



Title	文系大学生を対象とする線型代数の教育内容構成論
Author(s)	高橋, 哲男
Citation	北海道大學教育學部紀要, 77, 155-174
Issue Date	1998-12
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/29580
Type	departmental bulletin paper
File Information	77_P155-174.pdf



文系大学生を対象とする線型代数の教育内容構成論

高 橋 哲 男

A Study of Making Educational Program of Linear Algebra for Students of Liberal Arts

Tetsuo TAKAHASHI

目 次

はじめに	155
第1章 既存の線型代数テキストの検討	156
第1節 検討の視点	156
第2節 佐武一郎『線形代数』の検討	158
第3節 齋藤正彦『線型代数入門』の検討	160
第4節 石井伸郎ほか『新しい視点からの線形代数』の検討	161
第2章 線型代数の教育内容構成の論理	163
第1節 線型代数の発展史	163
第2節 正比例の発展としての線型代数	165
第3節 幾何学における群論的考察の意義	166
第4節 線型代数指導の到達目標点	168
おわりに	170

は じ め に

本稿の課題は、文系大学生に対する線型代数¹⁾の教育内容構成の論理を、理論的に解明することである。

数学全般に应用される基礎理論である線型代数の重要性は、説明の必要がないほどである。基礎理論であるがゆえに、線型代数を学ぶことによって、数学の幅広い分野に应用することが可能になる。そのように重要である線型代数の理論を、文系の大学生に教えることが、本稿の目指すところである。

線型代数は、微分・積分と並んで、大学の教養課程における数学教育の中心内容となっている。そのため、大学生向けの線型代数のテキストは、数多く出版されている。しかし、それらのほとんどは、専門課程で線型代数の理論を活用する、理工系の学生を対象としたものである。数学が苦手であり、興味が無い、そして、専門課程でそれをあまり必要としない、文系の大学生向けのテキストは少ない。高度な教育内容と、その学習者である文系大学生の数学の知識の間の、「ギャップを埋める良い教科書があるか」というと、お寒い状況である²⁾。その結果、理工系学生向けのテキストをもとに、その内容を削減ないし簡素化して授業が行われているというのが、文系大学生に対する数学教育の現状といえるだろう。

こういった現状の背景には、文系大学生に対する数学教育の目的、とりわけ、線型代数を教え

る目的が明確になっていない、ということがある。本稿では、文系大学生に対する線型代数指導の目的として、以下の3つを立てる。ただし、これらの目的は決して排反ではなく、相互に関連しあっている。

第一に、専門課程への基礎教育を行うことである。特に、専門課程で経済学や統計学に関する学問を専攻する学生に対して、線型代数の基礎的理論を提供するのである。学生は、そこで学んだ基礎を応用して、専門課程において、個々の研究課題の遂行に役立てることになる。第二に、それらの学生も含めて、一般教育としての数学、教養としての数学を教えることである。線型代数の教育内容には、当然のことながら「線型性」の概念、そして、その前提にある集合や写像の概念が含まれる。現代数学において基礎的であり、かつ、重要なこれらの概念は、大学生にとっての教養として、教える価値をもつ内容である。このことにより、広大な数学の領域の他の分野を独力で学んでいく、いわば自己教育のための数学的基盤を提供することになる。第三に、そういった集合や写像、線型性などの概念を学んだ高い立場から、それまでの自分の数学教育体験を振り返ることである。小学校の正比例関数はもちろん、高等学校における Σ に関する算法や微分・積分も、線型写像に関わる内容である。高等学校までのほとんどあらゆる学習内容を、集合、写像、線型性の概念を通して再認識することは、認識の発展という観点から、きわめて重要であるといえる。

文系大学生に対する線型代数指導の目的を以上のように仮設し、その教育内容を構成するための理論的検討を行ってゆく。

第1章 既存の線型代数テキストの検討

佐武一郎は、線型代数の導入方法について、次のように述べている。「線形代数は、数学全般に応用される基礎理論であるから、その目的に応じて様々な導入方法が考えられる。通常は幾何学的側面から、直感的な直線、平面を通して、ベクトル空間や線形写像の概念を導入する方法がとられている。[中略]代数的側面から入る場合には、ベクトル空間（すなわち $\mathbf{R}$ -加群）の抽象代数的定義から始める方法と、ベクトルや行列の計算から始める方法とがある。また（実際にはあまり見かけないが）解析学における応用を主題として解説することも可能であろう」³⁾。

本章では、既存の線型代数指導のテキストの検討を行う。「数学全般に応用される基礎理論」であるがゆえに、「様々な導入方法が考えられる」線型代数の指導において、文系大学生を対象とした場合にはどのような導入が適切であるのか、そのアウトラインを、この検討を通して示したい。第1節で、高等学校の教科書における行列やベクトルに関する記述を追いながら、テキスト検討の際の視点を明らかにし、以下の節で、いくつかのテキストを検討する。

第1節 検討の視点

大学における線型代数の内容の導入部分は、すでに高等学校の段階で始まっていると見ることもできる。そこで、以下に、高等学校の教科書を検討しておこう。このことは、指導の対象となる文系大学生が、線型代数に関してどれほどの知識をもっていることが期待されるかを知る上でも、意味のあることである。

現行の高等学校数学教科書では、「数学B」でベクトルが扱われている。もっとも、それは線型空間の元としてのベクトルではなく、幾何学的ベクトルに限られている。ベクトルの演算、ベクトルの内積、位置ベクトル、ベクトル方程式などが主な内容である。

コンピュータとの関わりが重視されている「数学C」では、行列が扱われる。東京書籍の教科書『数学C』⁴⁾を見ると、行列は、製品の売り上げ個数を表現する表などから「数値だけを抜き出」して、「数を長方形に並べたもの」として定義されている。それでは、行列の積はどのようなになっているであろうか。これについては、次のように書かれている。

行列 $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ と列ベクトル $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ との積を、次のように定める。

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$$

そして、この後に、「例」として、行列の積の意味を次のように説明している。

ある遊園地では、乗物に乗るのに、右の表のような枚数の乗物券が必要である。

	大人	子供
ジェットコースター	7	4
観覧車	6	3

大人2人と子供5人がジェットコースターおよび観覧車に乗ったときの乗物券の枚数は、

$$\text{ジェットコースター} \quad 7 \times 2 + 4 \times 5 = 14 + 20 = 34$$

$$\text{観覧車} \quad 6 \times 2 + 3 \times 5 = 12 + 15 = 27$$

となる。

ここで、乗物券の枚数を行列 $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ で表し、大人と子供の人数を列ベクトル $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ で表せば、

$$\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \times 2 + 4 \times 5 \\ 6 \times 2 + 3 \times 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 34 \\ 27 \end{pmatrix}$$

のように、行列の積を利用して乗物券の枚数を計算することができる⁵⁾。

行列を、「表から数値だけを抜き出したもの」と定義することは、行列の和と差、スカラー倍、積の説明においては一定の有効性をもつといえる。しかし、逆行列の段階になると、このような行列の定義ではもはや説明がつかない。行列 $\begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$ が乗物券の枚数を表現しているのに対して、その逆行列 $-\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 & -4 \\ -6 & 7 \end{pmatrix}$ にはどのような意味を見いだせようか。無理をして解釈すれば、逆行列は、乗物券の枚数から大人・子供の人数を求めるための行列であると見ることもできる。この場合、行列の各成分は「人／枚」を単位とする量となる。しかし、このような量を考えるのは、不自然である。

結局、高等学校の教科書には、行列や線型写像の概念を統一的に説明するための具体的イメージが欠けているといえる。行列が、ベクトル空間からベクトル空間への線型写像の表現として用いられるという点にも、まったく触れられていないのである。それでは、線型代数を文系の大学生に指導する場合に、どのような導入方法が最適であるのだろうか。

