HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	円筒音波および球面音波の非線形共鳴現象の理論
Author(s)	栗原, 央流
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	乙第6553号
Issue Date	2007-06-29
DOI	https://doi.org/10.14943/doctoral.r6553
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/29716
Type	doctoral thesis
File Information	thesis.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

円筒音波および球面音波の非線形共鳴現象の理論

栗原 央流

2007年6月

目 次

第 1 章　序論 **4**

第 2 章　問題の定式化 **9**

2.1　二重円筒および二重球殻の概念図 9

2.2　現象を特徴づける重要なパラメータ 11

2.2.1　音響マッハ数: M 11

2.2.2　レイノルズ数: Re 12

2.2.3　無次元化された外部円筒 (球殻) の半径: r_s 13

2.2.4　内部円柱 (球) と外部円筒 (球殻) の半径の比: α 14

2.2.5　非線形パラメータ: B/A 14

2.3　流体の運動を支配する方程式 15

2.4　境界条件および初期条件 18

第 3 章　同軸円筒および同心球殻内に励起される弱非線形共鳴音波 **22**

3.1　支配方程式と境界条件 22

3.2　多重尺度法による解析 24

3.3　共鳴波の振幅の非線形応答とその変調 35

3.3.1　散逸が無いケース 37

3.3.2　散逸のあるケース 47

3.4　結論 54

第 4 章　同軸円筒内の気体中に励起される強非線形共鳴音波の数値解析 **56**

4.1　支配方程式と境界条件・初期条件 57

4.2 境界条件の数値的な取り扱いと座標変換 58
4.2.1 境界条件の数値的取り扱い 58
4.2.2 一般座標変換 59
4.2.3 本問題に対する一般座標変換の適用 61
4.3 強非線形共鳴円筒波の数値解析 63
4.3.1 Case 1 ($\alpha = 0.1,\ M = 1 \times 10^{-4}$) 64
4.3.2 Case 2 ($\alpha = 0.1,\ M = 1 \times 10^{-2}$) 67
4.3.3 Case 3 ($\alpha = 0.9,\ M = 1 \times 10^{-4}$) 71
4.3.4 Case 4 ($\alpha = 0.9,\ M = 1 \times 10^{-2}$) 76
4.3.5 時間平均された物理量と音場の幾何形状の関係 77
4.3.6 α と M による共鳴波のふるまいの変化 84
4.4 結論 88

第 5 章 偏心二重円筒内に励起される共鳴音波の解析 90
5.1 問題の定式化 90
5.2 線形解析 92
5.3 偏心円筒内に励起される定在音波の空間波形 96
5.4 偏心円筒内の気体中に励起される非線形共鳴音波の数値解析 98
5.5 結論 102

第 6 章 結論 103

付 録 A 散逸を考慮した速度ポテンシャルに関する非線形波動方程式の導出 115

付 録 B 線形解に関する考察 119

付 録 C 弱非線形共鳴波における定常振動解とその性質 125
C.1 Cardano の解法による定常振動の振幅 125
C.2 定常振幅の解の性質 127
C.2.1 $D < 0$ の場合 (異なる 3 実解が存在) 128

C.2.2　$D \geq 0$ の場合 (ただひとつの実解が存在) 129

付 録 D Chakravarthy–Osher の高次精度 TVD 風上差分スキーム **130**

D.1 Osher のスキーム 130

D.2 Chakravarthy–Osher のスキーム 133

D.3 Chakravarthy–Osher スキームによる衝撃波捕獲 135

第1章　序論

一様な媒質中を伝播する微小振幅音波のふるまいは，流体のもつ粘性と熱伝導性によるエネルギー散逸が無視できるならば，線形の波動方程式によって記述できることが知られている．たとえば，無限にひろがった2枚の平行平板間に満たされた流体中に励起される1次元音波を考えるならば，この流体の流速を記述する支配方程式は次のように書くことができる [1].

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c_0^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0 \tag{1.1}$$

ここで，c_0 は静止一様状態における流体中の音速である．方程式 (1.1) は，

$$u(x,t) = f(x - c_0 t) + g(x + c_0 t) \tag{1.2}$$

という一般解 (d'Alembert の解) をもつことが知られている．解 (1.2) の右辺第1項は x 軸の正の方向に速度 c_0 で伝播する音波を表し，第2項は負の方向に進行する音波を表している．いま，一方の平板が $x = 0$ を中心として $u = u_0 \sin \omega t$ という速度で振動するとき，この平板から x 軸の正の方向へ振幅 u_0，角振動数 ω の正弦音波 $u = u_0 \sin \omega(t - x/c_0)$ が放射される．この正弦音波が $x = L$ で静止しているもう一方の平板 (剛体壁) で反射されることにより振幅と波長が同じで x 軸の負の方向に伝播する正弦音波が発生する．これら音源から放射される進行波と剛体壁において反射された後退波の重ね合わせの結果，2つの平板間には空間的に特定の方向に進行しない定在波が励起される:

$$u = u_0 \sin \omega t \frac{\sin \dfrac{\omega}{c_0}(L - x)}{\sin \dfrac{\omega}{c_0} L} \tag{1.3}$$

式 (1.3) によって表される定在波解は，$\omega L/c_0 = n\pi$ となるとき，すなわち平板間の距離 L が音波の波長の半分の値 (半波長:$\pi c_0/\omega$) の整数倍となるとき発散し，その意味を失う．実際に $L = n\pi c_0/\omega$ を満たす条件の近傍では，定在波の振幅が極めて大きくなるということは古く

から知られている．このように，音源から放射される音波によって定在波が形成されるような系において，特定の周波数およびその近傍で音波の振幅が急激に大きくなる現象を (音の) 共鳴現象という．

音波の共鳴現象の最大の特徴は，その振幅が極めて大きいということにある．これは，音源の振幅が微小であったとしても，共鳴によって有限振幅の音波が励起され得ることを意味する．線形の波動方程式は，音波の振幅が微小であることを仮定して導かれているため，共鳴によって励起される大振幅の音波のふるまいを記述することはできない．事実，有限振幅音波の伝播は本質的に非線形な現象であり，そこには波形の歪みや衝撃波の形成，音響流の発生といった多くの非線形現象が現れる [1]．本研究は，音波の大振幅共鳴とそこに現れる特徴的な非線形現象の詳細を明らかにするために，円筒音波と球面音波という基本的な幾何学形状をもった音波の共鳴現象を対象とし，同軸および偏心二重円筒，同心二重球殻内に励起される共鳴音波のふるまいを解析することを目的としている．本研究では，理論的な解析手法と数値的な手法を駆使してこれらの問題に取り組む．

閉じられた管内の気体中における平面音波の共鳴現象は，音波の共鳴現象の典型的な例としてこれまでに数多くの実験的および理論的な研究がなされている [2–10] ．これらの研究によって，気体のもつ粘性と熱伝導性によるエネルギーの散逸が小さい場合，平面音波の共鳴では必ず衝撃波が形成されることおよび衝撃波面における強い散逸効果のために共鳴波の振幅の成長が $O(\sqrt{M})$ に抑えられてしまうことが明らかにされた[1]．この衝撃波の形成と振幅の増幅の抑制効果は，理論的な面だけでなく後述する共鳴音波の工学的応用の面からも極めて重要な意味をもつ．

音波の応用としては，超音波による画像診断や体内結石破砕といった医療に関連するものや魚群探知機やソナーに代表される海洋音響観測・通信技術などがよく知られているが，近年，超音波の非線形効果による自己復調現象を利用した骨伝導ヘッドホン [11] や超音波の照射によるキャビテーションを利用した有機物の分解技術 [12]，ドップラー効果を利用した流速分布計測法 [13] など数多くの新しい技術が開発・利用されてきている．これらの応用技術は比較的振幅の小さな音波を利用したものであるが，大振幅の音波を利用した技術として，

[1] M は音源における音響 Mach 数である．我々が日常経験する音波の Mach 数は，たかだか数千から数万分の一程度の大きさである．詳細は第 2 章参照.

熱エネルギーと音響エネルギーの直接的な変換を行う熱音響エンジン・冷凍機 [14–16] や音波の大振幅共鳴現象を利用した音響圧縮機 [17]，さらに，大振幅音場における音響放射圧 [18] による音響浮揚現象 [19] を利用した物体の位置制御技術や円管内の集塵技術 [20] などが挙げられる．これらの技術の実用化にあたっては，装置の高出力化・高効率化の観点からそこで利用する音波の振幅を少しでも大きくすることが望まれる．その方法のひとつとして，音波の共鳴現象を利用した振幅の増幅が注目されている．

すでに述べたように平面音波の共鳴現象においては，非線形効果によって衝撃波が形成されるために，それによる振幅の増幅は $O(\sqrt{M})$ で限界に達する．これに対して円筒音波や球面音波の弱非線形共鳴現象では，エネルギー散逸を考慮しなかったとしても音響 Mach 数 M がある程度に小さければ衝撃波の形成が起こらないことが Chester [21]，Ellermeier [22, 23] によって示された．これは，円筒波や球面波の定在波において，高次の共鳴モードの振動数が系の基本共鳴振動数の整数倍に一致しないということによる[2]．そのために衝撃波の形成に本質的な役割を果たす基本波から高調波へのエネルギー輸送が阻害され，その結果として衝撃波の形成が抑制される．円筒波や球面波の共鳴において，高次の共鳴振動数が基本共鳴振動数の整数倍に一致しないという現象を dissonant(不調和) と呼ぶ [24]．衝撃波の形成が抑制されることにより，円筒音波と球面音波の共鳴現象においてその振幅は最大で $O(M^{1/3})$ に達する [21–23, 25]．このことは，一般に弱非線形問題では $M \ll 1$ であることを考慮すれば，円筒波や球面波の共鳴現象では平面波の共鳴に比較して極めて大きな振幅の増幅が可能であることを意味する [17].

Chester [21] および Ellermeier [22, 23] によってそれぞれ中空の球殻内に励起される球面音波と軸方向に無限の長さを持った円筒内に励起される円筒音波に対して，衝撃波をともなわない定常な共鳴振動の理論解が求められた．彼らの研究では，いずれも定常振動解を仮定した上で解析が行われており，振幅の時間的な発展については考慮されていない．これに対して，同軸二重円筒内の理想気体中に励起される円筒音波の共鳴現象に対する Navier-Stokes 方程式および Euler 方程式の直接数値計算によって，衝撃波をともなわない円筒音波の共鳴には，共鳴音波の振幅と位相の周期的な変調が現れること，この変調の周期は $M^{-2/3}$ に比例することがあきらかにされた [25–27]．また，衝撃波が形成される臨界の Mach 数が数値的

[2]平面音波の共鳴では，n 次の高調波の振動数は基本振動数の n 倍となる．

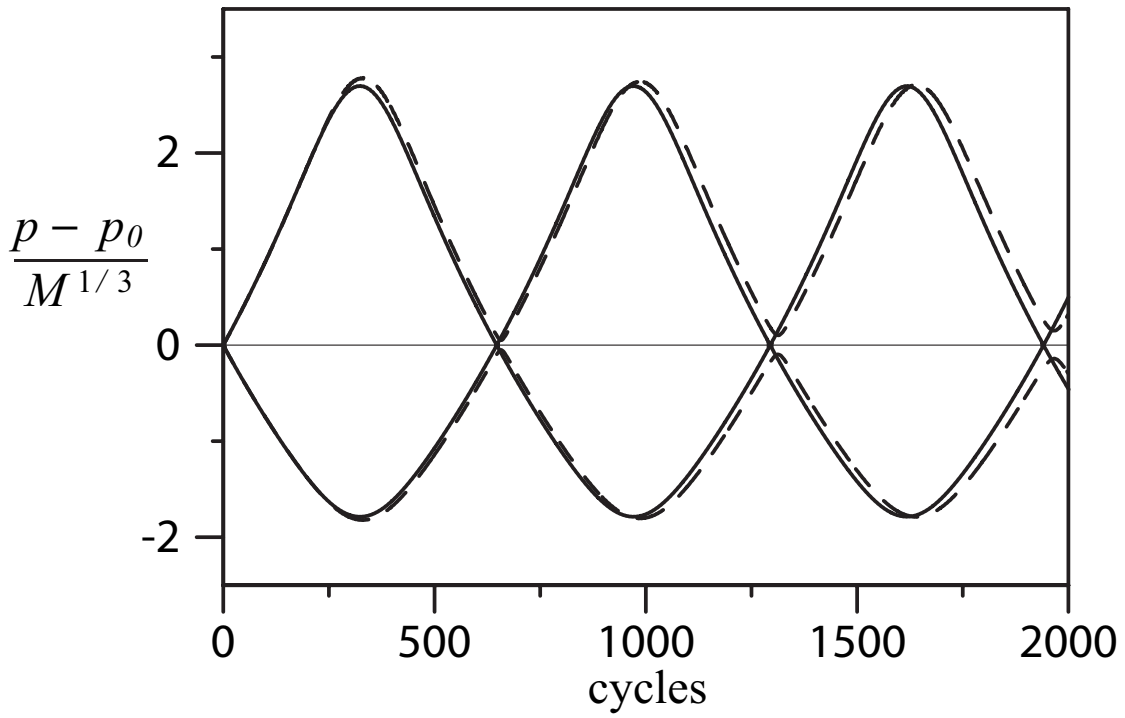

図 1.1: 同軸ニ重円筒内に励起された共鳴音波の圧力振幅の時間発展．横軸は音源の脈動の周期，縦軸は $M^{1/3}$ によって正規化された圧力振幅.

に求められた [25]．これらの問題は，本論文の第 3 章および第 4 章において議論される．また，多重尺度法 [28, 29] による同軸円筒と同心球殻内の気体中に励起される弱非線形共鳴振動の解析により，円筒音波や球面音波の共鳴現象に現れる振幅の変調に対して，内円柱 (球) と外円筒 (球殻) の半径の比によって定義される音場の幾何学的な性質と音波の非線形性が本質的な役割をはたしていることが明らかにされた [30, 31]．これは，平面音波の共鳴現象において観測される振幅の変調が，detuning とよばれる系の固有振動数と音源での加振振動数の差による線形現象であること [32, 33] とは対照的である．弱非線形問題における振幅変調については，第 3 章でその詳細を述べる．また，偏心した二重円筒内に励起される共鳴音波に対する線形解析と数値シミュレーションによって，空間に関する独立変数として動径 r と角度 θ に依存する音場に見られる境界面での波面の非一様な反射や 2 つの異なる特徴をもった共鳴振動モードの存在が示された [34].

以下に，本論文のおおまかな構成を述べる．まず，第 2 章では，二重円筒および球殻内部の気体中に励起される非線形共鳴音波のふるまいを支配する方程式，境界条件，初期条件の

導出および無次元化と，それにともなって現れるいくつかの無次元パラメータが定義される．第 3 章では，同軸円筒と同心球殻内の理想気体中に励起される衝撃波を含まない弱非線形共鳴振動についての理論解析がなされる．ここでは，第 2 章で導出された非線形の波動方程式について，微小なパラメータ $\varepsilon = M^{1/3}$ による漸近展開 (多重尺度法) を適用し，音源である外部円筒および外部球殻の脈動の周期に対してゆっくりとした時間的変調を含む振幅方程式を導出する．この振幅方程式によって振幅の変調を含んだ共鳴音波のふるまいが，内円柱 (球) と外円筒 (球殻) の半径の比で定義される幾何学パラメータと前述の detuning に強く依存することが示される．また本研究によって得られた結果は，内円柱 (球) と外円筒 (球殻) の半径の比が 0 および 1 となるふたつの極限として，Chester [21] や Ellermeier [22, 23] によって得られた中空の球殻や円筒内の気体の共鳴問題に対する解と 1 次元平面音波の共鳴問題に対する解を含んでいる．第 4 章では，同軸二重円筒内部の理想気体中に励起される大振幅の共鳴音波を Navier-Stokes 方程式および Euler 方程式を数値的に解くことによって衝撃波の形成を含んだ共鳴音波の非線形発展に対する解析がなされる．さらに，衝撃波形成の臨界 Mach 数や衝撃波面におけるエネルギー散逸をともなった準定常振動状態についての詳細な議論がなされる．第 5 章は，内円柱と外円筒の中心軸がずれた偏心円筒内の気体中に励起される音波の共鳴問題を扱う．ここでは第 3 章ならびに第 4 章で得られた結果に加えて，共鳴波のふるまいに対する音場の角度依存性の影響についての考察を行う．本論文の主要な部分は，上記の第 3 章から第 5 章によって構成される．最後に，第 6 章において，結論として本論文全体の総括を行う．

第2章　問題の定式化

この章では，二重円筒および球殻内部の気体中に励起される非線形共鳴音波のふるまいを支配する方程式，境界条件，および初期条件の導出とそれにともなって現れるいくつかの無次元パラメータのもつ物理的な意味についての解説がなされる．本章から第４章までは同軸円筒および同心球殻内に励起される共鳴波 (１次元問題) を取り扱い，第５章では偏心した円筒内に励起される共鳴波の問題 (２次元問題) を扱う．本章では主として第３章と第４章を対象とした１次元問題の定式化を行ない，２次元問題については第５章で改めて定式化を行なう．

2.1　二重円筒および二重球殻の概念図

まず初めに，本論文で取り扱われる二重円筒 (球殻) のモデルを図 2.1 に示す．ふたつの円筒 (球殻) は中心軸 (中心)O を共有しており内側の剛体円柱 (球) の半径を r_a，外側の円筒 (球殻) の初期半径を r_b とする．また，円筒は，軸方向に無限の長さをもっているものとする．ふたつの円筒 (球殻) に挟まれた環状領域には理想気体[1]が満たされており，初期時刻 $(t^* = 0)$ には静止一様状態にある[2]．いま，時刻 $t^* = 0$ から外部円筒 (球殻) の半径が初期半径 r_b から平均半径 $\bar{r}_b$ を中心に，振幅 A_0，角振動数 ω で正弦的に変化することを考える．半径の変動は角度方向に対して一様であり，とくに円筒については軸方向にも一様であるとする．以上の対称性の仮定により，二重円筒および二重球殻内に励起される音場を空間１次元 (空間に関する独立変数は半径 r^* のみ) の問題として取り扱うことが可能となる．本論文では以後このような半径の変動をともなう円筒や球殻を，脈動する円筒または球殻と呼ぶ．また，脈動の振幅 A_0 は外部円筒と内部円筒の間隙 $\bar{r}_b - r_a$ と比較して十分に小さいものとする．

[1]理想気体とは，気体の状態方程式 $pv = RT$ にしたがい，比熱が温度によらず一定であるような気体として定義される．ここで，p, v, R, T はそれぞれ気体の圧力，比体積，気体定数，温度である．

[2]t に付してある “*”(アスタリスク) の記号は，その量が次元をもった量であることを表している．以下，他の変数についても同様であるとする．

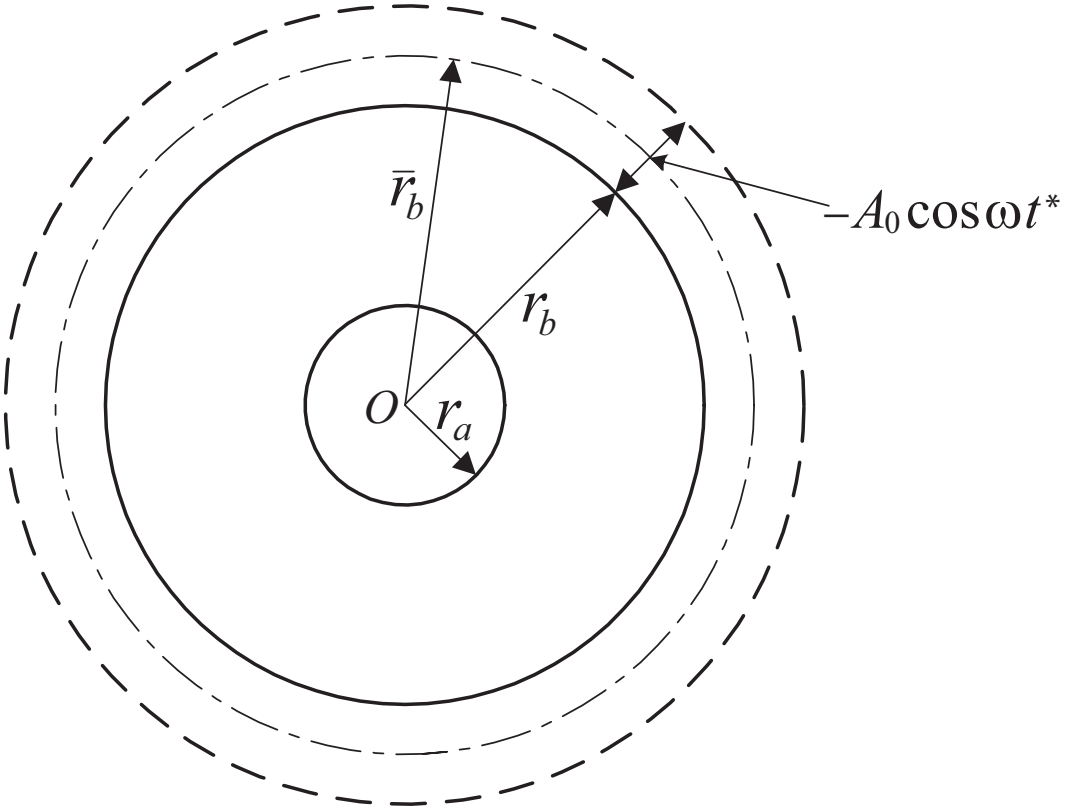

図 2.1: 同軸二重円筒 (二重球殻) の概念図.

この外部円筒 (球殻) の脈動により，その内部の気体中に音波が放射される．音源である外部円筒 (外部球殻) から放射された音波は内部の剛体円柱 (球) 表面で反射され，この反射波と音源からの進行波の ‘重ね合わせ’ によって内部の気体中に ‘定在波’ が励起される．ここで述べている重ね合わせとは，一般にいわれる線形の微分方程式の解の重ね合わせという意味ではなく，ある方向に進行する音波とそれとは逆方向に進む音波との相互作用の結果，音波が空間的に移動しないように見えるという意味で用いられている．実際，有限振幅音波の非線形共鳴現象は，音波の自己相互作用による高調波の励起や異なった波数の波の間の相互作用のために線形解とは大きく異なったふるまいをする [35].

2.2　現象を特徴づける重要なパラメータ

流体中に励起される非線形音波のふるまいは，いくつかの無次元パラメータによって特徴づけられる．本論文で取り扱う音響共鳴現象を特徴づける重要な無次元パラメータは，音響マッハ数 M，レイノルズ数 Re，内部円柱 (球) と外部円筒 (球殻) の半径の比 α，および無次元化された外部円柱 (球殻) の半径 r_s である．これらに加えて，第 5 章で取り扱われる偏心した二重円筒内の気体中に励起される音響共鳴現象の問題では，偏心率 δ も共鳴音波のふるまいを決定する上で重要な役割をはたす.

2.2.1　音響マッハ数: M

音響マッハ数 M は，音波の伝播によって引き起こされる流れの代表的な速さ u_0 と基準となる静止一様状態における気体中の音速 c_0 との比の形で表される．本論文では，流れの代表速さとして音源 (外部円筒や外部球殻) の脈動の速度振幅 $A_0\omega$ を選び，

$$M \equiv \frac{A_0\omega}{c_0} \tag{2.1}$$

と定義する．

いま，気体の流速を $u^* = u_0 \sin(\omega t^* - kx^*)$ と表すと，音響マッハ数 M は気体の運動方程式の慣性項の中の局所的な加速度の項 $(\partial u^*/\partial t^*)$ と非線形項 $(u^*\partial u^*/\partial t^*)$ の比として表現される [36]．このことから，M は非線形効果の大きさの程度を表すパラメータであるといえる．したがって，音波の振幅が無限小 $(M \to 0)$ 極限では非線形効果を無視することができ，音波の伝播に関する支配方程式は線形の波動方程式に帰着される (第 3 章参照)．しかし，M が小さくても有限であるならば，その非線形効果を無視できない状況が生じうる [1, 37]．たとえば，長距離を伝播する音波では，音波の伝播距離が波長程度ではその非線形効果は無視できる程小さかったとしても長い距離を伝播する間に非線形効果が蓄積し顕著な波形の歪みや衝撃波を形成しうる [38, 39]．音波の共鳴現象では，音源の振幅が極めて小さかったとしても気体のもつ散逸性が無視できるならば長い時間を経た後には有限振幅の共鳴波が励起される [21–23, 40]．これらのことから，音波の共鳴は本質的に非線形な現象であるといえる．

$0 < M \ll 1$ であるような問題を弱非線形問題といい，非線形音響学では主にこの領域の

問題を取り扱う．これに対して，$M = O(1)$ の問題を強非線形問題という．本論文では第 3 章において弱非線形問題に対する理論的な解析がなされ，続いて第 4 章において強非線形問題に対する数値解析が行なわれる．

2.2.2　レイノルズ数: Re

本論文においてレイノルズ数 Re は次のように定義される．

$$Re \equiv \frac{c_0^2}{\delta\omega} \tag{2.2}$$

ここで，δ は音の拡散率と呼ばれ，

$$\delta = \nu \left[\frac{4}{3} + \frac{\zeta}{\mu} + \frac{(\gamma - 1)}{Pr} \right] \tag{2.3}$$

と表される [41]．ただし，μ は粘性係数，ζ は体積粘性率，$\nu = \mu/\rho_0$ は動粘性係数，$Pr = \mu c_p/\kappa$ (c_p は定圧比熱，κ は熱伝導率) はプラントル数であり，いずれも定数であるとする．式 (2.2) で定義される Re をとくに音響レイノルズ数と呼ぶ．

レイノルズ数 Re は，後述する速度ポテンシャルに関する弱非線形の支配方程式において，非線形効果と気体のもつ粘性および熱伝導性による散逸効果との比を表しているパラメータである．したがって，Re が十分に大きい場合には非線形効果が卓越し，散逸効果はそれに比べて十分に小さいとみなすことができる．このようなとき，共鳴音波は振幅の成長とともにその波形を歪ませ，ついには衝撃波を形成するにいたる．これに対して $Re \lesssim 1$ の場合には，音源から入力されるエネルギーに対して散逸効果によるエネルギー損失が大きいために波形歪みを生じさせるような大振幅の共鳴波は励起されず，衝撃波も形成されることはない．上で述べたように，$Re \to \infty$ であれば衝撃波面を除いて散逸効果を無視することができるが，一方で衝撃波面においては強い散逸が生じており，このような場合では円筒 (球殻) 内の気体中にエントロピーが生成される (第 4 章参照)．また，衝撃波が形成されない場合であっても，極めて長時間 (たとえば，音源の振動周期に対して数千から数万周期以上の時間) にわたる共鳴現象では，微小な散逸効果が累積して有限の大きさのエネルギー散逸を生じさせる可能性がある．しかし，本論文では音源の振動の周期に対してたかだか数百周期程度の時間につい

ての共鳴波のふるまいを取り上げる．したがって，Re が極めて大きな場合におけるエネルギー散逸は (衝撃波面を除いて) 考慮しない．

本論文で取り扱われる問題に対するレイノルズ数を概算すると，円筒内に含まれる気体を空気 (15 ℃ 1 atm において $\nu = 1.5 \times 10^{-5}[\mathrm{m}^2/\mathrm{s}]$) とし外部円筒の平均半径を $\bar{r}_b = 1[\mathrm{m}]$，としたとき，$Re = 9 \times 10^6$ と極めて大きな値となる (基本共鳴振動数での値)．実際に，第 4 章でなされる Navier–Stokes 方程式系に対する数値計算からも気体の散逸性によるエントロピー生成量は極めて小さく，エネルギーの散逸のほとんどが衝撃波面での散逸過程によるものであることが示される．

2.2.3　無次元化された外部円筒 (球殻) の半径: r_s

外部円筒の平均半径 $\bar{r}_b$ と静止一様状態での音速 c_0，および音源の角振動数 ω から無次元化された外部円筒 (球殻) の半径 r_s を

$$r_s = \frac{\bar{r}_b \omega}{c_0} \tag{2.4}$$

と定義する．式 (2.4) より，r_s は $\bar{r}_b/c_0$ によって無次元化された音源の角振動数と見ることもできる．たとえば，r_s が大きなときは音源の振動数が高い場合に相当し，円筒 (球殻) 内部には高次のモードの定在音波が励起される．

線形の波動方程式の定在波解において，r_s がある値 (具体的には円筒内の気体中に励起された定在波の速度振幅がつねにゼロとなる位置) に近付くとき，励起される音波の振幅が極めて大きく成長する[3]．この現象を共鳴と呼び，共鳴が起こる際の r_s を共鳴半径と呼んで，$r_s = r_0$ で表すこととする．とくに，共鳴半径のなかで最も小さいものを基本モードの共鳴半径と呼ぶ．共鳴半径 r_0 は次項で定義されるパラメータ α の関数である．本論文では，主な解析の対象を基本モードの共鳴半径 r_0 に選び，その近傍における共鳴音波のふるまいの詳細を明らかにする．

[3] もちろんこのような場合には線形解は円筒内に励起される音響現象を正しく記述することはできない．詳細は第 3 章を参照のこと．

2.2.4　内部円柱 (球) と外部円筒 (球殻) の半径の比: α

つづいて，以下のように内部円柱 (球) の半径 r_a と外部円筒 (球殻) の平均半径 $\bar{r}_b$ の比 α を定義する．

$$\alpha \equiv \frac{r_a}{\bar{r}_b} \qquad (0 \leq \alpha < 1) \tag{2.5}$$

α は，音場の幾何学的な形状を指定するパラメータである．たとえば，$\alpha = 0$ の場合は内部円柱 (球) の半径がゼロ，すなわち内部に円柱や球をもたない単純な円筒および球殻内に励起される音波の問題を取り扱うことに相当する．反対に $\alpha \to 1$ の極限では円筒波，球面波の問題ともに平面波に対する問題に帰着する．ただし，外部円筒 (球殻) と内部円柱 (球) の間の隙間 $(\bar{r}_b - r_a)$ と外部円筒 (球殻) の脈動の振幅の関係については，図 3.1 に示されている共鳴条件を満たす曲線群 (詳細は第 3 章を参照) を大雑把に双曲線と見なして $(1-\alpha)r_s = const.$ とすれば，式 (2.1) より

$$M = \frac{A_0\omega}{c_0} = \frac{A_0 r_s}{\bar{r}_b} \sim \frac{A_0}{\bar{r}_b(1-\alpha)} = \frac{A_0}{\bar{r}_b - r_a} \ll 1 \tag{2.6}$$

となる．式 (2.6) は音源の振幅 A_0 と外部円筒 (球殻)–内部円柱 (球) 間の隙間の大きさの比が式 (2.1) によって定義される音響 Mach 数 M 程度であることを意味している．つまり M が小さいという条件のもとで，音源の振幅 A_0 が外部円筒 (球殻) と内部円柱 (球) との隙間に比べて十分に小さいということがいえる．本論文において，$\alpha \to 1$ の極限を考える際にもこの関係が成り立っているものと仮定する．

上で述べたように，幾何学的な形状を指定するパラメータ α(以後，幾何学パラメータと表記する) の値を変化させることによって，純粋な円筒波 (球面波) の共鳴現象から平面波の共鳴現象までを，その中間の性質をもつ場合を含めて，二重円筒 (二重球殻) 内に励起される共鳴音波というひとつの枠組の中で取り扱うことができる．

2.2.5　非線形パラメータ: B/A

気体中のエントロピー s が流れに沿って一定に保たれるとき，圧力 p と密度 ρ の間の関係式 $p = p(\rho)$ は初期の一様状態における密度 ρ_0 のまわりにテイラー展開することができる．

$$p = p_0 + A\left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right) + \frac{1}{2}B\left(\frac{\rho - \rho_0}{\rho_0}\right)^2 + \cdots \tag{2.7}$$

ただし，

$$p_0 = p(\rho_0), \qquad A = \rho_0 \left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_{s,\rho=\rho_0}, \qquad B = \rho_0^2 \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2}\right)_{s,\rho=\rho_0} \tag{2.8}$$

である．ここで，展開係数 A と B の比 B/A，または $1 + B/(2A)$ を非線形パラメータと呼ぶ [37, 42]．とくに本論文において，気体は理想気体であるとしているため，断熱関係式は，$p/p_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma$ と表される (γ は比熱比)．このとき，

$$\frac{B}{A} = \gamma - 1, \qquad 1 + \frac{B}{2A} = \frac{\gamma + 1}{2} \tag{2.9}$$

となる．式 (2.9) で表される係数は，非線形波動のふるまいを支配する方程式の右辺の非線形項に現れている．圧力と密度の間の非線形関係を表すパラメータ (2.8)，(2.9) は物質定数であり，何らかの方法によってこれらの値を知ることができれば，逆に物質を同定することができる [35]．

2.3　流体の運動を支配する方程式

流体中における音波の伝播は，主として，流体の圧縮性と慣性とのつり合いによって支配される．このような流体の運動の詳細を調べるために，本論文では圧縮性を考慮した流体力学の基礎方程式系をもとにして解析を行なう．流体の粘性や熱伝導性を考慮した圧縮性流体の運動は，次の Navier–Stokes 方程式によって記述される[4]．

$$\frac{D\rho^*}{Dt^*} + \rho^* \mathrm{grad}^* \boldsymbol{u}^* = 0 \qquad \text{(質量保存則)} \tag{2.10}$$

$$\rho^* \frac{D\boldsymbol{u}^*}{Dt^*} + \mathrm{grad}^* p^* = \mu \Delta^* \boldsymbol{u}^* + \left(\zeta + \frac{1}{3}\mu\right) \mathrm{grad}^* (\mathrm{div}^* \boldsymbol{u}^*) \qquad \text{(運動量保存則)} \tag{2.11}$$

$$\rho^* T^* \frac{Ds^*}{Dt^*} = \kappa \Delta^* T^* + \zeta (\mathrm{div}^* \boldsymbol{u}^*)^2 + \frac{1}{2}\mu \left(\frac{\partial u_i^*}{\partial x_j^*} + \frac{\partial u_j^*}{\partial x_i^*} - \frac{2}{3}\delta_{ij} \frac{\partial u_k^*}{\partial x_k^*}\right)^2 \qquad \text{(エネルギー保存則)} \tag{2.12}$$

ここで，ρ^* は密度，$\boldsymbol{u}^*$ は流速ベクトル，p^* は圧力，s^* は単位体積あたりの気体のエントロピー，T^* は温度である．式 (2.10)–(2.12) において “ * ” の記号の付された物理量，微分演算

[4] ここでは，直交 (Cartesian) 座標系を採用している．

子は，それらが次元をもった物理量もしくは微分演算子であることを示している．ただし，本論文では $\mu,\ \zeta,\ \kappa$ などの物理定数には次元の有無を区別するためのアスタリスクの記号は付けないものとする．式 (2.10)–(2.12) で，D/Dt^* は

$$\frac{D}{Dt^*} = \frac{\partial}{\partial t^*} + \boldsymbol{u}^* \cdot \mathrm{grad}^* \tag{2.13}$$

によって定義される Lagrange 微分である．また，式 (2.12) の右辺において，u_i^* は x_i^* 方向の速度成分 $(i = 1, 2, 3)$，δ_{ij} はクロネッカーのデルタであり，ひとつの項に同じ添字が 2 回現れるときはその添字について 1 から 3 までの和をとるものとする (総和規約)．

方程式系 (2.10)–(2.12) には $\rho^*,\ \boldsymbol{u}^*,\ p^*,\ s^*,\ T^*$ の 7 つの未知関数が含まれている．これに対して方程式の数は 5 本となっており方程式は閉じていない．そこで，方程式の数の不足を補うために理想気体に対する次の 2 つの熱力学の関係式を導入する．

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{\rho^*}{\rho_0}\right)^{\gamma} \exp\left(\frac{s^* - s_0}{c_v}\right) \tag{2.14}$$

$$p^* = \rho^* R T^* \tag{2.15}$$

ここに，$p_0,\ \rho_0,\ s_0$ は，それぞれ基準状態における気体の圧力，密度，単位体積あたりの気体のエントロピーを表す．また，c_v は単位体積あたりの気体の定積比熱，R は気体定数である．エネルギー散逸を含む圧縮性流体の運動は，方程式系 (2.10)–(2.15) を適切な初期条件および境界条件のもとで解くことによって決定される．

軸対称および球対称問題に対する支配方程式

全ての物理量が空間に関して動径 r にのみ依存するとき，方程式系 (2.10)–(2.12) はそれぞれ次のように書くことができる．

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (\rho^* u_r^*)}{\partial r^*} + \frac{m}{r^*}\rho^* u_r^* = 0 \tag{2.16}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial u_r^*}{\partial t^*} + u_r^* \frac{\partial u_r^*}{\partial r^*} = &-\frac{1}{\rho^*}\frac{\partial p^*}{\partial r^*} + \nu \frac{\partial}{\partial r^*}\left(\frac{\partial u_r^*}{\partial r^*} + \frac{m}{r^*}u_r^*\right) \\ &+ \frac{\zeta + \frac{1}{3}\mu}{\rho^*}\left(\frac{\partial^2 u_r^*}{\partial r^{*2}} + \frac{m}{r^*}\frac{\partial u_r^*}{\partial r^*} - \frac{m}{r^{*2}}u_r^*\right)\end{aligned} \tag{2.17}$$

$$\begin{aligned}\rho^* T^* \left(\frac{\partial s^*}{\partial t^*} + u^* \frac{\partial s^*}{\partial r^*}\right) = &\kappa \left(\frac{\partial^2 T^*}{\partial r^{*2}} + \frac{m}{r^*}\frac{\partial T^*}{\partial r^*}\right) \\ &+ \zeta \left(\frac{\partial u_r^*}{\partial r^*}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu \left(\frac{4}{3}\frac{\partial u_r^*}{\partial r^*}\right)^2\end{aligned} \tag{2.18}$$

