分だからである。

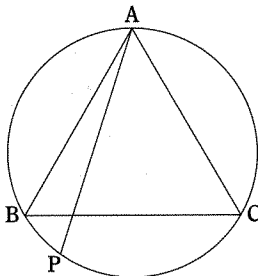
しかし、測度論的公理的確率論を教えるテキストに幾何学的確率について書かれている場合は、意外に少ないようである。また、「古くから幾何学的確率の問題が考えられたが確率論の主要な研究の対象にならなかった」¹¹⁾といわれている。「幾何学的確率の理論は、事象のとらえ方に任意性があるために幾たびも批判のまどになった」¹²⁾のである。その批判を鮮明に行ったのが、フランスの数学者ベルトランであった。ベルトランは、「1つの円において無作為に弦を引くとき、その長さが内接正三角形の1辺の長さよりも大きくなる確率はいくらか」という問題を出して、「常識が同様に承認しなければならないと思われた二つの規約を次々に採用して、その一方からは $\frac{1}{2}$ 、もう一方からは $\frac{1}{3}$ という結果を見いだした」¹³⁾。この問題は「ベルトランの逆説」とよばれている。ここでは、 $\frac{1}{2}$ と $\frac{1}{3}$ という2つの解答を示しておく¹⁴⁾。

解答1：



弦は水平に引くとして一般性を失わない。そして、その水平弦が垂直な直径 AB と交わる点 P の位置によって、弦の長さは決まる。図のように点 C, D をとると点 P が線分 CD 上にあるとき条件を満たす。直径 AB の長さを1とすると、線分 CD の長さは明らかに $\frac{1}{2}$ であるから、直径 AB 上に任意に点 P をとり、それが線分 CD 上にある確率は $\frac{1}{2}$ である。よって、求める確率は $\frac{1}{2}$ である。

解答2：



弦は円周上の2点によって決まるが、最初の点 A はどこにとっても同じである。第2の点 P の相対的な位置によって弦の長さが決まる。そこで、点 A を1頂点とした内接正三角形 ABC を考えると、第2の点 P が劣弧 $\widehat{BC}$ 上にあるとき、条件を満たす。劣弧 $\widehat{BC}$ の長さは全円周の $\frac{1}{3}$ であるから、全円周上に任意に点 P をとるとき、それが劣弧 $\widehat{BC}$ 上にある確率は $\frac{1}{3}$ である。よっ

て、求める確率は $\frac{1}{3}$ である。

すでに述べたように、確率を定めようとする場合には何らかの均等な世界、すなわち、「同様な確からしさ」の存在を承認しなければならない。そして、幾何学的確率論における「同様な確からしさ」は、点の一樣分布性として具体化される。解答1においては、直径 AB 上に点が「同様に確からしく」存在していることを仮定して解答を進めている。一方、解答2においては、与えられた円の周上に点が「同様に確からしく」存在していることを仮定しているのである。いずれの仮定も、問題のなかにある「1つの円において無作為に弦を引く」という条件を、幾何学的直観に反しない形で具体化したものである。しかし、このように、ベルトランの逆説に対して幾何学的直観に反しない複数の仮定が許され、そのため、矛盾なく複数の解答が導かれるのである。幾何学的確率論批判の根拠は、この点にある。

これを難点とみて、頻度的確率論へ移行する方法もあるだろう¹⁵⁾。しかし、われわれは、ベルトランの逆説に象徴される幾何学的確率論の厳密性の欠如を難点とする見解をとりたくはない。「確率はただ1つに定まらなければ困る」ということには、賛成できないのである。

「[弦の引き方に関する一引用者] 仮定はすべて認められるもので、いずれが正しくいずれが誤りということはない。弦のランダムなひき方が明示されていないので、いろいろなひき方が考えられ、そのために異なる解答が生じたわけである」¹⁶⁾という武隈良一の見解に同意する。このような見解は、小針晃宏も述べている。「この例[ベルトランの逆説一引用者]は、‘何をもって同等とするか’の前提を明確にすることなしに、確率を論ずることはできない、という教訓を与えている。‘確率とは、仮定することと覚えたり’というわけである。先験的な確率というものがあるがどこかにあって、ただ無知な人間がそれを知らないだけだ。求めた答は正しいか正しくないかのいずれかだ、と思っている人は、この例をよく噛みしめて蒙を啓いてほしい」¹⁷⁾。

あるもの(事象)の確率を測定しようとするためには、そのものに対して何らかの均等分布を仮定するという主体的行為が必要である。しかし、現行の教科書を用いた確率指導の場面で考えてみれば、古典的確率の現実説明のモデルとしての単純さは、逆に確率概念の認識を困難にしている。根元事象に等しい確率を与えるのが唯一の方法であって、同様な確からしさの原理が成り立たない場合には確率は求められない、あるいは存在さえしないという考えが広まっているのではないだろうか。そうではなく、同様な確からしさの原理は、積極的に選び取らなければならないものなのである。その意味で、ベルトランの逆説に接して、様々な仮定が可能であると知ることには意義があるといえる。たとえ幾何学的確率論が純粋に数学的には未熟であるとしても、数学教育上有効ならば、確率の概念モデルとして用いてもよいであろう。