以下では、既存のいくつかの線型代数指導用のテキストを検討する。大学レベルの教育においては、高等学校以前の学習指導要領に相当するものは存在しない。したがって、教育内容と水準は、個々の大学教員に委ねられることになる。一口に線型代数指導用のテキストとはいっても、これがまさにスタンダードとよべるものは現在のところない。膨大な数にのぼるテキストの中から、今回検討の対象とするのは、比較的優れた内容をもつと筆者が判断したものである。いずれも、「文系大学生向け」をうたったテキストではないが、批判的検討をするに値する優れた内容を含んだテキストである。

検討においては、いかなる論理構造のもとにテキストの内容と教材が構成されているか、及び、線型代数に関わる数学的概念をどのような原理によって説明しているかに着目する。その際、さしあたって、行列の積の定義とその意味を説明している部分を、特に詳しく検討することとした。これは、行列の積の定義に関しては、なぜ $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ap + br & aq + bs \\ cp + dr & cq + ds \end{pmatrix}$ のように定義するのかは定義そのものを見ただけでは理解しにくく、必ず何らかの説明が必要とされるからである。テキスト全体の構成の論理や数学的概念の説明原理が、行列の積の定義の部分に象徴的に現れると考えられるのである。

第2節 佐武一郎『線形代数』の検討

線型変換の定義とその合成変換の部分までに限定して、佐武一郎『線形代数』⁶⁾の構成を見てみよう。

第1章「2次行列の計算」では、「4個の実数を正方形に並べたもの」⁷⁾を2次の行列というとして説明し、さらに、2次行列の和と積を形式的に定義している。積の定義については、「なぜこのように定義するかは本書を読み進まれるうちに自然に了解されると思う。ここでは一応この定義を鵜呑みにして、このように定義された乗法がどんな性質をもつかを見ていくことにしよう」⁸⁾と述べている。

第2章「一般の行列とベクトル」では、第1章の内容を受けて、一般の行列とベクトルに関する演算を定義している。第3章「ベクトル空間の概念」では、まず、 n 次元ベクトルのイメージに頼りながら、ベクトルの加法とスカラー乗法を定義する。その上で、ベクトル空間の公理を導入している。ベクトル空間については、次のように述べている。「一般にベクトル空間を抽象的に議論するときには、上の(V1.1)-(V2.4)を公理として、集合 V に二つの演算(加法とスカラー乗法)が定義されていて、これらの条件が成立するとき、 V を(抽象的)ベクトル空間(vector space)というのである。しかし本書では(入門書としての立場から) $V = \mathbb{R}^n$ として議論を進めることにする」⁹⁾。

第4章「線形写像の概念」では、線形写像・線型変換(1次変換)を、抽象的に定義している。そして、ベクトルを原点のまわりに角 θ だけ回転させる写像が1つの1次変換であることなど、いくつかの例を示している。4.2節「線形写像と行列の対応」では、線形写像と行列が対応することを示し、さらに、線形写像の合成変換がふたたびある線形写像になることを証明している。そして、「この定理により、行列の積は線形写像の合成に対応するように定義されていたことがわかる」¹⁰⁾と、行列の積の定義の根拠を説明している。

上に紹介した構成からもわかることであるが、このテキストの構成の論理は、佐武の次の言葉によく現れているように思う。「高校においては、ベクトルは有向線分(矢線)によって定まるもの、または長さや方向をもつ量として定義された。しかしその本質は上に述べたベクトル演算ができるということにある。この性質は個々のベクトルの性質ではなく、ベクトル全体の集合、すなわちベクトル空間の性質である。したがって数学的にベクトル空間を定義することはできるが、(抽象的)ベクトルというものを定義することはできない。通常ベクトルというのは単にベクトル空間の元のことに他ならない。ベクトルに関して幾何学的なイメージをもつことはもちろん大切であるが、線形代数を学ぼうとするときには、“矢線ベクトル”というような(中途半端な)概念にこだわらず、抽象代数的な推論に慣れるようにすることが大切である」¹¹⁾。

すなわち、佐武は、ベクトルを、数学的に定義されたベクトル空間の元としてとらえることの重要性を説いているのである。そして、「矢線ベクトル」という幾何学的イメージは「もちろん大切」であるが、その概念は「中途半端」であるとしている¹²⁾。ここには、数学者である佐武の数学観・数学教育観が現れている。数学の研究対象として必要なものは、具体物あるいは具体的量から離れた、一般的・抽象的な数や量の概念であるという思想を、読みとることができる。この思想自体は、数学の本質を述べたものであり、誤ったものではないといえる。そして、数学をそのように本来的な姿でとらえるからこそ、その教育においても、例えば、「矢線ベクトル」のような、数学的に定義できない概念を用いることを避けようとするのであろう。佐竹は、具体物や具体的量との関わりをもたない公理的に構成された数学の世界から、数学教育の世界をも眺めているといえる。

しかし、公理的に構成された数学を、そのまま教えることはできないということは、もはや数学教育者の間では常識である。数学の公理的な体系と教育内容としての数学の体系は、必ずしも一致するわけではないのである。たとえば、現在、小学校1年生の算数の教科書では、量からの抽象として自然数が導入されるのである。そこでの自然数とは、決して、ペアノの公理流の「ある数の『後者』」などではない。

もっとも、佐武が、公理的体系をそのままの形でテキストにしたわけではないこともまた明白である。公理的な順序体系に従うならば、第1章のタイトルを「ベクトル空間」として、ベクトル空間を抽象的に定義する構成をとったであろう。そして、第2章で、「ベクトル空間からベクトル空間への写像で、以下の条件を満たすものを線型写像という」のように、条件を提示した上で線型写像を定義するであろう。しかし、先に見たように、佐武の『線形代数』は、そのような構成をとってはいない。第1章で2次行列を、第2章でより一般的な行列の演算を扱っている。また、第3章でも、一般のベクトル空間ではなく、 n 次元ベクトル空間の概念を中心に説明を進めている。第4章で線型写像の定義をする際に、その意味がわかりやすくなるように、第3章までに周到な準備がなされているといえる。ここに著者一流の工夫がある。

そもそも、このテキストのように、行列の積は線型変換の合成に対応するように定められている、ということに言及することは、決して普通のことではない。行列の積を形式的に定義した後で、その意味を説明するようなテキストは、まだまだ少数派である。高等学校の学習指導要領からも、「1次変換」が消えて「行列」だけが残っているのが現状である。そうしたなか、行列を変換と、そして、行列の積を合成変換と対応させて説明するという当たり前のことが、当たり前のこととしてなされている点は、大変貴重である。

しかし、やはり、なぜそのようにするのがわかりようもない行列の積の定義が先にきて、何頁も後になってからその意味が解説されるという順序は、公理的構成を重視して学習者の認識過程を軽視しているといえるのではないだろうか。行列の積という新しい概念が定義されるのなら、なぜそのように定義するのが妥当であるかを知りたくなるのが当然の心理であろう。積の定義を黙って受け入れられる学習者がいるとすれば、そこには2通りのタイプがあると考えられる。第一は、積の計算問題ができさえすればその意味はわからなくてもよいと考える学習者、計算できることが数学をわかったことであると考えられる学習者である。そして、第二は、公理体系を学習し終わった後にはその高みから、数学的に美しい世界を眺めることができる、ということを手で知っている学習者である。現時点では無味乾燥な積の定義も、やがてその合理性が明らかになる時を楽しみにしているといつてよい。だが、前者のような学習者にその考えを改めてもらうこと

こそが、数学教育の目標の1つとなり得る。また、教育の対象を文系大学生とした場合、後者のような高度な学習者はほとんどいないと考えてよい。したがって、行列の積の定義に関しては、必然的にそのような定義が要求される場面、すなわち線型変換の合成変換の場面で導入することが求められる。