ここで，m は座標系を指定するパラメータであり方程式 (2.16)–(2.18) はそれぞれ，$m = 0$ のとき Cartesian 座標系における 1 次元流れを，$m = 1$ のとき円筒座標系における軸対称流れを，$m = 2$ のとき球座標系における球対称流れを記述する．また，これらの式に現れる u_r^* は各座標系における流速ベクトル $\boldsymbol{u}^*$ の r^* 方向成分を示す．第 3 章において，これらの 1 次元問題に対する解析がなされる．

散逸効果が無視できる場合の支配方程式

すでに述べたように，本論文では主として音響レイノルズ数 Re が大きな問題を取り扱う．とくに $Re \to \infty$ の極限では，衝撃波面を除いて気体の粘性や熱伝導性による散逸を無視することができる．このとき，方程式系 (2.10)–(2.12) は以下に示される保存形で表された Euler 方程式系に帰着する．

$$\frac{\partial \rho^*}{\partial t^*} + \frac{\partial (\rho^* u_j^*)}{\partial x_j^*} = 0 \tag{2.19}$$

$$\frac{\partial (\rho^* u_i^*)}{\partial t^*} + \frac{\partial (\rho^* u_i^* u_j^*)}{\partial x_j^*} + \frac{\partial p^*}{\partial x_i^*} = 0 \tag{2.20}$$

$$\frac{\partial E_t^*}{\partial t^*} + \frac{\partial [(E_t^* + p^*) u_j^*]}{\partial x_j^*} = 0 \tag{2.21}$$

ここで，E_t^* は単位体積あたりの気体がもつ運動エネルギー $(1/2)\rho^* u_j^* u_j^*$ と内部エネルギー e^* の和であり，単位体積あたりの気体の全エネルギーとよばれ，気体が理想気体の場合には，

$$E_t^* = \frac{1}{2}\rho^* u_j^* u_j^* + \rho^* c_v T^* = \frac{1}{2}\rho^* u_j^* u_j^* + \frac{p^*}{\gamma - 1} \tag{2.22}$$

で表される．

一般に，非線形音波の伝播過程には衝撃波が現れ得る．衝撃波とはそれをはさんで流体の密度や圧力等が急激に変化するような極めて薄い層のことを指すが，この衝撃波層は内部構造をもち，そこでは流体の粘性と熱伝導性による強い散逸過程が存在している．衝撃波の内部構造に関して，弱い衝撃波の伝播を含む散逸効果をもつ波動現象を記述するバーガース方程式に対する研究により，音波の波長で無次元化された衝撃波の厚さは $1/Re$ に比例することが知られている [37]．したがって，$Re \to \infty$ の極限において，衝撃波は内部構造をもたない一つの不連続面となる．このとき，衝撃波面を含む流体の運動を Euler 方程式の弱い解 (微分方程式の解として区分的に連続な関数を許すように拡張された解) によって記述することができる．第 4 章と第 5 章では，Euler 方程式 (2.19)–(2.21) の弱い解を高次精度の風上差分法を用いて数値的に求める[5]．

2.4　境界条件および初期条件

本論文では，外部円柱と内部円筒の間の環状領域または外部球殻と内部球の間の球殻状の領域という有限な空間内に励起される非線形音波のふるまいをその時間発展も含めて解析する．流体の運動を記述する偏微分方程式 (2.16)–(2.18)，または (2.19)–(2.21) を解くことによって音波のふるまいを調べるためには，これらの方程式を適切な境界条件と初期条件のもとで解かなくてはならない．そこで，本節では本研究で扱われる問題に対する境界条件と初期条件について説明する．

[5]ただし，第 4 章では散逸性の影響が弱いことを確かめるために，Navier-Stokes 方程式に対する数値計算もあわせて行なわれる．

境界条件

本研究で扱われるモデルでは以下のような境界を考える．内部円柱および内部球は剛体であり，その境界面を通して気体中に流体が湧き出す，あるいはしみこむことは無い．外部円筒および外部球殻についてはその半径を時間的に変動させるものの，やはり境界面を通しての質量のやりとりは無いものとする．また，境界面の温度変動によって，温度境界層から外側の気体中に音波が放射されることが知られているが [43, 44]，散逸効果が十分に弱い場合，流体の運動に関する速度境界層，温度境界層からの寄与を以下のように 3 つの異なるモードの線形結合として考えることができる [37].

$$\boldsymbol{u}^* = \boldsymbol{u}^*_{\rm ac} + \boldsymbol{u}^*_{\rm vor} + \boldsymbol{u}^*_{\rm ent} \tag{2.23}$$

ここで，$\boldsymbol{u}^*_{\rm ac}$, $\boldsymbol{u}^*_{\rm vor}$, $\boldsymbol{u}^*_{\rm ent}$ はそれぞれ，境界に入射する音波による速度場への寄与，粘性による速度境界層からの寄与，温度境界層からの寄与を表している．式 (2.23) の第 1 項に対する第 2，第 3 項の大きさのオーダーは次のように評価される．

$$\left|\frac{\boldsymbol{u}^*_{\rm vor}}{\boldsymbol{u}^*_{\rm ac}}\right| \sim e^{-x/l_{\rm vor}}, \qquad \left|\frac{\boldsymbol{u}^*_{\rm ent}}{\boldsymbol{u}^*_{\rm ac}}\right| \sim \left[\frac{\gamma-1}{(Re\cdot Pr)^{1/2}}\right] e^{-x/l_{\rm ent}} \tag{2.24}$$

ここで，x は境界からの距離，$l_{\rm vor}$, $l_{\rm ent}$ はそれぞれ速度および温度境界層の厚さであり，次のように定義される．

$$kl_{\rm vor} = \left(\frac{2}{Re}\right)^{1/2}, \qquad kl_{\rm ent} = \left(\frac{2}{Re\cdot Pr}\right)^{1/2} \tag{2.25}$$

ただし，$k = \omega/c_0$ は波数である．本研究では $Re \gg 1$ であるような問題を考えているため，波長に対する境界層の厚さは十分に薄く，式 (2.24) から音場に対するそれらの寄与も極めて小さいことがわかる．したがって，本論文においては内側と外側の両境界では運動学的境界条件 (個体表面での境界条件) を考えれば十分であるといえる．

運動学的境界条件は，境界上の任意の点 $\boldsymbol{x}^*_w$ における単位法線ベクトルを $\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^*_w)$，境界の速度を $\boldsymbol{u}^*_w(\boldsymbol{x}^*_w)$，点 $\boldsymbol{x}^*_w$ における流体粒子の速度を $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}^*_w)$ としたとき，次の形で表される [45].

$$[\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x}^*_w) - \boldsymbol{u}^*_w(\boldsymbol{x}^*_w)]\cdot\boldsymbol{n}(\boldsymbol{x}^*_w) = 0 \tag{2.26}$$

この式は，流体と境界面の相対速度の境界面に対する法線方向成分がゼロであることを示している．

境界面が時間とともに変形するような場合，境界面の形は一般に

$$f(\boldsymbol{x}_w^*, t^*) = 0 \tag{2.27}$$

で与えられる．すでに述べたように，運動学的境界条件においては流体の境界面に対する相対速度の法線成分はゼロとなり，相対速度は境界面の接平面の方向成分のみをもつ．したがって，ある瞬間に境界面上にあった流体粒子は，微小な時間 Δt^* 内では境界面に沿って動くので，Δt^* 後にあっても境界面上に存在する．時刻 t^* における流体粒子の位置を $\boldsymbol{x}_w^*$，流速を $\boldsymbol{u}^*$ とすれば，時刻 $t^* + \Delta t^*$ には $\boldsymbol{x}_w^* + \boldsymbol{u}^* \delta t^*$ なる位置に移動する．さらに，その点は境界面上に存在するので，(2.27) より

$$f(\boldsymbol{x}_w^* + \boldsymbol{u}^* \Delta t^*, t^* + \Delta t^*) = 0 \tag{2.28}$$

が成り立つ．式 (2.28) から (2.27) を引いて両辺を Δt^* で割り，$\Delta t^* \to 0$ の極限を考えると，Lagrange 微分の定義から次の式が得られる．

$$\frac{Df}{Dt^*} = \frac{\partial f}{\partial t^*} + (\boldsymbol{u}^* \cdot \mathrm{grad}^*) f = 0 \tag{2.29}$$

結果として，式 (2.27) が成り立つ境界面上で式 (2.29) を満足するという条件が境界条件として得られた [46].

具体的な問題として，この結果を脈動する円筒 (球殻) の境界に対して適用する．図 2.1 より，時刻 t^* における外部円筒の半径 r_B^* は次のように表される．

$$r_B^* = \bar{r}_b - A_0 \cos \omega t^* \tag{2.30}$$

したがって，境界面を表す関数 $f(r^*, t^*) = 0$ を

$$f(r^*, t^*) = r^* - (\bar{r}_b - A_0 \cos \omega t^*) \tag{2.31}$$

とおいて，式 (2.29) に代入すれば，ただちに以下の境界条件を得る．

$$r^* = r_B^* = \bar{r}_b - A_0 \cos \omega t^* \qquad \text{において，} \qquad u_r^* = A_0 \omega \sin \omega t^* \tag{2.32}$$

ここで，u_r^* は円筒座標系における動径方向の速度成分である．球座標系に対しても式 (2.32) と全く同様の表式を得る．

初期条件

第 4 章および第 5 章でなされる数値計算に対して，本研究では円筒内の気体は初期時刻 $t^* = 0$ に静止一様状態にあると仮定する．このとき初期条件は次のように表される．

$$t^* = 0 \ \text{ において } \ \boldsymbol{u}^* = 0,\ \rho^* = \rho_0,\ p^* = p_0,\ T^* = T_0,\ c^* = c_0,\ e^* = \frac{p_0}{\gamma - 1} \tag{2.33}$$

理想気体では，初期の音速 c_0 に対して

$$c_0^2 = \gamma \frac{p_0}{\rho_0} \tag{2.34}$$

の関係が成り立つ．したがって p_0 を

$$p_0 = \frac{\rho_0 c_0^2}{\gamma} \tag{2.35}$$

とあらわすことができる．

また，これ以降の各章では無次元化された基礎方程式と境界条件について議論がなされるが，無次元化を行なう際の基準の量としてこれら静止一様状態における物理量が用いられる．

第3章　同軸円筒および同心球殻内に励起される弱非線形共鳴音波

この章では，同軸円筒および同心球殻内の理想気体中に励起される 1 次元の軸対称 (あるいは球対称な) 音波の音響共鳴現象に対する理論的な解析が行なわれる．ここで扱われるのは弱い散逸を含んだ弱非線形音波の共鳴現象である．一般に弱非線形音波とは，音響 Mach 数 M が $0 < M \ll 1$ であるような音波を指すが，本研究では特に，非線形効果による音波の波形の歪みと音場の幾何学的な性質による分散の効果が同程度となり，衝撃波の形成が抑制されるような共鳴波を指して弱非線形共鳴音波と呼ぶこととする．[1]

はじめに，3.1 節において弱い散逸を含む円筒波や球面波の弱非線形伝播過程を記述する速度ポテンシャルに関する支配方程式が導入される．3.2 節では，この支配方程式に対して多重尺度法を用いた解析を行ない，共鳴波の振幅のふるまいを支配する関係式が導かれる．続いて 3.3 節では，M や α に対する振幅の応答をはじめとする共鳴波のふるまいの詳細が明らかにされる．さらに，平面音波の共鳴現象には見られない円筒波や球面波の共鳴現象に特有の現象についての考察がなされる．

3.1　支配方程式と境界条件

はじめに，第 2 章で導入された初期の静止一様状態を基準として以下に示すように変数の無次元化を行う．[2]

$$r = \frac{\omega}{c_0} r^*, \qquad t = \omega t^*, \qquad u = \frac{u_r^*}{c_0}, \qquad \Phi = \frac{\omega}{c_0^2}\Phi^* \tag{3.1}$$

[1] もちろんこの場合にも $0 < M \ll 1$ の条件を満足していなくてはならない．また，平面波の共鳴現象や円筒波・球面波であっても進行波を扱う場合にはこの章で示されるような分散の効果は現れないため，ここで述べられているような弱非線形の定義は意味をなさない．

[2] この章で扱われる問題は，その対称性から動径 r^* に対して空間 1 次元の問題となるため，とくに断らない限り座標系として円筒波に対しては円筒座標系，球面波に対しては球極座標系を採用して解析を行う．

ここで，Φ^* は，渦なし流れに対して

$$\boldsymbol{u}^* = \mathrm{grad}^*\Phi^* \tag{3.2}$$

によって定義される速度ポテンシャルである．もちろんここでは，空間 1 次元の流れを考えているため流れは渦なしであり，Φ^* は次のようにあらわされる．

$$u_r^*(r^*, t^*) = \frac{\partial \Phi^*(r^*, t^*)}{\partial r^*} \tag{3.3}$$

(3.1) のように無次元変数を定義したとき，同様にして無次元化された外部円筒 (球殻) の平均半径 $\bar{r}_b$ と内部円柱 (球) の半径 r_a をそれぞれ次のように定義する．

$$\text{外部円柱 (球殻) の平均半径 :} \qquad r_s = \frac{\omega}{c_0}\bar{r}_b \tag{3.4}$$

$$\text{内部円柱 (球) の半径 :} \qquad \alpha r_s = \frac{\omega}{c_0} r_a \tag{3.5}$$

式 (3.5) に現れる α は，2.2 節で導入された幾何学形状を指定するパラメータである．本研究において，r_s は無次元化された外部円筒の平均半径というだけではなく，無次元化された音源 (脈動する円筒および球殻) の角振動数という役割をもつ重要なパラメータである．

支配方程式

気体の粘性および熱伝導性によるエネルギーの散逸が共鳴波のもつエネルギーに対して十分に小さな場合 ($Re \ll 1$)，第 2 章で示された流体の運動を記述する基礎方程式系 (2.16)–(2.18) から，速度ポテンシャル $\Phi(r, t)$ に関する単一の支配方程式が導かれる (実際の導出過程は付録 A を参照のこと)．

$$\begin{aligned}\Delta\Phi - \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} =& \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2 \\ &+ (\gamma-1)\Delta\Phi\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2\right\} - \frac{1}{Re}\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Phi\end{aligned} \tag{3.6}$$

方程式 (3.6) の左辺は線形の波動方程式となっており，右辺第 1 から 3 項は速度ポテンシャル Φ に関する非線形項からなっている．また，右辺第 4 項は，気体の散逸性を表す項である．

式 (3.6) において，Δ はラプラスの演算子であり，円筒波，球面波に対してそれぞれ次のように定義される．

$$\Delta = \begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r\dfrac{\partial}{\partial r}\right) & \text{円筒波} \\ \dfrac{1}{r^2}\dfrac{\partial}{\partial r}\left(r^2\dfrac{\partial}{\partial r}\right) & \text{球面波} \end{cases} \tag{3.7}$$

境界条件

境界条件は，式 (2.32) より，外部円筒 (球殻) 表面では

$$r = r_s - M\cos t \qquad \text{において，} \qquad u = \frac{\partial \Phi}{\partial r} = M\sin t \tag{3.8}$$

となる．ただし，$M = A_0\omega/c_0$ は音源 (脈動する境界面) における音響 Mach 数である．また，内部円柱 (球) 表面では

$$r = \alpha r_s \qquad \text{において，} \qquad \frac{\partial \Phi}{\partial r} = 0 \tag{3.9}$$

となる．次節では，多重尺度法を用いた解析により，境界条件 (3.8),(3.9) のもとでの支配方程式 (3.6) の弱非線形解析による近似解を求める．

3.2　多重尺度法による解析

弱い散逸効果を含む非線形の波動方程式 (3.6) の解を求めるために，1 に比較して十分に小さいパラメータ ϵ を用いて速度ポテンシャル Φ を以下に示されるような形に展開する (摂動展開)．

$$\Phi(r,t) = \epsilon\Phi_1(r,t,T) + \epsilon^2\Phi_2(r,t,T) + \epsilon^3\Phi_3(r,t,T) + O(\epsilon^4) \tag{3.10}$$

展開のパラメータ ϵ は音響 Mach 数 M に対して次のように関係づけられる．

$$\epsilon^3 = M \ll 1 \tag{3.11}$$

式 (3.11) は，ϵ に関する 3 次のオーダーの境界条件から得られる関係式である．展開のパラメータ ε をこのように定義した具体的な理由は後の節において説明される．また，式 (3.10)

において導入された変数 T は

$$T = \epsilon^2 t \tag{3.12}$$

と定義され，t に対してゆっくりとした時間変化を表す変数である．円筒音波や球面音波の非線形共鳴現象では，音源の Mach 数 M の 2/3 乗程度の周期をもつ，音源の振動数にくらべてゆっくりとした振幅の変調が起こることが知られている [25, 27]．そのため，本研究では式 (3.12) で定義される時間変数を導入し，ゆっくりとした共鳴波の振幅の変調現象の解析を行う．このように，単一の時間尺度 t のみによって現象を記述するのではなく，複数の時間尺度 (本論文の場合は t と T) を導入した摂動展開による微分方程式の近似解法を多重尺度法 (Method of multiple scales) とよぶ[3] [28].

ここで，さらに次のパラメータを導入する．

$$r_s = r_0 + \epsilon^2 \delta \tag{3.13}$$

$$\frac{1}{Re} = \epsilon^2 \eta \tag{3.14}$$

r_0 は，線形解析 (O(ϵ) の項を参照) によって定められる共鳴振動数に対応する “共鳴半径” であり，δ は線形解によって定められるの共鳴半径からのわずかな “ずれ” を表すパラメータである (δ は detuning とよばれる)．また，η は散逸効果の強さを表すパラメータである．この章では，δ と η はともに $O(1)$ であるものとする．

ϵ についての級数の形に展開された速度ポテンシャル Φ(3.10) を支配方程式 (3.6) と境界条件 (3.8)，(3.9) に代入し，ϵ のオーダーごとに整理された方程式と境界条件を得る．以下では，これらの方程式についての解析を行う．

$O(\epsilon)$ の問題

ϵ に関する 1 次 (第 1 近似) の方程式と境界条件は，次のように与えられる．

$$\Delta\Phi_1 - \frac{\partial \Phi_1}{\partial t} = 0 \tag{3.15}$$

[3] もちろん，複数の尺度を導入するのは時間変数に限定されない．空間やその他の変数についても同様の扱いが可能である．

および

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = 0 \qquad (t = \alpha r_0 \ \text{において}) \tag{3.16}$$

$$\frac{\partial \Phi_1}{\partial r} = 0 \qquad (t = r_0 \ \text{において}) \tag{3.17}$$

ここに，方程式 (3.15) はよく知られている線形の波動方程式にほかならない．

波動方程式 (3.15) の解を求めるために以下のような変数分離形の解を仮定する．

$$\Phi_1(r,t) = A(T)\exp(it)\phi_1(r) + c.c. \tag{3.18}$$

ここで，$A(T)$ は共鳴波の振幅 (複素振幅) を表しており，ゆっくりとした時間変数 T に依存するものとする．$\phi_1(r)$ は第 1 近似における共鳴波の空間分布を表す関数である．また，$c.c.$ は式 (3.18) の右辺第 1 項目の複素共役 (Complex Conjugate) を示している．

式 (3.15) に式 (3.18) を代入すれば，内部円柱および球表面における境界条件 (3.16) を満足する空間波形を示す関数 $\phi_1(r)$ は円筒波，球面波それぞれについてただちに以下のように求まる．

円筒波:
$$\phi_1 = -\frac{J_0(r)N_1(\alpha r_0) - J_1(\alpha r_0)N_0(r)}{Z(\alpha r_0)} \tag{3.19}$$

球面波:
$$\phi_1 = (\alpha r_0)^2 \left[S(r)C'(\alpha r_0) - S'(\alpha r_0)C(r)\right] \tag{3.20}$$

J_n および N_n $(n = 0, 1)$ はそれぞれ n 階の Bessel 関数および Neumann 関数であり，$Z(\alpha r_0)$ は

$$Z(\alpha r_0) = \sqrt{J_1^2(\alpha r_0) + N_1^2(\alpha r_0)} \tag{3.21}$$

と定義される．また，S および C はそれぞれ

$$S(r) = \frac{\sin r}{r}, \qquad C(r) = \frac{\cos r}{r} \tag{3.22}$$

によって定義される関数である．S'，C' は S，C の引数による微分を示している．式 (3.19), (3.20) における $Z(\alpha r_0)$ と $(\alpha r_0)^2$ は，$\alpha \to 0$ かつ $r \to 0$ の場合における $\phi_1(r)$ の特異性を除去するために導入された係数である．

式 (3.19)，(3.20) によって表される関数 $\phi_1(r)$ は線形の定在波の空間波形を示しており，$M \to 0$ の極限では共鳴波のふるまいは式 (3.19)–(3.20) によって記述される．これらの線形解の導出とそのふるまいの詳細については付録 B を参照のこと．

さらに，境界条件 (3.17) より，円筒波，球面波それぞれについての共鳴条件が以下のように求まる．

円筒波:

$$J_1(r_0)N_1(\alpha r_0) - J_1(\alpha r_0)N_1(r_0) = 0 \tag{3.23}$$

球面波:

$$S'(r_0)C'(\alpha r_0) - S'(\alpha r_0)C'(r_0) = 0 \tag{3.24}$$

式 (3.23) および (3.24) を満足するような r_0 を (線形の) 共鳴半径と呼ぶ．とくに，$\alpha \to 0$ の極限において共鳴条件は

円筒波:

$$J_1(r_0) = 0 \tag{3.25}$$

球面波:

$$S'(r_0) = 0, \quad \text{すなわち} \quad \tan r_0 = r_0 \tag{3.26}$$

と表される．上の 2 式からわかるように，円筒波や球面波の共鳴現象では高調波の振動数が基本波 (共鳴条件を満足する最も低い振動数の共鳴波) の整数倍に一致しない．これは，円筒波および球面波の共鳴現象が平面波の共鳴現象とは本質的に異なる性質を有していることを示す．このように高調波の振動数が基本波の振動数の整数倍と一致しないという性質のため，円筒波 (球面波) の共鳴現象においては，非線形効果による低次の波から高次の波へのエネルギーの輸送が起こりにくく，その結果，円筒波 (球面波) の共鳴現象では共鳴波の衝撃波への遷移が抑制される．これを本論文では音場の幾何学的な性質による衝撃波形成の抑制効果と呼ぶ．衝撃波形成の抑制については第 4 章において詳しく述べられる．

共鳴半径 r_0 の α に対する依存性を図 3.1 に示す．図中の実線で示された曲線群は円筒波，破線は球面波に対する共鳴半径を表している．図中の曲線群は任意の α に対して，下から順に，基本振動 ($n = 1$)，2 倍振動 ($n = 2$)，3 倍振動 ($n = 3$),... の共鳴半径を与える．内部円柱 (球) が存在しないとき，すなわち $\alpha \to 0$ における共鳴半径は既に述べたように式 (3.25), (3.26) の根として与えられる．図 3.1 の曲線群が $\alpha = 0$ と交わる点は確かにこれらの式を満足する．

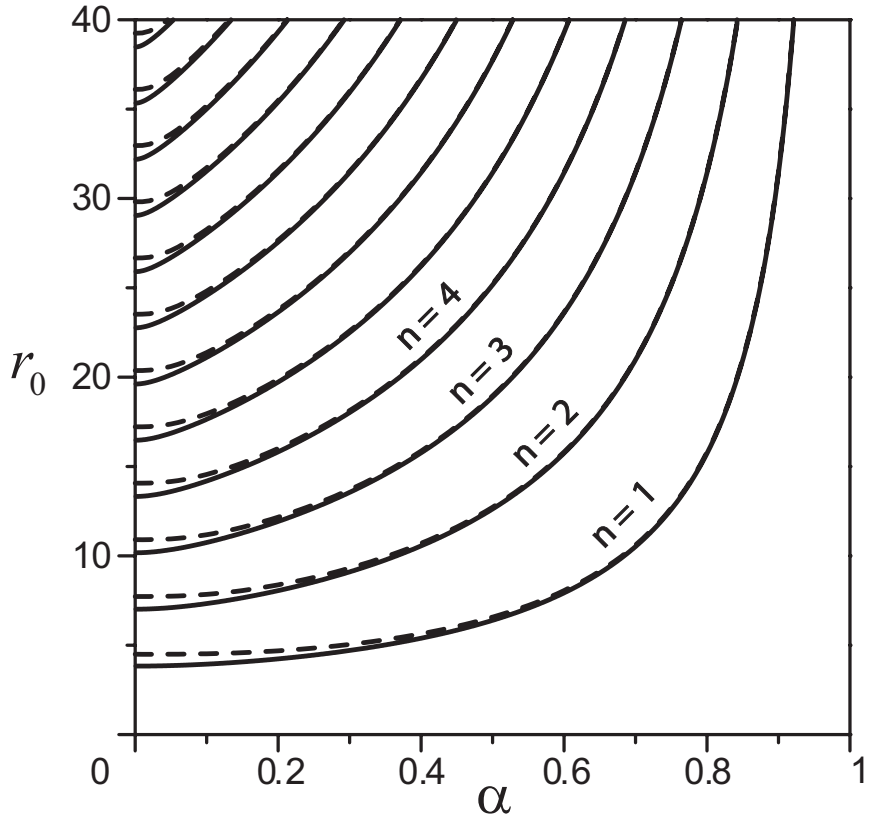

図 3.1: 線形解析によって得られた共鳴半径 r_0 の α 依存性．図中の実線は円筒波，破線は球面波に対する共鳴半径を示す．

円筒波や球面波の共鳴現象では高調波の振動数は基本波の振動数の整数倍に一致しないと述べたが，$r_0 \gg 1$ の場合，Bessel 関数の漸近展開 [47] によって近似的に三角関数を用いて $J_1(r_0)$ を表すことができる．したがって，高次の振動モードにおいては円筒波の共鳴波に特有の性質が弱くなり，平面波の共鳴現象に近い性質をもつ．同様のことが球面波の場合にもいえる．また，第 2 章で述べたように，α は系の幾何学的な形状を指定するパラメータであり，α が 1 に近づくと共鳴波のふるまいは平面波のそれに近づく．図 3.1 において，α が比較的 1 に近い領域では実線と破線がほぼ同じ値をとっていることがわかる．これは，α が大きくなることによって，円筒波の共鳴振動数 (半径) と球面波の共鳴振動数 (半径) がともに対応するモードの平面波の共鳴振動数に近づいているからである．この傾向は高次のモードの共鳴波ではより顕著に現れる．これは式 (2.4) からわかるように，$r_0 \gg 1$ とすると (有次元の) 外部円筒の半径に比べて波長が極めて短くなり，音波のふるまいが平面波問題に近づ

くことによる．本研究では，音場の幾何学的な形状による非線形共鳴波のふるまいを解明することを目的としているため，円筒波や球面波の性質が強く現れる $r_0 = O(1)$ の場合 (基本モードまたは低次のモード) を中心にとりあつかう．

$O(\epsilon^2)$ の問題

ϵ に関する 2 次のオーダーの方程式は右辺に Φ_1 に関する高次の項をもつ非同次の波動方程式として表される．

$$\Delta\Phi_2 - \frac{\partial^2\Phi_2}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)^2 + (\gamma-1)\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}\frac{\partial\Phi_1}{\partial t} \tag{3.27}$$

また，境界条件は

$$r = \alpha r_0,\ r_0 \quad \text{において} \quad \frac{\partial\Phi_2}{\partial r} = 0 \tag{3.28}$$

となる．ここでも $O(\varepsilon)$ の場合と同様に，未知関数 $\Phi_2(r,t,T)$ を変数分離の形で表現する．

$$\Phi_2 = A^2\exp(2it)\phi_2(r) + c.c. \tag{3.29}$$

方程式 (3.27) の右辺の非同次項はすべて Φ_1 の 2 次の項からなっている．そのため，(3.29) における時間 t の依存性は式 (3.18) より $\exp(2it)$ と表される．ここで，Φ_2 の空間分布を表す関数 $\phi_2(r)$ は，次の同次解 ϕ_2^h を含むものとする．

$$\phi_2^h = \begin{cases} c_1 J_0(2r) + c_2 N_0(2r) & \text{:円筒波} \\ c_3\dfrac{\sin 2r}{2r} + c_4\dfrac{\cos 2r}{2r} & \text{:球面波} \end{cases} \tag{3.30}$$

これにより式 (3.29) で表される解 Φ_2 は，ふたつの任意定数 c_1, c_2(あるいは c_3, c_4) を含む方程式 (3.27) の一般解を表す．これらの任意定数 $c_1 - c_4$ は，境界条件 (3.28) によって決定される．方程式 (3.27) に (3.18)，(3.29) および $O(\epsilon)$ の解 (3.19) または (3.20) を代入し，境界条件 (3.28) を考慮すれば，ϵ の 2 次のオーダーの解が得られる．

ここで扱われる問題では，式 (3.27) の右辺の項が全て t に関する 1 階の微分を含むことから，2 次の高調波の空間分布を示す関数 $\phi_2(r)$ は純虚数となる．そこで表記の簡単のために r に関する実関数 $\varphi(r)$ を導入し，$\phi_2(r)$ を

$$\phi_2(r) = i\varphi_2(r) \tag{3.31}$$

とする．方程式 (3.27) を満足する φ_2 は以下のように求まる．

円筒波に対して：

$$\begin{aligned}\varphi_2 =&\pi\frac{J_0(2r)N_1(2\alpha r_0)-J_1(2\alpha r_0)N_0(2r)}{J_1(2r_0)N_1(2\alpha r_0)-J_1(2\alpha r_0)N_1(2r_0)}\\&\times\int_{\alpha r_0}^{r_0}\xi[J_1(2r_0)N_0(2\xi)-J_0(2\xi)N_1(2r_0)]R_{2C}(\xi)\,d\xi\\&-\pi\int_{\alpha r_0}^{r}\xi[J_0(2r_0)N_0(2\xi)-J_0(2\xi)N_0(2r_0)]R_{2C}(\xi)\,d\xi\end{aligned}\tag{3.32}$$

ただし，

$$\begin{aligned}R_{2C}(\xi)=&[J_1(\xi)N_1(\alpha r_0)-J_1(\alpha r_0)N_1(\xi)]^2\\&-\frac{\gamma-1}{2}[J_0(\xi)N_1(\alpha r_0)-J_1(\alpha r_0)N_0(\xi)]^2\end{aligned}\tag{3.33}$$

球面波に対して：

$$\begin{aligned}\varphi_2=&\int_{\alpha r_0}^{r}\frac{\sin 2(r-\xi)}{2r}\xi R_{2S}(\xi)\,d\xi\\&-\frac{S(2r)C'(2\alpha r_0)-S'(2\alpha r_0)C(2r)}{S'(2r_0)C'(2\alpha r_0)-S'(2\alpha r_0)C'(2r_0)}\\&\times\int_{\alpha r_0}^{r_0}\frac{2r_0\cos 2(r_0-\xi)-\sin 2(r_0-\xi)}{4r_0^2}\xi R_{2S}(\xi)\,d\xi\end{aligned}\tag{3.34}$$

ただし，

$$\begin{aligned}R_{2S}(\xi)=&2[S'(\xi)C'(\alpha r_0)-S'(\alpha r_0)C'(\xi)]^2\\&-(\gamma-1)[S(\xi)C'(\alpha r_0)-S'(\alpha r_0)C(\xi)]^2\end{aligned}\tag{3.35}$$

これらの解 (3.32)，(3.34) が境界条件 (3.28) を満足することは実際に $r=\alpha r_0,\ r_0$ を代入することで容易に確かめることができる．

$O(\epsilon^3)$ の問題

最後に，ϵ についての 3 次のオーダーの方程式および境界条件は

$$\begin{aligned}\Delta\Phi_3 - \frac{\partial^2\Phi_3}{\partial t^2} =& 2\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t\partial T} - \eta\frac{\partial^3\Phi_1}{\partial t^3} \\ &+ 2\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\frac{\partial\Phi_2}{\partial r}\right) + \left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)^2 \\ &+ (\gamma-1)\left\{\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial t^2}\left[\frac{\partial\Phi_2}{\partial t} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi_1}{\partial r}\right)^2\right] + \Delta\Phi_2\frac{\partial\Phi_1}{\partial t}\right\} \qquad (3.36)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial r} = 0 \qquad r = \alpha r_0 \text{ において} \qquad (3.37)$$

$$\frac{\partial\Phi_3}{\partial r} = \sin t - \delta\frac{\partial^2\Phi_1}{\partial r^2} \qquad r = r_0 \text{ において} \qquad (3.38)$$

となる．散逸効果を表すパラメータ η や共鳴半径からのずれを表すパラメータ (detuning)δ は，この段階ではじめて現れる．また，2 次のオーダーの解と同様に方程式 (3.36) の右辺の非同次項から類推すると，Φ_3 の時刻 t に関する依存性は $\exp(it)$ および $\exp(3it)$ によって表されることがわかる．ここで解に $\exp(it)$ に比例する項が含まれることは本解析において極めて重要である．なぜならば，音源である外部円筒 (球殻) は $\exp(it)$ で脈動しており，この境界条件 (3.8) を満足するのは，3 次の解 Φ_3 の他にはあり得ないからである．これが展開のパラメータ ϵ を (3.11) によって定義した理由である．

続いて，これまでと同様に Φ_3 を変数分離形で表現する．

$$\Phi_3 = \phi_3(r)\exp(it) + F(3r)\exp(3it) + c.c. \qquad (3.39)$$

ところで，この章における目的は共鳴波の複素振幅 A の挙動を知ることであった．したがって，以下では式 (3.36) の解を完全な形で求めることはせず，ゆっくりとした時間変数 T に対する A のふるまいを記述する方程式を求めるにとどめる．[4]なお，$\alpha \to 0$ における球面波の共鳴現象に対する解 (3.39) の具体的な表現が Chester [21] によって与えられている．式 (3.39) を (3.36)–(3.38) に代入し式を整理すれば，次の ϕ_3 に関する非同次の境界値問題に帰着する．

$$\frac{d}{dr}\left(r^n\frac{d\phi_3}{dr}\right) + r^n\phi_3 = r^n R_3(r) + c.c. \qquad (3.40)$$

[4]式 (3.39) の $\phi_3(3)$ や $F(3r)$ の詳細を求めることは A のふるまいを決定する上で本質的ではない．とくに，$F(3r)$ を含む項は，境界条件 (3.38) になんら寄与しないため，ここでは，$\exp(it)$ に関する項 (すなわち ϕ_3 に関する項) を含む方程式についての解析が行われる．

ただし，

$$R_3(r) =2iA'\phi_1 + A^2\bar{A}\left\{-2\frac{d\phi_1}{dr}\frac{d\psi_2}{dr} + 3\left(\frac{d\phi_1}{dr}\right)^2\frac{d^2\phi_1}{dr^2}\right.$$
$$\left.+(\gamma-1)\left[-2\phi_1\psi_2 + \frac{1}{2}\phi_1\left(\frac{d\phi_1}{dr}\right)^2\right] - (\gamma-1)^2\phi_1^3\right\} \tag{3.41}$$

であり，A' は $A(T)$ の T による微分，$\bar{A}$ は A の複素共役をあらわしている．また，境界条件は，

$$\frac{d\phi_3}{dr} = 0 \qquad r = \alpha r_0 \quad \text{において} \tag{3.42}$$
$$\frac{d\phi_3}{dr} = A\delta\phi_1 - \frac{i}{2} \qquad r = r_0 \quad \text{において} \tag{3.43}$$

となる．方程式 (3.40) において，$n = 1$ の場合は円筒波，$n = 2$ の場合は球面波に関する問題に対応する．ここで，(3.40)–(3.43) より複素振幅 A に関する支配方程式を導出するにあたり，方程式系 (3.40)–(3.43) が自明でない解を持つために満たすべき関係式 (Fredholm の交代定理) を導出しておく．

Fredholm の交代定理

非同次境界値問題

$$\frac{d^2\Psi}{dr^2} + \frac{n}{r}\frac{d\Psi}{dr} + \Psi = R(r) \tag{3.44}$$

$$\left.\frac{d\Psi}{dr}\right|_{r=\alpha r_0} = 0 \tag{3.45}$$
$$\left.\frac{d\Psi}{dr}\right|_{r=r_0} = \Lambda \tag{3.46}$$

に付随する同次境界値問題

$$\frac{d^2\psi}{dr^2} + \frac{n}{r}\frac{d\psi}{dr} + \psi = 0 \tag{3.47}$$

$$\left.\frac{d\psi}{dr}\right|_{r=\alpha r_0} = 0 \tag{3.48}$$
$$\left.\frac{d\psi}{dr}\right|_{r=r_0} = 0 \tag{3.49}$$

は，自明でない解 ψ_0 をもつとする．いま，方程式 (3.44) を自己随伴形 [48] で書き直す．

$$\frac{d}{dr}\left(r^n\frac{d\Psi}{dr}\right)+r^n\Psi=r^nR(r) \tag{3.50}$$

(3.50) の両辺に ψ_0 を掛けて αr_0 から r_0 まで積分する．

$$\begin{aligned}\int_{\alpha r_0}^{r_0}\psi_0\frac{d}{dr}\left(r^n\frac{d\Psi}{dr}\right)dr&=\left[r^n\psi_0\frac{d\psi}{dr}\right]_{\alpha r_0}^{r_0}-\int_{\alpha r_0}^{r_0}r^n\frac{d\psi_0}{dr}\frac{d\Psi}{dr}dr\\&=\left[r^n\psi_0\frac{d\Psi}{dr}\right]_{\alpha r_0}^{r_0}-\left[r^n\frac{d\psi_0}{dr}\Psi\right]_{\alpha r_0}^{r_0}+\int_{\alpha r_0}^{r_0}\frac{d}{dr}\left(r^n\frac{d\psi_0}{dr}\right)\Psi dr\end{aligned} \tag{3.51}$$