註

- 1) コルモゴロフ『確率論の基礎概念』東京図書、1991年、2-20頁を参照。
- 2) [原註一引用者] 集合 Ω の部分集合族 F は、 $\Omega \in F$ で、それに含まれる2つの集合の和、積、ならびに差がまたその族に含まれるとき集合体という。
- 3) コルモゴロフは、「現実を経験される世界の事象に、確率論を適用するために必要な前提を与えるに当たって、著者は、ミーゼスの著作によることが大である」(前掲コルモゴロフ『確率論の基礎概念』4頁)と述べている。しかし、純粋に数学的な理論のなかの確率は、公理系を満たす非負の実数であれば十分なのである。
- 4) 須田勝彦「わかったつもりの量・面積」、『教育科学算数教育』第256号、明治図書、1979年、82頁。

- 5) 竹之内脩『ルベーク積分』培風館、1980年、および、梅垣壽春・大矢雅則・塚田真『測度・積分・確率』共立出版、1987年を参照。
- 6) 平面のあらゆる部分集合(図形)に、面積のような測度を定義することはできないことが知られている。しかし、普通によく使う部分集合(図形)だけを考えるならば、測度を定義することができる。
- 7) 前掲竹之内脩『ルベーク積分』25頁を参照。
- 8) 一松信『微分積分学入門第一課』近代科学社、1989年、4頁。
- 9) グネジェンコ『確率論教程Ⅰ』森北出版、1971年、34頁。
- 10) 同上 34-35頁。
- 11) 丸山儀四郎『確率および統計』共立出版、1956年、29頁。
- 12) 前掲グネジェンコ『確率論教程Ⅰ』36頁。
- 13) ボアンカレ『科学と仮説』岩波書店、1938年、215頁。
- 14) ベルトランの逆説には、他に、「 $\frac{1}{4}$ 」、「0」、「不定」という答えも考えられている。詳しくは、武隈良一『確率』培風館、1978年、101-102頁、および、小針暁宏『確率・統計入門』岩波書店、1973年、6-8頁を参照。
- 15) 例えば、梅沢敏夫『確率と統計』森北出版、1970年、24頁。
- 16) 前掲武隈良一『確率』102頁。
- 17) 前掲小針暁宏『確率・統計入門』9頁。

第4章 お わ り に

本稿では、3種類の確率指導の既存プランの検討から、いずれのプランも、同様な確からしさの原理を教えることに苦心を払っていることを見てきた。これは単なる偶然ではない。現実のあるものから抽象される量を測定するためには、そのものに対して何らかの均等な世界を想定することが必要である。そして、確率論において何らかの均等な世界を想定することは、同様な確からしさの原理を承認するという主体的行為に他ならないからである。同様な確からしさの原理は確率の基礎であるから、それを教えることなしに確率の指導はできないのである。

検討した授業プランでは、同様な確からしさの原理の指導に成功していたとはいえない。それでは、どのような概念モデルで同様な確からしさの原理を指導すればよいのかを提起しなければならない。本稿では、面積と確率とがともにルベークの測度空間を前提として存在し、いくつかの共通の性質を有することに着目し、面積概念に依拠した幾何学的確率論を積極的に意義づけた。これは、幾何学的直観による量の認識という数学教育の基本原則を、確率指導の場に応用することにもなっている。平面における点の均等分布という幾何学的直観を、同様な確からしさの原理を承認する手助けとするのである。無論、ベルトランの逆説に象徴される、幾何学的確率論に対する批判の存在も承知している。しかし、ベルトランの逆説は、「数学はある仮定から始まるが、その仕方は決して1通りではない」ということを教えてくれる貴重な教材なのである。最終的に最も「常識的な」仮定が選ばれたとしても、それは決して無駄なことではない¹⁾。複数考えられる仮定から最もよいものを自ら選び取る過程で、集合論のカントールの言葉「数学の本質はその自由さのなかに存する」を実感できるのである。

今後の課題としては、幾何学的確率論に基づいた同様な確からしさの原理の指導プランの作成が残っている。これについては、哲学者や確率論者間の確率観に関する論争を資料として確率とはなにかを考えること、ベルトランの逆説を通して同様な確からしさの原理が唯一絶対のもので

はないと知ること、という2部構成になるだろうと考える。問題は、幾何学的確率論に基づいて同様な確からしさの原理を指導したとしても、確率さらには統計の指導が終わるわけではないことである。確率・統計の指導では大数の法則や中心極限定理が欠かせないであろう。しかし、幾何学的確率論に基づけば、確率の正值性や加法定理・乗法定理までしか教えられないという限界があると考えられる²⁾。面積との共通性に収まりきらない、確率論に特有の面白い性質のうち何をどう教えてゆくかということも、残された課題である。

註

- 1) 先に7進記数法を学んだ後、記数法を10進にするように約束し直すという小数の授業プランがある。
北海道数学教育協議会・算数プリント編集委員会『3年 算数たのしい学習プリント』共同文化社、1992年、89-110頁を参照。
- 2) 拙稿「確率指導の教育内容論的研究」、北海道大学大学院教育学研究科修士学位論文、1996年を参照。