第3節 齋藤正彦『線型代数入門』の検討

佐武一郎『線形代数』と同様に、線型変換の定義とその合成変換の部分までに限定して、齋藤正彦『線型代数入門』¹³⁾を検討してゆく。

第1章は、「平面および空間のベクトル」となっている。ここで扱われるベクトルとは、幾何学的ベクトルのことである。「平面または空間におけるベクトルとは、方向と長さを合せた概念である」¹⁴⁾と書かれている。また、まえがきには、この章の目的に関わって、「初学者は、この章によってベクトルや行列の幾何学的イメージを得ることが望ましい」¹⁵⁾とある。

第1章「平面および空間のベクトル」のなかで、特に注目しておきたいのは、第3節「平面の回転と行列。線型変換」である。ここでは、まず、平面上における、原点を中心とする角 α の回転の表現行列を導いている。さらに、回転の合成変換の結果と、三角関数の加法定理とを用いることによって、 2×2 行列同士の積を定義している。具体的には、角 α の回転と角 β の回転の合成が、

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \left\{ \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} \quad (1)$$

であり、一方、当然、

$$\begin{pmatrix} x'' \\ y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos (\alpha + \beta) & -\sin (\alpha + \beta) \\ \sin (\alpha + \beta) & \cos (\alpha + \beta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \quad (2)$$

であることから、両者を見比べて、角 β の回転の表現行列と角 α の回転の表現行列の積を、

$$\begin{pmatrix} \cos \beta & -\sin \beta \\ \sin \beta & \cos \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos (\alpha + \beta) & -\sin (\alpha + \beta) \\ \sin (\alpha + \beta) & \cos (\alpha + \beta) \end{pmatrix}$$

と定義している。そして、「この掛算の規則は、三角関数の加法定理により、[中略] 行列BAの上からi番目 ($i=1,2$)、左からk番目 ($k=1,2$) の成分は、行列Bの上からi番目の行を左からかぞえ、行列Aの左からk番目の列を上からかぞえ、対応する成分を掛けて、それらを加え合せたものである」¹⁶⁾と述べている。この説明により、回転の表現行列同士の積の定義をもとにして、一般の 2×2 行列同士の積へと、定義を拡張したことになるのである。この後には、 V^2 (平面のベクトル全体の集合) の線型変換を定義し、線型変換の合成変換がまたある線型変換になること、線型変換と行列が対応していることが述べられている。

第2章「行列」と第3章「行列式」では、行列および行列式に関する比較的形式的な理論および1次方程式の解法が解説される。第2章では、より一般の形の行列の積を、第1章の 2×2 行列の場合と同様に定義している。ここでは、行列の積が定義される条件について触れられてはいるが、合成写像との関わりについては書かれていない¹⁷⁾。第2章第3節「行列と線型写像」では、「第1章で扱った行列と線型変換との対応を、もっと一般的な状況のもとで考えよう」¹⁸⁾と述べている。そして、列ベクトルの集合から列ベクトルの集合への写像を考えて、線型写像の概念を定義している。また、行列の積と線型写像の合成写像の関係についても、「もともと、行列の掛算は、こうなるように [合成写像に対応するように——引用者] 定義したのであった」¹⁹⁾と書

かれている。

第4章「線型空間」では、公理によって定義される線型空間の理論が展開されている。著者が、「第4章は、線型代数の本質を理解するためには欠くことができないと思う」²⁰⁾と述べているとおり、ここでは、第1章にはたびたび見られる図がほとんどなくなっている。幾何学的イメージに頼らず、あくまでも公理的構成になっているといえる。

以上が、齋藤の『線型代数入門』の概要である。さて、このテキストに検討を加えてみよう。まず、第1章から幾何学的ベクトルの概念を積極的に用いており、例は回転だけであり少ないが、実際にその表現行列を用いてベクトルの変換を行っている点は評価できるだろう。「数を縦横にいくつかならべたもの」が行列の本質には違いないが、その役割を考えた場合、線型写像の概念に触れざるをえない。幾何学的ベクトルの変換を行うことが、行列の導入にとって有効に機能している。

ただし、三角関数の加法定理を用いた行列の積の導入は、問題点を有しているといわざるを得ない。そして、それは、「文系大学生がすでに忘れていであろう三角関数の加法定理を、既知の事項とすることはできない」という点ではない。そもそも、加法定理自体が回転の合成変換の結果として得られるものであり、齋藤の説明には論理の逆転が見られるというところが問題点なのである。回転の合成変換を表現する(1)と(2)の同等性に着目して、回転の表現行列の積を定義するところまではよいが、加法定理に基づき、それに整合するように、 2×2 行列一般の積を定義している点は、完全に論理性を欠いている。ただし、行列の積を、回転の合成という幾何学的イメージと関連させながら指導するという論理そのものは、誤ってはいないだろう。改善すべきは、関連のさせ方である。

また、第1章では 2×2 行列、第2章ではより一般の $m \times n$ 行列を扱い、第4章で公理的構成を示している。数学教育における「一般」と「特殊」の順序の問題は確定した答えを未だもっておらず、どちらを先に教えるべきかは、授業実践の結果からしか決められない²¹⁾。行列の場合には、おそらく、 $m \times n$ 行列を最初から導入するよりは、 2×2 行列から入って次第に拡張する方がよいと考えられる。したがって、このテキストのように、徐々に一般性のある方向へと論理を展開している点はよいといえるだろう。

しかし、特殊から一般への流れをするならば、なぜ、 2×2 行列のさらに前に 1×1 行列、すなわち、1次元ベクトルを扱わないのであろうか。確かに、2次元以上にならなければ行列を扱っている感じにはなりにくい、1次元ベクトルの集合も線型空間をなすことから考えると、線型代数の教育内容となり得る。したがって、1次元ベクトル空間から1次元ベクトル空間への線型写像である、正比例関数を扱った方がよい。この点については、次章に節を設けて、改めて論じる。

第4節 石井伸郎ほか『新しい視点からの線形代数』の検討

石井伸郎ほか『新しい視点からの線形代数』²²⁾のタイトルにある「新しい視点」が必要になった背景の1つとして、著者らは、「高等学校での数学のカリキュラムの変更に伴い、大学の線形代数に対する予備知識の内容が変わったことをあげている²³⁾。そのためか、第1章「平面・空間のベクトル、1次変換」では、前学習指導要領時代の「代数・幾何」に含まれていた内容である、平面や空間のベクトル方程式や平面の1次変換が丁寧に解説されている。

第2章は、「数ベクトルと行列」と題し、数ベクトル空間の定義と性質を解説している。この

なかで、ベクトルや行列の演算が定義されてゆくわけであるが、注目している行列の積に関して見てみよう。積の定義の場面は実に味気ない。型通りに定義が書かれており、「行列の積 AB は A の列の数と B の行の数が一致するときのみ定義される」²⁴⁾と注意されているのみである。しかし、その後の説明は面白い。和の場合と同じような成分どうしの積を作らない理由について、次のように書いている。「数学とは本来自由なものであるから、そのように行列の積を定義して線形代数の理論を構築するのも悪くはない。ところがこの方法だと型が等しい行列どうしでしか積は定義されないし、実は長年の数学の歴史が物語るように、『成分どうしの積』によって行列の積を定義しても線形代数のためには少なくともあまり役に立たない。先ほど定義した一見ややこしそうな定義の方がはるかに役に立つのである。その理由は2.4節で述べることにしよう」²⁵⁾。その2.4節「数ベクトル空間の間の1次写像」を見ると、1次写像と行列が対応していることが証明された後に、1次写像の合成写像の結果を代数的に求めて、次のように結論している。「2.2節で定義した一見ややこしそうな行列 A と B との積は、実は A, B を1次写像と見たときに、積がちょうど合成写像にあたるようにうまく定義したのであった」²⁶⁾。

第3章は「行列の基本変形と連立1次方程式」、第4章は「行列式」となっている。第5章「ベクトル空間と1次写像」では、第2章で扱った数ベクトル空間の概念を拡張して、改めて一般のベクトル空間を定義し、その例をいくつか示している。また、線型写像もこの章で定義されている。第6章「1次写像と行列」でも、数ベクトル空間の間の線型写像を発展させて、一般の線型写像の表現行列を定義している。そして、線型写像の合成写像が、表現行列の積に対応していることも証明されている。