(3.51) の右辺第 2 項は境界条件 (3.48)，(3.49) よりゼロとなるので，

$$\left[r^n\psi_0\frac{d\Psi}{dr}\right]_{\alpha r_0}^{r_0}+\int_{\alpha r_0}^{r_0}\left\{\frac{d}{dr}\left(r^n\frac{d\psi_0}{dr}\right)+r^n\psi_0\right\}\Psi dr=\int_{\alpha r_0}^{r_0}r^n\psi_0Rdr \tag{3.52}$$

が得られる．ここで，同次方程式 (3.47) を考慮すれば (3.52) の左辺の披積分関数はゼロとなる．さらに境界条件 (3.45)，(3.46) より，(3.44) の非同次項と付随する同次境界値問題の自明でない解 ψ_0 が満たすべき関係式

$$r_0^n\psi_0\Lambda=\int_{\alpha r_0}^{r_0}r^n\psi_0R(r)dr \tag{3.53}$$

を得る[5]．非同次境界値問題 (3.44)–(3.46) は，非同次項 $R(r)$ が関係式 (3.53) を満足するときそのときにのみ解をもつ．これを Fredholm の交代定理 [49] と呼ぶ．　■

いま，非同次境界値問題 (3.44)–(3.46) の Ψ を ϕ_3 で，$R(r)$ を $R_3(r)$ で置き換え，同次境界値問題 (3.47)–(3.49) の解 ψ_0 を 1 次のオーダーの解 (3.19)，(3.20) で置き換えれば，Fredholm の交代定理 (3.53) より A に関する次の関係式を得る．

$$i\hat{P}(2A'+\eta A)+\hat{Q}A^2\bar{A}+\hat{R}\delta A=\frac{i}{2}\hat{S} \tag{3.54}$$

[5]式 (3.53) は，$R(r)$ と $\phi_0(r)$ の直交性を示している．

ここで，$\hat{P},\ \hat{Q},\ \hat{R},\ \hat{S}$ は以下によって定義される係数である．

$$\hat{P} = \int_{\alpha r_0}^{r_0} r^n \phi_1^2 \, dr \tag{3.55}$$

$$\begin{aligned}\hat{Q} = \int_{\alpha r_0}^{r_0} r^n \phi_1 \Bigg\{ & -2\frac{d\phi_1}{dr}\frac{d\psi_2}{dr} + 3\left(\frac{d\phi_1}{dr}\right)^2 \frac{d^2\phi_1}{dr^2} \\ & +(\gamma-1)\left[-2\phi_1\psi_2 + \frac{1}{2}\phi_1\left(\frac{d\phi_1}{dr}\right)^2\right] - (\gamma-1)^2\phi_1^3 \Bigg\} dr\end{aligned} \tag{3.56}$$

$$\hat{R} = -\, r_0^n \phi_1^2(r_0) \tag{3.57}$$

$$\hat{S} = -\, r_0^n \phi_1(r_0) \tag{3.58}$$

これらの係数は全て共鳴半径 r_0 に依存する．また，r_0 は (3.23)，(3.24) より，内部円柱 (球) と外部円筒 (球殻) の半径の比 α および共鳴モードに依存するため，$\hat{P},\ \hat{Q},\ \hat{R},\ \hat{S}$ も同様に α と共鳴モードに依存することになる．さらに (3.56) より $\hat{Q}$ は気体の比熱比 γ の関数であることもわかる．

ゆっくりとした時間変数 T に対する共鳴波の複素振幅 A の応答は (3.54) によって記述される．これ以降，方程式 (3.54) を振幅方程式と呼ぶこととする．振幅方程式 (3.54) および $\hat{Q}$ の定義式 (3.56) より，$\hat{Q}$ は共鳴波のもつ非線形効果の影響に依存するパラメータであるといえる．同様に $\hat{P},\ \hat{R}$，および $\hat{S}$ はそれぞれ，散逸効果，音源の振動数の共鳴振動数からのずれ，音源の脈動による音波の放射の影響を表すパラメータとなる．音場の幾何学形状は (3.55)–(3.58) に含まれる r の指数 n によって指定され，$n = 1$ のとき円筒波，$n = 2$ のとき球面波となる．

α がゼロとなる極限において，振幅方程式 (3.54) は，Chester によって導出された球面波の共鳴解 [21]($n = 2$ の場合) および Ellermeier によって得られた円筒波の共鳴解 [23]($n = 1$ の場合) に一致する．また，振幅方程式 (3.54) は，３次の非線形項をもつ１自由度の強制振動子 (Duffing oscillator) の振幅応答の方程式と類似した形となっており [29, 50, 51]，実際に次節において複素振幅 A のふるまいが Duffing oscillator の振幅の応答とよく一致することが示される．

3.3　共鳴波の振幅の非線形応答とその変調

この節では，二重円筒 (球殻) 内に励起される共鳴音波の振幅方程式 (3.54) のふるまいの詳細を解析し，幾何学パラメータ α，散逸パラメータ η，および detuning δ に対する共鳴波の振幅や位相の応答を調べる．

複素振幅 A の時間変数 T に対する非線形応答を調べるために，A を以下のような極形式で表現する．

$$A(T) = a(T)\exp(i\theta(T)) \tag{3.59}$$

ここで，$a(T)$ および $\theta(T)$ は実関数である．(3.59) を振幅方程式 (3.54) に代入し，実部と虚部をそれぞれまとめれば a と θ に関する非線形の連立常微分方程式が得られる．

$$a\frac{d\theta}{dT} = \sigma a^3 - \beta\sin\theta + \Gamma\delta a \tag{3.60}$$

$$\frac{da}{dT} = \beta\cos\theta - \frac{1}{2}\eta a \tag{3.61}$$

ただし，(3.60)，(3.61) に現れる係数 σ, β, Γ は

$$\sigma = \frac{\hat{Q}}{2\hat{P}}, \qquad \beta = \frac{\hat{S}}{4\hat{P}}, \qquad \Gamma = \frac{\hat{R}}{2\hat{P}} \tag{3.62}$$

によって定義される．σ, β, Γ の α に対する依存性を図 3.2 に示す．図 3.2(a) は円筒波，図 3.2(b) は球面波におけるグラフである．それぞれの図について，実線は σ，点線は β，破線は Γ の α に対する関係を示している．これらの係数の定義 (3.62) より，σ は共鳴波の非線形性にかかわるパラメータであり，β と Γ はそれぞれ detuning と音源における音波の励起の効果にかかわるパラメータであるといえる．図から β と Γ については円筒波と球面波の間で大きな違いは見られないが，α については現象の幾何学的な性質[6]の違いにより，($\alpha \to 1$ における) その特異性が大きく異なっていることがわかる．また，円筒波，球面波ともに $\sigma > 0$, かつ β, $\Gamma < 0$ となっている．このことは，後に振幅方程式 (3.54) あるいは (3.60)，(3.61) の解のふるまいを決定する上で極めて重要な役割を果たす．

[6]大雑把にいうと，$r \to \infty$ に対して円筒波の場合には振幅が $1/r^{1/2}$ に比例し，球面波では $1/r$ に比例する．また，図 3.2 における係数 σ, β, Γ の $\alpha \to 1$ に対する特異性を含む α に対する依存性は，線形解 (3.19)，(3.20) の正規化の方法によって異なってくる．

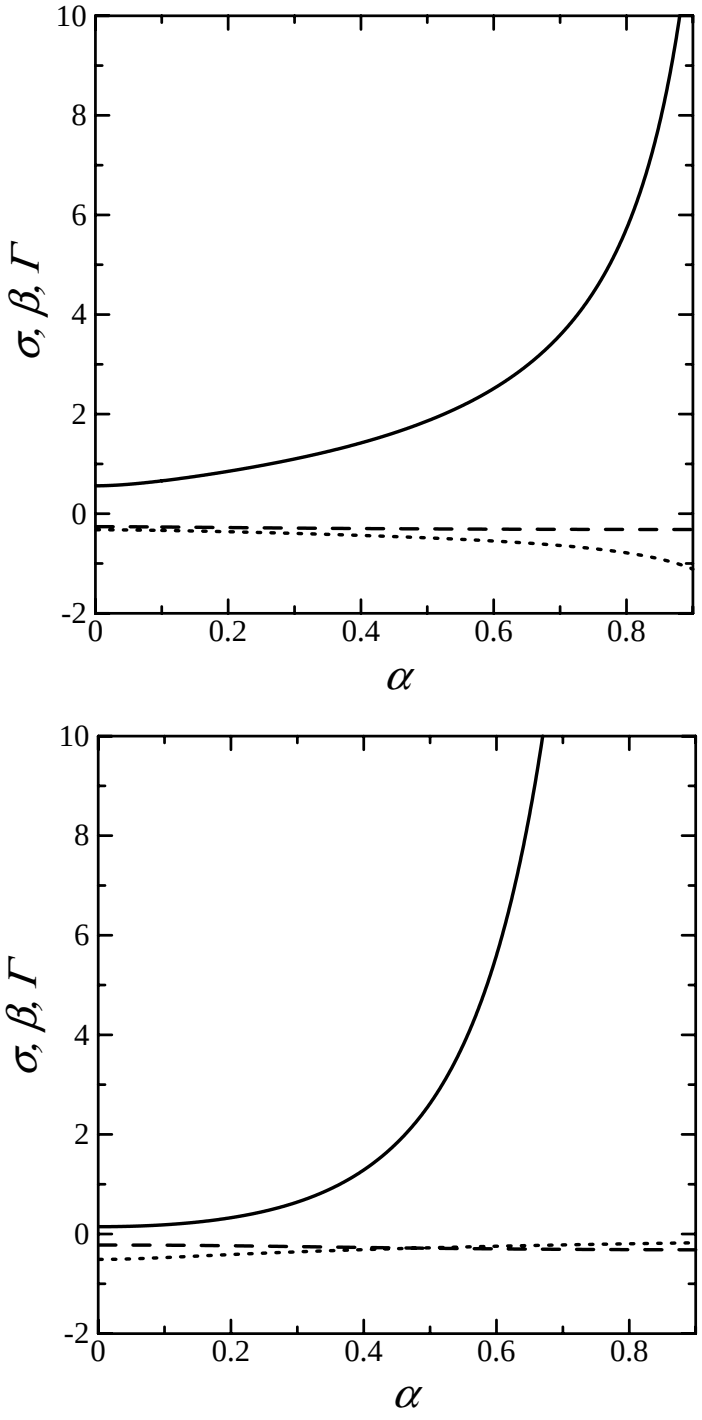

図 3.2: σ, β, Γ の α 依存性．(a):円筒波，(b):球面波．図中の実線は σ，点線は β，破線は Γ をあらわす．

3.3.1　散逸が無いケース

はじめに非散逸性の気体に対する問題について考える．気体の粘性や熱伝導性によるエネルギー散逸の効果が，共鳴波の非線形効果や幾何学的な効果に比較して十分に小さいとみなせるとき，振幅方程式 (3.61) の右辺の散逸項を無視することができる (つまり，$\eta = 0$ とおくことができる)．

図 3.3(a) に $\alpha = 0.1,\ \delta = 0$ の円筒波に対する複素振幅 $A(T) = a(T)\exp(i\theta(T))$ の相平面上での軌道を示す．一般に (力学の問題において)，相平面は，振幅 a とその時間微分 da/dT からなる平面として描かれる．しかし本論文では便宜上，図 3.3 のように実振幅 a と位相 θ によって構成される平面を相平面と呼ぶこととする．図 3.3(a) に示された曲線群は，大きく分けて 2 種類に分類される．一つは a–θ 平面において閉じている軌道 (closed trajectories) であり，もう一つは開いた軌道 (open trajectories) である．閉じた軌道は振幅 a と位相 θ がともに周期的な変動を繰り返す様子を表している．これに対し開いた軌道の場合，振幅 a は閉じた軌道の場合と同様に周期的な変動を繰り返すが，位相 θ は時刻 T の進行とともに際限なく増加または減少していく．さらにこの図から，開いた軌道・閉じた軌道ともに θ に関して 2π の周期性をもっていることが見て取れる．共鳴波の振幅 A は，初期条件として実振幅 a と位相 θ を指定することにより図に示されているような軌道に沿って変動することがわかる．また，図中の矢印は T が増加したときに図に示されている軌道上にとられた点が移動する方向を示している．

このような現象は，単振り子の運動と比較するとよく理解できる [50]．たとえば，長さ l の棒の先に質量 m の質点をつけた単振り子を考える．鉛直下方の面に投影された質点の位置を a，棒のふれ角を θ とすれば，振り子のエネルギーが小さいとき質点は往復運動を行い，このとき a と θ は周期的に変動 (振動) する (これは図 3.3 における閉じた軌道に相当する)．しかし，振り子のもつエネルギーがポテンシャルの山 (重力加速度を g としたとき $2mgl$ と表される) を越えると振り子は周期的な往復運動をせずに回転をはじめる．振り子が回転運動するとき，射影された質点の位置 a は周期的な振動を繰り返すが，ふれ角 θ は時間とともに単調に増加または減少する (開いた軌道に相当)．

図中の $\times$ で表されている点は閉じた軌道の特別な場合であり，位相 θ と振幅 a はともに時

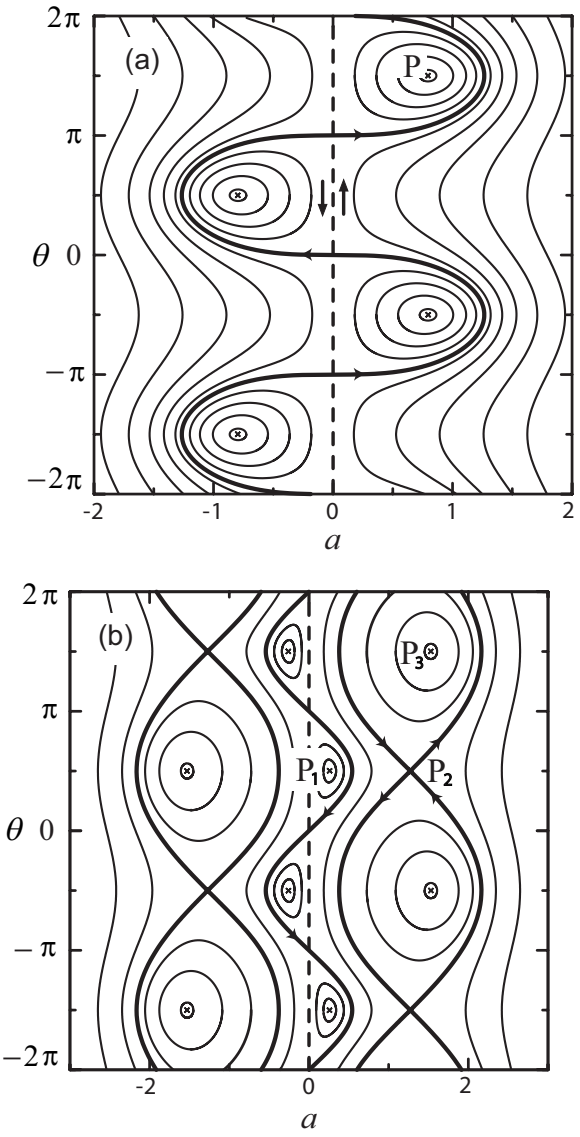

図 3.3: 相平面における複素振幅 A の挙動 ($\alpha = 0.1,\ \eta = 0$，円筒波)．(a):$\delta = 0$，(b):$\delta = 5$. 図中の $\times$ で示された点は安定な特異点 (渦心点) を示している．また，図 (b) の P_2 で示された点 (およびそれに対応する各点) は不安定な特異点 (鞍部点) を示す.

間に依存せず，つねに一定の値をとる (つまり，$\dfrac{da}{dt} = \dfrac{d\theta}{dT} = 0$ となる)．本論文では，このような点を特異点と呼ぶ．いま，ある特異点の座標を (a_s, θ_s) としたとき，この点に与えられた擾乱が時間 T の経過にともなって大きくなるような場合 (T の経過とともに a_s, θ_s から離れてゆく軌道を描く) を不安定な特異点，そうでない場合を安定な特異点と呼ぶ．簡単のた

めに $\delta = \eta = 0$ とすると，式 (3.60) と (3.61) は

$$\frac{da}{dT} = \beta \cos\theta = g(a, \theta) \tag{3.63}$$

$$\frac{d\theta}{dT} = \sigma a^2 - \beta \frac{\sin\theta}{a} = h(a, \theta) \tag{3.64}$$

と書くことができる．ここで，特異点近傍における g, h の変化率を

$$c_{11} = \left.\frac{\partial g}{\partial a}\right|_{a_s,\theta_s} = 0, \qquad c_{12} = \left.\frac{\partial g}{\partial \theta}\right|_{a_s,\theta_s} = -\beta \sin\theta_s$$

$$c_{21} = \left.\frac{\partial h}{\partial a}\right|_{a_s,\theta_s} = 2\sigma a_s + \beta \frac{\sin\theta_s}{a_s^2}, \qquad c_{22} = \left.\frac{\partial h}{\partial \theta}\right|_{a_s,\theta_s} = -\beta \frac{\cos\theta_s}{a_s}$$

とすれば，$\xi = a - a_s, \zeta = \theta - \theta_s$ に対して線形近似された (3.63) と (3.64) は

$$\frac{d\xi}{dT} = c_{11}\xi + c_{12}\zeta$$

$$\frac{d\zeta}{dT} = c_{21}\xi + c_{22}\zeta$$

と表される．この連立方程式の係数行列の固有値を λ としたとき，次の行列式

$$\begin{vmatrix} c_{11} - \lambda & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \qquad \therefore \quad \lambda^2 + p\lambda + q = 0 \tag{3.65}$$

ただし，

$$p = -(c_{11} + c_{22}),\ q = c_{11}c_{22} - c_{12}c_{21}$$

の根を λ_1, λ_2 とすると，$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば

$$\xi = \mathfrak{A}\exp(\lambda_1 T) + \mathfrak{B}\exp(\lambda_2 T) \tag{3.66}$$

となる．また，$\lambda_1 = \lambda_2$(重根) のとき，すなわち $p^2 = 4q$ のときは

$$\xi = (\mathfrak{A} + \mathfrak{B}T)\exp(\lambda_1 T) \tag{3.67}$$

となる．ただし，$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ は任意定数である．式 (3.66)，(3.67) より，特性根 λ_1, λ_2 の値によって特異点の性質 (安定性) が決定されることがわかる．実際に定常解 (3.88) を代入することにより，図 3.3(a) の特異点は安定な特異点 (渦心点;center) であることがわかる (特異点の種類の分類やその安定性に関しての詳細は [29, 51] 等を参照)．

以下では，ひきつづき複素振幅 A のふるまいの詳細を調べて行く．$\eta = 0$ のとき，(3.60) に $\cos\theta$ を掛けたものと (3.61) に $\sin\theta$ を掛けたものとの和をとることにより次の方程式を得る．

$$\frac{d(a\sin\theta)}{dT} = (\sigma a^3 + \Gamma\delta a)\cos\theta \tag{3.68}$$

この式の両辺を (3.61) で $\eta = 0$ とおいた式でそれぞれ割ると，

$$\frac{d(a\sin\theta)}{da} = \frac{\sigma a^3 + \Gamma\delta a}{\beta} \tag{3.69}$$

となる．(3.69) の両辺を積分することにより，ただちに以下の式が求まる．

$$a\sin\theta - a_0\sin\theta_0 = \frac{1}{\beta}\left[\frac{\sigma}{4}(a^4 - a_0^4) + \frac{\Gamma\delta}{2}(a^2 - a_0^2)\right] \tag{3.70}$$

ここで，(a_0, θ_0) は任意の初期条件における共鳴波の振幅と位相を表す．散逸が無い場合の相平面における A の軌道は式 (3.69) によって与えられる．また，変調の周期は

$$T = \int \frac{da}{\beta\cos\theta} \tag{3.71}$$

から求めることができる．とくに (3.70) で $(a_0, \theta_0) = (0, 0)$，$\delta = 0$ と選べば，図 3.3(a) において原点を通る軌道を

$$\sin\theta = \frac{\sigma}{4\beta}a^3 \tag{3.72}$$

と求めることができる．

相平面における θ 軸 $(a = 0)$ の近傍での振幅 A の挙動を調べるため，式 (3.60) に $a = 0$ を代入すれば，

$$\beta\sin\theta = 0 \tag{3.73}$$

を得る．この式から，A の軌道は η や δ の値に関わらず，相平面上の θ 軸 ($a = 0$ の直線) と $\theta = n\pi$ $(n = 0, \pm1, \pm2, \ldots)$ の点で交わることがわかる．図 3.3(a) において，閉じた軌道と開いた軌道は相平面の原点 $(a_0, \theta_0) = (0, 0)$ を通る曲線によって境される．それゆえ，本論文ではこの軌道をセパラトリクス (separatrix) と呼ぶ[7].

[7]一般の力学の問題においてセパラトリクスは鞍部点を通る曲線であるが [29]，本論文では単に閉じた軌道と開いた軌道のふたつを分ける軌道という意味でこの用語を用いる．なお，図 3.3(b) にはここで定義したセパラトリクスのほかに鞍部点を通過するセパラトリクスが存在するが，本論文ではとくにこのふたつを区別しない．

二重円筒 (球殻) 内部の気体が初期時刻に静止一様状態にあったと考えると，これは初期条件として $(a_0, \theta_0) = (0, 0)$ を選ぶこと，つまり共鳴波の振幅 A を記述する軌道としてセパラトリクスを選ぶことに相当する．また，物理的な観点から音波の共鳴現象を考えると，初期条件として気体が静止一様状態にあるというのは極めて自然な状況であるといえる．このような点から，相平面におけるセパラトリクスの性質を調べることは共鳴波の振幅のふるまいを明らかにするうえでとくに重要な役割をもつと考えられる．そこで，以下では相平面上の原点を通過するセパラトリクス上における a の最大値を求める．式 (3.70) に $(a_0, \theta_0) = (0, 0)$ を代入すると，以下の a に関する 3 次方程式を得る．

$$a^3 + \frac{2\Gamma\delta}{\sigma} a - \frac{4\beta}{\sigma} \sin\theta = 0 \tag{3.74}$$

3 次方程式の解法 (付録 C 参照) により，(3.74) の解は次のように求められる．

$$a = u_1 + v_1 = X^{1/3} + Y^{1/3} \tag{3.75}$$

ただし，

$$X = \frac{2\beta}{\sigma} \sin\theta + \sqrt{D} \tag{3.76}$$

$$Y = \frac{2\beta}{\sigma} \sin\theta - \sqrt{D} \tag{3.77}$$

$$D = \left(\frac{2\beta}{\sigma}\right)^2 \sin^2\theta + \left(\frac{2\Gamma\delta}{3\sigma}\right)^3 \tag{3.78}$$

である．

ここで，$\partial a/\partial\theta$ を考える．

$$\frac{\partial a}{\partial\theta} = \frac{\partial u_1}{\partial\theta} + \frac{\partial v_1}{\partial\theta} = \frac{du_1}{dX}\frac{\partial X}{\partial\theta} + \frac{dv_1}{dY}\frac{\partial Y}{\partial\theta}$$

$$\frac{du_1}{dX} = \frac{1}{3}X^{-2/3}, \qquad \frac{dv_1}{dY} = \frac{1}{3}Y^{-2/3}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial X}{\partial\theta} &= \frac{\partial}{\partial\theta}\left\{\frac{2\beta}{\sigma}\sin\theta + \left[\left(\frac{2\beta}{\sigma}\right)^2\sin^2\theta + \left(\frac{2\Gamma\delta}{3\sigma}\right)^3\right]^{1/2}\right\} \\ &= \frac{2\beta}{\sigma}\cos\theta + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{2\beta}{\sigma}\right)^2\sin^2\theta + \left(\frac{2\Gamma}{3\sigma}\right)^3\delta^3\right]^{-1/2}\cdot 2\sin\theta\cos\theta \\ &= \left\{\frac{2\beta}{\sigma} + \left[\left(\frac{2\beta}{\sigma}\right)^2\sin^2\theta + \left(\frac{2\Gamma\delta}{3\sigma}\right)^3\right]^{-1/2}\sin\theta\right\}\cos\theta \qquad (3.79)\end{aligned}$$

$$\frac{\partial Y}{\partial\theta} = \left\{\frac{2\beta}{\sigma} - \left[\left(\frac{2\beta}{\sigma}\right)^2\sin^2\theta + \left(\frac{2\Gamma\delta}{3\sigma}\right)^3\right]^{-1/2}\sin\theta\right\}\cos\theta \qquad (3.80)$$

以上の式から，$\cos\theta = 0$，すなわち $\theta = \dfrac{1}{2}\pi \pm n\pi, (n = 0, 1, 2, 3, \ldots)$ のときに a が極値をとることがわかる．この結果は，図 3.3 におけるセパラトリクスの挙動とも一致している．

同様にして，$\partial a/\partial\delta$ を計算すると，

$$\frac{\partial a}{\partial\delta} = \frac{1}{2}\left\{(Z+\sqrt{D})^{-2/3} - (Z-\sqrt{D})^{-2/3}\right\}\left\{Z^2 + \left(\frac{2\Gamma\delta}{3\sigma}\right)^3\right\}^{-1/2}\cdot\left(\frac{2\Gamma\delta}{3\sigma}\right) \qquad (3.81)$$

となる．ただし，$Z = \dfrac{2\beta}{\sigma}\sin\theta$ である．この結果は，a は $\delta = 0$ のとき極値をとることを示している．

式 (3.79)–(3.81) より，原点を通過するセパラトリクス上において a は $\sin\theta = 1$ かつ $\delta = 0$ のとき最大値 $a_{\max}$ をとり，その振幅は式 (3.69) から

$$a_{\max} = \left(-\frac{4\beta}{\sigma}\right)^{1/3} \qquad (3.82)$$

と表される．[8]

図 3.4 は，式 (3.82) によって表されるセパラトリクス上の最大振幅 $a_{\max}$ の α に対する依存性を示したグラフである．実線は円筒波，破線は球面波についての $a_{\max}$ を表している．図よ

[8]図 3.2 より，$\sigma > 0$ かつ $\beta < 0$ であるので，式 (3.82) の括弧の中はつねに正の値をとる．

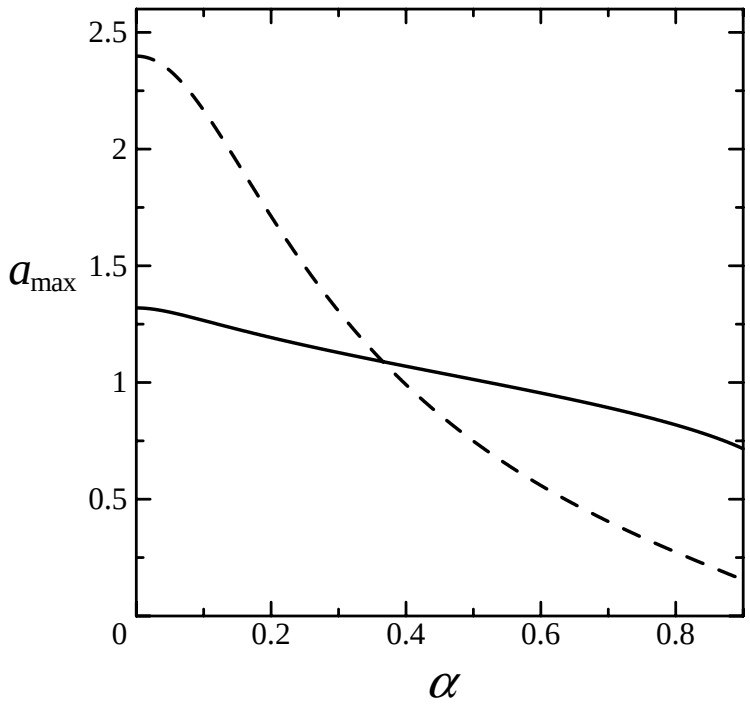

図 3.4: セパラトリクス上の最大振幅 $a_{\max}$ の α 依存性．実線は円筒波，破線は球面波に対する $a_{\max}$ を示す．

り，円筒波，球面波どちらの場合も α の増加にともなって $a_{\max}$ が単調に減少している様子がみてとれる．また，円筒波に比べて，球面波は α に対する依存性が強くあらわれており，波面の収束や拡散といった音場の幾何学的な性質に起因する効果が強いことがうかがえる．このことは，図 3.2 のパラメータ σ が α の増大に対して単調に増加することによる．以上より，音場の幾何学的な性質が平面波に近づくにつれて変調の振幅が小さくなる，すなわち幾何学的な効果が弱まるにつれてその結果として現れる振幅の変調現象も弱められるといえる．

図 3.3.1 に，$\alpha = 0.1$，$\delta = \eta = 0$ の場合における内部円柱表面 $(r = \alpha r_0)$ での共鳴音波による圧力変動 p' の包絡波形を示す．ここで音圧 p' は，圧力 p^* の初期の静止一様状態における圧力 p_0 からのずれ $p' = p^* - p_0$ によって定義される．いま，ε の 1 次の近似の範囲では圧力方程式より $p' = -\rho_0(\partial\Phi^*/\partial t^*)$ と表される．したがって，式 (3.10) より無次元化された音圧変動を $p'/(\rho_0 c_0^2) = 2\varepsilon A(T)\phi_1(r)\sin t$ と表すことができる．図中の実線は，振幅方程式 (3.60)–(3.61) によって得られた各周期ごとの圧力変動の極大値 $2A(T)\phi_1(\alpha r_0)$ を連ねた包絡線である．一

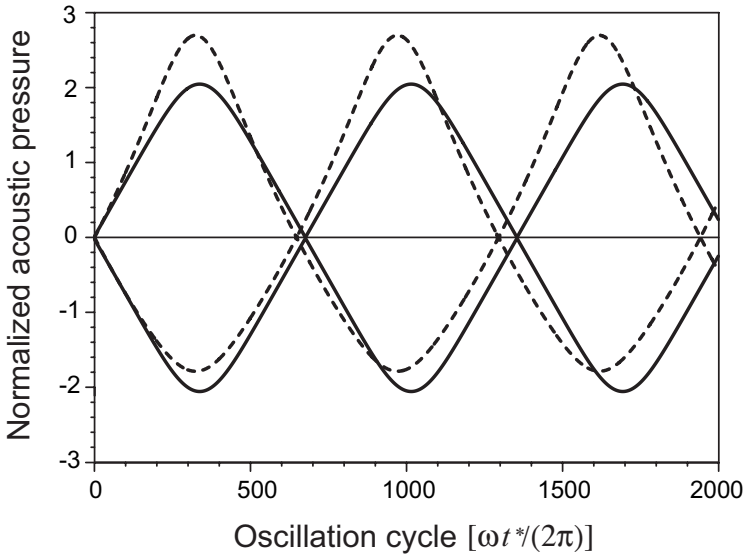

図 3.5: $\alpha = 0.1$, $\delta = \eta = 0$ における内部円柱表面での圧力変動の包絡波形．実線は式 (3.60)–(3.61) によって求められた $a(T)$ より得られた波形，破線は Euler 方程式の直接数値計算によって求められた波形を示す．

方，波線で示された波形は，Euler 方程式の直接数値計算によって得られた $r = \alpha r_0$ における圧力変動の (音源の振動 1 周期ごとの) 最大値を連ねて得られた曲線である．解析解より得られたグラフは，高次の非線形効果を考慮していないために，数値解に見られるような，音圧変動の最大値と最小値の非対称性が見られないなどの違いはあるものの，変調の振幅や周期は数値計算によって得られた結果とおおむね一致している．

つづいて，変調の周期について考察を行う．detuning$\delta = 0$ の場合，式 (3.72) を式 (3.60) で $\delta = 0$ とした式に代入し両辺を積分すれば，セパラトリクス (3.72) 上の周期 T_p が次のように求まる．

$$T_p = \frac{4}{3}\left(\frac{4}{\sigma\beta^2}\right)^{1/3} \int_0^{\pi/2} \frac{d\theta}{\sin^{2/3}\theta} = \frac{2[\Gamma(1/6)]^2}{3(\sigma\beta^2)^{1/3}\Gamma(1/3)} \tag{3.83}$$

ここで，積分公式

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{\mu-1} x\, dx = 2^{\mu-2} B\left(\frac{\mu}{2}, \frac{\mu}{2}\right) \tag{3.84}$$

を用いた [52]．ただし，式 (3.83) および (3.84) に現れる $\Gamma(\ \cdot\ )$ と $B(\ \cdot\ ,\ \cdot\ )$ はそれぞれガンマ関数，ベータ関数を表しており，振幅方程式の係数としての Γ 等とは無関係であることを注意しておく．

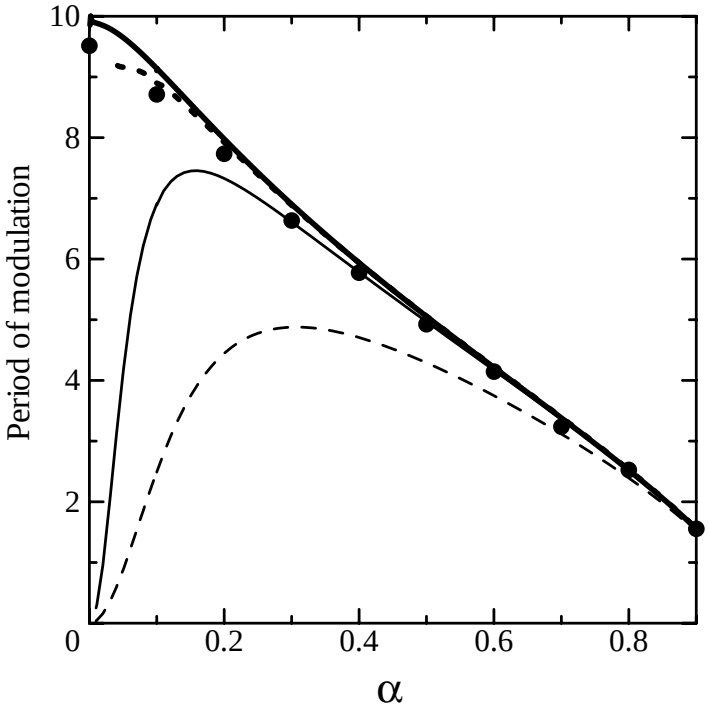

図 3.6: パラメータ α に対する変調の周期の依存性 (円筒波の場合)．太い実線は式 (3.83) によって得られる，相平面上原点を原点を通過する軌道の周期，太い破線は点 $(0.2, 3\pi/2)$ を通過する軌道の周期を示す．細い実線と破線はそれぞれ点 $(a_0, \theta_0) = (0.4, \pi/2)$ および $(1.0, \pi/2)$ を通過する軌道の周期である．図中の●によって示された点は Euler 方程式系に対する数値計算 (第 4 章参照) によって得られた変調の周期を示す．

図 3.6 は，式 (3.83) ならびに振幅方程式 (3.70)，(3.71) の数値積分によって計算される変調の周期の α に対する依存性を円筒波の場合について求めたものである．太い実線は式 (3.83) によって得られる相平面上の原点を通過する軌道 (セパラトリクス) によって表される振幅変調の周期を示している．太い破線は，相平面 (図 3.3(a)) において，点 $(0.2, 3\pi/2)$ を通過する軌道によって示される振幅変調の周期を表している．この初期条件によって指定される軌道は α の値に関わらず閉じた軌道となる．閉じた軌道で表される振幅変調の周期は α が増加するにしたがって単調に減少している．このことは，α が大きい，すなわち平面波の性質が強くなるにしたがって，振幅変調の周期が短くなってゆくということを示している．また，$\alpha = 0$ の近傍を除いて，変調の周期は初期条件 (a_0, θ_0) にほとんど依存しないことがわかる．

図 3.6 の細い実線と破線は，初期条件としてそれぞれ $(a_0, \theta_0) = (0.4, \pi/2)$ および $(1.0, \pi/2)$

を選んだ場合における振幅変調の周期を示している．このとき，相平面における軌道は開いた軌道となり複素振幅 A の位相は時間にともなって単調に増加 (減少) してゆく．このような場合における変調の周期は，実振幅 a が極大値をとった点から次の極大値をとるまでの時間すなわち θ が 2π だけ増加もしくは減少する時間を用いて定義されている．閉じた軌道の場合と異なり，開いた軌道によって表される振幅変調の周期は $\alpha = 0$ のときゼロとなり，α がある程度小さな領域では α にともなって増加する．その後，閉じた軌道の変調の周期を示す曲線に漸近してゆく (単調に減少する)．また，開いた軌道の場合には，初期条件による変調の周期の違いが顕著に現れる．図 3.6 の細い実線と細い破線を比較すると，α の値に関わらず破線で示された周期の方が実線で示された周期よりも短くなっている．相平面 (図 3.3(a)) で見てみると，細い破線 (初期条件 $(a_0, \theta_0) = (1.0, \pi/2)$) に対応する軌道は細い実線 (初期条件 $(a_0, \theta_0) = (0.4, \pi/2)$) に対応する軌道よりも ($\theta$ 軸から見て) 外側に位置することになる．つまり，開いた軌道によって記述される振幅変調の周期は，θ 軸から見て内側 (すなわち閉じた軌道の近く) にあるものほど閉じた軌道における周期に近い値をとり，閉じた軌道から遠くへ離れた軌道ほど変調の周期が短くなるといえる．

図 3.6 中の●で示された点は，Euler 方程式系に対する数値計算によって得られた変調の周期[9]を示している．数値計算によって得られた周期と本章の弱非線形解析によって得られた近似解が極めてよく一致していることがわかる．

$\alpha = 0.1$，$\delta = 0.5$ の場合に対する共鳴波の振幅 A のふるまいを示す相平面を図 3.3(b) に示す．二つの異なる種類の閉じた軌道が存在している様子が確認できる．このことは，$\delta = 0$ の場合 (図 3.3(a)) にはある一つの安定した特異点 (渦心点) と原点 $(a_0, \theta_0) = (0, 0)$ をとおる曲線 (セパラトリクス) に挟まれた領域にのみ閉じた軌道が存在していたことと対称的である．具体的には，例えば $\theta = \pi/2$ となる直線上には 3 つの異なる特異点 (図中の点 P_1, P_2, P_3) が存在し，P_1 と P_3 それぞれについてこれらの点を内部に含む閉じた軌道が描かれている．また，P_3 を内部に含む閉じた軌道は，P_2 を通過する軌道によってその外側に存在する開いた軌道と隔てられている．図 3.3(a) の場合と同様，安定性解析によって P_1 と P_3 は安定な特異点 (渦心点) であることが容易に確かめられる．一方，P_2 は不安定な特異点 (鞍部点) であり，この点の近傍では微小な擾乱に対して複素振幅 A のふるまいは不安定となり P_2 によっ