さて、検討に移ろう。著者らは、「まえがき」に、次のように書いている。「最初のうちはなるべく抽象的で理論的な話は避け、具体的に計算ができ、ある意味ではただちにイメージの湧く話題を取り上げ、後で出てくる抽象的概念に自然と親しむことができるように書いています」²⁷⁾。その結果、幾何学的ベクトルのイメージを大切にしながら、数ベクトルや行列の定義に結びつけ、最後に公理的構成によるベクトル空間へと移行するという展開になっている。全体的に見ると、齋藤正彦の『線形代数入門』と似通っているといえる。

しかし、行列の積の定義とその説明では、両者のテキストは違いを見せている。石井ほかの『新しい視点からの線形代数』では、あくまで形式的に積を定義し、その後で合成変換との対応について述べて積の意味づけをしている。この点については、佐武一郎の『線形代数』と同様である。対して、齋藤の『線形代数入門』では、三角関数の加法定理に基づいて、回転の表現行列の積を定義し、それに整合するように、一般の 2×2 行列同士の積の定義に拡張していた。この方法の問題点については、前節で述べた。『線形代数入門』のこの問題点を克服するための素材が、『新しい視点からの線形代数』のなかに、練習問題としてある。

原点 O を中心とした角度 α の回転移動を f 、同じく角度 β の回転移動を g とする。このとき写像 $g \circ f$ は角度 $\alpha + \beta$ の回転移動になることと、一方、 $f = T_A, g = T_B$ のとき、 $g \circ f = T_{BA}$ となることを用いて、三角関数の加法定理

$$\sin(\alpha + \beta) = \sin \alpha \cos \beta + \cos \alpha \sin \beta, \quad \cos(\alpha + \beta) = \cos \alpha \cos \beta - \sin \alpha \sin \beta$$

を示せ²⁸⁾。

この練習問題の狙いは、回転の合成変換を通して、三角関数の加法定理を導き出すことである。忘れていたか、あるいは意味もわからず暗記している加法定理に幾何学的意味を与えるとともに、行列の積の定義の根拠をも明らかにするといえる。佐武一郎『線形代数』の検討の際にも述べた

ように、行列の積を形式的に定義することには賛同できない。しかし、一般の合成写像に基づいて行列の積を定義した後、その意味づけをさらに確実なものとするため、この練習問題を、実際の授業における重要な構成要素として位置づけたい。

第2章 線型代数の教育内容構成の論理

前章でのテキストの検討を通して、線型代数指導の教育内容構成の原理として、次のことが浮かび上がってきた。すなわち、公理的体系である線型代数を、定義と定理の羅列で教えるのではなく、それらの定義や定理に対して何らかの意味を与えるような場面設定が必要である、ということである。そして、そういった場面としては、対象が幾何学的ベクトルか数ベクトルかは議論の余地があるものの、線型変換を実際に行ってみて、その像を求めることがふさわしいであろうということも見えてきた。

本章では、線型代数の教育内容構成の論理を明らかにするために、さらに議論を進めていきたい。以下、第1節で、ベクトルや行列と線型代数学の発展の歴史にふれ、第2節で、正比例関数から多変数関数の微積分にいたるカリキュラムである、「森ダイヤグラム」について検討を加えておく。そして、第3節で、幾何学における変換群論の線型代数指導における役割について述べながら、線型代数の導入指導過程に関する提案を行いたい。さらに、第4節で、文系大学生に対する線型代数指導において必要な教育内容について述べる。

第1節 線型代数の発展史

今日の代数学が、連立1次方程式の解法の探究から大いに発展したということは、紛れもない事実である。その帰結として、連立1次方程式の解を導く方法は、今日の線型代数学のテキストのほとんどに登場している。そのため、テキストでは、線型代数学の、方程式の解を導くための抽象的方法としての側面が強調されやすくなり、見た目としても、具体的意味をもたない定義と形式的な演算規則が並べられることになる。

しかし、線型代数の発展の歴史を紐解くと、必ずしも抽象的議論のみによって理論体系が作り上げられたわけではないことがわかる。その発展過程には、常に幾何学が横たわっており、幾何学的概念との接近とそれからの独立を繰り返しながら、今日の線型代数の体系が形成されてきたとみてよい。

その例として、まず、複素数の幾何学的表示の試みがあげられる。複素数は17世紀イタリアの代数学者たちの手によるものであるが、「その性格は1800年ごろまで神秘的なものにとどまっていた」²⁹⁾といわれている。しかし、しだいに、複素数に対して、その幾何学的モデルを見つける様々な努力がなされた³⁰⁾。これは、「ある数学的対象の存在を幾何学的方法で表わし、幾何学的解釈が可能となったとき、それを数学的実在とみる」という、「ギリシア時代以来の伝統」³¹⁾に従うかたちでなされた。18世紀末から19世紀にかけての、ウェッセル (Wessel, C.)、アルガン (Argand, J. R.)、そしてガウス (Gauss, C. F.) の仕事がこのに相当する。彼らの仕事によって、複素数は、幾何学的解釈を得て、「数学的実在」となった。

これらの試みは、同時に、実数の体系に新しい概念を加えて、実数を拡張した新たな数の体系を構築しようとしたものでもあった。したがって、この複素数には、幾何学的実在である点と対応が可能になることだけでなく、実数と同じようにいくつかの演算法則を満たすことが求められた。この過程で、今日の可換律や分配律、結合律が使われるようになったのである。また、複

素数 $z = x + yi$ の「実部」 $\operatorname{Re}(z) = x$ や、「絶対値」 $|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$ などの用語が、ワイエルシュトラス (Weierstrass, K.) によって用いられるようになった³²⁾。

こうした流れの中で、複素数を実数の順序対とした形式的代数を導入したのが、代数学の基礎を築いたとされるハミルトン (Hamilton, W.) である。ハミルトンは、今日の複素数体系における演算法則とまったく変わらないものを、すでにこの時期に提示している。複素数の積についても、 $(a, b)(\alpha, \beta) = (a\alpha - b\beta, a\beta + b\alpha)$ とし、回転を伴う演算と解釈している。このような定式化の背景には、上述の、ウェッセルやアルガン、ガウスらによる、複素数の幾何学的解釈が存在していたのである³³⁾。

複素数がその幾何学的解釈を得るとともに、演算法則の定式化がなされたことは、ベクトル概念の導入につながってゆく。ベクトルの概念そのものは、力や速度を表現するものとして、すでに力学の世界では用いられていたが、それが代数学に応用されることはなかった。一般的なベクトルの概念が確立するためには、複素数の加法が考えられるようになるまでの時間を要したのである。さらに、2次元のベクトルが3次元以上に拡張されるには、ケーリー (Cayley, A.) の登場を待たねばならなかった。

先述の通り、当時の数学界では、「ギリシア時代以来の伝統」通りに、「数学的对象は知覚しうる世界での解釈を持たねばならない」と考えられていた。しかし、ケーリーは、「 n 次元空間のベクトルとは単に n 個の実数または複素数の系 $(x_1, \dots, x_n)$ にすぎない」として、ベクトルを n 次元に拡張したのである³⁴⁾。幾何学者としてのケーリーは、連立1次方程式の解を求めることから発展した行列式の理論を用いながら、 n 次元空間の解析幾何学を創案していった。その一方で、代数学者としてのケーリーは、「行列をはじめて研究した数学者の1人」³⁵⁾といわれ、行列を用いた線型変換の理論を発展させて、行列とその演算に関する代数学を発表している。もっとも、線型変換自体は、ラグランジュやガウスの仕事の中にもすでに見られており、ガウスは、変換の合成から行列の積を得ている。結局、多次元に拡張されたベクトル概念の確立のためには、平面における幾何学的ベクトルや、変換の概念が必要であったといえる。