[9]初期条件として静止状態 (振幅ゼロ) を選んで計算を行っている．詳細は第 4 章を参照のこと．

てあらわされる点から時間 T の経過とともに離れてゆく．以上のことから，音源の振動数と共鳴振動数とのずれ δ の違いによって複素振幅 A のふるまいの特徴が大きく異なることがわかる．このような δ に対する A の挙動の依存性は非線形現象に特有のものである．δ と相平面に現れる特異点 (定常振幅の解) との関係は次節において詳しく調べられる．

3.3.2　散逸のあるケース

この節では，気体の粘性と熱伝導性によるエネルギーの散逸を考慮した場合における共鳴波のふるまいを調べる．図 3.7(a) に $\alpha = 0.1,\ \eta = 0.1,\ \delta = 0$ の場合の相平面を示す．図から，A の挙動を表す軌道は図中の点 P(およびこれに対応する各点) のまわりを回りながらこれらの点に収束している様子がわかる．このことは，共鳴波の振幅 a と位相 θ は時間的な変動を繰り返しながらも気体の散逸性のためにその変動の幅をしだいに小さくしてゆき，最終的に a, θ が時間的に変動しない (すなわち，$da/dT = d\theta/dT = 0$) 定常振動状態に到達するということを示している．図 3.7(a) のケースでは，実振幅 a の最大値は 1 周期の変調[10] を繰り返すごとにその振幅が約 10%減少する．

ここで，適当なスケールをもった有次元の円筒波の共鳴現象について考察してみる．例えば，円筒内の気体を空気 ($\nu = 15[\mathrm{mm}^2/\mathrm{s}]$) とし，外部円筒の半径 $\bar{r}_b = 1[\mathrm{m}]$，$\alpha = 0.1$，音響 Mach 数 $M = 1 \times 10^{-4}$ とする．このとき，音響 Reynolds 数は $Re = 9 \times 10^6$，散逸パラメータ η は $\eta = 5.2 \times 10^{-5}$ となり，散逸効果は図 3.7 で扱われた問題に比較して極めて小さいことがわかる．図 3.8 に $\alpha = 0.1,\ \delta = 0,\ \eta = 5.2 \times 10^{-5}$ としたときの複素振幅 A の長時間にわたる相平面上でのふるまいを示す．図には初期条件を $(a_0, \theta_0) = (1 \times 10^{-4}, 3\pi/2)$ と選び，約 100 周期にわたる振幅の変調を繰り返した際の相平面上の軌道が描かれている．100 周期後の実振幅 a の最大値は，1 周期目の最大値に比較して約 0.7%減少している．以上のことから，少なくともここで考察したスケールの円筒内に励起される共鳴波のふるまいに関して，振幅変調の周期に対して数周期程度の時間の現象を考えるならば，気体の散逸性を無視した取り扱いが可能であるといえる．[11]

[10] 散逸が無い場合と違い，散逸を考慮した場合には閉じた軌道が存在しないため，厳密な意味での周期解は存在しない．ここでは軌道が特異点のまわりを回るとき，ある位相 θ_0 から出発した軌道が再びその位相に戻るまでの時間を変調の周期として定義している．

[11] もちろん，音響流などの境界層内部の流れが支配的であるような場合には，そこでの粘性の影響を無視す

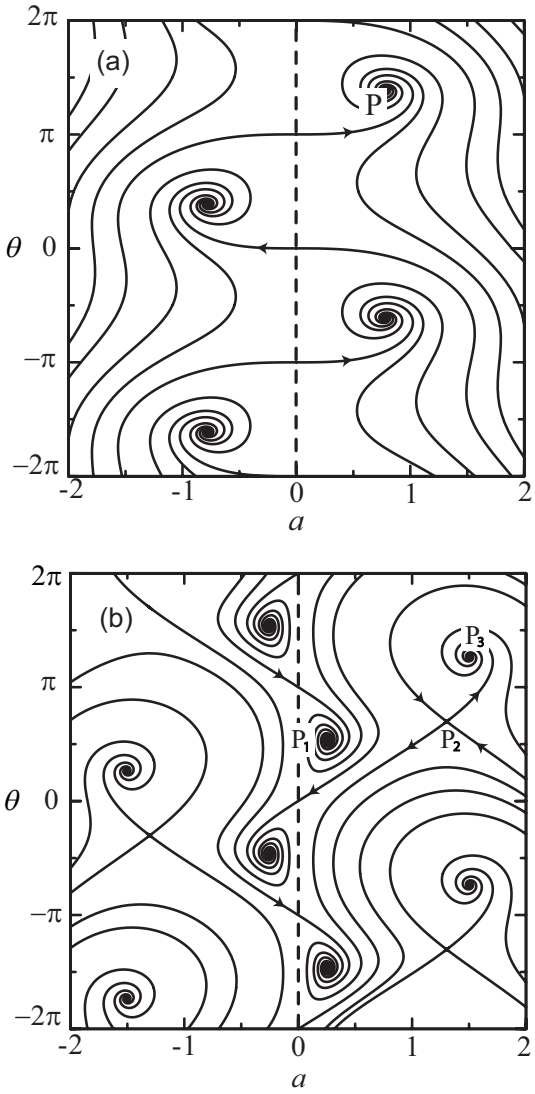

図 3.7: 相平面における複素振幅 A の挙動 ($\alpha = 0.1,\ \eta = 0.1$，円筒波)．(a):$\delta = 0$，(b):$\delta = 5$. 図 (a) 中の P で示された点は安定な特異点 (渦点) を示している．また，図 (b) において，P_1, P_3 で示された点は安定な特異点 (渦点)，P_2 で示された点 (およびそれに対応する各点) は不安定な特異点 (鞍部点) を示す.

図 3.7(a) に現れる点 P(およびそれに対応する点) は安定な特異点であり，渦状点 (focus) [29, 50] と呼ばれる．実際，点 P は位相と振幅がともに時間的に変化しない定常振動解を表す点であり，微小な擾乱に対して安定な点であることを安定性解析によって容易に確かめることができる．この定常振動状態は，音源 (外部円筒) の脈動によって供給される力学的エネ

ることはできない.

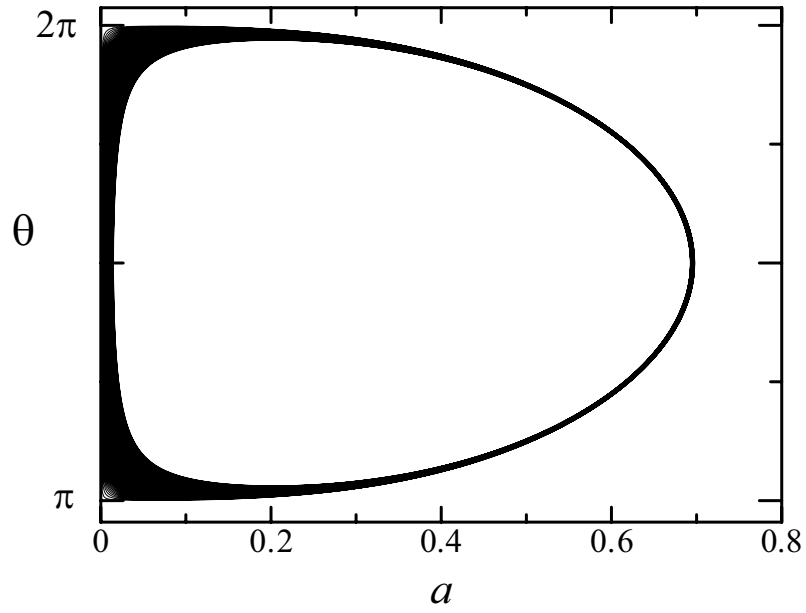

図 3.8: $\alpha = 0.1, \delta = 0, \eta = 5.2 \times 10^{-5}$ としたときの複素振幅 A のふるまい．初期条件を $(a_0, \theta_0) = (1 \times 10^{-4}, 3\pi/2)$ と選び，約 100 周期にわたる振幅の変調を繰り返した際の相平面上の軌道を示す．

ルギーと気体の粘性と熱伝導性によって散逸するエネルギーとがつり合うことによって維持されている．

定常振動状態 (相平面 3.7(a) 上の特異点) における解の性質をあきらかにするため，振幅方程式 (3.60)，(3.61) で $da/dT = d\theta/dT = 0$ とおくと，次の定常振動状態における実振幅 a についての代数方程式が得られる．

$$(\sigma a^2 + \Gamma\delta)^2 - \frac{\beta^2}{a^2} + \frac{\eta^2}{4} = 0 \tag{3.85}$$

図 3.9 は式 (3.85) より得られる，定常振動状態における実振幅 a の δ に対する応答を示す曲線である．図中の実線は散逸の無い ($\eta = 0$) 場合における振幅の応答を示す曲線であり，破線は $\eta = 0.3$ の場合の応答曲線である．detuning δ に対する振幅 a の応答は，質点の非線形振動を記述する Duffing の方程式の応答 [29, 50] に極めてよく類似している．[12] このことは，円筒波や球面波の共鳴現象における共鳴波の振幅について，非線形ばねの強制振動に見られ

[12] Duffing oscillator において，δ の正の方向に振幅応答曲線が傾く性質をもったばねを漸硬ばね，逆に負の方向に傾くものを漸軟ばねと呼ぶ．

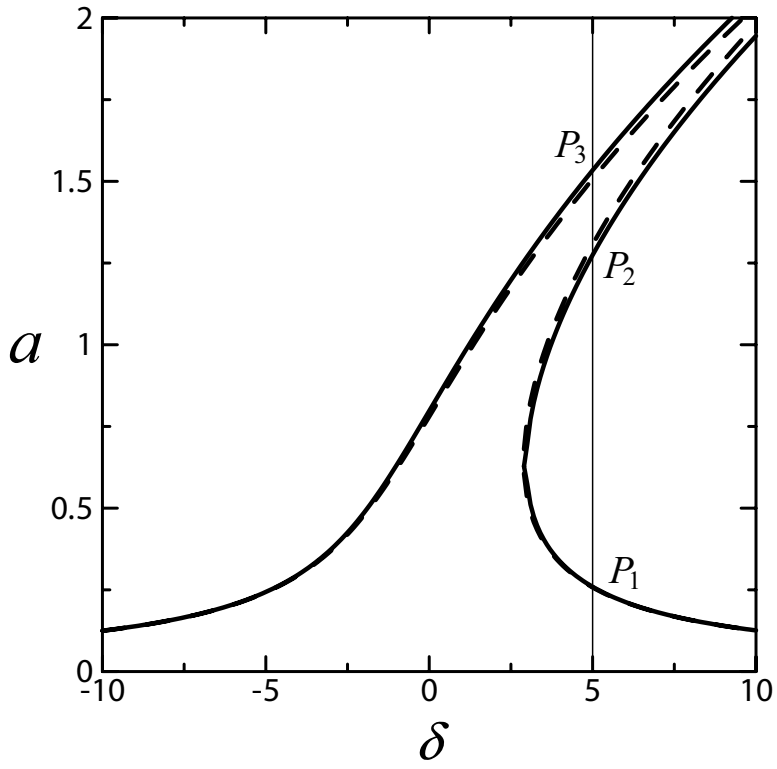

図 3.9: 定常振動状態における detuning δ に対する実振幅 a の応答．図の実線と破線はそれぞれ $\eta = 0$ と $\eta = 0.3$ に対応している．

る特徴的な非線形現象である振幅のジャンプ現象や振幅応答のヒステリシス (履歴現象) などが存在する可能性を示唆している．また，振幅の応答曲線が図 3.9 のような形をとることから，ある δ に対して複数の定常解が存在する場合がある．たとえば図 3.9 において，$\delta = 0$ を示す直線と振幅応答曲線との交点 P は，図 3.3(a)，3.7(a) における定常振動解 P を表している．同様に $\delta = 5$ によって表される直線は，振幅の応答曲線と P_1, P_2 および P_3 の 3 点に交点をもつ．

図 3.7(b) に $\delta = 5$，$\eta = 0.3$ のケースに対する相平面を示す．当然，図中に示された特異点 P_1, P_2, P_3 における実振幅 a の値は，図 3.9 の定常振動解の応答曲線と $\delta = 5$ の直線との交点における a の値と一致している．図 3.7(b) において点 P_1，P_3(およびそれに対応する各点) は安定な特異点 (渦状点) であり，一方，点 P_2 とそれに対応する点は不安定な特異点 (鞍状点) である．したがって，図 3.7(b) において任意の振動状態 (つまり，初期条件として任意の

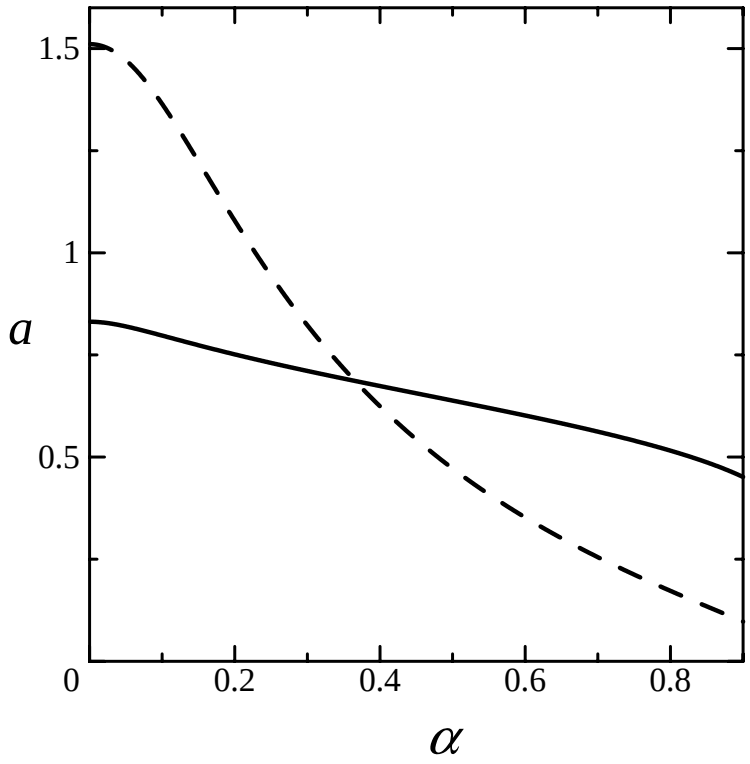

図 3.10: $\delta = \eta = 0$ における定常振動解の振幅 a の α 依存性.

a_0 と θ_0 を選ぶことに対応する) は位相と振幅の変調を繰り返しながら，$T \to \infty$ の極限において P_1 または P_3(およびこれらに対応する点) に収束してゆく．また，各軌道が P_1 と P_3 のどちらに収束するのかは，初期条件 (a_0, θ_0) に依存する．より具体的にいえば，安定な特異点に収束する各曲線群は，不安定な特異点 P_2 およびそれに対応する各点を通過する曲線によって境される．

ここで，定常振動解の性質をより詳しく調べるために以下の考察を行う．代数方程式 (3.85) を展開して a について整理すると，次の a に関する複 3 次式が得られる．

$$\sigma^2 a^6 + 2\sigma\Gamma\delta a^4 + \left(\Gamma^2\delta^2 + \frac{\eta^2}{4}\right) a^2 - \beta^2 = 0 \tag{3.86}$$

いま，

$$\begin{aligned}
\mathfrak{A}' &= \frac{2\Gamma\delta}{\sigma}, \\
\mathfrak{B}' &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\Gamma^2\delta^2 + \frac{\eta^2}{4}\right), \\
\mathfrak{C}' &= -\frac{\beta^2}{\sigma^2}, \\
x &= a^2
\end{aligned}$$

のように各変数および係数を定義すれば，式 (3.86) は以下のような 3 次方程式の形に書くことができる．

$$f(x) = x^3 + \mathfrak{A}'x^2 + \mathfrak{B}'x + \mathfrak{C}' \tag{3.87}$$

3 次方程式の解の項式 (Cardano の解法) によって，式 (3.87) の解は次のように求まる (詳細は付録を参照のこと)．

$$\begin{aligned}
x &= X_n - \frac{1}{3}\mathfrak{A}, \qquad (n = 1, 2, 3) \\
X_1 &= u_1 + v_1, \quad X_2 = \omega u_1 + \omega^2 v_1, \quad X_3 = \omega^2 u_1 + \omega v_1, \\
\omega &= \frac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}, \\
u_1 &= \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{B}}{2} + \sqrt{D}}, \\
v_1 &= \sqrt[3]{\frac{\mathfrak{B}}{2} - \sqrt{D}}, \\
D &= \frac{\mathfrak{B}^2}{4} + \frac{\mathfrak{A}^3}{27}, \\
\mathfrak{A} &= \mathfrak{B}' - \frac{\mathfrak{A}'}{3}, \\
\mathfrak{B} &= \frac{2\mathfrak{A}'^3}{27} - \frac{\mathfrak{A}'\mathfrak{B}'}{3} + \mathfrak{C}'
\end{aligned} \tag{3.88}$$

ここで，D は 2 次方程式

$$w^2 + \mathfrak{B}w - \frac{\mathfrak{A}^3}{27} = 0$$

の判別式である．

判別式 $D < 0$ となるとき，方程式 (3.87) は 3 つの異なる実数解をもつ．一方，$D \geq 0$ となるとき，方程式 (3.87) の実数解はただひとつとなる．特別な場合として $\delta = \eta = 0$ を考える

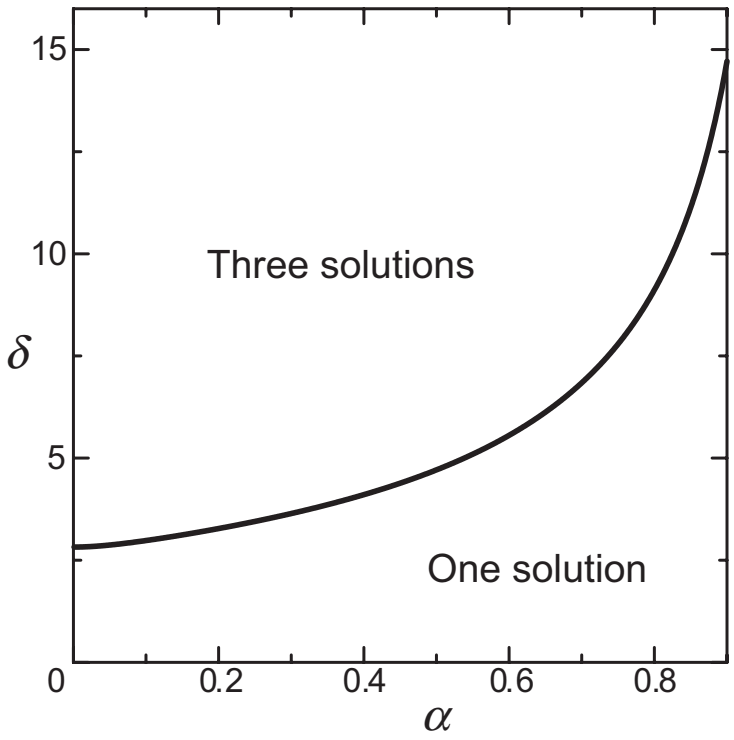

図 3.11: $\eta = 0$，基本振動モードの円筒波における定常振動解の個数の α および δ 依存性.

と (このとき D はつねに正の値をとる)，式 (3.87) の解が以下のように簡単な形で書ける．

$$a = \sqrt[3]{\frac{\beta}{\sigma}} \tag{3.89}$$

図 3.10 は，α に対する式 (3.89) によって定義される定常解の振幅 a(すなわち $\delta = \eta = 0$ における定常解) の依存性を示したグラフである．図から α の増加にともなって定常振動解の振幅が単調に減少している様子がわかる．また，図 3.11 に $\eta = 0$，基本振動モードの円筒波における定常振動解の個数の α および δ 依存性を示す．図に示された曲線の下側の領域では常に判別式 $D > 0$ となり，定常振動解はただひとつだけ存在する．上側の領域では，常に $D < 0$ となるため 3 つの異なる定常振動解が存在する．方程式 (3.86) の性質とこれらの定常振動解のふるまいの詳細は，付録 C において詳しく述べられる．

3.4　結論

本章では，多重尺度法を用いて同軸二重円筒 (もしくは同心二重球殻) 内に満たされた理想気体中に励起される円筒波 (球殻の場合は球面波) の弱非線形共鳴現象の解析を行った．この解析により，共鳴波の複素振幅 A の時間的な変動を記述する方程式 (3.54) が得られた．その結果として円筒波や球面波の共鳴現象においては，振幅の変調現象を含んだ (平面音波の共鳴現象では見られないような) 極めて特徴的な現象が現れることが示された．さらに，そのような現象において，音場の非線形性と幾何学的な性質が本質的な役割を果たしていることが明らかになった．以下にその結果をまとめる．

1. 円筒波や球面波の非線形共鳴現象では，音場の幾何学的な性質に起因する分散の効果が働くために，粘性や熱伝導性によるエネルギー散逸が無いような場合でも衝撃波の形成が抑制される．音場の幾何学形状による分散の効果は，円筒波あるいは球面波の共鳴現象における高調波の振動数が基本波の振動数の整数倍に一致しないということが本質的な役割を果たしている．このことは，内部に円柱や球を含まない単純な円筒や球殻内の共鳴振動数がそれぞれ，Bessel 関数 $J_1(x) = 0$ や $x = \tan x$ の解で表されることから容易に確かめることができる．また，Bessel 関数や $x - \tan x$ の $x \to \infty$ における漸近展開より，次数の高い高調波や低次のモードであっても α が 1 に近い場合には円筒内の共鳴波のふるまいは平面波のそれに近くなり，分散効果による衝撃波形成の抑制効果は弱くなる．

2. 気体の粘性と熱伝導性によるエネルギーの散逸が無い場合，共鳴波の振幅 a は周期的な変調を繰り返す．この場合，相平面 (a–θ 平面) 上における共鳴波の複素振幅 A の解の軌道は 2 つの異なるグループに分けられる．ひとつは相平面上における閉じた軌道の群であり，この軌道上では共鳴波の実振幅 a と位相 θ はともに同じ周期の変調を繰り返す．さらに，変調の周期は外部円筒 (球殻) と内部円柱 (球) の半径の比 α に比例して減少する．もう一方の軌道は相平面上で閉じておらず，振幅 a については周期的な変動を繰り返すが，位相 θ は時間 T の経過にしたがって単調に増加あるいは減少する．閉じた軌道の特別な場合として，振幅と位相がともに時間的に変動しない定常振動状態を示す相平面上の特異点が存在する．

3. 散逸がある場合，共鳴波の振幅と位相は時間的な変動を繰り返しながら徐々にその変動の幅を狭めてゆき，$T \to \infty$ において安定な定常振動状態に収束する．このとき，相平面上のどの特異点に収束するかは，初期条件に依存する．

4. 定常振動状態における振幅 a のふるまいを記述する方程式 (3.85) より，外部円筒の脈動の振動数と線形解による共鳴振動数とのずれ δ に対する実振幅 a の応答を表す曲線が得られた．この応答曲線は，δ の正の方向 (すなわち，線形の共鳴振動数よりも高周波側) に傾いた形となっている．そのため δ に対して a が多価となる領域が存在する．相平面における特異点の数およびそこでの a の値は，a の δ に対する応答曲線上における定常振動解の数とその値に一致する．

第4章　同軸円筒内の気体中に励起される強非線形共鳴音波の数値解析

外部円筒の脈動の振動数が系の固有振動数と異なるとき，気体の散逸性を無視したとしても音源の振幅が十分に小さく非線形効果を無視できる (線形音波) ならば，外部円筒から放射される音波と内部円柱で反射された音波との重ね合わせにより，境界値問題の解として定在波解が得られる[1]．しかし，外部円筒における加振振動数が共鳴振動数に一致する，あるいは近づくとき，二重円筒内に励起される音波の振幅は極めて大きくなり，もはやその非線形効果を無視することができなくなる．

第3章では，このような非線形問題のうち衝撃波が形成されない‘弱非線形’の共鳴現象を扱った．この章では，同軸二重円筒内部の理想気体中に励起される大振幅の共鳴音波の非線形発展を，衝撃波の形成まで含めて，流体力学の基礎方程式 (質量保存則，運動量保存則，エネルギー保存則) を数値的に解くことにより解析を行う．その結果，波面の収束による衝撃波の強さの変化や動径 r の正の方向と負の方向に向かう音波の非対称なふるまいなど，前章で述べた弱非線形共鳴現象には見られない，円筒波の大振幅共鳴現象を特徴づける極めて興味深い現象が明らかにされる．また，衝撃波形成の条件や音響流と呼ばれる実質的な質量流れの存在も示される．

この章で行われる数値計算には，Euler 方程式系に対する高次精度の風上差分法の一種である Chakravarthy–Osher の3次精度 TVD スキーム [53,54] を採用した．Chakravarthy–Osher のスキームに関しては付録 D において詳しい解説を与える．

[1]散逸性を考慮しない場合，初期値境界値問題については適切な初期条件が与えられない限りその影響が常に残ることになる．

4.1　支配方程式と境界条件・初期条件

同軸円筒内の気体中に励起される音波のふるまいを記述する方程式は，第 2 章の式 (2.16)–(2.18) より，無次元化された形で次のように書かれる．

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u) = -\frac{\rho u}{r} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(p + \rho u^2) &= -\frac{\rho u^2}{r} \\ &+ \frac{1}{Re}\left[\frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) + \frac{2}{3}\left(2\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right)\frac{\partial \mu}{\partial r}\right]\end{aligned} \tag{4.2}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}[(E_t + p)u] &= -\frac{(E_t + p)u}{r} \\ &+ \frac{1}{Re}\left\{\left[\frac{4}{3}\mu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r^2}\right) + \frac{2}{3}\left(2\frac{\partial u}{\partial r} - \frac{u}{r}\right)\frac{\partial \mu}{\partial r}\right] u \right. \\ &\left. + \frac{4}{3}\mu\left[\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 - \frac{u}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \left(\frac{u}{r}\right)^2\right]\right\} + \frac{1}{\gamma - 1}\frac{1}{Re}\frac{1}{Pr}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\mu r \frac{\partial \Theta}{\partial r}\right)\end{aligned} \tag{4.3}$$

ただし，$Re = \bar{r}_b c_0/\nu_0$，$Pr = c_p \mu_0/\kappa$，$\mu = \mu^*/\mu_0$ と定義されている．ここで，添字としてゼロを付してある量は気体が初期の静止一様状態にあるときの値であることを示す．あとに示すように，強い衝撃波面におけるエネルギー散逸によって円筒内部の気体の温度が局所的に上昇することがある．このような場合には粘性係数 μ^* を温度 Θ の関数として扱う必要がある．本論文では，μ^* を Sutherland の式 [55] によって算出している．

粘性による散逸を考慮しない場合，式 (4.1)–(4.3) は，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(\rho u) = -\frac{\rho u}{r} \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(p + \rho u^2) = -\frac{\rho u^2}{r} \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial E_t}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}[(E_t + p)u] = -\frac{(E_t + p)u}{r} \tag{4.6}$$

となる．[2]境界条件は，第 3 章と同様に

$$r = \alpha r_s \ \text{において} \qquad u = 0 \tag{4.7}$$

$$r = r_s - \frac{M}{\cos} t \ \text{において} \qquad u = M \sin t \tag{4.8}$$

[2]もちろん，衝撃波が形成されるようなケースでは衝撃波面におけるエネルギー散逸を無視することはできない．(第 2 章参照) この場合，衝撃波を含む共鳴波解は Euler 方程式系 (3.4)–(3.6) の弱解として求められる．

と与えられる．さらに，Navier–Stokes 方程式 (4.1)–(4.3) に対しては，速度 u に対する境界条件 (4.7)，(4.8) に加えて温度 Θ に関する境界条件が必要となる．本論文では，内部円柱および外部円筒の境界面で温度勾配がゼロの条件 (断熱条件) を課す．

$$r = \alpha r_s \ \text{および} \ r_s - M\cos t \quad \text{において} \qquad \frac{\partial \Theta}{\partial r} = 0 \tag{4.9}$$

ここで扱う問題は初期値境界値問題であるので，境界条件とともに初期条件も定める必要がある．第 2 章で述べたように，初期時刻 $t = 0$ において円筒内の気体は静止一様状態にあるものとする．このとき初期条件は，式 (2.33) によって表される．無次元化された形の初期条件は，

$t = 0$ において，$\alpha r_s \le r \le r_s$ 上の任意の r で，

$$u = 0, \quad \rho = 1, \quad p = \frac{1}{\gamma}, \quad E_t = \frac{1}{\gamma(\gamma - 1)}, \quad \Theta = 1, \quad c = 1 \tag{4.10}$$

となる．

4.2　境界条件の数値的な取り扱いと座標変換

この節では，主として Euler 方程式系 (4.4)–(4.6) に関する境界条件の扱いについての説明を行う．Navier–Stokes 方程式系 (4.1)–(4.3) についても同様の議論が可能である．ただし，その場合には未知数として Θ が加わるため温度に関する境界条件が必要となる．

4.2.1　境界条件の数値的取り扱い

方程式系 (4.4)–(4.6) に含まれる未知関数は，$\rho,\ u,\ p,\ e$ の 4 個である．このうち u の境界値は，式 (4.7)，(4.8) で与えられており，e は，エネルギーの定義式

$$E_t = \frac{1}{2}\rho u^2 + \frac{p}{\gamma - 1} \tag{4.11}$$

から求めることができる．したがって，与えられた方程式を解くためには，残された ρ，p の境界上における値を決定する必要がある．本研究では 1 次の外挿

$$f_{j+1} = \frac{1}{2}(f_j + f_{j+2}) \tag{4.12}$$

を用いて境界上の ρ，p の値を決定する．ここで，f_j は格子点位置 j における物理量 f を示す．内部円柱境界面上での格子点の位置を $j = 0$，外部円筒境界面上での格子点の位置を $j = n$ として指定する．このとき，境界条件は以下のように与えられる．

・内部円柱境界上で

$$\begin{cases} u_0 = 0 \\ \rho_0 = 2\rho_1 - \rho_2 \\ p_0 = 2p_1 - p_2 \end{cases} \tag{4.13}$$

・外部円筒境界上で

$$\begin{cases} u_n = M \sin \Omega t \\ \rho_n = 2\rho_{n-1} - \rho_{n-2} \\ p_n = 2p_{n-1} - p_{n-2} \end{cases} \tag{4.14}$$

4.2.2　一般座標変換

外部円筒の半径は式 (4.8) で定義されるように時間とともに変動する．このように，境界面の位置や形状が時間とともに変化する場合，空間に固定された格子点を用いて計算を行うと，格子点の位置と実際の境界面の位置とが一致せず，考えている問題に対する適切な境界条件を与えることができなくなる．そこで境界の運動にともなって格子点の位置が変化するような計算格子を採用することが必要となる．ただし，計算格子が時間にともなって変形・移動すると，流体が静止している場合でも相対的に格子上を通過する見かけの流束が生じる [56, 57]．したがって，この見かけの流束を正確に評価しなければ正しい計算結果を得ることはできない．また，境界面の位置の時間的な変動の影響を正しく評価するためには，その変動の様子を解像するのに十分な数の格子点が必要となる．しかし，全計算領域にわたって格子点数を増やすことは数値計算の効率を考えると現実的ではない．そこで本研究では計算領域 (円筒内部) の境界 (内部円柱と外部円筒の境界) 付近に格子点を集めることを考える．さらに，Navier–Stokes 方程式 (4.1)–(4.3) に対する計算の場合，境界面上における温度境界層の解像という点からも境界近傍で格子点の間隔が密になっていることが要請される．

この節では，上記の要件を満足するような，境界面の位置が時間的に変動する場合における物理空間から計算空間への座標変換を導入する．

方程式系 (4.4)–(4.6) をベクトルの形で書くと次のようになる．

$$\frac{\partial Q}{\partial t}+\frac{\partial E}{\partial r}=S \tag{4.15}$$

ただし，

$$Q=\begin{bmatrix}\rho\\ \rho u\\ E_t\end{bmatrix},\quad E=\begin{bmatrix}\rho u\\ p+\rho u^2\\ (E_t+p)u\end{bmatrix},\quad S=-\frac{1}{r}\begin{bmatrix}\rho u\\ \rho u^2\\ (E_t+p)u\end{bmatrix} \tag{4.16}$$

である．

いま，

$$\tau=t,\qquad \xi=\xi(r,t) \tag{4.17}$$

とおいて，座標系を物理空間 (r,t) から，時間とともに変動する計算空間 (ξ,τ) へと変換する．変換のマトリクスは，

$$\begin{bmatrix}dt\\ dr\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial t}{\partial\tau} & \dfrac{\partial t}{\partial\xi}\\ \dfrac{\partial r}{\partial\tau} & \dfrac{\partial r}{\partial\xi}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}d\tau\\ d\xi\end{bmatrix} \tag{4.18}$$

となる．このとき，支配方程式 (4.15) に現れる微分演算子 $\partial/\partial t$，$\partial/\partial r$ はそれぞれ以下のように変換される．

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}&=\frac{\partial\tau}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial\xi}{\partial t}\frac{\partial}{\partial\xi}\\ &=\frac{\partial}{\partial t}+\xi_t\frac{\partial}{\partial\xi}\end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial r}&=\frac{\partial\tau}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\tau}+\frac{\partial\xi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\xi}\\ &=\xi_r\frac{\partial}{\partial\xi}\end{aligned} \tag{4.20}$$

ただし，ξ_r と ξ_t はそれぞれ関数 ξ の引数 r，t による微分を表している．また，以下に現れる r_t と r_ξ についても同様である．式 (4.18) の変換の行列および，これを逆変換して得られる関係式から，物理空間 (r,t) と計算空間 (ξ,τ) に関して，

$$\xi_r=\frac{1}{r_\xi},\quad \frac{\xi_t}{\xi_r}=-r_t \tag{4.21}$$

の関係が得られる．式 (4.19)–(4.21) を式 (4.15) に用いて支配方程式の座標変換を行うと，

$$\frac{\partial \tilde{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \tilde{E}}{\partial \xi} = \tilde{S} \tag{4.22}$$

が得られる．ここで，$\tilde{Q}$，$\tilde{E}$，$\tilde{S}$ は以下に定義されるベクトルである．

$$\tilde{Q} = r_\xi \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E_t \end{bmatrix}, \quad \tilde{E} = \begin{bmatrix} \rho U \\ \rho u U + p \\ (E_t + p)U + r_t p \end{bmatrix}, \quad \tilde{S} = \frac{-r_\xi}{r} \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho u^2 \\ (E_t + p)u \end{bmatrix} \tag{4.23}$$

ただし，

$$U = u - r_t \tag{4.24}$$

である．

式 (4.22)–(4.24) によって，格子点が移動する場合の空間 1 次元の Euler 方程式系に対する一般座標変換が定義された．より詳細な議論や空間 2 次元，3 次元への拡張については文献 [57, 58] を参照のこと．

4.2.3　本問題に対する一般座標変換の適用

ここでは関数 $\xi(r,t)$ の形を具体的に定義し，脈動する同軸 2 重円筒に対する適切な座標変換を行うことを考える．いま，時刻 t における外部円筒の境界面の位置を r_B とし，そこでの境界面の移動速度を u_B とすると，境界条件 (2.32) より，

$$r_B = r_s - M\cos t \tag{4.25}$$

$$u_B = M\sin t \tag{4.26}$$

と表される．いま，関数 $\xi(r,t)$ を

$$r = \frac{\tanh\left\{\left(\xi - r_s\dfrac{1+\alpha}{2}\right)\dfrac{1}{C}\right\}}{2\tanh\left(r_s\dfrac{1-\alpha}{2C}\right)}(r_B - \alpha r_s) + \frac{r_B + \alpha r_s}{2} \tag{4.27}$$

によって定義する．この式は，$\xi = \alpha r_s$ のとき $r = \alpha r_s$，$\xi = r_s$ のとき $r = r_B$ となる．ここで，C は格子点の分布を指定するパラメータであり，C を小さくすると，ξ を均等に分割したとき $r = \alpha r_s$ 近傍と $r = r_B$ 近傍に格子点が集中する．