以下に、線型代数の発展史を概観したことを通して得られた、この節のまとめを述べておこう。公理的立場からいえば、ベクトルはベクトル空間の元という抽象的存在である。しかし、これまでに見てきたように、多くの偉大な数学者たちでさえ、そのような見解に達するまでには相当の時間と労力を費やしている。人類の認識のなかに、初めから抽象的な代数学の世界があったわけではない。幾何学的ベクトルを中心とした幾何学的概念や変換の概念が、代数学の成立・発展に大きく関わっていたといえる。

小学校以来、われわれは、量に基づきながら、自然数から実数にいたるまでの、数の概念を獲得してきた。確かに、量の概念そのもの、またそれと数との関わりも、自明のことではない。量とはいいいながら、それが具体物と未分化であったり、時には、線分や面積といった幾何学的概念とほとんど同義語として用いられる場合もある。しかしながら、そのように量概念自体の不確定さはありながらも、「量にもとづく数学教育」は成果を上げてきた。今、文系大学生に対する線型代数指導を考える際、数指導における量概念に相当するような、線型代数に対応する具体的イメージが必要とされるのではないか。そして、それは、上に見てきた線型代数の発展史からも明らかのように、幾何学的概念より他にない。そこで、幾何学的概念、とりわけ図形の変換にもとづく線型代数指導を考えてみよう。このことは、第一に、演算の定義された幾何学的ベクトルの集合がすでにベクトル空間をなしているという理由から、積極的に支持される。第二に、数学教

育のあらゆる場面に幾何学的概念が登場し、また、それが有効に機能している多くの教育実践例が存在していることから後押しされるであろう。

したがって、図形の変換に基づく線型代数指導という考え方は、ごく自然な発想である。にもかかわらず、行列はあるが変換はなくなってしまった現行の高等学校の教科書からも明らかなように、線型代数指導の構成の論理としてはまだまだ位置づいているとはいえない。これからは、幾何学的ベクトルをはじめとする、代数学の成立を助けた諸概念を、その指導の際にも取り入れることが必要となるだろう。もちろん、公理的構成の代数学を学んだ後に、その応用あるいは意味づけとして、というのではない。ある概念を定義する、まさにその場面で行き入れるのが自然である。この主張は、数学教育の研究者や教師にとってはほとんど自明であり、それほど新鮮さはないかもしれない。しかし、大学生用の線型代数のテキストを見る限りでは、このような主張をしておくことにも意味があるといえるだろう。

第2節 正比例の発展としての線型代数

「線型代数学は、数学のもっとも古い分野の一つでありながら、またもっとも新しいものの一つに数えられる。すなわち、まず数学の始原のところに、ただ一回の乗除で解かれる問題、つまり $f(x) = ax$ のような関数の値の算出とか、方程式 $ax = b$ の解法とかの、問題がある。それが線型代数学の典型的な問題で、これを扱うのに、いやこれを正しく提起するのにも、『線型的に考察する』ことなしには、すまされない」³⁶⁾。ブルバキの『数学史』のなかのこの記述は、線型写像のうちで最も基礎的である正比例を扱う際にも、その線型性を重要視しなければならないことを述べている。

森毅は、1968年に、今日まで「森ダイアグラム」とよばれている、「小学校から大学教養までの数学教育の一つの骨格」を提示している³⁷⁾。この中身について、森は、1980年の著書³⁸⁾において、より詳しく述べている。それによると、森は、小学校で学ぶ自然数から小数や分数、そしてその加減乗除の結節点として、象徴的には正比例がある、と述べている。そして、中学校数学の出発点としての意味を荷なっている正比例 $Y = aX$ が、「非同次1次関数から2次関数へと進む方向は微積分の方向であり、2変数1次関数や、それと関連して2元1次方程式や直線の式表現を扱うのは線型代数の方向である」³⁹⁾としている。すなわち、「正比例を中等教育の礎石とすえ、2つの志向性を持つことが中学数学」⁴⁰⁾なのである。このような考えに立つと、「高校での柱として、微積分と線型代数といった考えもなりたつ」⁴¹⁾。さらに、「微積分(1変数)と線型代数とを、完成すること、統合しながら多変数へ発展させること」⁴²⁾が、大学での目標として設定されると述べている。

以上をまとめると、次のようになるであろう。小学校で学ぶ正比例を中等教育での礎石にすえ、そこから、2つの志向性をもちながら数学教育を進める。その志向性の1方向は、中学校での非同次1次関数から2次関数へと進み、高校での微積分へと発展させるというものである。もう一方は、中学校での2変数1次関数や2元1次方程式、直線の式表現から、高校での線型代数へと進む道である。そして、微積分と線型代数という高等学校での2本の柱を完成させながら、両者を統合させてゆくのが、大学での目標となる。

ところで、森がこのダイアグラムを提起してから30年の歳月が流れた今日、この「理念的カリキュラム」⁴³⁾が、どの程度実践的カリキュラムに変わっているのかを見てみよう。北海道大学教育学部の数学教育研究グループには、内包量、正比例、1次関数と2次関数、2次関数と微積分

の授業プランがある⁴⁴⁾。作成者らがどの程度意識していたかは別として、これらの一連の授業プランは、森ダイアグラムにおける、正比例から微積分へと至る流れに含まれると考えられる。しかし、正比例を起点として線型代数へと至る流れについてはどうであろうか。微積分の方向と比較して、授業プログラムの開発に関する研究は、あまり進んでいないといえる⁴⁵⁾。大学生向けの線型代数のテキストを見ても、正比例のもつ線型性から説き起こしたものは、筆者の調べた限りではほとんどない。線型写像の定義をした後に、正比例関数が線型写像の1つであることを説明しているテキストは、いくつかある⁴⁶⁾。しかし、文系大学生にとっては、抽象的な線型写像の定義へいたる過程にこそ大きな困難があると考えられる。正比例の線型性を確認してから、

より一般的な線型写像の典型例として、
$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$
へと進む方がより自然である。

すでに述べてきたように、線型写像の理解には幾何学的イメージが欠かせない。したがって、上の式で与えられる線型写像は、抽象的なものではなく、平面上の点変換として理解されるようにしたい。このように考えると、正比例の線型性を確認する段階における、必要な教育内容が見えてくる。正比例の点変換としての側面、すなわち、1次元における中心拡大の概念の理解が重要になってくるといえる。この点を、教育内容として位置づける必要がある。正比例関数の比例定数が変換のパラメータとして機能する、という点に触れておくことは、重要である。さらにいえば、実際に行われる線型代数の授業のなかでは、いずれ、行列の積の定義の根拠になっている、変換の合成を扱わなければならない。そこで、1次元の中心拡大のなかで、合成変換の概念とその求め方に慣れておくことは有効であろう。例えば、 μ を実数として、原点Oに関する μ 倍の中心拡大を $M(O; \mu)$ とすれば、その合成変換 $M(O; \mu_2) \circ M(O; \mu_1) = M(O; \mu_1) \circ M(O; \mu_2)$ は、 $M(O; \mu_1 \mu_2)$ に等しい。この事実から、中学校1年生の学習内容である正の数・負の数の積の演算法則に対して、幾何学的意味づけを与えることもでき、大学生に対する面白い教育内容になる。

第3節 幾何学における群論的考察の意義

線型代数指導の導入として、正比例と、その幾何学的イメージである1次元における中心拡大を扱うことを、前節の終わりに述べた。本節では、その次の段階、すなわち、より一般の線型写像の典型例である
$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases}$$
へと進んだ場合に、いかなる幾何学的イメージを必要とするかを検討してゆく。

本稿の立場では、線型代数の幾何学的イメージを、ユークリッド空間上のアフィン変換であるにとらえる。厳密には、1次変換であるというべきかもしれない。しかし、アフィン変換も原点の取り方を変えれば1次変換と同一視できるので、アフィン変換であるとしても問題はない⁴⁷⁾。したがって、実際に行われる授業では、アフィン変換を行いながら線型代数の理論の豊かな理解を目指すことになる。このことは、同時に、アフィン変換群による不変性を、行列と線型代数を用いながら明らかにするという、幾何教育の一環であるとも考えることもできる。いずれにしても、線型代数学と幾何学の世界を行きつ戻りつしながら、双方を眺めることになるのである。

線型代数学と幾何学の垣根を取り払おうとする立場から、幾何学と幾何教育に関する考察を今少し進めておきたい。クライン (Klein, F.) が述べているように、幾何学は変換による不変性

を探究する学問である。そして、不変性は、変換群に対応して存在している⁴⁸⁾。さらに、クラインは、ある変換群に含まれる要素を制限して、それらの制限された要素からなる変換群の下で不変な性質を研究することにも言及している⁴⁹⁾。それは、変換群の部分群による不変性を研究せよということである。

変換群に部分群が存在することは、変換による不変性という観点から図形の諸性質が分類され、また、それらの相互関連が明らかになるということである。例えば、アフィン変換群には、いくつかの部分群が存在する。そのもっとも主要な部分群であるというべき相似変換群は、線分の内分比の保存というアフィン変換群の性質を保ちつつ、形の不変性という相似変換群に固有の性質をもつものとして分類される。さらに、合同変換群は、相似変換群の部分群になっており、変換による大きさの不変性という性質を有している。このようなクラインの主張にならい、とりあえずユークリッド平面上に限定して、「変換群の部分群による不変性」を知ることを、教育内容の1つとして位置づけたい。

変換群の部分群に着目することには、次のようなメリットがある。すなわち、教育内容提示の順序構造をどうするかという課題に対して、群論という数学的論理構造の立場から、示唆を得ることができるということである⁵⁰⁾。変換群は、数学的側面から見れば変換の合成という演算に関して閉じた集合であり、その集合の性質を調べることは、ひとまとまりの教育内容となり得る。ある変換群の性質についてくまなく調べ尽くしたとき、学習者は、その変換群について「すべてわかった」と感じることができる。この感覚は、非常に大切であると思われる。「すべてわかった」と感じて初めて、その変換群より広い新たな変換群のつくる世界への興味が湧いてくるであろう。

さて、それではどの変換群を最初の内容とするかについて述べておこう。もっとも単純な変換群は、恒等変換だけからなる群である。狭い方から広い方へという原則を立てるならば、この群から教えることになるだろう。しかし、「動かさない」ということは、むしろ、「動かす」ことの否定としてこそよりよく理解されると思われる。どの点も動かさないから恒等変換の概念は簡単である、ということにはならないのである。

そこで、次に、併進群を考えてみる。合同変換を構成する3つの要素である併進、回転、鏡映のうちで、「ずらす」という言葉で特徴づけられる併進が、もっとも認識しやすいのではないだろうか⁵¹⁾。そう考えると、指導の際には併進群から入るというのも1つの方法であろう。しかし、併進群は、単純すぎるせいか、そこからの発展に乏しいともいえる。さらに、併進は、原点を原点に移さないため、線型性の条件を満たさない変換である。したがって、併進群は、線型変換の学習の応用・発展として学習されるのが適当であり、そのなかで、原点の取り方によらない、変換による不変性の発見が求められる教材であるといえる。教育内容の順序構成をこのようにすることは、現在教えられている、小学校で $y = ax$ を、中学校で $y = ax + b$ をという順序に照応している。また、併進の指導には、それを表現する行列の次元が上がるという困難な点も存在する。ユークリッド平面における併進を考えた場合、ベクトル (a, b) による併進 $(x, y) \rightarrow (x', y')$ は、表現行列を用いると

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix}$$

と表される。2次元ユークリッド空間における変換でも、3次正方行列が必要になるのである。もっとも、3次正方行列を用いずに、

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

のように表す方法もあり、どちらが便利かは、どういった問題を扱っているかによって変わってくるであろう。ただし、合成変換を求めるときなど、群論的な考察が必要になる場合は、3次正方行列を用いる前者の方法が一般的であるといえる。しかし、初学者にとって、平面上の変換で3次正方行列を必要とすることは、やや難しいのではないと思われる。以上のことから、併進群を導入部分で扱うことは適切ではない。

それでは、三角形の向きを変える、鏡映はどうであろうか。あるただ1つの鏡映と恒等変換との集合は群になる（鏡映の逆変換は自分自身である）が、この事実を確認するのは簡単すぎて、導入部分の教育内容として面白味に欠ける。

そこで、回転に注目して、中心をある点に固定したすべての回転からなる群を、教育内容として取り上げたい。この内容は、扱い方には違いがあったものの、第1章で検討したテキストの中にも現れていた。中心を固定した回転の集合における変換の合成が、変換の順序によらず、同じ点を中心として、それぞれの回転角の和を新たな回転角とする1つの回転になる⁵²⁾ということは、文系大学生には自明であろう。この認識に頼りつつ、正弦・余弦の加法定理を導くとともに、群成立の条件である恒等変換と逆変換を学習する。このことによって、中心を固定した回転群の性質が尽くされる。

第4節 線型代数指導の到達目標点

線型代数のテキストで、線型空間や線型写像の定義を書いていないものはないといえる。しかし、それ以外の部分については、テキストの目的や想定する読者層、あるいは、著者の好みによって変わってくる。また、同じ内容であっても、扱いに軽重の差が出る。よく扱われるのは、行列式論、連立1次方程式の解法、固有値・固有ベクトル、行列の対角化、ジョルダン標準型、線型微分方程式などである。

前節までに述べてきた、幾何学的概念と関連づけられながら進められる、中心を固定した回転群の学習によって、変換とその表現行列、合成変換、行列の積の意味など、線型代数の理解に必要な基本的道具が揃う。もちろん、それらの背後に横たわる集合や写像に関わる概念も、ある程度まで獲得されていることが期待される。それだけの道具を得た上で次に何を学習するのかという問題は、文系大学生への線型代数指導の到達目標点をどこにおくかという問題に関わってくる。本稿の「はじめに」で述べた線型代数指導の目的から見て、さらにどのような内容を展開することが考えられるか、以下に検討していこう。

(1) 固有値・固有ベクトル

森毅の主張する、正比例からの発展としての線型代数の教育内容という場合に、固有値・固有ベクトルの問題を外すことはできない。数学的には、行列 A とベクトル x に対して、 $Ax = \lambda x$ となる λ を固有値、 x を固有ベクトルとよぶ。その定義を述べることは簡単であるが、大切なのは、そのようなものを考える意味を説明することである。

未知のものを既知のものの近似としてとらえることは、われわれの認識において、一般的に行われていることである。数学教育の場面においては、例えば、微分があげられる。微分は、曲線の線型近似である。固有値・固有ベクトルの考え方は、これに類した近似であると考えられる。与えられた線型変換によって図形がどのように変換されるかは、一般的に言って、われわれにとつ

て認識しやすいものではない。そこで、線型変換に不動直線を見だし、変換の様子を1つまたは2つの正比例によってとらえようとするのである。ここに、固有値・固有ベクトルの意義がある。すなわち、固有値を「比例定数のベクトル版」⁵³⁾と見ることによって、線型変換を正比例に還元して理解することが可能になるのである。固有値・固有ベクトルについては、2次元に限定すれば、幾何学的イメージに頼りながらの展開ができると思われる。

(2) 線型代数の方法による幾何教育

線型代数の方法を用いて、小学校・中学校で学ぶ相似変換群の内容を再構成することができる。前節で、線型代数の導入として、中心を固定した回転群を扱うことを述べた。この群からの発展として、中心を固定しない回転の集合を考えよう。中心の異なる2つの回転を合成する場合、一方の中心を原点にとっても一般性を失わない。その上で、他方の点を中心とする回転を考える際に、併進とその表現行列としての3次正方行列を導入することになる。ここから、中心の異なる2つの回転の合成が回転あるいは併進になる⁵⁴⁾ことを導き、この時点で正格合同変換群⁵⁵⁾が完成する。さらに、合同変換群を考えるためには、鏡映が必要になる。原点を通る直線に関する鏡映の表現行列は、前学習指導要領の時代には、扱っていた教科書もあった内容である。鏡映の合成は、それらの軸が平行であるか否かによって、併進あるいは回転になる⁵⁶⁾。これらの事実を線型代数の方法によって確認することは、抽象的である線型代数の幾何学的応用を示すことに他ならない。そして、同時に、幾何教育そのものであると考えてもよい。線型代数の方法を通して、より広い幾何学の世界と、その研究方法の一端を提示することにもなるのである。