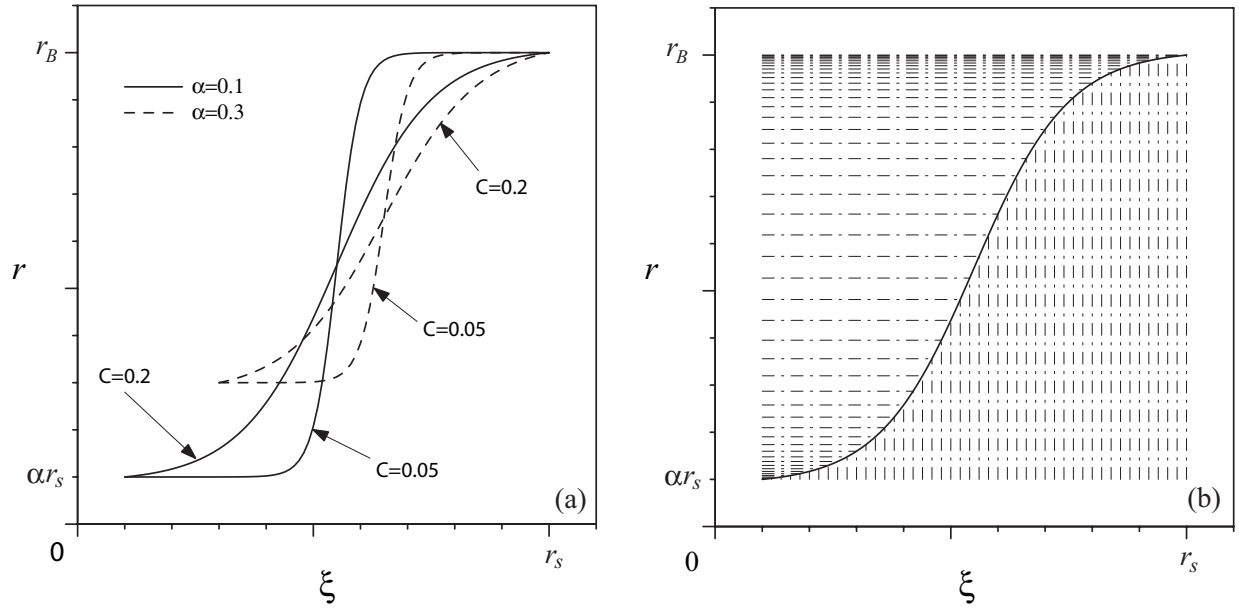

図 4.1: (a): 式 (4.27) で表される ξ–r 曲線とパラメータ C の関係．図中の実線は $\alpha = 0.1$, 破線は $\alpha = 0.3$ の場合を示す．いずれも C が小さくなると r に対する ξ の勾配が大きくなる．(b): 計算空間において ξ を均等に分割した際の物理空間において対応する格子点の分布 ($\alpha = 0.1$, $C = 0.2$)．パラメータ C によって，物理空間における格子点が境界付近に集まっている様子がわかる．

図 4.1(a) は，いくつかの異なる α と C に対応する r と ξ の関係式 (4.27) のグラフである．α の値に関わらず，格子点の分布を決定するパラメータ C が小さくなると物理空間における変数 r に対する計算空間上の変数 ξ の勾配が大きくなっていることがわかる．図 4.1(b) は，$\alpha = 0.1$, $C = 0.2$ の場合について，計算空間において ξ を均等に分割した際の物理空間での格子点分布の様子を示した図である．この図から，$r = \alpha r_s$ と $r = r_B$ の両境界の近傍に格子点が集中している様子がわかる．なお，$C \to \infty$ とすれば，物理空間上でも格子点を等間隔に分布させることができる．

さきに述べたように，境界近傍で密な格子を用いて数値計算を行うことにより，時間的に変動する境界とその近傍や境界に形成される境界層内における物理量を精度良く評価することができるようになる．しかし，その一方で，計算を安定に実行するためにはクーラン数 $\nu = c\Delta t/\Delta r$(Δt, Δr はそれぞれ時間と空間のきざみ幅，c は音速) を十分に小さくとることが必要である．このため，境界近傍で Δr を小さくしすぎると，クーラン数に対する要請から Δt をさらに小さくとる必要があり，これは計算時間の増加の要因となる．また，クーラ

ン数の局所的な変化による数値粘性の変動が大きくなると数値解の精度に影響を及ぼすおそれもある．以上の理由から，パラメータ C の決定は慎重に行う必要がある．

さて，式 (4.27) の ξ および t に関する微分を求めると

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = \frac{r_B - \alpha}{2C} \frac{\mathrm{sech}^2 \left\{ \left(\xi - r_s \dfrac{1+\alpha}{2} \right) \dfrac{1}{C} \right\}}{\tanh \left(r_s \dfrac{1-\alpha}{2C} \right)} \tag{4.28}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = \frac{u_B}{2} \frac{\tanh \left\{ \left(\xi - r_s \dfrac{1+\alpha}{2} \right) \dfrac{1}{C} \right\}}{\tanh \left(r_s \dfrac{1-\alpha}{2C} \right)} + \frac{u_B}{2} \tag{4.29}$$

となる．本論文では，座標変換の関係式 (4.18)–(4.24) に現れる微分係数 r_ξ，r_t を式 (4.28), (4.29) によって数値的に評価する．なお，境界近傍に格子点を集めずに全ての領域で等間隔の格子 ($C \to \infty$ の場合) を用いる場合，式 (4.28)，(4.29) はそれぞれ

$$\frac{\partial r}{\partial \xi} = r_\xi = 1 \tag{4.30}$$

$$\frac{\partial r}{\partial t} = r_t = \frac{\xi - \alpha}{1 - \alpha} u_B \tag{4.31}$$

となり，r_t によって評価される境界の時間的な変動による見かけの流束のみを考慮すればよいことになる．

4.3　強非線形共鳴円筒波の数値解析

この節では，二重円筒内に励起される非線形共鳴音波を支配する方程式 (4.4)–(4.6) (気体の散逸性を考慮する場合は式 (4.1)–(4.3)) を外部円筒の脈動にともなう境界面の位置の変動を考慮した座標系において数値的に解く．また，共鳴半径 r_0 は式 (3.23) によって決定されるうちで最も小さいもの (基本振動数に対応する共鳴半径) を採用する．格子幅 Δr は $\Delta r = r_0(1-\alpha)/2000$ とし，クーラン数は約 0.1 とした．

以下では，音場の幾何学的な形状を指定するパラメータ α と音波の非線形性の強さを表す音響 Mach 数 M の大小によって問題を次に示す 4 つのケースに大雑把に分類して考察を行う．

Case 1: α と M がともに小さい場合 ($\alpha = 0.1,\ M = 1 \times 10^{-4}$)

Case 2: α が小さく M が大きい場合 ($\alpha = 0.1,\ M = 1 \times 10^{-2}$)

Case 3: α が大きく M が小さい場合 ($\alpha = 0.9,\ M = 1 \times 10^{-4}$)

Case 4: α と M がともに大きい場合 ($\alpha = 0.9,\ M = 1 \times 10^{-2}$)

本研究は，平面音波では見られない円筒波 (あるいは球面波) の共鳴における特徴的な現象の解明をその主目的としている．この意味で α が小さいということは，共鳴波のふるまいが円筒波のそれに近い，すなわち平面波との違いが大きいということになる．本論文ではこの平面波との相違を幾何学的な効果と呼び，α が小さいという表現と幾何学的な効果が大きいという表現を同じ意味で用いる．なお，上記の 4 組のパラメータは，事前に行われた予備的な計算によって決定したものである．

4.3.1　Case 1 ($\alpha = 0.1,\ M = 1 \times 10^{-4}$)

この節では，第 3 章で行われた弱非線形解析との比較の意味もこめて音源の Mach 数が比較的小さい問題を取りあげる．図 4.2 は，$\alpha = 0.1,\ M = 1 \times 10^{-4}$ とした場合の二重円筒内における内部円柱表面 ($r = \alpha r_s$，基本共鳴振動) での圧力変動の時間発展を外部円筒が脈動を開始してから 2000 周期まで求めた結果を示したものである．図中の実線は方程式系 (4.4)–(4.6)(Euler 方程式系) による計算結果，破線は方程式系 (4.1)–(4.3)(Navier-Stokes 方程式系，$Re = 9 \times 10^6$) による計算結果である．これらの曲線は，外部円筒の脈動 1 周期ごとに，内部円柱表面における圧力変動の時間的変化の最大値と最小値をそれぞれ連ねることによって得られた圧力変動の包絡線を示している．これ以降，共鳴波の振幅の時間的ふるまいはこの内部円柱表面における圧力変動によって論じることとする．なお，図の縦軸は第 3 章での結果に基づき $M^{1/3}$ を用いて $(p - p_0)/M^{1/3}$ と規格化してある．ここで，$p_0 = 1/\gamma$ は無次元化された初期圧力である．

図 4.2 から，共鳴波の振幅は時間の経過にともなって周期的な増加と減少を繰り返している様子がわかる．さらに詳しく見てみると，脈動開始直後には振幅が Mt (t は時刻[3]) に比例

[3]図の横軸は周期 (Cycle) となっているが，1 Cycle= $2\pi t$ と読みかえればよい．

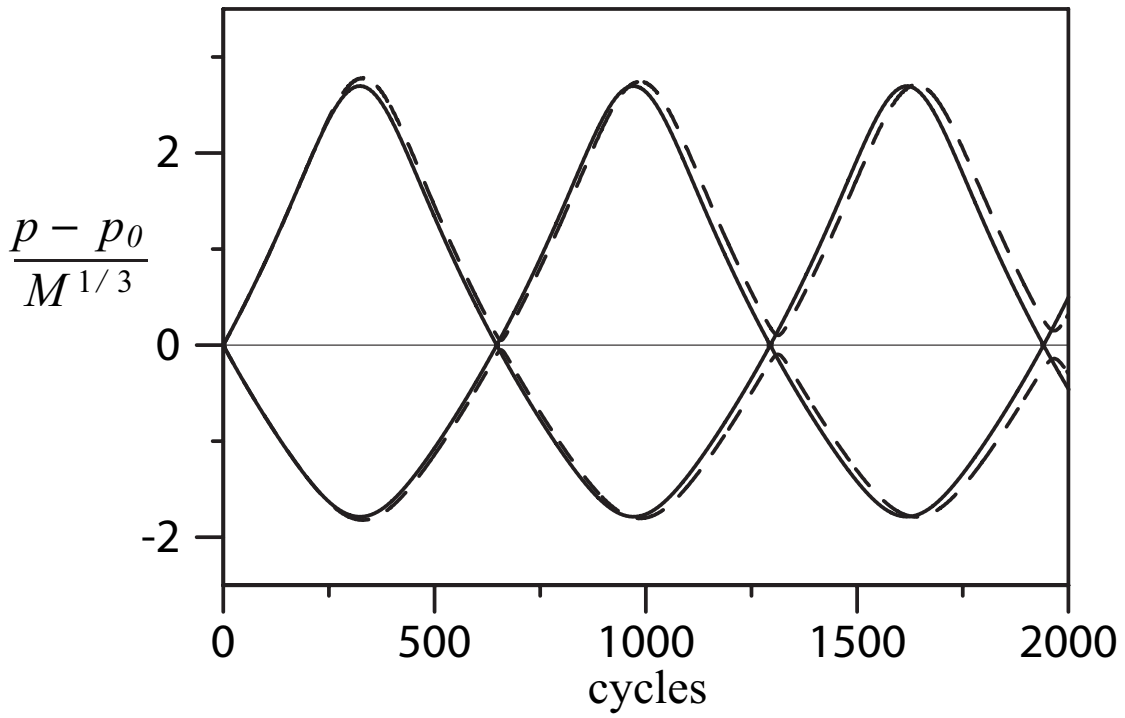

図 4.2: $\alpha = 0.1$，$M = 1 \times 10^{-4}$ の場合の $r = \alpha r_s$ における圧力振幅の時間発展．図中の実線は散逸を考慮しない場合，破線は散逸効果 $(Re = 9 \times 10^6)$ を考慮した場合の計算結果.

して増加しているが，共鳴波の発達にともなって振幅の増加率は少なくなってゆき，ついには増加率が負となり共鳴波の振幅が減少をはじめるというパターンを繰り返している．このとき振幅の最大値は，$M^{1/3}$ の 2 倍程度となっている．また，後に示すように，このケースでは時間がどれだけ経過しても円筒内に衝撃波は形成されなかった．このことから共鳴円筒波の振幅の成長は，衝撃波の形成によるエネルギー散逸が起こらないような場合でも最大で $O(M^{1/3})$ 程度に抑えられ，時間とともに際限なく増加するわけでは無いことがわかる．以上の結果は，第 3 章における弱非線形共鳴波の理論解析結果とよく一致している．実際，図 4.2 から直接求められる振幅変調の周期と第 3 章で得られた式 (3.54) から計算される変調の周期とが極めてよい一致を示すことが後に明らかにされる．

しかし，その一方で，図の圧力波形の最大振幅と最小振幅は初期の基準圧力 p_0 を境にして上下に非対称な形となっており，3 章で得られた結果には見られない現象が現れている．この非対称性は，比較的強い非線形効果による空間的な波形歪みによるものであると考えられる．さらに非線形効果が弱い場合 $(M = 1 \times 10^{-6})$ に対する数値計算 [27] ではこのような

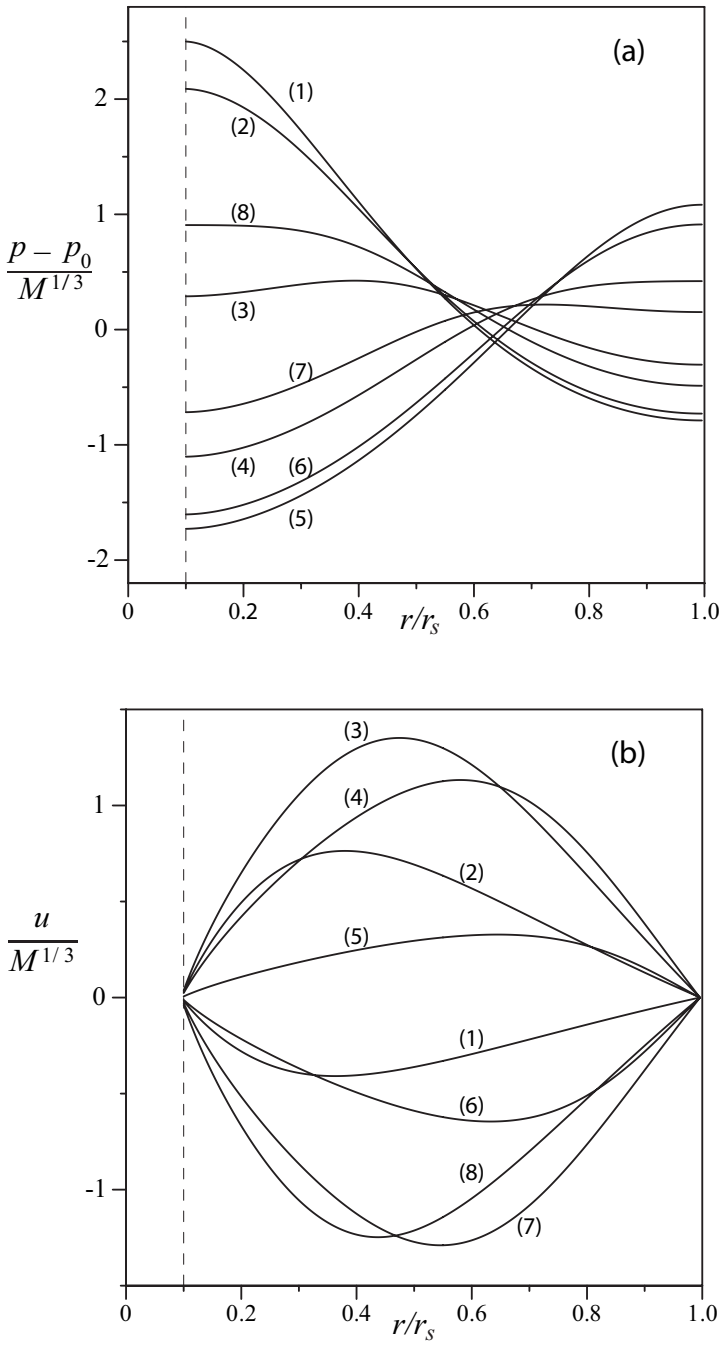

図 4.3: 円筒の脈動 300 周期後の圧力分布 (a) と流速分布 (b)　($\alpha = 0.1$,　$M = 1 \times 10^{-4}$). $\alpha = 0.1$,　$M = 1 \times 10^{-4}$,　時刻 $t = 2n\pi + \psi (n = 300)$,　における (1) $\psi = 0$,　(2) $\psi = \pi/4$,　(3) $\psi = \pi/2$,　(4) $\psi = 3\pi/4$,　(5) $\psi = \pi$,　(6) $\psi = 5\pi/4$,　(7) $\psi = 3\pi/2$,　(8) $\psi = 7\pi/4$ での流速と圧力の波形．図中の破線は内部円柱境界をあらわす.

非対称性は現れず，図中の $p - p_0 = 0$ の直線に対して上下に対称な振幅変調が起こることが示されている．

Navier-Stokes 方程式 (4.1)–(4.3) に対する計算結果をみると，共鳴波の振幅は図 4.2 において規格化された圧力振幅がゼロに近い領域 ($p - p_0 \sim 0$) を除いて Euler 方程式系 (4.4)–(4.6) についての結果とよく一致していることがわかる．$p - p_0 \sim 0$ となるところでは，気体の散逸効果による振幅と位相の変化が顕著に現れるということは，第 3 章における弱い散逸を考慮した際の相平面の図 3.8 においても見ることができる．

図 4.3 は，円筒が脈動を開始してから 300 周期後の (a):圧力と (b):流速の空間分布を示している．半径方向の流速 u も圧力と同様に $M^{1/3}$ によって規格化されている．図に示された各曲線には，外部円筒が脈動を開始してから 30 周期目の時刻を $t = 300 \times 2\pi + \psi$ として，$\psi = 0$ から $\psi = 7\pi/4$ まで $\pi/4$ ごとに番号がふられている．また，図中の破線は内部円柱境界の位置 $r/r_s = \alpha$ を示している．次節以降でも，流速の空間分布を表すグラフには同様の表記を用いることとする．

図 4.3(a) では，非線形効果によって波形が歪むことで圧力の空間分布に非対称性が現れていることがわかる．とくに，内部円柱近傍では波形歪みによる振幅の最大値と最小値の差が著しい．図 4.3(b) は (a) と同時刻における流速 u の空間的な波形を示した図である．この図からも圧力分布と同様に非線形効果による波形の歪みが見て取れる．これらの図は，二重円筒内の共鳴波の振幅がほぼ最大となった時刻 (脈動開始から 300 周期後) における空間波形を示したものであるが，圧力，流速ともに非線形効果による波形歪みは認められるものの，衝撃波の形成にはいたっていない．このケースではさらに時間が経過した後も衝撃波の形成は認められなかった．これは，収束と発散を繰り返す共鳴円筒音波のもつ幾何学的な性質に起因する分散効果が音波の非線形性による波形歪みの効果よりも強く現れていることによるものである考えられる．

4.3.2　Case 2 ($\alpha = 0.1,\ M = 1 \times 10^{-2}$)

ここでは，α を前節と同じく 0.1 として，Mach 数が大きくなった ($M = 1 \times 10^{-2}$) ケースについて考える．この場合には，幾何学的な効果だけでなく非線形効果も大きくなる．その

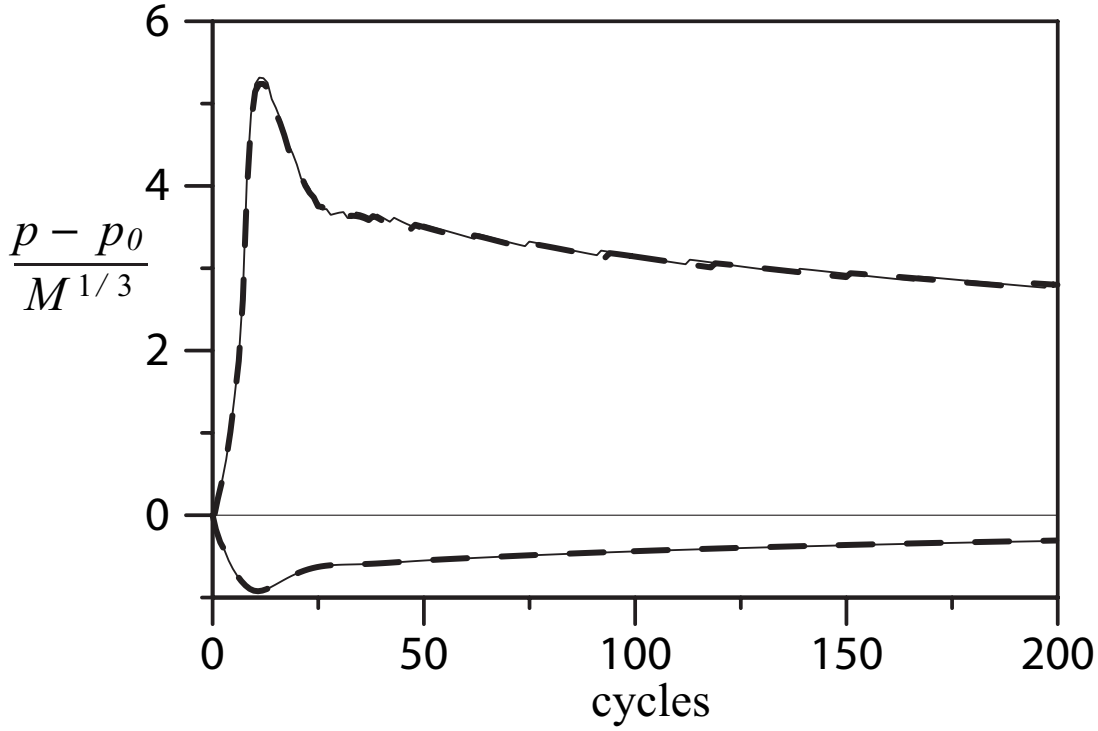

図 4.4: $\alpha = 0.1$，$M = 1 \times 10^{-2}$ の場合の $r = \alpha r_s$ における圧力振幅の時間発展．図中の実線と破線は図 4.2 に同じ．

ためこのケースにおいては，共鳴波の持つ非線形効果による衝撃波の形成が観測される．

図 4.4 は，外部円筒が脈動を開始してから 200 周期までの内部円柱表面における圧力振幅の発展の様子を示したものである．振幅の最大値は脈動開始とともに急激に増大し，$M^{1/3}$ の 5 倍以上にまで達した後，ただちに $M^{1/3}$ の 4 倍弱まで減衰する．この振幅の増減は脈動開始から 20 周期程度で収束し，その後，共鳴波は振幅の緩やかな減衰をともなう準定常的な振動状態へと移行する．また，圧力振幅の最大値と最小値の差が Case 1. に比較して著しく大きくなっているが，これは音源の Mach 数 M が大きくなったために音波の非線形性による波形歪みの影響がより強く現れているからである．

$n = 10,\ 20,\ 100$ (n は外部円筒の脈動の周期) の時刻における流速の空間波形をそれぞれ図 4.5(a),(b),(c) に示す．図 4.5(a) から，図 4.4 において共鳴波の振幅がピークに達する時刻 ($n = 10$ 前後) には，既に発達した衝撃波が形成されていることが確認できる．脈動の開始時刻からの流速波形の変化を調べることにより，衝撃波は脈動開始から 7 周期目に形成されることが確かめられた [25]．このことから，衝撃波が形成されてもただちに振幅の減衰が起こ

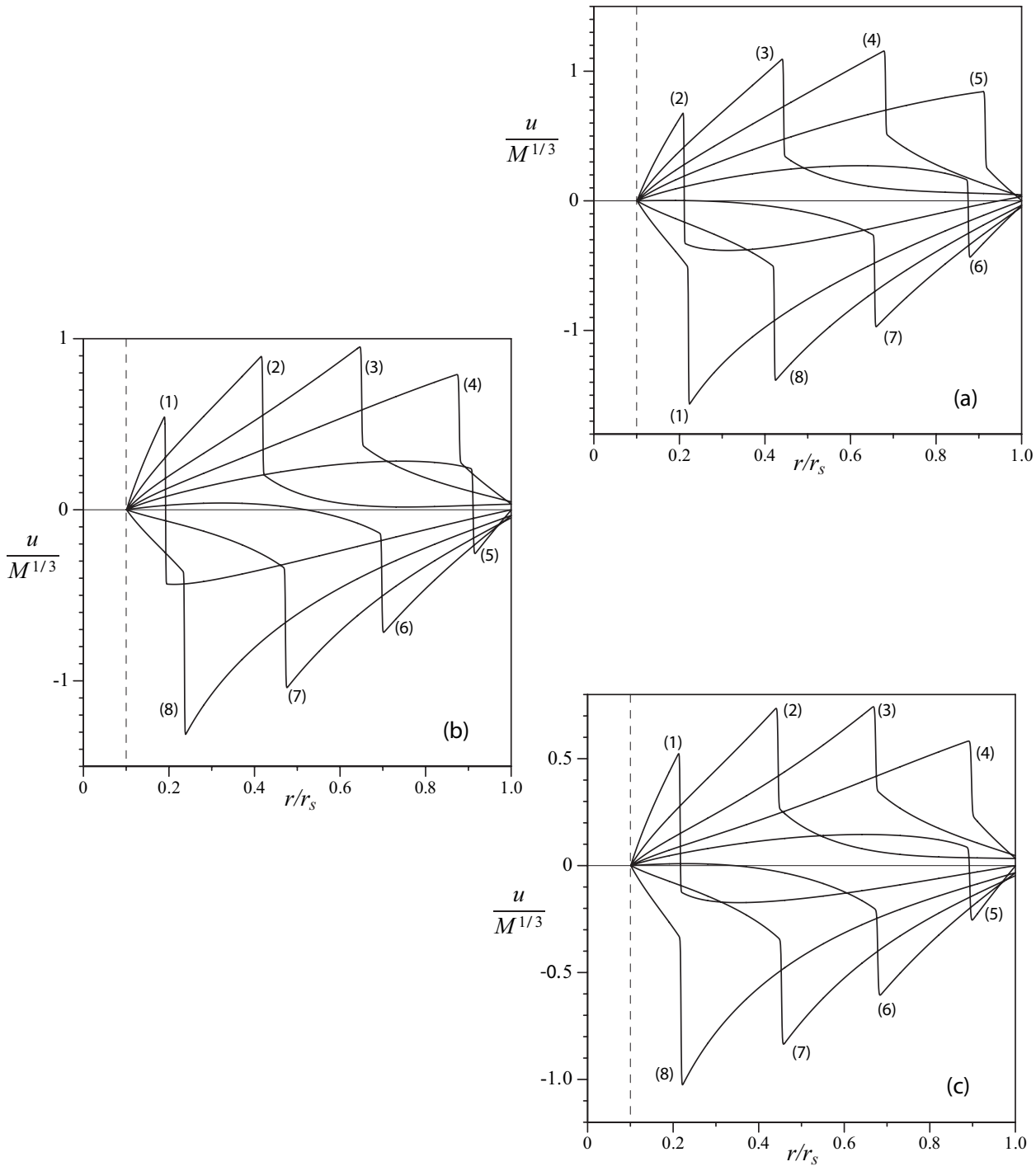

図 4.5: 円筒が脈動を開始してから (a):10 周期，(b):20 周期，(c):100 周期経過した際の流速の波形 ($\alpha = 0.1$，$M = 1 \times 10^{-2}$).

るわけではなく，円筒内に形成された衝撃波が十分に発達し，その波面におけるエネルギーの散逸量が音源の脈動によって円筒内部の気体中に供給されるエネルギー量よりも大きくなることによって共鳴波の振幅の減衰が起こるものと考えられる．さらに時間が経過すると，衝撃波面でのエネルギー散逸量と音源におけるエネルギーの供給量がつり合い，共鳴波の振幅はほぼ一定となる．図 4.4 において，気体の散逸効果を考慮した場合 (破線) と散逸を無視した場合 (実線) の圧力振幅の増減は，完全に等しいふるまいをしていることがわかる．これは，共鳴波のエネルギー散逸のほぼ全てが衝撃波面における強いエネルギー散逸によって起こっており，その他の場所における気体の粘性と熱伝導性によるエネルギー散逸の効果はこのケースの場合には完全に無視できるといえる．

また，図 4.4 で，圧力振幅が一定値に落ち着かずゆっくりとした減衰を続けているのは，衝撃波面で気体の持つ運動エネルギーが熱エネルギーに変換され，円筒内部の温度が上昇したことによる．つまり，円筒内の温度上昇によって，そこでの音速が初期の音速よりも大きくなり，その結果として実際の共鳴振動数と音源での加振振動数が徐々にずれてくるということがこのゆっくりとした振幅の減衰の要因となっていると考えられる．この衝撃波面におけるエネルギー散逸の影響については本章の終わりで議論する．さらに，図 4.5 の (a) と (c) を比較すると，衝撃波を含んだ波形に大きな違いは無いが，その振幅は (a) のグラフに比べ (c) では半分程度にまで減衰している．これは，図 4.4 に示されている圧力振幅の変化と一致していることが確認できる．

図 4.5 の一連のグラフから，図中の破線で示されている内部円柱境界の近傍では，円筒波の幾何学的な性質によって波面が収束し，衝撃波面前後での流速の跳びの量が大きくなっていることがわかる．また，衝撃波面は r の正の方向に進むときと負の方向に進む場合とで，図 4.5 においてその空間的な波形が異なっている．後に示すように，α が大きいとき ($\alpha = 0.9$)，衝撃波面を含む流速の波形は，r の正の方向に進行するときも負の方向に進むときもほぼ同じ波形となる．このことは Chester [40] によって示された，閉管内の気体の共鳴振動によって発生する平面衝撃波の波形とよく一致する．ここに，円筒波における共鳴波と平面共鳴波との間に見られる顕著な違いの一つを見ることができる．

なお，$\alpha = 0.1,\ M = 1 \times 10^{-4}$ のケースで見られた周期的な振幅の変調はこのケースでは起こらないことに注意しておく．また，Case 1 と Case 2 で示したように，円筒波の共鳴の

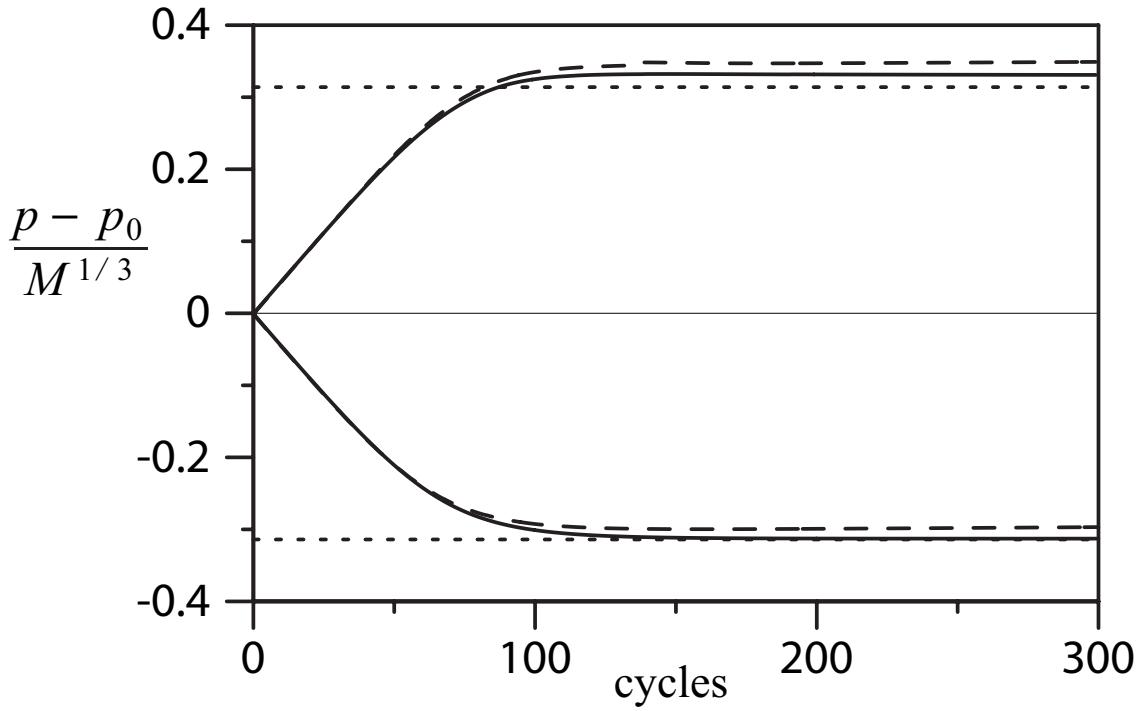

図 4.6: $\alpha = 0.9$，$M = 1 \times 10^{-4}$ の場合の $r = \alpha r_s$ における圧力振幅の時間発展．図中の実線と破線は図 4.2 に同じ．点線で示された直線は，Chester [40] による共鳴平面波の振幅の理論解.

問題では M の大きさによって衝撃波が形成される場合と形成されない場合があることがわかった．$\alpha = 0.1$ のケースについては，およそ $M = 1.1 \times 10^{-3}$ を境として，音源の Mach 数がそれよりも大きなときには衝撃波が形成されるが，それよりも小さいときには衝撃波は形成されず，共鳴波の振幅は周期的な変調を繰り返すということがわかった．このような衝撃波形成の臨界 Mach 数については後の節でより詳細な取り扱いがなされる．

4.3.3　Case 3 ($\alpha = 0.9,\ M = 1 \times 10^{-4}$)

図 4.6 に $\alpha = 0.9$，$M = 1 \times 10^{-4}$ としたときの内部円柱表面での圧力振幅の時間発展の様子を示す．$\alpha = 0.9$ の場合，これまでの α が小さいケースに比較して，円筒内に励起される共鳴波は平面波の性質を強く持つと考えられる．実際に共鳴波の振幅の発展の様子を見てみると，これまでのケースと同様に脈動開始直後の振幅は時間に比例して成長していることがわかる．しかし，図からわかるとおり，$\alpha = 0.1$ の際に見られた周期的な振幅の変調現象や

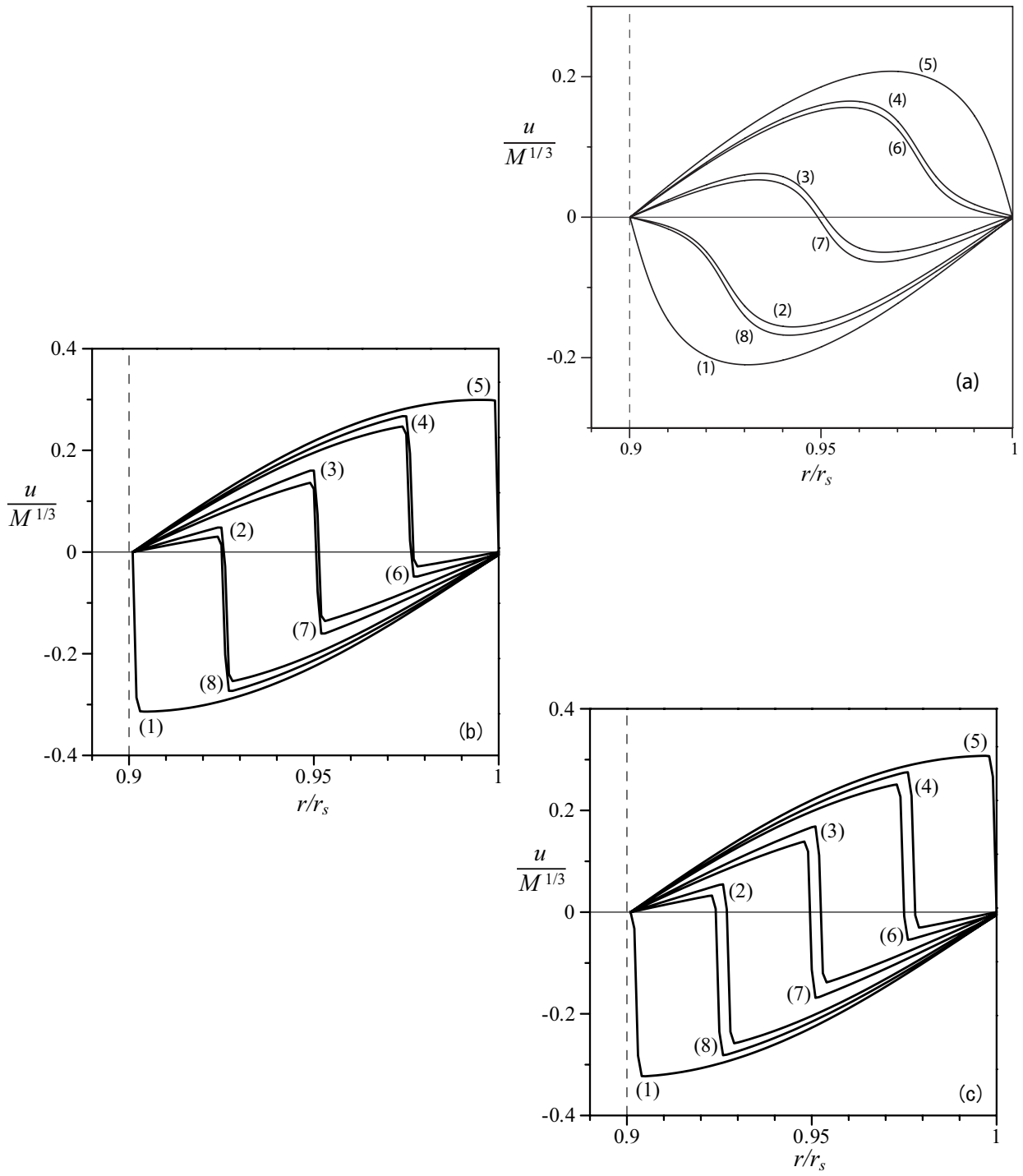

図 4.7: 円筒が脈動を開始してから (a):50 周期，(b):100 周期，(c):200 周期経過した際の流速の波形 ($\alpha = 0.9$，$M = 1 \times 10^{-4}$).