(3) 連立1次方程式の解法

これまで、幾何学的イメージと密接に関わりをもった線型代数指導の方法について述べてきた。しかし、徐々に幾何学的イメージと離れてゆき、抽象的代数操作の段階に入ることもまた必要である。線型代数の幅広い応用性は、その抽象性によって支えられているのである。

抽象的代数操作の段階の学習内容として、やはり、連立1次方程式の解法に関する部分を欠かすことはできない。行列 A が逆行列 A^{-1} をもつとき、連立1次方程式 $Ax = b$ が $x = A^{-1}b$ を解にもつことの証明は簡単である。だが、実際に A^{-1} を計算して解を求められるのは、せいぜい、 A が2次正方行列のときまでであろう⁵⁷⁾。 A の次数がそれ以上のときや、 A が逆行列をもたないときのために、より一般的な解法が要求される。その解法が、クラメル公式であり、あるいは、ガウスの解法とよばれる掃き出し法である。

これらの解法を学ぶ利点は、直接的には、連立1次方程式が実際に解けるようになることである。大学の専門課程、あるいはそれ以降の生活において、何らかの現実的な課題から生成された連立1次方程式を解く必要が生じるかもしれない。それを解くことによって、課題を解決することができる。特に、経済学や統計学に関わる学生にとっては、専門課程の前の基礎教育として、重要である。しかし、そのような利点の他に、いくつかの副産物がある。その第一は、中学校で連立1次方程式の解法を学ぶときに出てくる、加減法や代入法を再認識することができる点である。思えば、中学校で出てくる連立1次方程式のほとんどは、未知数が2つで式も2つしかないものであった。未知数や式の数が増えた場合はどうするのかという疑問には答えてくれない。加減法や代入法を拡張した掃き出し法を学ぶことにより、疑問を解決するとともに、より広い数学の世界を知ることができる。第二には、第一にあげたこととも密接に関わるのであるが、数学におけるアルゴリズム⁵⁸⁾の意味を学ぶことができるという点である。クラメル方法にしても掃き出し法にしても、手続きが定められており、有限回の操作で終了する、連立1次方程式の解法

の1つである。このようなアルゴリズムをもつものは、プログラミングと結びつきやすいため、コンピュータを活用した指導が可能となる。コンピュータ・プログラミングの基礎では、条件判定、分岐、繰り返しなどのアルゴリズムの言語化が指導内容になる。この場合、連立1次方程式の解法のプログラミング言語化は、ちょうどよい練習課題となり得る。情報処理系の科目との連携をうまくはかって、双方の授業が活性化されるようにしたい。

お わ り に

文系大学生に対する数学教育の一環として、線型代数の教育内容構成論を展開してきた。主張の要点をまとめると、以下ようになる。

高等学校の教科書では、行列を、「表から数値だけを抜き出したもの」と定義していた。しかし、この定義では、線型写像を表現するものとしての行列という認識が形成されにくい。既存の線型代数指導のテキストを検討した結果、数ベクトルか幾何学的ベクトルかの違いはあるにせよ、ベクトルの変換を実際に行うことが、線型代数の導入において有効に機能していることがわかった。線型代数は抽象的な学問であると思われがちであり、それは一面では正しいのであるが、他方では、幾何学的概念との密接な関わりを有しているといえる。そのことは、線型代数の発展の歴史からも明らかである。ここから、自然に、図形の変換に基づく線型代数指導ということが想起される。また、「森ダイアグラム」の構想を基本的に支持し、正比例関数の発展として線型代数を展開することを主張した。正比例の性質、とりわけ線型性を確認することが、線型代数指導の第一歩となる。正比例は、幾何学的には1次元の中心拡大であり、この範囲内で、比例定数が変換のパラメータになることを確認し、また、合成変換までを扱っておきたい。次に、正比例の範囲を離れて、より一般の線型写像の典型例として、2次元の線型写像を扱う。ここでは、原点を中心とする回転群の学習を通して、行列の積の意味を知るとともに、三角関数の加法定理を導く。これらは、高等学校における教育内容を、再度、高い立場から見直す作業になっている。文系大学生に対する線型代数指導の到達目標点を考えた場合に、欠かせない教育内容としては、第一に、固有値・固有ベクトルの概念がある。第二に、線型代数の方法を通して、それまでに学んできた幾何学、とりわけ相似変換群を再構成することがあげられる。第三に、連立1次方程式の解法に関する内容である。

本稿では、線型代数指導のために、図形の変換のイメージを大切にするように主張してきた。代数学の世界と幾何学の世界を結びつけることが必要である。数を用いて空間を表現する座標幾何学を初めて構想したデカルト (Descartes, R.) は、次のように述べている。「図形を描いて外部感覚に呈示し、かくしてわれらの思惟がより容易に注意を保ちうるようにすることも、たいいていの場合、有益である」⁵⁹⁾。本稿は、デカルトのこの提言を線型代数指導の場面に適応した場合、どのような展開が考えられるかについて考察したものであるともいえる。

今後は、以上の理論的枠組みに基づき、文系大学生に対する線型代数指導の授業プランを作成することが課題となる。そして、授業実践を通して、授業プランに盛り込まれる文系大学生の認識過程に関する仮説、ならびに、本稿で展開してきた、教育内容を構成するためのいくつかの仮説を検証する。

教育方法学の世界では、これまで、高等教育に関する部分の研究は比較的遅れていたといえよう。「大学は学習者が自ら学ぶ場所」といった考えから、授業の改善に関してあまり意識が払われなかった、ということもあるかもしれない。しかし、大学もまた、高等学校以前と同様に、教

育・学習活動が行われる場所であることに変わりはないのであり、教育方法学研究の対象となり得る。初等・中等教育と比べた、高等教育の特色には、学習者の多様性という事実があげられるだろう。そのようななかで、多様な学習者に理解される教育内容を構成することは難しい。とりわけ、本稿で取り扱った文系大学生への数学教育は、学習者の「興味」や「意欲」ということを考えた場合、困難点も多い。研究が遅れていた分、広大な研究領域のなかに研究課題が山積しているといえる。

最後に、再びデカルトを引いておこう。「問題を完全に理解したならば、それをすべての不必要な表象から分離し、最も単純なものに帰着せしめ、枚举によって、できる限り小なる部分に分割すべきである」⁶⁰⁾。「困難は分割せよ」と約言されるこの言葉にならい、膨大な研究課題を分割・整理し、着実に成果を積み上げてゆきたい。

註

- 1) 英語の linear に相当する日本語としては、「線形」と「線型」の二通りの表記方法がある。最近では、「線形」の方がよく用いられるようである。筆者は、これらの区別について、それほどこだわりがあるわけではないが、本稿では「線型」を用いることとしたい。linear には確かに「直線の」という「形」に関わった意味がある。しかし、linear algebra は linear という「システム」を問題にする学問であり、その意味では「型」の方が適すると考えるからである。ただし、引用においては原文に忠実にすることはいうまでもない。
- 2) 岡部恒治「数学教育の試み——文系の一般教育・基礎教育として——」（北海道大学高等教育機能開発総合センター『高等教育ジャーナル——高等教育と生涯学習——』第2号、1997年）236頁。
- 3) 佐武一郎『線形代数』共立出版、1997年、まえがき。
- 4) 藤田宏・前原昭二ほか『数学C』東京書籍、1995年。
- 5) 同上書、10頁。
- 6) 前掲佐武一郎『線形代数』。
- 7) 同上書、4頁。
- 8) 同上書、7頁。
- 9) 同上書、37頁。強調原文。なお、公理(V1.1)-(V2.4)を示しておこう ($x, y, z, \dots \in V$, $a, b, \dots \in R$)。