高いピークをともなった振幅の発展は見られない．さらに，振幅の最大値と最小値を示す曲線はほぼ上下対称となっており，この振幅発展の様子は Chester [40] による解析や Yano [10] による閉管内の気体の共鳴振動に対する計算結果と極めてよく一致していることがわかる．実際，Chester による理論解より求めた共鳴平面波 ($M = 1 \times 10^{-4}$) の振幅を示している図中の点線で表された直線と定常振動状態に達した後の共鳴波の振幅はよい一致を見せていることがわかる．以上のことより，このケースでは，二重円筒内に励起される共鳴波は平面波の性質を強く持っているといえる．

この振幅の非線形発展の様子を詳しく調べるために，外部円筒の脈動開始から 50 周期，100 周期，200 周期後の円筒内の流速分布の様子を示したのが図 4.7(a)–(c) である．図 4.7(a) からは共鳴波の波形歪みは観測されるものの，いまだ衝撃波を形成するには至っていない．この時刻では，図 4.6 からもわかるように，共鳴波の振幅は時間の経過にともなって増加を続けている．

図 4.7(b) は，図 4.6 において振幅の増大が収束する時刻 (100 周期後) に対応する流速波形を表しているが，この時刻ではすでに十分に発達した衝撃波が形成されていることが確認できる．Case 2 とは対称的に，このケースでは α の値が 1 に近く，波面の収束・拡散といった幾何学的な効果が小さいために，衝撃波面での速度の跳びの大きさが衝撃波面の位置によらずほぼ一定となっていると考えられる．ここで得られた共鳴波の波形が Chester [40] による解析結果とよく一致していることからも，α が 1 に近い場合には共鳴波のふるまいが平面波のそれに近くなるということができる．また，Chester [40] は，平面波によって生じる閉管内の気体の共鳴振動の振幅が，音源の Mach 数 M に対して $O(M^{1/2})$ となることを理論的に示した．これは，Yano [10] による数値計算の結果からも確認することができる．図 4.7(b) および (c) より共鳴波の振幅の成長が飽和状態に達したあとの時刻において，$M^{1/3}$ で規格化された振幅は約 0.3 となっていることがわかるが，ここでは音源の Mach 数を $M = 1 \times 10^{-4}$ としているので $M^{1/2}/M^{1/3} \approx 0.22$ となり，円筒波の場合でも衝撃波が形成されるようなケースでは，共鳴波の振幅が $O(M^{1/2})$ に抑えられると類推できる．

図 4.7(b) と (c) を比較すると，時間が経過しても共鳴波の振幅，波形ともにほとんど変化していないことがわかる．このことはつまり，円筒の脈動開始から 100 周期程度の時間が経過すると，十分に発達した衝撃波面におけるエネルギー散逸量と音源からのエネルギー供給

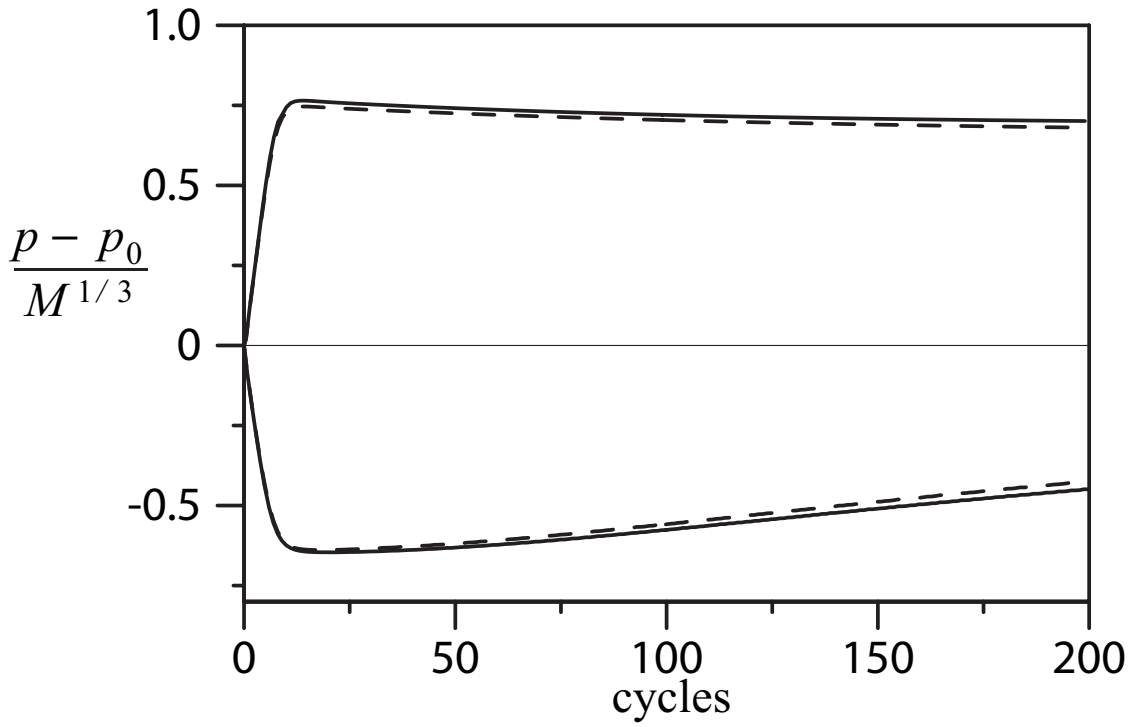

図 4.8: $\alpha = 0.9$，$M = 1 \times 10^{-2}$ の場合の $r = \alpha r_s$ における圧力振幅の時間発展．図中の実線と破線は図 4.2 に同じ．

量が平衡状態に達し，共鳴波のふるまいが準定常的になるといえる．ここで，定常ではなく “準” 定常と表現したのは，衝撃波面でのエネルギー散逸による熱の発生によって二重円筒内の気体の温度が上昇し，そのために共鳴波のふるまいが少しずつ変化するからである．しかし，いまのケースでは Mach 数が小さく衝撃波の強さが弱いために，衝撃波面におけるエネルギー散逸による円筒内の気体の平均温度の上昇や共鳴波の振幅の減少といった非定常な減少は，たかだか数百周期程度の時間スケールでは観測することができない．また，図中の破線で示されている Navier-Stokes 方程式に対する計算結果と実線で示されている Euler 方程式に対する計算結果は，振幅が定常状態に到達する時刻，振幅の最大値ともによく一致しており，共鳴波の持つエネルギーの散逸のほとんど全てが衝撃波面でおこっているといえる．

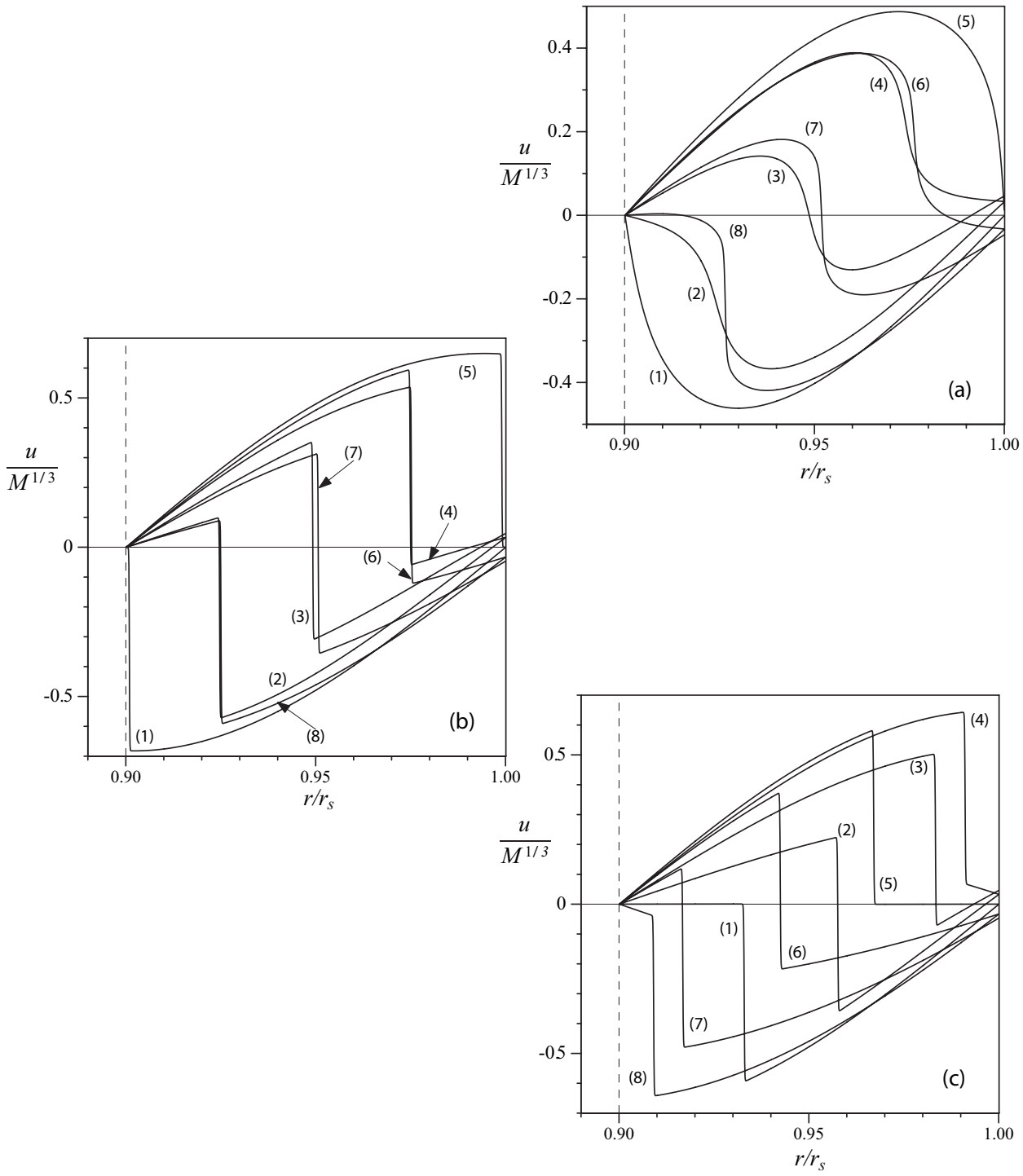

図 4.9: 円筒が脈動を開始してから (a):5 周期，(b):10 周期，(c):100 周期経過した際の流速の波形 ($\alpha = 0.9$，$M = 1 \times 10^{-2}$).

4.3.4　Case 4 ($\alpha = 0.9,\ M = 1 \times 10^{-2}$)

最後に，α と M がともに大きい場合 (非線形効果が強く，幾何学的効果が小さい場合) を取り扱う．図 4.8 に $\alpha = 0.9$，$M = 1 \times 10^{-2}$ としたときの圧力振幅の時間発展を示す．円筒の脈動開始からわずか 10 周期程度で振幅の成長は頭打ちとなり，その後，振幅はゆっくりと減衰している．このケースでも脈動を開始してから数周期の間は，振幅が時間に比例して増加してゆく様子を確認できるが，その一方で，Case 1 で見られた周期的な振幅の変調や Case 2 の高いピークをともなった振幅の包絡波形は見られない．このことから，Case 1 や 2 で見られた共鳴波の振幅の特徴的な変動については音波の幾何学的な性質 (円筒波の性質) が強く影響しているといえる．

次に，振幅の成長が飽和状態に達した後の共鳴波の振幅の変化について考える．図 4.8 のグラフは，図 4.6 とは異なり圧力の最大値と最小値を示す波形は上下に非対称となっている．これは，衝撃波面でのエネルギー散逸のために円筒内部の温度が上昇し，その結果，平均圧力が初期の圧力 p_0 よりも高くなるためである．また，この温度上昇によって円筒内の平均音速も初期の音速 c_0 よりも速くなる．ところが，音源の加振振動数は一定であるため，音速の変化にともなって円筒内に励起される音波は共鳴条件から次第にずれることになる．このとき外部円筒の脈動によって円筒内部の気体に対してなされる仕事 (円筒内の気体中に加えられるエネルギー) の量が減少するために，共鳴波の振幅は徐々に減衰してゆくことになる．これによって図 4.8 に示された圧力振幅の包絡波形の非対称性を説明することができる．前節で共鳴音波のふるまいが準定常的であるといったのは以上の理由によるものである．実際，音源の Mach 数が小さい場合であっても衝撃波が形成されるならば，長時間 (Case 3 の場合には音源の脈動の数千周期程度の時間) の共鳴振動を繰り返すことで衝撃波面でのエネルギー散逸の影響が蓄積し，ここで見られたような非対称性が現れる．また，Case 2，Case 3 と同様にここでも Navier-Stokes 方程式に対する計算結果 (図中の破線) と Euler 方程式に対する結果がよく一致していることがわかる．

続いて，これまでと同様に衝撃波の形成とその発展の様子を知るために流速の空間的な分布について調べる．図 4.9(a)–(c) にそれぞれ脈動開始から 5，10，100 周期後の円筒内の流速波形を示した．図 4.9(a) より，脈動開始から 5 周期目の時点で衝撃波が形成されていること

がわかる (図中の曲線 (7)，(8))．さらに時間が経過し，振幅の増大が止まった時刻 (脈動開始から 10 周期目，図 4.9(b)) では衝撃波は十分に発達し，円筒内を往復する不連続面として捕えられている．ここでも Case 3 と同様に，衝撃波が円筒の中心軸から外側に向かって進行するときも，中心軸に向かって進行するときも流速の波形はほぼ同じ形となっていることがわかる．しかし，脈動開始から 100 周期が経過 (図 4.9(c)) した後の波形を見ると，衝撃波面は不連続面として捕えられているものの，その波形は円筒の外側に向かう場合 (図中の曲線 (1)–(4)) と中心に向かう場合 (曲線 (5)–(8)) とで波形に相違があることが確認できる．これは，長時間の振動を繰り返したことにより音波の幾何学的な効果が (弱いながらも) 蓄積してきたことと，前述の衝撃波面における熱の発生による円筒内温度の上昇の影響によるものであると考えられる．

4.3.5　時間平均された物理量と音場の幾何形状の関係

ここまでの解析では，各時刻における共鳴波の空間的な波形については主としてその瞬間的なふるまいにのみ着目しており，円筒内に大振幅の音波が励起されることにより生じるゆっくりとした質量の流れ (音響流) の存在については議論を行ってこなかった．

微小振幅の音波 (線形音波) の場合，音場中の流体粒子はそれぞれの平衡位置のまわりで周期的な振動を繰り返すのみで，実質的な位置 (時間的に平均して得られる位置) は時間的に変化しない．これに対して，非線形性を無視できない程振幅の大きな音波の場合，音場中の流体粒子はその平均位置をわずかに変化させながら振動を繰り返す．この流体粒子の平衡位置の変化のために，音場中に実質的な質量の流れが生じることがある．音波によって駆動されるこのような質量の流れを音響流とよぶ．なお，古くから閉管内に励起された平面波の共鳴現象に現れる音響流については，管壁に形成される境界層の影響が本質的な役割を果たすということが知られているが [59, 60]，流体の圧縮性と非線形効果によって励起される音響流の存在が Inoue ら [61] によって振動する剛体球から放射される音波について，Furuyama ら [62] によって振動する剛体円柱から放射される音波について明らかにされた．

本研究では，時間平均された質量流束 (音響流) を，任意の半径 r の (単位長さの) 円筒面

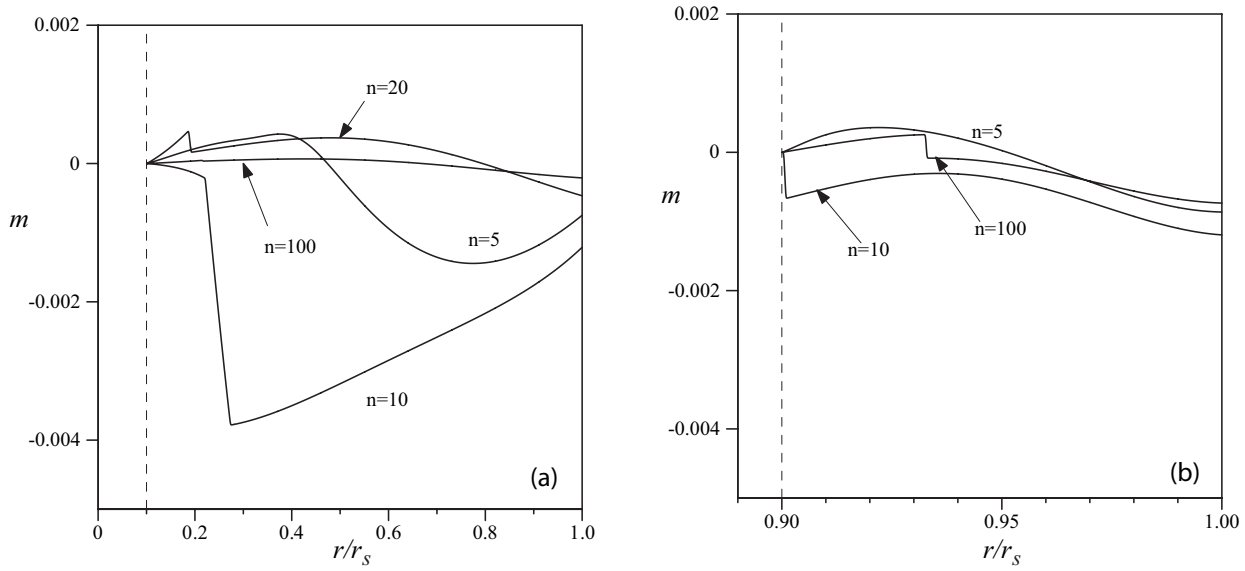

図 4.10: $M = 1 \times 10^{-2}$ における質量流束．(a): $\alpha = 0.1$，(b): $\alpha = 0.9$．図中の n は外部円筒の脈動の周期をあらわす．

を横切って輸送される気体の質量の時間 T にわたる平均として，

$$m(r,t) = 2\pi r\bar{\rho u} = \frac{2\pi r}{T}\int_{t-T}^{t} \rho(r,\tau)u(r,\tau)d\tau \tag{4.32}$$

と定義する．ここで，T は外部円筒の脈動の周期とする．[4]

図 4.10(a)，(b) に，$M = 1\times10^{-2}$ としたときの式 (4.32) で定義される質量流束を，$\alpha = 0.1$ と $\alpha = 0.9$ のそれぞれの場合について示す．図 4.10(a) では，円筒内における平均の質量の流れが時間の経過にともなって小さくなっていることがわかる．一方，(b) では共鳴波の振幅が成長しているとき ($n = 5,\ 10$) も，衝撃波が十分に発達し振幅がほぼ一定値をとるような時刻 ($n = 100$) であっても時間平均された質量流れは非定常的に変化しており，質量流れの大きさ自体もあまり変化がない．以上の結果より，外部円筒の脈動開始から十分に時間が経過した後の共鳴波のふるまいに関して，α が小さなときには非線形効果の影響 (非定常な効果) よりも音場の幾何形状に起因する影響支配的であるといえる．これに対して，α が 1 に近い場合には衝撃波を含む非線形効果の影響が強く現れ，共鳴波の状態が厳密な意味での定常振動状態へ到達しないことが時間平均された物理量 (質量流量) の変動から理解される．もちろん，α の値に関わらず衝撃波が形成される場合には，共鳴波は厳密な意味での定常状態には

[4] ここに現れる周期，T は第 3 章における時間変数 T とは無関係であることに注意しておく．

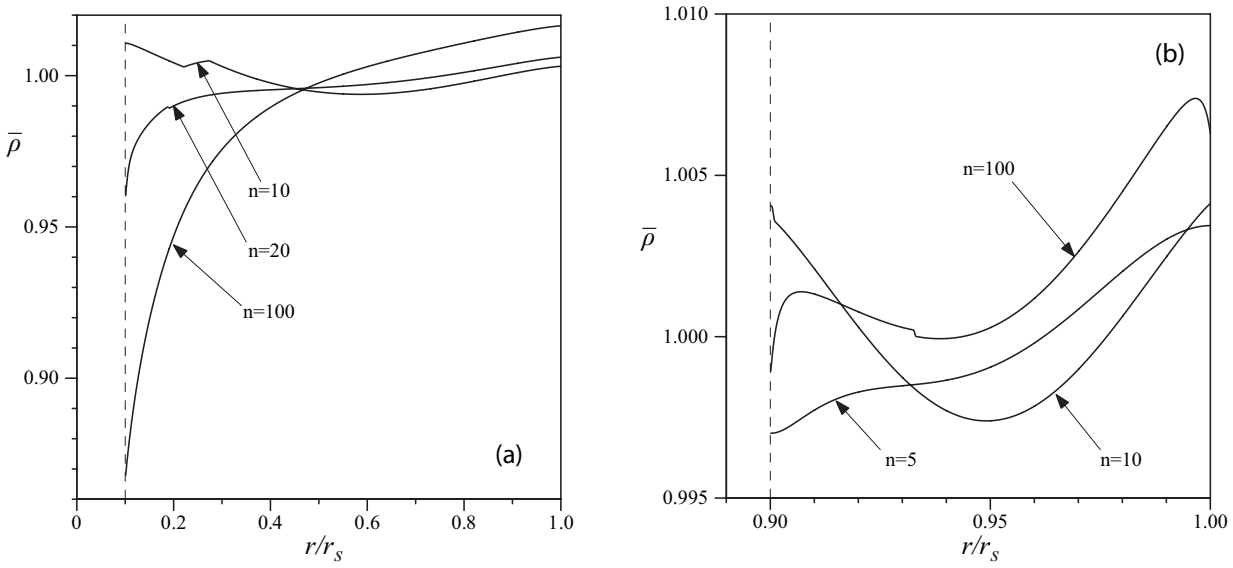

図 4.11: 時間平均された密度 $\bar{\rho}$ の分布とその時間変化 ($M = 1 \times 10^{-2}$)．n は外部円筒の脈動の周期をあらわす．(a): $\alpha = 0.1$，(b): $\alpha = 0.9$.

到達しないことを注意しておく．また，図に示されている質量流の大きさは $M = 1 \times 10^{-2}$ と比較して非常に小さい値となっている．このため，数周期程度の短い時間であれば現象の非定常性が顕著に現れることはないが，数百・数千周期という長い時間で見ると非定常な流れによる影響が大きく現れることになる．また，$\alpha = 0.1$ の場合，初期 ($n = 5,\ 10$) の質量流れの大きさが同時刻における $\alpha = 0.9$ のケースに比較して非常に大きくなっている．これは，内部円柱付近では幾何学的な収束のために音波 (または衝撃波) の振幅が増幅されることによるものであると考えられる．

図 4.10(a)，(b) ともに，衝撃波形成時刻より後 ($n \geq 10$) の時刻で図中の曲線に不連続な部分が生じている．これは，数値計算の不安定や打切り誤差によって生じたものではなく，衝撃波を含む非線形共鳴現象の非定常性によるものであると考えられる．実際，平均をとる時間間隔を長く (例えば，音源の脈動の 10 周期程度) することでより滑らかで連続的な分布を得ることができる．このように音響流の空間的な分布が滑らかに変化しないという現象は，Yano ら [63] によって脈動する球から放射される大振幅音波について報告されている．

次に，時間的に平均された密度を $\bar{\rho}$，圧力を $\bar{p}$，温度を $\bar{\Theta}$ として，以下の式 (4.33)–(4.35)

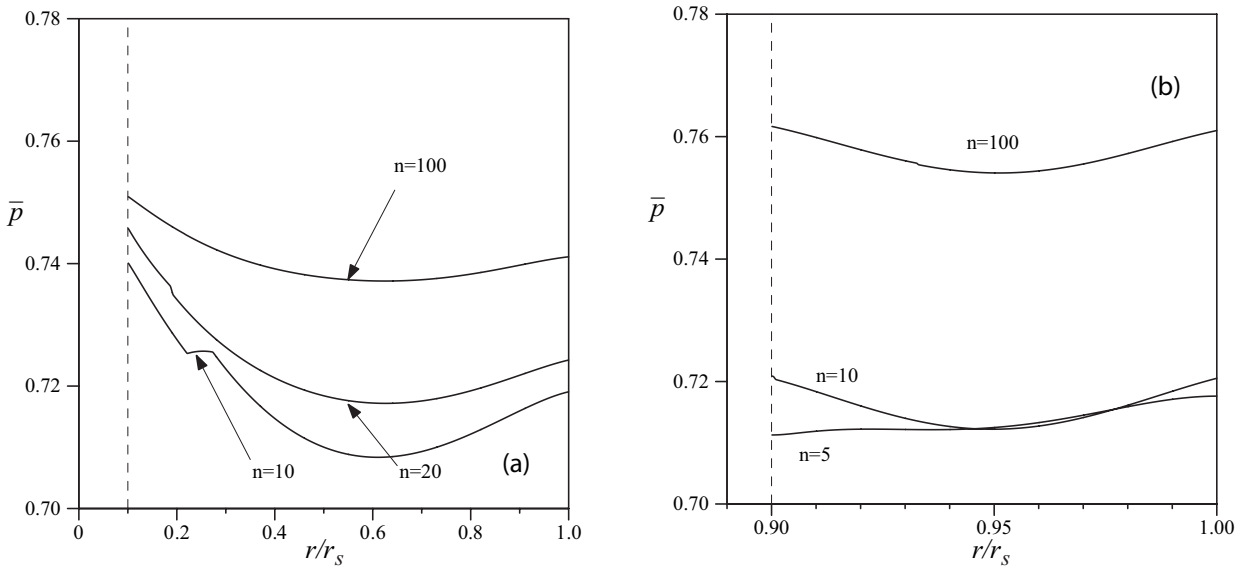

図 4.12: 時間平均された圧力 $\bar{p}$ の分布とその時間変化 ($M = 1 \times 10^{-2}$)．n は外部円筒の脈動の周期をあらわす．(a): $\alpha = 0.1$，(b): $\alpha = 0.9$.

によってそれぞれ定義し，その空間的な分布の各周期ごとの変化を調べる．

$$\bar{\rho}(r,t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} \rho(r,\tau)d\tau \tag{4.33}$$

$$\bar{p}(r,t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} p(r,\tau)d\tau \tag{4.34}$$

$$\bar{\Theta}(r,t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} \Theta(r,\tau)d\tau \tag{4.35}$$

図 4.11(a) から，$\alpha = 0.1$ の場合は，時間が経過するにしたがって内部円柱近傍での密度 $\bar{\rho}$ が著しく低下し，r の大きな領域 (外部円筒近傍) での密度が高くなっていることがわかる．これは衝撃波面の収束とそれによるの散逸過程の空間的な不均衡の影響によるものである (詳細は後述)．$n = 100$ の時刻では，図 4.10(a) からもわかるとおり，実質的な質量の流れはほとんど存在せず，気体の振動が準定常状態にあるということができる．$\alpha = 0.9$ の場合，脈動開始から十分時間が経過した際の平均密度分布は r が小さくなるにつれて減少してゆく傾向は見られるものの，その変化の量は $\alpha = 0.1$ のケースに比較してかなり小さいといえる．また，$\alpha = 0.9$ の場合には，内部円柱や外部円筒の境界付近で密度の落ち込みが観察された．

式 (4.33) によって定義される平均圧力 $\bar{p}$ の分布は密度の分布とは対称的に，$\alpha = 0.1$ の場合と $\alpha = 0.9$ の場合とで両者の差が比較的小さいことがわかる．図 4.12(a)，(b) ともに，n

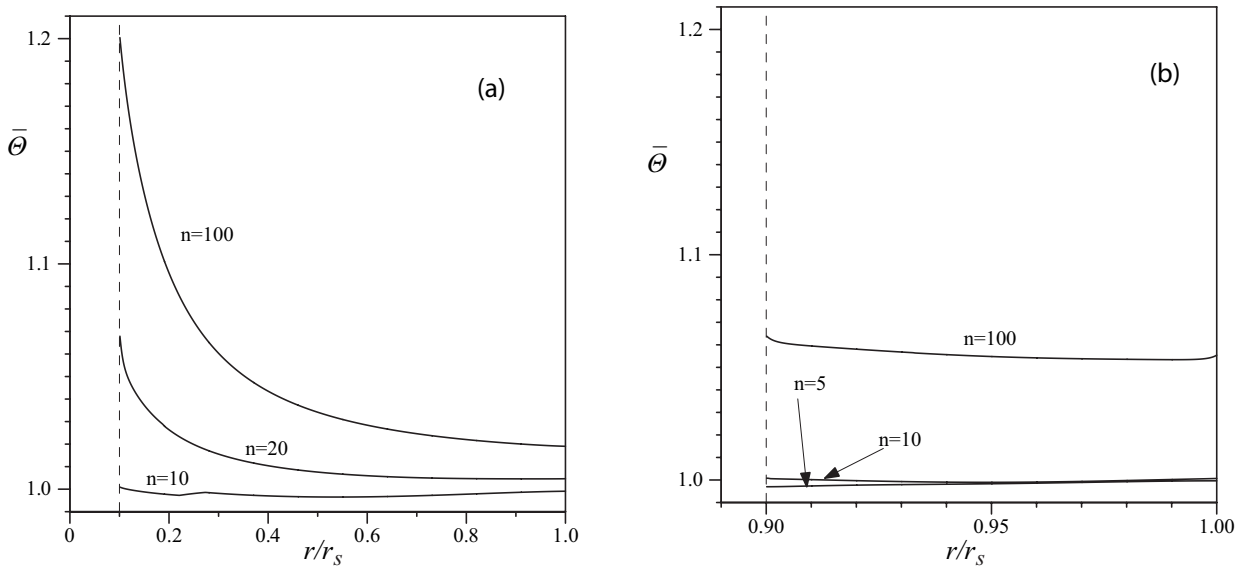

図 4.13: 時間平均された温度 $\bar{\Theta}$ の分布その時間変化 ($M = 1 \times 10^{-2}$)．n は外部円筒の脈動の周期をあらわす．(a): $\alpha = 0.1$，(b): $\alpha = 0.9$.

が大きくなるにつれて平均圧力が空間全体で高くなっている．また，平均圧力の空間的な分布には，$\alpha = 0.1$ の密度分布 (図 4.11(a)) に見られたような内部円柱近傍における局所的な圧力の減少 (あるいは増加) は起こらない．これは，二重円筒内に生じた圧力勾配を解消する方向に質量の流れ (音響流) が発生するためであると考えられる．

続いて平均温度 $\bar{\Theta}$ の分布について考える．図 4.13(a) から，$\alpha = 0.1$ の場合には時間の経過にともなって内部円柱近傍での温度が著しく上昇していることがわかる．この温度上昇はとくに衝撃波形成後 ($n \geq 10$) に顕著となっている．これに対して図 4.13(b) に示されている $\alpha = 0.9$ のケースでは，平均温度の分布は時間の経過にしたがって円筒内部の空間全体の温度がほぼ一様に上昇している．α の値によって見られるこのような違いは，衝撃波面における粘性と熱伝導性によるエネルギーの散逸の様子が円筒波と平面波とで大きく異なることによる．つまり，円筒波としての性質が強く現れる $\alpha = 0.1$ の場合，内部円柱近傍では，波面の収束によって衝撃波面のおける物理量の跳びの量が大きくなるため (衝撃波が強められる) そこではより強いエネルギーの散逸がおこる．その結果，内部円柱近傍では温度が急激に上昇し，図に見られるような温度分布の不均衡が起こることとなる．逆に，波面の収束・拡散の効果が小さい (平面波としての性質が強い)$\alpha = 0.9$ のケースでは，衝撃波面において r に

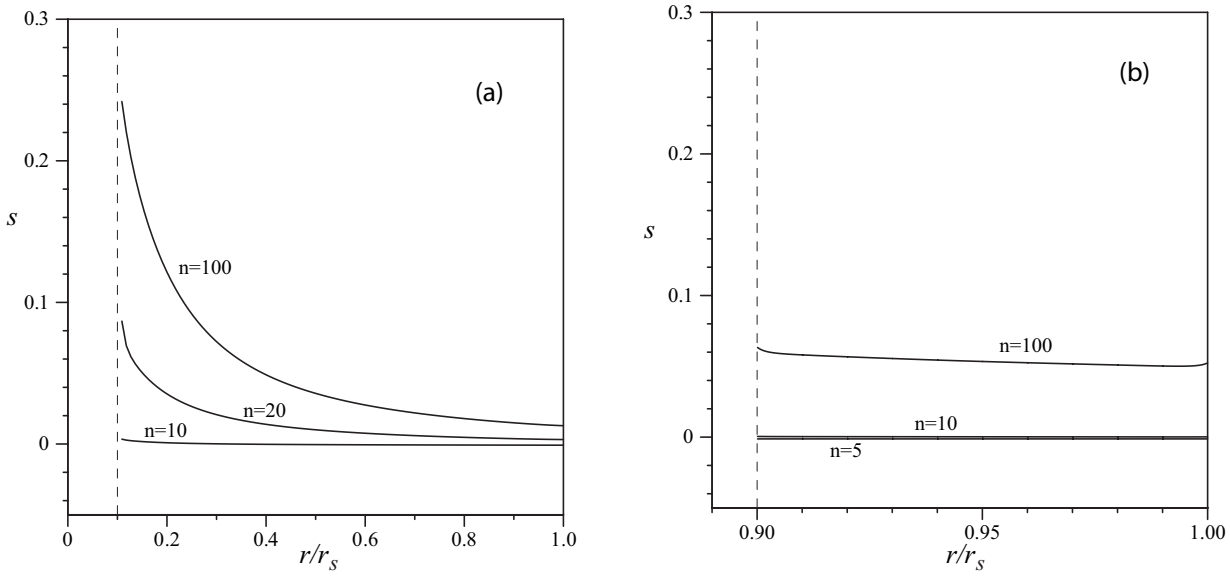

図 4.14: エントロピーの増加量 s の分布 ($M = 1 \times 10^{-2}$)．n は外部円筒の脈動の周期をあらわす．(a): $\alpha = 0.1$，(b): $\alpha = 0.9$.

よらずほぼ一様なエネルギー散逸が起こるために円筒内の平均温度も一様に上昇する．

衝撃波面の収束・拡散とそこでのエネルギー散逸の様子を知るために，エントロピー増加量 s を以下のように導入する [64].

$$s = \frac{s^* - s_0}{c_v} = \ln\left(\frac{\gamma p}{\rho^\gamma}\right) \tag{4.36}$$

ここで，s^*，s_0 はそれぞれ単位質量あたりのエントロピー，初期の静止一様状態におけるエントロピーである．これまでと同様に時間平均されたエントロピー $\bar{s}$ を

$$\bar{s}(r,t) = \frac{1}{T}\int_{t-T}^{t} s(r,\tau)d\tau \tag{4.37}$$

と定義する．図 4.14(a) と (b) にそれぞれ $\alpha = 0.1$ と 0.9 のケースにおける時間平均されたエントロピー $\bar{s}$ の分布を示す．図 4.13 と同様に，$\alpha = 0.1$ のケースでは内部円柱近傍におけるエントロピーの増大が著しく，$\alpha = 0.9$ の場合には衝撃波が形成された後，空間的にほぼ一様なエントロピー生成が見られる．また，衝撃波が形成されていない時刻ではどちらのケースでもエントロピーの生成はほとんど観測されないことからも，エントロピーはその大部分が衝撃波面における散逸過程で生成されることがわかる．

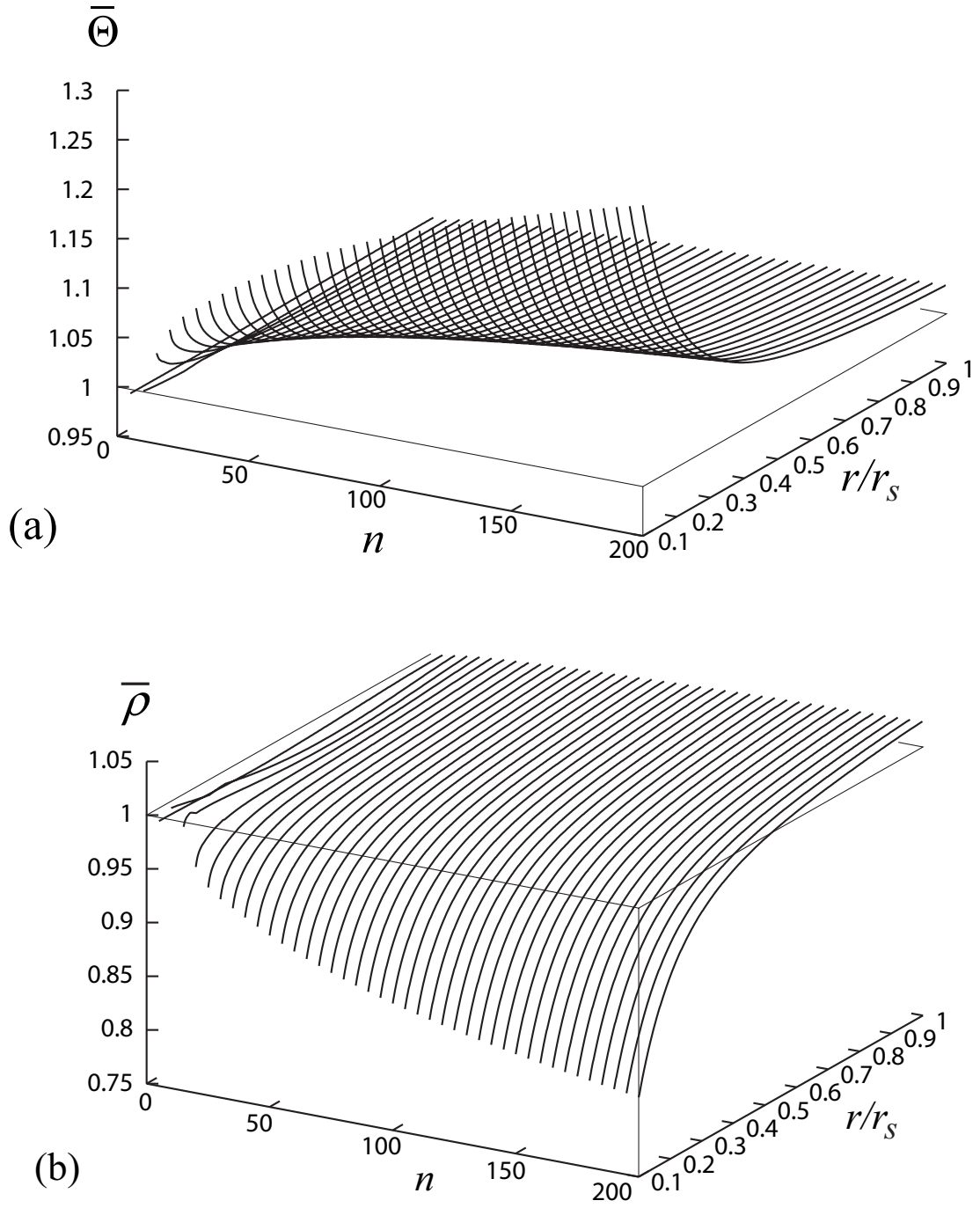

図 4.15: 長時間にわたる円筒内の (a): 平均密度 $\bar{\rho}$, (b): 平均温度 $\bar{\Theta}$ の分布の変化. ($\alpha = 0.1$, $M = 1 \times 10^{-2}$)

最後に，$\alpha = 0.1$，$M = 1 \times 10^{-2}$ の場合について，円筒内の時間平均された密度 $\bar{\rho}$ と温度 $\bar{\Theta}$ の長時間にわたる連続的な変化の様子を図 4.15 に示す．グラフの可読性のために，初期の静止一様状態での値を細い直線によって示している．この図から，時間の経過にともなって r の小さな領域における平均温度が高くなり，それに対応してそこでの平均密度が低くなっている様子がよくわかる．結局，α が小さい場合にみられる内部円柱近傍での急激な密度の低下は，内部円柱近傍における収束した衝撃波面における強いエネルギー散逸により局所的に温度の高い領域ができ，それによって生じた圧力勾配を解消する方向に質量流れが生じるために起こると説明できる．大振幅円筒音波の共鳴にみられるこのような特徴的な現象は，非線形効果による波形歪みおよび衝撃波の形成と波面の収束・拡散という幾何学的な効果がともに支配的な役割を果たしているといえる．

また，外部円筒の脈動開始から十分に時間が経過すると，内部円柱のごく近傍では温度の上昇と密度の低下が続くものの，空間全体の時間平均された密度分布，温度分布の形はほぼ一定となり，共鳴波が準定常的な振動を繰り返していることがわかる．

4.3.6　α と M による共鳴波のふるまいの変化

数値解析によって，円筒内に励起される共鳴波は，衝撃波の形成をともなわずに周期的な振幅の変調を繰り返す場合 (第 3 章参照) と，強い非線形効果によって衝撃波が形成され，その後，緩やかな振幅の減衰をともなう準定常振動状態に落ち着く場合のふたつのケースに大別できることが示された．さらに，衝撃波が形成される場合は，α の値によって共鳴波の振幅の発展の様子やその空間的な波形について大きな違いが見られた．本節ではこれまでのまとめとして，α と M の値に対応して二重円筒内部に励起される共鳴波のふるまいがどのように特徴づけられるのかをあらためて整理する．

衝撃波が形成されるケースでは，α が小さい場合，共鳴波は時間の経過にともなってその振幅を増大させながら非線形効果によってその波形を歪ませてゆくという過渡的な状態を経た後，強い衝撃波の形成によっていったんその振幅を減衰させるという過程をたどって準定常振動状態に至る．これに対して，$\alpha \sim 1$ の場合には，振幅の増加が収まった時点ですでに衝撃波面でのエネルギー散逸と外部円筒からのエネルギー供給がつり合った準定常振動状態

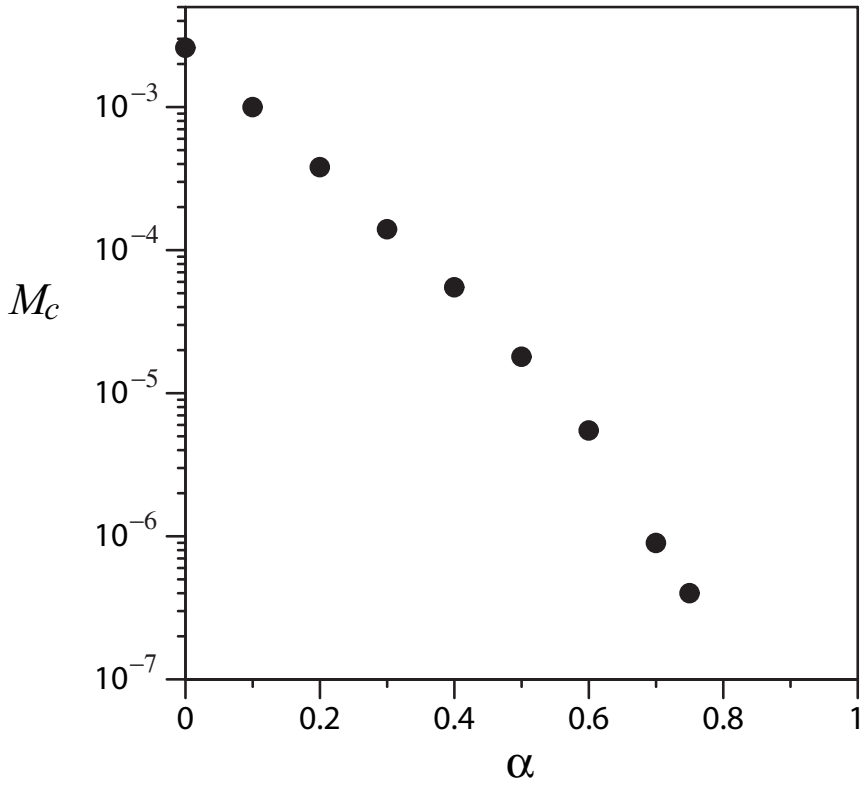

図 4.16: 衝撃波形成の臨界 Mach 数 M_c の α 依存性.