(V1.1) (結合法則) $(x + y) + z = x + (y + z)$

(V1.2) (交換法則) $x + y = y + x$

(V1.3) (零ベクトルの存在) 零ベクトルという一つのベクトル 0 があって、すべての $x \in V$ に対して

$$x + 0 = x$$

(V1.4) (逆ベクトルの存在) 任意のベクトル $x \in V$ に対して、逆ベクトル $-x$ が存在し、

$$x + (-x) = 0$$

(V2.1) $a(x + y) = ax + ay$

(V2.2) $(a + b)x = ax + bx$

(V2.3) $(ab)x = a(bx)$

(V2.4) $1x = x$
- 10) 同上書、72頁。

- 11) 同上書、38頁。
- 12) これに似た見解は、笠原皓司の著書にも見られる。笠原は、「数学ではベクトルという概念には“もの”としての性質（たとえば長さがあるとか、重さがあるとか、方向があるとか、矢羽根がついているとか色がついているとか）は元来含まれていないことを注意しておこう。では何をもってベクトルという概念を規定するか、それは正に上に述べたように、**それらの間に、加法と数乗法が（8つのルールをみたすように）とり決められているかどうか**で規定するのである〔強調原文——引用者〕」と述べている。その上で、「しかしながら、あることを理解する上で、何かある具体的なイメージをもって、それに頼っていくと理解しやすいということはよくあることである。そのようなイメージの1つとして、たとえば矢印というものを思い浮かべるのは一向にさしつかえない」として、最後に、「ただ、どんなイメージに頼ろうとも、数学的にはあくまでその算法の構造が問題なのである、ということさえ忘れなければよい」と注意している。笠原皓司『線型代数と固有値問題——スペクトル分解を中心に——』現代数学社、1972年、11-12頁参照。
- 13) 齋藤正彦『線型代数入門』東京大学出版会、1996年。
- 14) 同上書、2頁。強調原文。
- 15) 同上書、Ⅲ頁。
- 16) 同上書、16頁。
- 17) 同上書、33頁。
- 18) 同上書、44頁。
- 19) 同上書、45頁。
- 20) 同上書、Ⅳ頁。
- 21) 例えば、算数教育における計算指導の、きわめて有効な指導原理である「水道方式」は、「一般から特殊へ」の原理をもっている。しかし、相似の指導を先にしてその特殊ケースとして合同を教える、というプランは成功しそうにないと考えられる。
- 22) 石井伸郎ほか『新しい視点からの線形代数』培風館、1998年。
- 23) 同上書、1頁。著者らは、他に2つの背景として、次のことをあげている。第一に、「大学生の大学における講義の内容に対する要望」が「変化してきてい」ることである。そして、第二に、「線形代数の講義では、多くのなじみのない抽象的な概念が講義の最初に現れ、それに慣れないために講義についていけない学生が多く見られ」ることである。
- 24) 同上書、38頁。
- 25) 同上書、38頁。
- 26) 同上書、46頁。
- 27) 同上書、1頁。
- 28) 同上書、46頁。問題中の加法定理の一部が誤っていたので、修正した。なお、記号 T_A は、行列 A が与えられたときに、ベクトル x に Ax を対応させる線型写像のことである。
- 29) デュドネ編『数学史Ⅰ』岩波書店、1985年、61頁。
- 30) 小杉肇『数学史（数と方程式）』槇書店、1973年、93-98頁参照。
- 31) 近藤基吉・井関清志『近代数学〔上〕——現代数学の黎明期』日本評論社、1982年、59頁。
- 32) 同上書、62-63頁参照。
- 33) ボイヤー『数学の歴史5』朝倉書店、1985年、111-112頁参照。
- 34) 前掲デュドネ編『数学史Ⅰ』106-107頁参照。

- 35) 前掲ボイヤー『数学の歴史5』115頁。
- 36) ブルバキ『数学史』東京図書、1970年、76頁。
- 37) 森毅「数学の構造」(『教育学全集6 論理と数学』小学館、1968年) 138-140頁参照。
- 38) 森毅『線型代数——生態と意味——』日本評論社、1980年。
- 39) 同上書、3頁。
- 40) 同上書、4頁。
- 41) 同上書、5頁。
- 42) 同上書、5頁。
- 43) 同上書、3頁。
- 44) さらに、石川高行が、多変数関数の指導過程を構成しつつある。石川高行「文系大学生を対象とする多変数関数指導の基礎的考察」北海道大学大学院教育学研究科修士学位論文、1998年参照。
- 45) 高校生向けの授業プランとしては、氏家英夫の作成した『線型代数入門』(数学教育協議会全国大会レポート、1998年)がある。筆者は、この授業プランから学ぶところが非常に大きかった。
- 46) 例えば、松坂和夫『線型代数入門』岩波書店、1980年、82頁参照。
- 47) このような考え方は、薩摩順吉・四ッ谷晶二の次の言葉に学んでいる。「アファイン変換は線形変換を拡張したものであるが、幾何的な性質を考えたときには、線形変換と本質的に変わりがないものである」(薩摩順吉・四ッ谷晶二『キーポイント線形代数』岩波書店、1992年、76頁)。
- 48) F. クライン「エルランゲン・プログラム」(『現代数学の系譜7』共立出版、1970年) 277-278頁参照。
- 49) 同上書、279頁参照。
- 50) このような問題意識から、筆者は、先に、H. S. M. コクセター『幾何学入門』明治図書、1965年に基づいて、相似変換群を、線型代数の方法によって群論的に分類している。拙稿「ユークリッド平面における相似変換の表現行列と構造について」(北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第14号、1997年) 7-47頁参照。
- 51) これは、素朴な認識レベルを問題にしたものであり、数学的根拠をもたない議論である。数学的には、併進と回転はそれぞれ、鏡映2回の合成変換によって構成されるのである。須田勝彦・久蔵宏幸・岡野勉は、鏡映を合同変換の基本に据え、その合成により併進と回転を定義して、合同変換群の性質を導くという、小学校高学年向けの幾何教育の授業プランを提示した。須田勝彦・久蔵宏幸・岡野勉「授業書『鏡による図形の移動』と授業記録」(北海道大学教育学部教育方法学研究室『教授学の探究』第8号、1990年) 69-121頁参照。
- 52) 点Oを中心とする回転角 α の回転を $R(O; \alpha)$ と書くと、 $R(O; \alpha) \circ R(O; \beta) = R(O; \beta) \circ R(O; \alpha) = R(O; \alpha + \beta)$ となることを指している。
- 53) 前掲薩摩順吉・四ッ谷晶二『キーポイント線形代数』115頁。
- 54) 一般的にはある点を中心とする1つの回転となるが、例外的に、回転角の和が 360° (の整数倍)のときには併進になる。詳しくは、前掲拙稿「ユークリッド平面における相似変換の表現行列と構造について」18-21頁参照。
- 55) 三角形の向きを変えない変換を「正格」といい、向きを変える変換を「変格」という。
- 56) 前掲拙稿「ユークリッド平面における相似変換の表現行列と構造について」21-24頁参照。
- 57) 高等学校の教科書でも、「3次正方行列の逆行列を求めることは、一般にはあまり容易ではない」(前掲藤田宏・前原昭二ほか『数学C』32頁)と書いている。
- 58) アルゴリズムとは、「ある問題の類に対する、およびその類に属するすべての問題を有限回の操作で

一意的に解く手続きの体系」(須田勝彦「アルゴリズム」[『現代教育学事典』労働旬報社、1988年] 11頁)を指す。

59) デカルト『精神指導の規則』岩波書店、1950年、121頁。

60) 同上書、94頁。