に達している．また，α が 1 に近いケースでは，M が非常に小さい場合であっても衝撃波が形成されるのに対して，α が小さい場合には M がある程度の大きさにならない限り，共鳴波はその波形を非線形効果によって歪ませることはあっても衝撃波を形成することなく周期的な振幅の変調を繰り返す．この結果から，α が小さい (共鳴波の性質が円筒波に近い) ほど非線形効果による波形の歪みが抑えられて衝撃波の形成が起こらない，あるいは衝撃波の形成が遅れて振幅が平衡点を超えて成長するといったことが起こるといえる．つまり，大振幅の共鳴円筒波には，波形を歪ませる性質 (非線形効果) とそれを抑制する性質 (幾何学的な効果) の両方が存在すると考えられる．このため，α がゼロに近く M が小さいときには幾何学的な効果に対して非線形効果が弱いために波形歪みを抑制する働きが支配的となり衝撃波が形成されず，反対に，α が 1 に近く，かつ M が大きい場合には非線形効果が卓越するために衝撃波が形成される．衝撃波が形成されるための条件を知ることは，二重円筒内に励起される共鳴音波の幾何学的な効果の程度を知る上で極めて重要である．

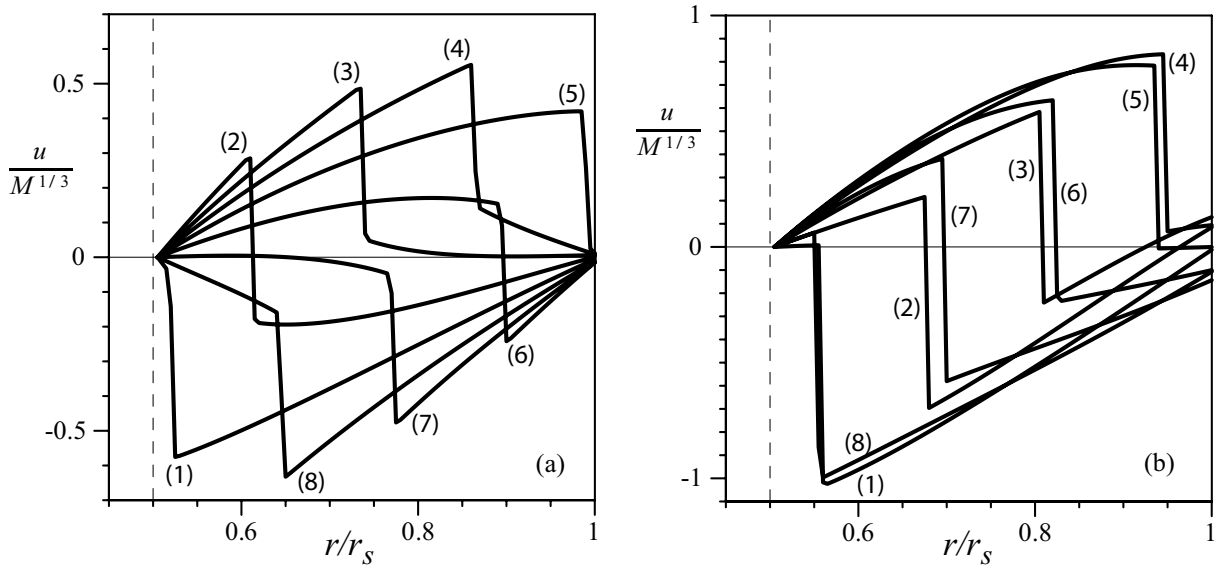

図 4.17: $\alpha = 0.5$ に対する流速波形の比較．(a): $M = 5 \times 10^{-4}$，(b): $M = 5 \times 10^{-2}$.

図 4.16 に α に対する臨界 Mach 数 M_c を示す．ここで臨界 Mach 数とは，円筒内部に衝撃波が形成されるために必要な音源の Mach 数の下限の値であり，ある α に対して $M < M_c$ となる場合には衝撃波が形成されることはない．図 4.16 は，α の値に対して異なる M を与えて数値計算を実行し，各 α についての臨界 Mach 数を定めたものである．α が 1 に近付くにつれて M_c が指数的に減少しており，α が 1 に近い領域，すなわち平面音波の共鳴に近い状態では衝撃波が形成されやすいことがわかる．また，平面波の共鳴において $Re \to \infty$ の極限では M の値に関わらず必ず衝撃波が形成される [40] という事実から，$\alpha \to 1$ の極限では $M_c \to 0$ となることが予想される．[5]

続いて図 4.17 に $\alpha = 0.5$ における，異なる Mach 数 ($M = 5 \times 10^{-4}$ および $M = 5 \times 10^{-2}$) に対する流速分布の様子を示す．α が中空の円筒 ($\alpha = 0$) と平面波 ($\alpha = 1$) の中間の値をとっているにも関わらず，図 4.17(a) に示されている波形は図 4.5($\alpha = 0.1$，$M = 1 \times 10^{-2}$) と定性的によく一致している．一方，図 4.17(b) では図 (a) とは対称的に，$\alpha = 0.9$ に対する図 4.6($\alpha = 0.9$，$M = 1 \times 10^{-4}$) および図 4.7($\alpha = 0.9$，$M = 1 \times 10^{-2}$) に類似した結果とな

[5]初期値境界値問題を時間発展的に解く計算方法では，M が小さくなるにしたがって計算時間が長くなる．このため，本研究では $\alpha = 1$ のごく近傍における臨界 Mach 数 M_c を決定するには至らなかった．しかし，実在の気体には粘性による散逸が存在し，その影響は M が小さいほど非線形効果に対して支配的となるために，実用上，そのような領域における M_c を決定することは重要ではない．

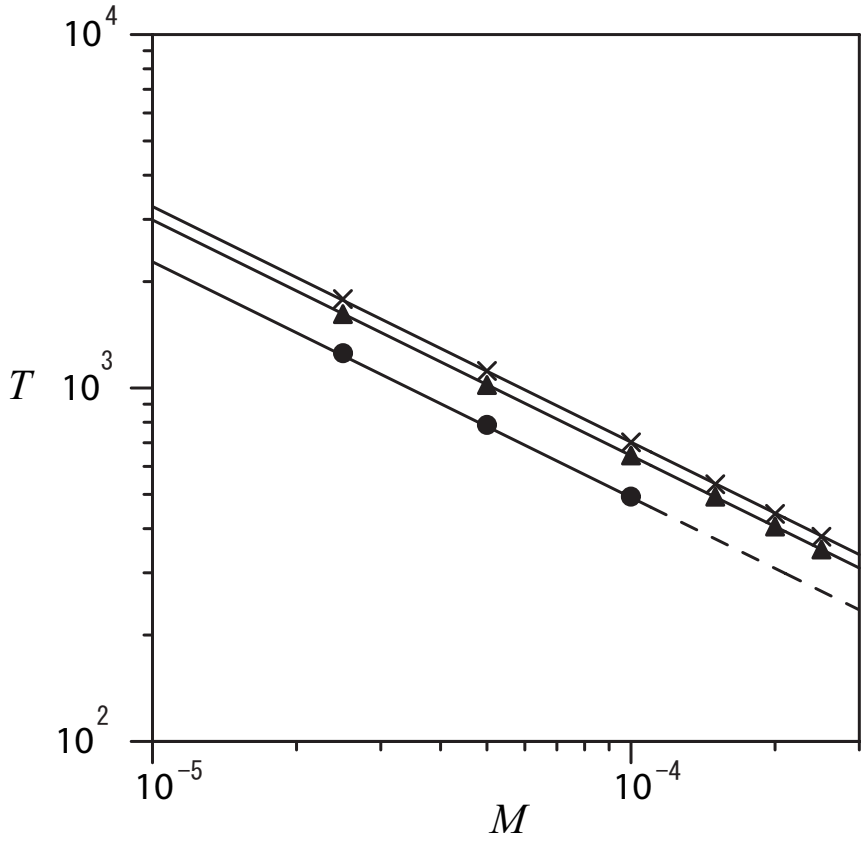

図 4.18: 振幅変調の周期の Mach 数依存性．×：$\alpha = 0$, ▲：$\alpha = 0.1$, ●：$\alpha = 0.3$．図中の直線は，変調の周期が $M^{-2/3}$ に比例するものとして引かれている．$\alpha = 0.3$ については，図中の破線で示された領域では衝撃波が形成されるために周期的な振幅の変調は観測されなくなる．

る．これは，共鳴波の特徴はその幾何学的な性質のみによって決定されるのではなく，非線形効果と幾何学的な効果の相対的な関係に強く依存することを示している．つまり，α が 1 に近い値でなくとも音源の Mach 数 M が図 4.16 に示された臨界 Mach 数 M_c に対して十分に大きな場合，幾何学的な効果に対して非線形効果が卓越するために共鳴波のふるまいは，図 4.17(b) のように平面音波の共鳴現象に近いものとなる．

第 3 章で示されたように，衝撃波が形成されない場合には共鳴波の振幅は周期的な変調を繰り返す．図 4.18 は，$\alpha = 0,\ 0.1,\ 0.3$ の場合について，数値的に計算された変調の周期の Mach 数に対する依存性を示している．図中の直線は，変調の周期が $M^{-2/3}$ に比例するものとして引かれている．ただし，$\alpha = 0.3$ のケースについては，図中の破線で示された領域で

は衝撃波が形成されるために周期的な振幅の変調は観測されなくなる．この図から，衝撃波が形成されない限り，振幅変調の時間スケールは $M^{-2/3}t$ によって記述されることがわかる．これは，第 3 章の解析結果と一致する．つまり，音響 Mach 数 M が図 4.16 に示されている臨界 Mach 数 M_c を超えない限り，第 3 章で行われた弱非線形解析が有効であるといえる．

4.4　結論

この章では，二重円筒内の気体中に励起される大振幅共鳴円筒音波の非線形発展を高解像度 TVD スキームを用いて数値的に解析した．その結果，衝撃波を含む共鳴円筒波には，平面音波の共鳴現象には見られない特徴的な現象が現れることが示された．共鳴円筒音波の性質は，現象の非線形性の強さを指定するパラメータである音響 Mach 数 M と，音場の幾何学的な性質を支配するパラメータ α によって特徴づけられる．

以下に，本章で行われた数値解析によって得られた主な結果を示す．

1. 円筒音波の共鳴現象には相反する 2 つの性質が共存することが明らかになった．一つは非線形効果による波形歪みと衝撃波の形成であり，もう一つは，音場の幾何学的な性質に起因する分散効果とそれによる波形歪みの抑制の効果である．円筒波の共鳴には，高次の共鳴モードの振動数が基本共鳴振動数 (最低次の共鳴振動数) の整数倍に一致しないことから，分散効果による共鳴波の波形歪みを抑制する性質が現れる．このため，以下に挙げるような平面音波の共鳴現象にはみられない特徴的な現象が観察される．

   (a) M と α が十分に小さい場合には，波形歪みの抑制効果が非線形効果に対して支配的となることから，円筒内に衝撃波は形成されない．このとき，$M^{2/3}$ に比例する周期をもつ，ゆっくりとした規則的な振幅の変調が観測される．衝撃波が形成されない場合には，共鳴波の振幅は最大で $O(M^{1/3})$ に達する．振幅の変調を含むこのような共鳴波のふるまいは，第 3 章において得られた弱非線形共鳴振動に対する解析結果とよく一致する．

   (b) M が大きくなり，分散性による波形歪みの抑制効果よりも非線形効果が強くなる場合，円筒内に励起される共鳴音波の波形は徐々に歪んでゆき，ついには衝撃波が形成

される．

(c) 円筒内部に衝撃波が形成されるとき，共鳴波の振幅は時間の経過とともにある一定値に近づいた後，ゆっくりとした減衰をし，そのふるまいは準定常的となる．これは次の理由による．まず，衝撃波面における強いエネルギー散逸によって円筒内部の気体の温度が上昇する．これにより，円筒内の気体における音速 c が初期音速 c_0 よりも速くなるために，線形解より得られた共鳴振動数 (音源の駆動振動数) と実際の共鳴振動数にずれが生じる．その結果，音源である外部円筒から円筒内の気体に対してなされる仕事量が減るために共鳴波の振幅は，音源からのエネルギーの供給と衝撃波面での散逸がつり合う大きさに減衰する．

2. 波面が収束することによって，内部円柱近傍における衝撃波が強くなる (衝撃波面前後における物理量の跳びの大きさが大きくなる)．波面の幾何学的な収束の効果は α が小さい場合に顕著に現れる．$\alpha = 0.1$ のケースに対する数値計算の結果，衝撃波面における強いエネルギー散逸のために，内部円柱近傍における平均温度 (時間的に平均された温度) の急激な上昇がみられた．また，このとき内部円柱近傍から外部円筒へ向かう実質的な質量の流れ (音響流) が観測された．この結果として，内部円柱の近傍では平均密度が時間とともに低下することが示された．

3. α が 1 に近い値をとる場合，衝撃波を含んだ共鳴波のふるまいは，平面音波の共鳴に見られる現象に非常に近いものとなる．

4. 音響 Reynolds 数 Re が十分に小さいならば，気体のもつ粘性と熱伝導性によるエネルギー散逸の効果は，衝撃波面におけるエネルギー散逸を除いてほとんど無視できるほどに小さい．

第5章　偏心二重円筒内に励起される共鳴音波の解析

本章では，内部円柱と外部円筒の中心軸がわずかにずれた偏心二重円筒内の理想気体中に励起される共鳴音波に対する 2 次元の線形解析および非線形問題に対する数値解析を行い，そこに現れる特徴的な現象について議論する．はじめに，偏心円筒内に励起される共鳴音波の定式化を行い，続いて線形の波動方程式を解くことによってこの問題に対する共鳴条件を求める．最後に，偏心円筒に対する 2 次元の数値シミュレーションを実行し，線形解および同軸問題との比較を行う．

5.1　問題の定式化

図 5.1 に偏心二重円筒の概念図を示す．第 2 章と同様に，内側の剛体円柱の半径を r_a，外側の円筒の平均半径を r_b とし，外部円筒は振幅 A_0，角振動数 ω で脈動するものとする．ただし，外部円筒の中心軸 O と内部円柱の中心軸 O' は x 軸の方向に d だけ離れている．また，x 軸から中心軸 O のまわりに反時計回りに計った角度を ϑ，O から計った距離を r^* とする．

第 2 章と同様に，音響 Mach 数 M と二重円筒の半径の比 α を導入する．

$$M \equiv \frac{A_0\omega}{c_0}, \qquad \alpha \equiv \frac{r_a}{\bar{r}_b} \tag{5.1}$$

さらに，内部円柱の中心軸のずれ d を外部円筒の平均半径によって無次元化した偏心率 Δ を以下に定義する．

$$\Delta \equiv \frac{d}{\bar{r}_b} \tag{5.2}$$

この偏心率 Δ によって，円筒内に励起される定在波の 2 次元性が指定される．$\Delta \to 0$ の極限において，偏心円筒に対する問題は同軸円筒内の共鳴問題に帰着される．本論文では主と

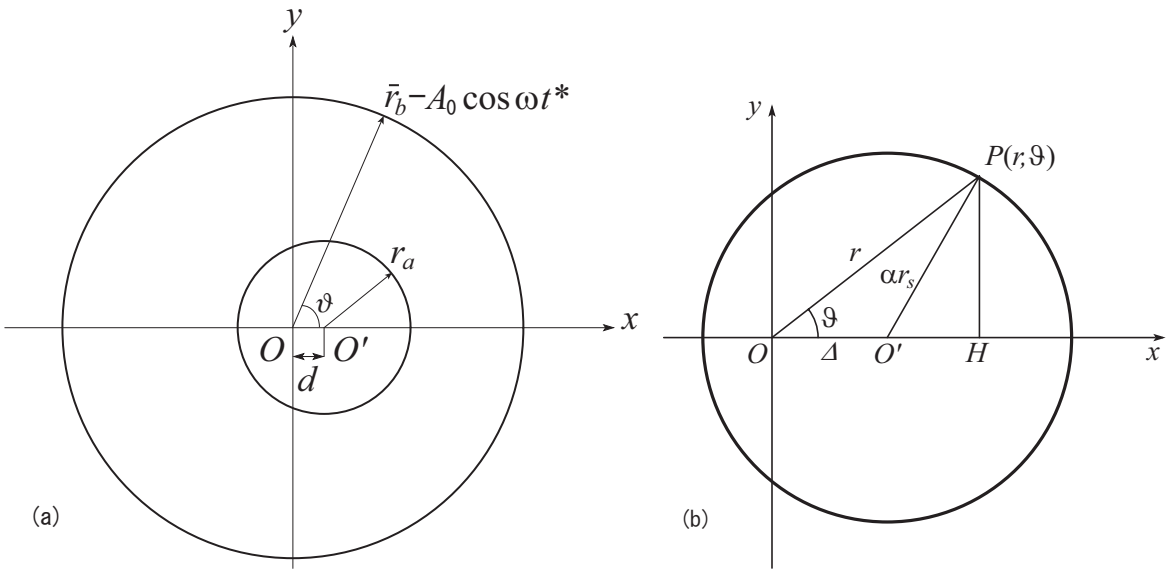

図 5.1: 偏心した二重円筒の概念図 (a) および内部円柱の詳細図 (b).

して $\Delta \ll 1$ であるような，偏心率の小さな問題を取り扱うが，とくに次節で行われる線形解析においては，

$$M \ll \Delta \ll 1 \tag{5.3}$$

という関係を要請する．これは，二重円筒の偏心の効果に比較して非線形効果が十分に弱いことを意味する．また，本章で扱う問題では，円筒内の気体の散逸性は考慮しないものとする．[1]

続いて，以下のような無次元変数を定義する．

$$r = \frac{\omega}{c_0} r^*, \quad t = \omega t^*, \quad \Phi = \frac{\omega}{c_0^2} \Phi^*, \quad u_r = \frac{u_r^*}{c_0}, \quad u_\vartheta = \frac{u_\vartheta^*}{c_0} \tag{5.4}$$

ここで，u_r^* と u_ϑ^* はそれぞれ点 O に対する半径方向の流速と周方向の流速の成分をあらわす．また，Φ は

$$u_r = \frac{\partial \Phi}{\partial r}, \quad u_\vartheta = \frac{1}{r} \frac{\partial \Phi}{\partial \vartheta}$$

によって定義される速度ポテンシャルである．

[1]第 3，4 章の結果より，音源の振動に関して数十周期程度の時間スケールでは，実在の気体の粘性と熱伝導性による散逸の効果は無視できる．

外部円筒における線形化された境界条件は，式 (5.1)–(5.4) で定義された無次元量を用いて，

$$u_r(r_s, \vartheta, t) = M \sin t \tag{5.5}$$

と表される．ここで，r_s は (5.4) によって無次元化された外部円筒の平均半径 $r_s = \omega \bar{r}_b / c_0$ である．つぎに，内部円柱表面での境界条件を定める．図 5.1(b) より，内部円柱の表面上の任意の点を $P(r, \vartheta)$ とし，P から x 軸に向けて引かれた垂線との交点を H とする．ただし，外部円筒の中心軸を O，内部円柱の中心軸を O' としている．このとき，$OO' = \Delta$，$OH = r\cos\vartheta$ より $O'H = r\cos\vartheta - \Delta$ となる．また，$O'P = \alpha r_s$，$PH = r\sin\vartheta$ であるから，$\triangle O'PH$ に対して三平方の定理を用いることで，r に関する 2 次方程式

$$\begin{aligned} (r\cos\vartheta - \Delta)^2 + (r\sin\vartheta) &= (\alpha r_s)^2 \\ r^2 - 2\Delta r\cos\vartheta + \Delta^2 - (\alpha r_s)^2 &= 0 \end{aligned} \tag{5.6}$$

が得られる．式 (5.6) を Δ が微小であることに注意して解けば，

$$\begin{aligned} r &= \Delta\cos\vartheta \pm \sqrt{(\Delta\cos\vartheta)^2 - \Delta^2 + (\alpha r_s)^2} \\ &= \Delta\cos\vartheta \pm \sqrt{(\alpha r_s)^2 - (\Delta\sin\vartheta)^2} \\ &= \Delta\cos\vartheta \pm \alpha r_s \sqrt{1 - \frac{\Delta}{\alpha r_s}\sin\vartheta} \\ &\approx \alpha r_s + \Delta\cos\vartheta \end{aligned} \tag{5.7}$$

を得る．これにより，内部円柱表面における境界条件は，

$$u_r(\alpha r_s + \Delta\cos\vartheta, \vartheta, t) = 0 \tag{5.8}$$

と表される．

5.2　線形解析

偏心した二重円筒内部の気体中に励起される定在音波のふるまいは，以下に示す速度ポテンシャル $\Phi(r, \vartheta, t)$ に対する線形の波動方程式および境界条件 (5.5)，(5.8) によって記述される．

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\vartheta^2} - \frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = 0 \tag{5.9}$$

いま，速度ポテンシャル Φ を

$$\Phi(r,\vartheta,t)=\phi(r,\vartheta)T(t) \tag{5.10}$$

とおけば，境界条件 (5.5) より変数分離法によってただちに

$$T(t)=\sin t \tag{5.11}$$

が得られる．式 (5.10)–(5.11) を波動方程式 (5.9) および境界条件 (5.5)，(5.8) に代入して整理すれば，ϕ に関する以下の境界値問題が得られる．

$$\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi}{\partial\vartheta^2}+\phi=0 \tag{5.12}$$

$$r=r_s \quad \text{において} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial r}=M \tag{5.13}$$

$$r=\alpha r_s+\Delta\cos\vartheta \quad \text{において} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial r}=0 \tag{5.14}$$

ここで，境界条件 (5.14) を $r=\alpha r_s$ のまわりに Taylor 展開する．

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{r=\alpha r_s+\Delta\cos\vartheta} &= u_r(\alpha r_s+\Delta\cos\vartheta,\vartheta)\\ &= u_r(\alpha r_s,\vartheta)+\Delta\cos\vartheta\left.\frac{\partial u_r}{\partial r}\right|_{\alpha r_s,\vartheta}+\cdots\\ &= \left.\frac{\partial\phi}{\partial r}\right|_{\alpha r_s,\vartheta}+\Delta\cos\vartheta\left.\frac{\partial^2\phi}{\partial r^2}\right|_{\alpha r_s,\vartheta}+\cdots\\ &= 0\end{aligned} \tag{5.15}$$

いま，微小なパラメータ Δ によって $\phi(r,\vartheta)$ を

$$\phi(r,\vartheta)=\phi_1(r,\vartheta)+\Delta\phi_2(r,\vartheta)+O(\Delta^2) \tag{5.16}$$

のように展開し，波動方程式 (5.12) および境界条件 (5.13)，(5.15) に代入して Δ のオーダーごとに整理すれば以下の式を得る．

$O(1)$:

$$\frac{\partial^2\phi_1}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_1}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi_1}{\partial\vartheta^2}+\phi_1=0 \tag{5.17}$$

$r=r_s$　において　$\dfrac{\partial\phi_1}{\partial r}=M$ (5.18)

$r=\alpha r_s$　において　$\dfrac{\partial\phi_1}{\partial r}=0$ (5.19)

$O(\Delta)$:

$$\frac{\partial^2\phi_2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\phi_2}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\phi_2}{\partial\vartheta^2}+\phi_2=0 \tag{5.20}$$

$r=r_s$　において　$\dfrac{\partial\phi_2}{\partial r}=0$ (5.21)

$r=\alpha r_s$　において　$\dfrac{\partial\phi_2}{\partial r}=-\cos\vartheta\dfrac{\partial^2\phi_1}{\partial r^2}$ (5.22)

方程式 (5.17)–(5.19) および (5.20)–(5.22) の解は，変数分離法によりただちに求まる．

$$\phi_1(r,\vartheta)=-M\frac{J_0(r)N_1(\alpha r_s)-J_1(\alpha r_s)N_0(r)}{J_1(r_s)N_1(\alpha r_s)-J_1(\alpha r_s)N_1(r_s)} \tag{5.23}$$

$$\phi_2(r,\vartheta)=M\cos\vartheta\frac{J_1(r)N_1'(r_s)-J_1'(r_s)N_1(r)}{J_1'(r_s)N_1'(\alpha r_s)-J_1'(\alpha r_s)N_1'(r_s)}\times\frac{J_1'(\alpha r_s)_1(\alpha r_s)-J_1(\alpha r_s)N_1'(\alpha r_s)}{J_1(r_s)N_1(\alpha r_s)-J_1(\alpha r_s)N_1(r_s)} \tag{5.24}$$

ここで，J_0，J_1 はそれぞれ 0 階，1 階の Bessel 関数，N_0，N_1 はそれぞれ 0 階，1 階の Neumann 関数である．また，プライムの記号を付したものはその引数による微分を表している．

式 (5.23)，(5.24) を式 (5.16) に代入し，式 (5.10)–(5.11) を考慮すれば，速度ポテンシャル Φ が次のように得られる．

$$\Phi(r,\vartheta,t)=-M\sin t\left\{\frac{J_0(r)N_1(\alpha r_s)-J_1(\alpha r_s)N_0(r)}{Z_1(\alpha,r_s)}-\Delta\cos\vartheta\,\frac{J_1(r)N_1'(r_s)-J_1'(r_s)N_1(r)}{Z_2(\alpha,r_s)}\frac{J_1'(\alpha r_s)N_1(\alpha r_s)-J_1(\alpha r_s)N_1'(\alpha r_s)}{Z_1(\alpha,r_s)}\right\} \tag{5.25}$$

ただし，

$$Z_1(\alpha,r_s)=J_1(r_s)N_1(\alpha r_s)-J_1(\alpha r_s)N_1(r_s) \tag{5.26}$$

$$Z_2(\alpha,r_s)=J_1'(r_s)N_1'(\alpha r_s)-J_1'(\alpha r_s)N_1'(r_s) \tag{5.27}$$

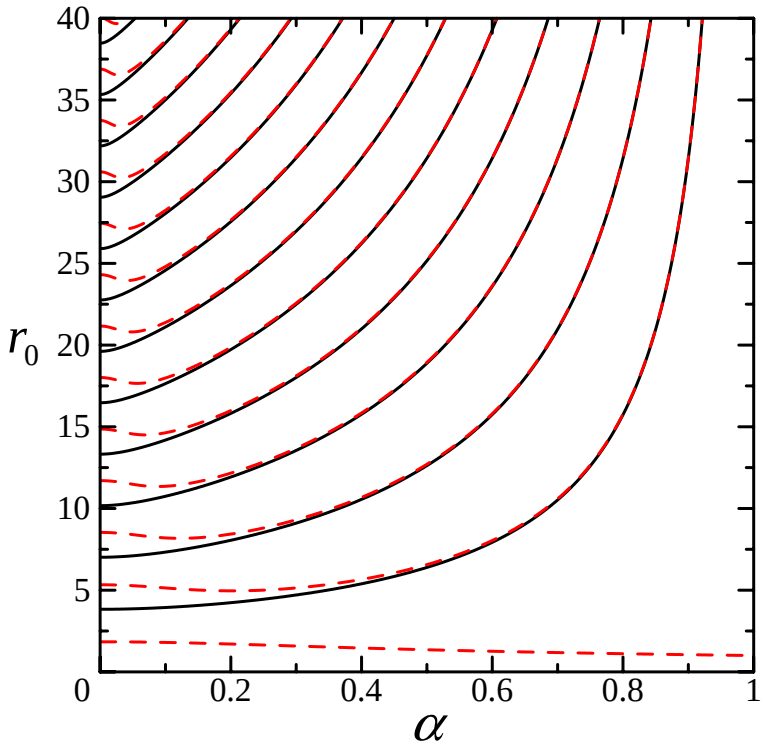

図 5.2: α に対する共鳴半径 r_0 の依存性．実線は脈動モード，破線は振動モードに対する共鳴半径．

とした．式 (5.25) の右辺第 1 項目は，第 3 章で行われた同軸円筒に対する解析結果の最低次の解 (3.19) に対応している．また，内部円柱の偏心の効果は右辺第 2 項によって記述されることがわかる．α および r_s が式 (5.26)，(5.27) を満たすとき，線形解 (5.25) は発散しその意味を失う．式 (5.26)，(5.27) を満足するような外部円筒の半径を共鳴半径と呼び，r_0 と表すこととする．本章では，偏心円筒内に励起される定在音波の特徴から，r_0 が式 (5.26) を満たす場合に見られる音波のモードを脈動モード，(5.27) を満たす際に見られるモードを振動モードと呼ぶ．脈動モードの共鳴半径 r_0 は，第 3 章で示された同軸円筒についての共鳴半径に他ならない．

図 5.2 に脈動モード，振動モードそれぞれについての共鳴半径 r_0 の α 依存性を示す．図から，$\alpha \approx 1$ の領域では，ふたつのモードの共鳴半径がほぼ同一の値をとることがわかる．このような場合には，円筒内に励起される共鳴波のふるまいを脈動モードあるいは振動モード

というように区別することはできなくなる．一方，$\alpha \to 0$ の場合には，

$$\lim_{\alpha\to 0} Z_1(\alpha, r_s) = J_1(r_s) \tag{5.28}$$

$$\lim_{\alpha\to 0} Z_2(\alpha, r_s) = J_1'(r_s) \tag{5.29}$$

より，Z_1 が極値をとる点が Z_2 のゼロ点となり，振動モードの共鳴半径となる．このため，高次の共鳴モードについては，Bessel 関数の漸近形より脈動モードの共鳴半径と振動モードの共鳴半径がおよそ $\pi/2$ だけずれることになる．このことは，図 5.2 からも確認できる．

5.3　偏心円筒内に励起される定在音波の空間波形

偏心円筒内に励起される定在音波の流速および圧力は，線形解 (5.25) によって次のように求まる．

$$u_r(r,\vartheta,t) = \frac{\partial\Phi}{\partial r}, \quad u_\vartheta(r,\vartheta,t) = \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial\vartheta}, \quad p(r,\vartheta,t) = -\frac{\partial\Phi}{\partial t} \tag{5.30}$$

以下では，式 (5.26)，(5.27) によって与えられる共鳴半径のごく近傍における圧力分布の様子を代表的な r_0 と α に対して示し，偏心円筒内に励起される共鳴波に見られる特徴的なふるまいについて述べる．さらに，偏心率 Δ が共鳴音波に対して及ぼす影響についても考察を行う．

図 5.3 に偏心円筒内の気体中に励起された定在音波の圧力波形 (圧力分布) を示す．これらの図は，線形解 (5.25)，(5.30) において，(a):$\Delta = 0.01, \alpha = 0.1, r_s = 3.94$ (脈動モード)，(b):$\Delta = 0.01, \alpha = 0.1, r_s = 5.14$ (振動モード)，(c):$\Delta = 0.01, \alpha = 0.8, r_s = 15.75$，(d):$\Delta = 0.001, \alpha = 0.8, r_s = 15.75$ として得られたものである．図 (a) では，外部円筒の半径を図 5.2 の実線で示される共鳴半径の近傍に選んでいる．このとき圧力分布は円周方向にほぼ一様となっており，定在波のふるまいは第 3 章で扱われた同軸円筒の脈動問題に定性的に一致することがわかる．一般に，α が比較的小さいとき，外部円筒の半径を $Z_1(\alpha, r_s) = 0$ によって定義される共鳴半径の近傍における値に選ぶならば，偏心円筒内の定在波のふるまいは定性的に同軸円筒内に励起される共鳴波のふるまいと一致する．これに対して図 (b) では，図 5.1 の y 軸を境にして反対称な圧力分布となっている．このような圧力波形は，円筒の振

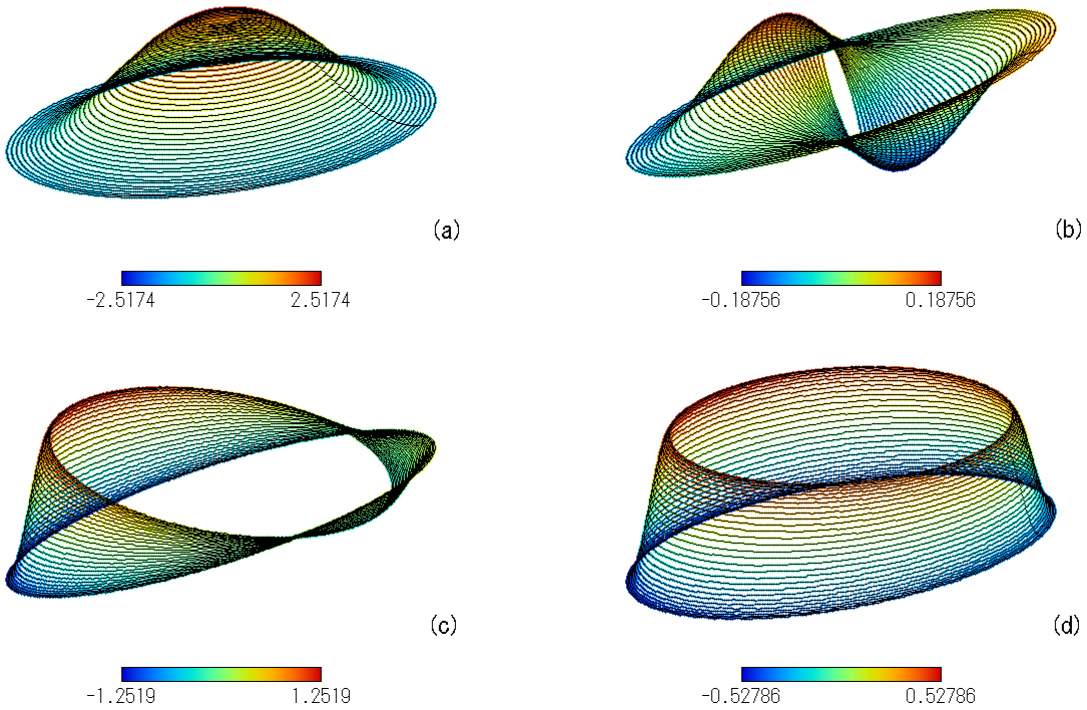

図 5.3: 偏心円筒内に励起された定在音波の音圧分布．(a):$\Delta = 0.01, \alpha = 0.1, r_s = 3.94$ (脈動モード)，(b):$\Delta = 0.01, \alpha = 0.1, r_s = 5.14$ (振動モード)，(c):$\Delta = 0.01, \alpha = 0.8, r_s = 15.75$, (d):$\Delta = 0.001, \alpha = 0.8, r_s = 15.75$.

動[2]によって励起される定在波に見られるものと一致する (付録 B 参照)．以上のような理由から，本研究では，図 5.3(a) に見られるような定在波のモードを脈動モード，(b) のモードを振動モードと呼ぶこととし，それぞれに対応した共鳴半径を脈動モードの共鳴半径，振動モードの共鳴半径と呼ぶこととする．

既に述べたように，図 α が 1 に比較して小さな領域では，脈動モードと振動モードの共鳴半径は互いに異なった値をとるが，α が 1 に近づくにつれてそれぞれの共鳴半径を互いに区別することができなくなる．[3]このような場合における偏心円筒内の定在波の様子を示したのが図 5.3(c) と (d) である．図 (c) では，脈動モードと振動モードの波形の重ね合わせによっ

[2]外部円筒の半径は時間的に変化せずに，その中心軸の位置がある平衡位置を基準として正弦的に振動することを指す．ここでは，x 軸方向に振動する円筒を想定している．

[3]この傾向は高次の振動モードではより顕著になる．

て強い非対称性が現れていることを確認できる．ところが，図 (d) ではそのような非対称性は現れず，脈動モードが支配的な波形が得られた．これは，偏心率 Δ が 1×10^{-3} と図 (c) の場合に比べて小さな値であるために，式 (5.25) において振動モードの波形を記述する右辺第２項の影響が第 1 項に比較して小さくなったためである．このように，ふたつのモードの共鳴半径を区別できないような場合，偏心円筒内に励起される定在波のふるまいは偏心率 Δ に強く依存するといえる．

5.4　偏心円筒内の気体中に励起される非線形共鳴音波の数値解析

音源の Mach 数 M および偏心率 Δ が大きな場合，前節で求めた線形解は現象を正しく記述することはできない．そこでこの節では，このような場合における偏心ニ重円筒内に励起される共鳴波のふるまいを第４章と同様の計算手法を用いて数値的に明らかにし，第 3 章，第４章の同軸円筒に対する問題および前節の偏心円筒に対する線形解との比較を行う．これによって偏心円筒内に励起される共鳴音波に特有な現象の存在が示される．さらに，大振幅の共鳴音波中におかれた偏心円柱に働く定常的な力 (音響放射力) についてもその存在が示される．

ここでは，以下に示す支配方程式

$$\frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = 0 \tag{5.31}$$

ただし，

$$Q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ E_t \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ \rho uv \\ (E_t + p)u \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho u \\ \rho uv \\ p + \rho^2 v \\ (E_t + p)v \end{bmatrix}, \tag{5.32}$$

および境界条件

$$\begin{array}{ll} \text{外部円筒 } (r = r_s) \text{ において：} & u_r = M \sin t \\ \text{内部円柱において：} & u_r = 0 \end{array} \tag{5.33}$$

が取り扱われる．ここで，$x = r\cos\vartheta$，$y = r\sin\vartheta$，$u = u_r\cos\vartheta - u_\vartheta \sin\vartheta$，$v = u_r \sin\vartheta + u_\vartheta \cos\vartheta$ であり，u, v, u_r, u_ϑ はそれぞれ x, y, r, ϑ 方向の速度成分である．また，本節では空間

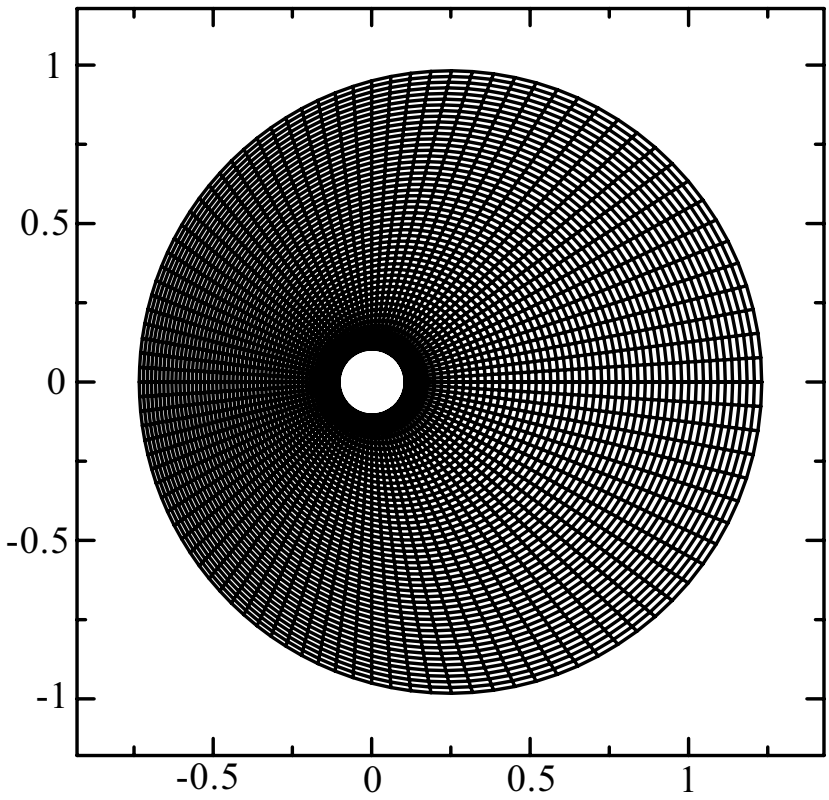

図 5.4: 偏心ニ重円筒の計算格子．$\alpha = 0.1$，$\Delta = 0.25$.

２次元の問題を扱うため気体の全エネルギーは $E_t = \dfrac{1}{2}\rho(u^2 + v^2)$ と定義される．内部円柱の境界面は式 (5.6) によって与えられる．

$$
\begin{aligned}
(r\cos\vartheta - \Delta)^2 + (r\sin\vartheta) &= (\alpha r_s)^2 \\
r^2 - 2\Delta r\cos\vartheta + \Delta^2 - (\alpha r_s)^2 &= 0
\end{aligned}
\tag{5.6}
$$

図 5.4 に偏心円筒問題に対する計算格子を示す．円筒の偏心の様子を見るために，ここでは $\alpha = 0.1$，$\Delta = 0.25$ と比較的偏心量の大きな場合についての格子の図を例示してある．計算スキームは，第４章で用いられた３次精度の TVD スキームを２次元に拡張したものを採用した．本計算における格子点数は，動径方向に 200 点，周方向に 400 点とし，時間の刻み幅を $2\pi/15,000 \approx 4.2 \times 10^{-4}$ とした．

図 5.5 に，式 (5.31)–(5.33) の数値計算によって得られた偏心円筒内に励起される共鳴音波の圧力分布を示す．図 5.5(a) は，$\alpha = 0.1,\ \Delta = 0.1,\ M = 1 \times 10^{-2},\ r_0 = 3.940$(脈動モード)

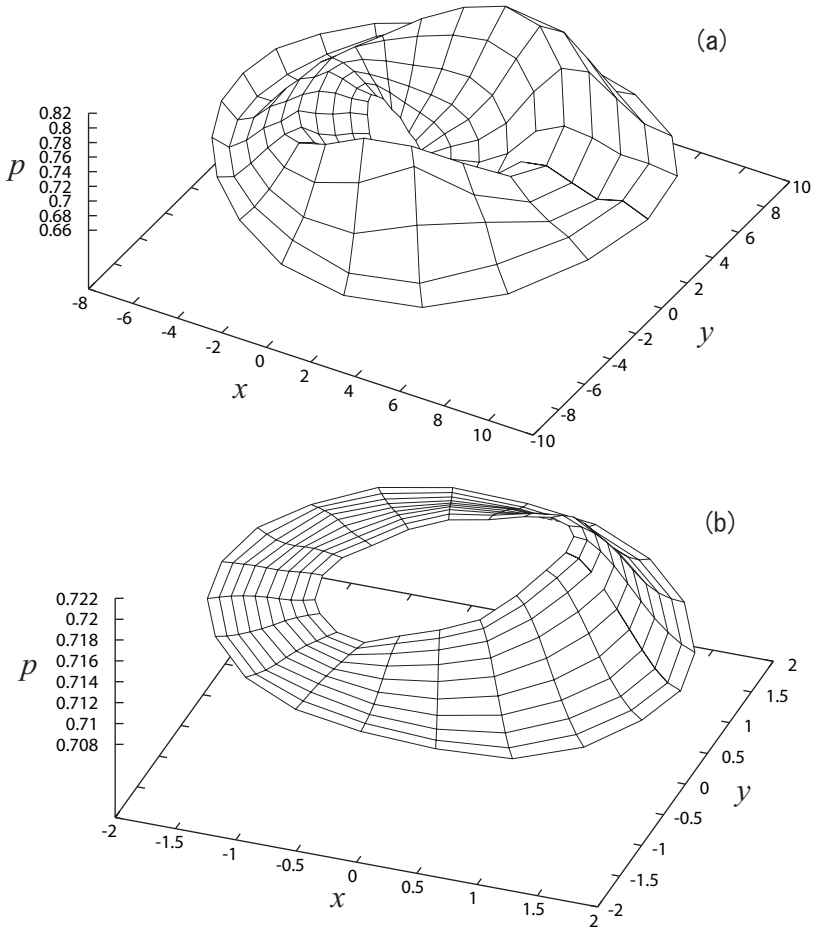

図 5.5: 偏心円筒内に励起される非線形共鳴音波の圧力波形．(a):$\alpha = 0.1,\ \Delta = 0.1,\ M = 1 \times 10^{-2},\ r_0 = 3.940$(脈動モード)，(b):$\alpha = 0.5,\ \Delta = 0.1,\ M = 1 \times 10^{-4},\ r_0 = 6.393$.

に対する計算結果，(b) は $\alpha = 0.5,\ \Delta = 0.1,\ M = 1 \times 10^{-4},\ r_0 = 6.393$ に対する結果である．図 5.5(a) では，内部円柱の偏心が大きいために，脈動モードの振動数で外部円筒を駆動しているにも関わらず周方向に非一様な圧力分布が形成されていることがわかる．また，音源 (外部円筒) の振幅が $M = 1 \times 10^{-2}$ と比較的大きいため，非線形効果による波形の歪みが見られるが，衝撃波が形成されるにはいたっていない．これは，内部円柱の偏心量が大きいために線形解 (5.25)–(5.27) によって記述される共鳴半径と実際の共鳴半径 (固有振動数) が異なることによっていると考えられる．つまり，内部円柱の偏心量が大きい場合には，線形解より得られる共鳴振動数で音源を駆動しても共鳴による振幅の増幅の効果が弱いために衝撃波が形成されるような大振幅の共鳴波が励起されにくいといえる．一方，図 5.5(b) の場合，

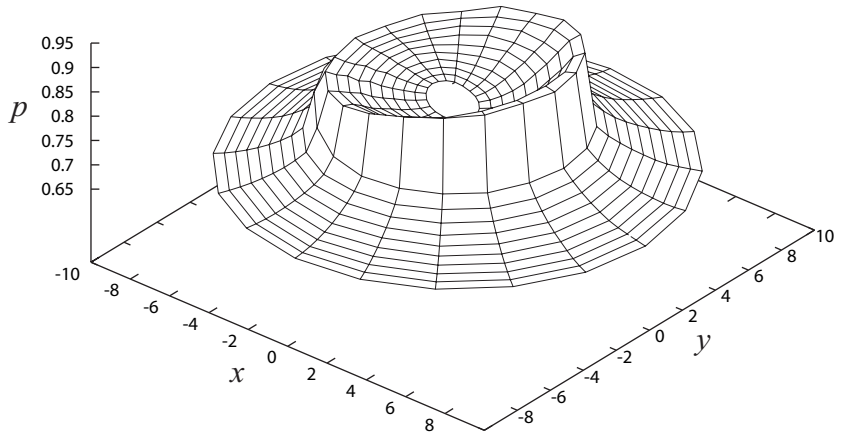

図 5.6: 偏心円筒内に励起される衝撃波をともなった非線形共鳴音波の圧力波形. $\alpha = 0.1,\ \Delta = 0.01,\ M = 1 \times 10^{-2},\ r_0 = 3.940$(脈動モード).

音源の振幅が小さい ($M = 1 \times 10^{-4}$) ために音波の非線形性による波形歪みは見られない．また，共鳴波のふるまいは，脈動モードと振動モードの両方のモードが含まれている図 5.3(c) とよく似た波形となっており，共鳴波の振幅が小さく非線形性が弱い場合には，数値解と線形解は定性的に一致するといえる．もちろん，このような場合には円筒内に衝撃波は形成されない.

続いて，偏心円筒内に衝撃波が形成される場合における共鳴波のふるまいを調べるため，図 5.6 に $\alpha = 0.1,\ \Delta = 0.01,\ M = 1 \times 10^{-2},\ r_0 = 3.940$(脈動モード) とした場合における円筒内の圧力分布を示す (外部円筒の脈動開始から 15 周期目における圧力分布)．内部円柱の偏心が小さいために大振幅の脈動モードの共鳴波が励起されており，その結果として衝撃波が形成されている様子が確認できる．また，わずかではあるが内部円柱が偏心していることによる圧力分布の非対称性もこの図から見ることができる．このとき，共鳴音波の圧力振幅はおおよそ 0.1〜0.2 程度であり，衝撃波の形成をともなう共鳴波音波の振幅は $O(M^{1/2})$ であるといえる (第 4 章を参照).

5.5　結論

本章では，内部円柱と外部円筒の中心軸が一致していない偏心二重円筒内部の気体中に励起される共鳴音波のふるまいを線形解析および大振幅共鳴波にたいする数値解析を用いて明らかにした．その結果，偏心円筒問題では，同軸円筒に対する問題でみられた共鳴モード (脈動モード) とは別の共鳴モード (振動モード) が存在することが示された．また，偏心量が比較的小さな場合には第 4 章の同軸円筒問題で見られたような強い衝撃波が形成されることが明らかにされた．

以下に，本章で行われた解析によって得られた主要な結果を示す．

1. 外部円筒の一様な脈動によって偏心円筒内の気体中に励起される共鳴音波は，第 3，4 章で見られたような音場の幾何学的な分布が r のみに依存する脈動モードの他に r と ϑ の両方に依存するモード (振動モード) が存在する．

2. 脈動モードの共鳴半径と振動モードの共鳴半径は，半径の比 α が小さい場合にはそれぞれ異なる値をとるが，$\alpha \to 1$ の場合にはこれらを区別することはできなくなる．このときの共鳴波のふるまいは偏心率 Δ および音響 Mach 数 M に依存して脈動モードと振動モードの寄与の度合が変化する．

3. 偏心率が大きな場合，変数分離形の解 (5.25) は円筒内に励起される音波のふるまいを精度よく近似することはできない．このとき，式 (5.26)，(5.27) で定義される共鳴半径は実際の共鳴半径とは異なるため，円筒内に励起される定在波の振幅は厳密な固有振動数で駆動された場合の振幅に比べて小さくなる．一方で，円筒内に励起される定在波 (あるいは共鳴波) の振幅が比較的小さく非線形効果が無視できるような場合，内部円柱の偏心量が有限であってもそのふるまいは線形解によって得られるものと定性的によく似た傾向を示す．

4. 偏心率が小さい場合，第 4 章における同軸円筒内の共鳴波と同様に衝撃波が形成される．ただし，偏心円筒の場合，内部円柱における非一様な波面の反射のために衝撃波を含む共鳴波の波形に非対称性 (ϑ に対する依存性) が現れる．

第6章　結論

本研究は，音響学における理論的な観点のみならず音波の工学的な応用の面からも基本的かつ重要な問題である円筒音波と球面音波の共鳴にともなって現れるさまざまな非線形現象の理解と解明を目的として行われた．円筒波や球面波と平面波の大きな違いは，前者はその幾何学的な性質により，伝播過程において波面の収束や拡散をともなうことにある．この現象を解析するため，二重円筒または二重球殻を考え，その内部に満たされた理想気体中に励起される定在音波の非線形共鳴現象における音場の幾何学的な形状の影響の解析を行った．音場の幾何学的な形状は，脈動する外部円筒 (球殻) の平均半径と内部円柱 (球) の半径の比 α によって表される．この α を変化させることで，単純な中空円筒 (球殻) 内の共鳴から 1 次元平面音波の共鳴現象までを包括的に取り扱うことが可能となった．本研究に類似する研究としては，文献 [21] や文献 [22, 23] による球面波と円筒波の共鳴現象の理論解析があげられるが，これらはいずれも定常振動解を仮定しているため，初期条件に依存する振幅変調の解を含まない．本研究によって得られた主要な結果は，第 3 章における円筒音波と球面音波の弱非線形共鳴問題に対する理論解析によるものと，第 4 章の同軸円筒および第 5 章の偏心円筒に対する強非線形共鳴問題に対する数値解析によるものにまとめることができる．

第 3 章では，衝撃波が形成されないケースにおける同軸二重円筒および同心二重球殻内の理想気体中に励起される音波の弱非線形共鳴現象について，弱い散逸効果を含んだ速度ポテンシャル Φ に対する非線形の支配方程式 (3.6) を理論的に解析することによって，共鳴波のふるまいの詳細を明らかにした．ここでは，音源である外部円筒 (球殻) 表面において定義される音響 Mach 数 M を用いて展開パラメータ $\varepsilon = M^{1/3} \ll 1$ を導入し，漸近展開法による解析が行われた．得られた結果を以下に示す．

1. 多重尺度法を用いて，支配方程式 (3.6) に対する ε の 3 次のオーダーまでの解析を行い，

共鳴音波の複素振幅の時間的な変動を記述する方程式 (3.54) を得た．(3.54) から，円筒波や球面波の弱非線形共鳴現象では，気体の粘性や熱伝導性によるエネルギーの散逸が無視できる場合でも衝撃波が形成されないことが示された．これには，音波の非線形性と音場の幾何学的な形状に起因する音波の分散効果が本質的な役割を果たしている．また，幾何学パラメータ α が 1 に近い場合，共鳴波のふるまいは平面音波の共鳴に近くなり，分散効果による衝撃波の抑制効果は弱くなる．

2. 共鳴音波の実振幅 a と位相 θ によって構成される位相平面上における振幅方程式 (3.54) の解のふるまいを解析することにより，円筒音波と球面音波の共鳴に見られる特徴的な現象の詳細が明らかにされた．

   (a) 気体の散逸性が無視できるとき，相平面における振幅方程式 (3.54) の軌道には，実振幅 a と位相 θ がともに周期的な変調を繰り返す閉じた軌道と，振幅 a についてのみ周期的な変動を繰り返す開いた軌道が存在する．開いた軌道では，位相 θ は時間 $T = \varepsilon^2 t$ に対して単調に増加もしくは減少する．

   (b) 変調の周期は，幾何学パラメータ α に比例して減少する．

   (c) 閉じた軌道の特別な場合として，振幅と位相ともに時間的に変化しない定常振動状態が存在する．この定常振動解は相平面上における特異点として表される．

   (d) 線形解より得られる共鳴振動数 (3.23)-(3.24) と音源における加振振動数とのずれ (detuning) を表す δ によって特異点の数を含めた相平面上の軌道の様子が大きく異なる．

   (e) 気体の散逸性を考慮した場合，共鳴波の振幅と位相は時間的な変動を繰り返しながら徐々に安定な定常振動状態へと収束する．ここでも，定常振動解の数は δ に依存して変化する．

3. 定常振動状態における実振幅 a のふるまいを記述する方程式 (3.85) より，δ に対する a の応答曲線を得た．また，定常振動解の個数の α と δ に対する依存性をあきらかにした (付録 C 参照)．

4. 変調をともなった共鳴波の振幅の最大値および定常振動状態における共鳴波の振幅は，α に対して単調に減少する．

続いて第 4 章では，流体力学の基礎方程式を数値的に解くことによって，同軸円筒内に励起される強非線形共鳴音波の発展について議論した．ここでは，衝撃波を含んだ共鳴波のふるまいを解析するために高解像度風上差分法を用いた数値計算を実行した．以下にその主要な結果をまとめる．

1. 大振幅音波は，その強い非線形効果によって波形を歪ませる性質がある．しかし，円筒音波の共鳴現象には，第 3 章であきらかにされた音波の分散性とそれによる波形歪みの抑制効果が現れる．そのため，次に示すような極めて特徴的な現象が現れる．

   (a) 音響 Mach 数 M と幾何学パラメータ α がともに十分に小さい場合には，波形歪みの抑制効果が非線形効果に対して支配的となるために，円筒内に衝撃波は形成されない．このような場合，共鳴音波のふるまいは，第 3 章において得られた解析結果とよく一致する．

   (b) M が大きくなり分散性による波形歪みの抑制効果に対して非線形効果が卓越する場合，共鳴音波の波形は徐々に歪んでゆき，ついには衝撃波が形成される．衝撃波の形成は，M だけでなく α との相対的な関係が重要となる (図 4.16 参照)．

   (c) 衝撃波が形成されるとき，共鳴波の振幅は時間の経過にともなってある一定値に漸近し，そのふるまいは準定常的となる．このときの振幅の大きさは，外部円筒の脈動によって供給されるエネルギーと衝撃波面におけるエネルギー散逸のつり合いによって決定される．

2. 衝撃波面におけるエネルギー散逸により円筒内の平均温度が上昇することで，円筒内の音速が初期音速 c_0 よりも大きくなる．このため実際の共鳴振動数と外部円筒の加振振動数 (線形解より得られた共鳴振動数) にずれが生じる．共鳴振動数からのずれのために外部円筒から供給されるエネルギーの量が減少し，その結果，衝撃波面におけるエネルギー散逸が相対的に多くなることで共鳴波の振幅の緩やかな減衰がおこる．

3. 波面の収束によって強い衝撃波が形成されるために，内部円柱の近傍ではエネルギー散逸が大きくなりそこでの平均温度の上昇ならびに平均密度の低下がおこる．この効果は，α が小さいほど顕著に現れる．

4. 音響 Reynolds 数 Re が十分に大きいならば，共鳴波のエネルギー散逸は，衝撃波面を除いてほどんと無視できるほどに小さい．

以上で述べてきた結果は，空間的な分布が動径 r のみに依存する空間 1 次元の問題に対するものである．これに対して第 5 章では，空間 2 次元の問題として偏心した二重円筒内部の非線形共鳴現象を取り扱った．ここでは，音場の幾何学的な形状を指定するパラメータとして α に加え偏心率 Δ を導入し，線形解析および非線形数値シミュレーションを行った．これにより，外部円筒の一様な脈動によって励起される共鳴音波のふるまいは，その空間的な波形が主として動径 r のみに依存する脈動モードの他に，r と ϑ の両方に依存する振動モードが存在することがわかった．これらのモードの振動数は，α が小さい場合にはそれぞれ異なる値をとるが，$\alpha \to 1$ の場合には互いに区別することができなくなる．このような場合，音波のふるまいは Δ と M に強く依存することとなる．また，偏心率が大きくなると線形解によって表されるような振幅の特異点としての共鳴半径を定義できないため，“共鳴” という現象の定義に注意する必要がある．本研究では，音源の微小な振動に対して，有限の (非線形効果が無視できない程の) 振幅の音波が励起される状況をさして共鳴と呼んでいる．偏心率が比較的小さい場合には，第 4 章と同様に衝撃波が形成されるが，偏心した内部円柱による波面の非一様な反射のために衝撃波を含む共鳴波の波形に非対称性があらわれる．

最後に，本研究では空間 2 次元の問題に対する長時間の数値計算をするにはいたらなかった．また，空間の解像度についても決して十分に確保できたとはいえない状況である．さらに，ここで得られた結果を実用問題に適用するには，空間 3 次元の計算が必要不可欠であると考えられる．

非線形音響学の分野において，音波の共鳴やそれにともなって現れる非線形現象に対する研究は古くから研究がなされてきているにもかかわらず，円筒波や球面波といった非常に基本的な形状をもつ音波の共鳴現象に関して，振幅の変調を始めとする過去の研究からは説明

できない現象が本研究によってはじめて明らかにされた．このことは，音波の共鳴という現象の特異性とその解析の困難さを示唆しているといえる．

第 3 章および第 4 章で得られた結果は，いずれも空間 1 次元の問題についてのものであるが，振幅変調の周期や衝撃波形成の臨界 Mach 数などに対して音場の幾何形状とそれによる分散効果ならびに音波の非線形効果が極めて重要な役割を果たしているということは，熱音響エンジン [14–16] や音響圧縮機 [17] といったデバイスの開発を始めとする音波の工学的な応用の面においても重要な結果であるといえる．また，実用問題への適用を考えるならば，第 5 章の 2 次元問題やさらに一般的な形状に対する 3 次元解析が必要となる．本研究の将来の発展としては，上述の空間多次元問題への拡張や大振幅音波によって励起される 2 次的な流れである音響流の発展を含めた長時間にわたる共鳴音波のふるまいの解析，または，定在波だけではなく分散性を考慮した大振幅音波の非線形発展の解析が考えられる．

謝辞

本研究を遂行するにあたり，北海道大学大学院工学研究科機械宇宙工学専攻教授大島伸行先生には学位申請の主査をお引き受け頂き，終始懇切丁寧な御指導を賜りました．ここに謹んで感謝いたします．また，副査として貴重な御助言と示唆に富む御討論を賜りました北海道大学大学院工学研究科機械宇宙工学専攻教授藤川重雄先生，同エネルギー環境システム専攻教授武田靖先生に深く感謝いたします．北海道大学大学院工学研究科機械宇宙工学専攻准教授矢野猛先生には，副査をお引き受けいただいたのみならず研究全般を通しての懇切丁寧な御指導と学位論文の御校閲を賜りました．心より感謝いたします．また，本研究テーマの選定や研究を行う上での物理的，数学的な解析手法について御指導くださいました北海道大学名誉教授井上良紀先生，教育と研究についての貴重な御指導と御助言を賜りました北海道大学大学院工学研究科前助教授吉田静男先生に深く感謝の意を表します．

引用文献

[1] A. D. Pierce. *Acoustics*. Acoustical Society of America, 1989.

[2] R. Betchov. Nonlinear oscillations of a column of gas. *Phys. Fluids*, Vol. 1, p. 205, 1958.

[3] S. Temkin. Nonlinear gas oscillation in a resonant tube. *Phys. Fluids*, Vol. 11, p. 960, 1968.

[4] B. R. Seymour and M. P. Mortell. Resonant acoustic oscillations with damping: small rate theory. *J. Fluid Mech.*, Vol. 58, p. 353, 1973.

[5] N. Rott. The heating effect connected with non-linear oscillations in a resonance tube. *Z. Angew. Math. Phys.*, Vol. 25, p. 619, 1974.

[6] R. G. Zaripov and Ilhamov. Non-linear gas oscillations in a pipe. *J. Sound Vib.*, Vol. 46, p. 245, 1976.

[7] V. V. Kaner, O. V. Rudenko, and R. V. Khokhlov. Theory of nonlinear oscillations in acoustic resonators. *Sov. Phis. Acoust.*, Vol. 23, pp. 432–437, 1977.

[8] M. Ochmann. Nonlinear resonant oscillations in closed tubes—An application of the averaging method. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 77, p. 61, 1985.

[9] A. Goldshtein, P. Vainshtein, M. Fichman, and C. Gutfinger. Resonant gas oscillations in closed tubes. *J. Fluid Mech.*, Vol. 322, No. 147, 1996.

[10] T. Yano. Turbulent acoustic streaming excited by resonant gas oscillation with periodic shock waves in a closed tube. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 106, pp. L7–L12, 1999.

[11] 岡本学. 超音波骨導ヘッドホン. *Ultrasonic technology*, Vol. 15, No. 3, pp. 26–30, 2003.

[12] B. Yim, Y. Nagata, and Y Maeda. Sonolytic degradation of phthalic acid esters in aqueous solutions. Acceleration of hydrolysis by sonochemical action. *J. Phys. Chem.*, Vol. A 106, No. 1, pp. 104–107, 2002.

[13] Y. Takeda. Velocity profile measurement by ultrasonic Doppler method. *Exp. Therm. Fluid Sci.*, Vol. 10, pp. 444–453, 1995.

[14] T. Yazaki, A. Iwata, and A Maekawa, T. Tominaga. Traveling wave thermoacoustic engine in a looped tube. *Phys. Rev. Lett.*, Vol. 81, pp. 3128–3131, 1998.

[15] S. Backhaus and G. W. Swift. A thermoacoustic Stirling heat engine. *Nature*, Vol. 399, pp. 335–338, 1999.

[16] S. Garrett. Reinventing the engine. *Nature*, Vol. 399, pp. 303–305, 1999.

[17] C. C. Lawrenson, B. Lipkens, T. S. Lucas, D. K. Perkins, and T. W. Van Doren. Measurements of macrosonic standing waves in oscillating closed cavity. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 104, pp. 623–636, 1998.

[18] Lord Rayleigh. On the pressure of vibrations. *Phil. Mag.*, Vol. 3, pp. 338–346, 1902.

[19] L. V. King. On the acoustic radiation pressure on spheres. *Proc. R. Soc. Lond.*, Vol. A147, pp. 212–240, 1934.

[20] Y. D. Chun and Y. H. Kim. Numerical analysis for nonlinear resonant oscillations of gas in axisymmetric closed tubes. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 108, pp. 2765–2774, 2000.

[21] W. Chester. Acoustic resonance in spherically symmetric waves. *Proc. R. Soc. London A*, Vol. 434, pp. 459–463, 1991.

[22] W. Ellermeier. Acoustic resonance of cylindrically symmetric waves. *Proc. R. Soc. London A*, Vol. 445, pp. 181–191, 1994.

[23] W. Ellermeier. Acoustic resonance of radially symmetric waves in a thermoviscous gas. *Acta Mech.*, Vol. 121, pp. 97–113, 1997.

[24] A. B. Coppens and A. A. Atchley. *Encyclopedia of Acoustics*, Vol. 1, chapter Nonlinear standing waves in cavities, pp. 237–247. Wiley, New York, 1997. edited by M. J. Crocker.

[25] E. Kurihara, Y. Inoue, and T. Yano. Nonlinear resonant oscillations and shock waves generated between two coaxial cylinders. *Fluid Dyn. Res.*, Vol. 36, pp. 45–60, 2005.

[26] 栗原央流, 井上良紀, 矢野猛. 共鳴円筒波の衝撃波への発展. 京都大学数理解析研究所講究録, Vol. 1271, pp. 171–180, 2002.

[27] 栗原央流, 井上良紀, 矢野猛. 同軸二重円筒内部の理想気体中に励起される線形および非線形共鳴振動. 日本流体力学会誌「ながれ」, Vol. 20, No. 5, pp. 396–405, 2001.

[28] A. Nayfeh. *Perturbation Methods*. John Wiley and Sons, 1973.

[29] A. Nayfeh and D. T. Mook. *Nonlinear Oscillations*. John Wiley and Sons, 1979.

[30] E. Kurihara and T. Yano. Nonlinear analysis of periodic modulation in resonances of cylindrical and spherical acoustic standing waves. *Phys. Fluids*, 2006.

[31] 栗原央流, 矢野猛. 円筒内に励起される非線形共鳴波のふるまいと音場の幾何学的性質. 京都大学数理解析研究所講究録, 2005.

[32] S. A. Egorushkin and A. N. Troshko. Near-resonance highly nonlinear gas oscillations in tubes. *Fluid Dyn.*, Vol. 29, p. 561, 1994.

[33] A. A. Aganin, M. A. Ilgamov, and E. T. Smirnova. Development of longitudinal gas oscillations in a closed tube. *J. Sound Vib.*, Vol. 195, p. 359, 1996.

[34] E. Kurihara and T. Yano. Nonlinear resonant oscillations generated between two coaxial or eccentric cylinders. In *Innovations in Nonlinear Acoustics: ISNA17; International Symposium on Nonlinear Acoustics*, Vol. 838, pp. 461–464. AIP Conference Proceedings, 2006.

[35] 日本流体力学会（編）. 流体における波動. 朝倉書店, 1989.

[36] 井上良紀, 木谷勝（編）. 乱れと流れの非線形現象. 朝倉書店, 1993.

[37] M. F. Hamilton and D. T. Blackstock. *Nonlinear Acoustics*. Academic Press, San Diego, 1998.

[38] L. D. Landau. On shock waves at large distances from the place of their origin. *J. Phys. USSR*, Vol. 9, pp. 496–500, 1945.

[39] G. B. Whitham. The behavior of super sonic flow past a body of revolution, far from the axis. *Proc. R. Soc. Lond. A*, Vol. 201, pp. 89–109, 1950.

[40] W. Chester. Resonant oscillations in closed tubes. *J. Fluid Mech.*, Vol. 18, pp. 44–64, 1964.

[41] D. G. Crighton. Model equations of nonlinear acoustics. *Ann. Rev. Fluid Mech.*, pp. 11–33, 1979.

[42] R. T. Beyer. Parameter of nonlinearity in fluids. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 32, pp. 719–721, 1960.

[43] Y. Inoue, Y. Uneura, and A. Bellettini. Propagation of n-waves caused by temperature variation of a wall. *J. Phys. Soc. Japan*, Vol. 69, No. 3, pp. 687–694, 2000.

[44] 浅海典男. 球表面の温度変化によって励起された音波の非線形発展. 北海道大学大学院工学研究科 平成 16 年度修士論文, 2005.

[45] 藤川重雄, 武田靖, 矢野猛, 村井祐一. 工学の基礎　流体力学. 培風館, 2005.

[46] 今井功. 流体力学 (前編). 裳華房, 1973.

[47] 森口繁一ほか. 数学公式 III –特殊関数–. 岩波全書, 1960.

[48] 草野尚. 境界値問題入門. 朝倉書店, 1971.

[49] G. Barton. *Elements of Green's Function and propagation,*. Oxford University Press, 1989.

[50] 戸田盛和, 渡辺慎介. 非線形力学. 共立出版, 1984.

[51] 戸田盛和. 振動論. 培風館, 1968.

[52] L. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik. *Table of Integral, Series, and Products, 6th ed.* Academic, San Diego, 2000.

[53] S. R. Chakravarthy and Osher S. Numerical experiments with the osher upwind scheme for the euler equations. *AIAA J.*, Vol. 21, pp. 1241–1248, 1983.

[54] S. R. Chakravarthy and Osher S. Computing with high-resolution upwind schemes for hyperbolic equations. In B. Engquist, S. Osher, and R.C.J. Momerville, editors, *Large-Scale Computations in Fluid Mechanics*, pp. 57–86, Providence, RI, 1985. Americal Mathematical Society.

[55] 廣瀬直喜, 池川昌弘, 登坂宣好, 久保田弘敏, 本間弘樹. 圧縮性流体解析. 数値流体力学シリーズ 2. 東京大学出版会, 1995.

[56] 藤井孝蔵. 流体力学の数値計算法. 東京大学出版会, 1994.

[57] P. D. Thomas and C. K. Lombard. Geometric conservation law and its application to flow computations on moving grids. *AIAA J.*, Vol. 17, pp. 1030–1037, 1979.

[58] R. G. Hindman. Generalized coordinate forms of governing fluid equations and associated geometrically induced errors. *AIAA J.*, Vol. 20, pp. 1359–1367, 1982.

[59] J. W. S. Rayleigh. *The Theory of Sound, vol. 2.* Dover, New York, 1945.

[60] W. L. Nyborg. Acoustic streaming due to attenuated plane waves. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 25, pp. 68–75, 1953.

[61] Y. Inoue and T. Okigami. Proagation of finite sound waves radiated from an oscillating rigid sphere. *J. Sound Vib.*, Vol. 118, pp. 199–207, 1987.

[62] S. Furuyama and Y. Inoue. Weakly nonlinear waves and acoustic streaming produced by an oscillating rigid cylinder. *J. Acoust. Soc. Am.*, Vol. 95, No. 2, pp. 708–717, 1994.

[63] T. Yano and Y. Inoue. Numerical study of strongly nonlinear acoustic waves, shock waves, and streaming caused by a harmonically pulsating sphere. *Phys. Fluids*, Vol. 6, pp. 2831–2844, 1994.

[64] R. Courant and K. O. Friedrichs. *Supersonic Flow and Shock Waves*. Springer-Verlag, New York, 1948.

[65] S. Osher and F. Solomon. Upwind difference schemes for hyperbolic systems of conservation laws. *Math. Comput.*, Vol. 38, pp. 339–374, 1982.

[66] S. K. Godunov. A finite difference method for the numerical computation of discontinuous solutions of the equation of fluid dynamics. *Math. Sb.*, Vol. 47, pp. 271–290, 1959. Cornell Aeronautical Laboratory transl.

[67] P. L. Roe. Approximate Riemann solvers, parameter vectors, and difference schemes. *J. Comp. Phys.*, Vol. 43, pp. 357–372, 1981.

[68] J. L. Steger and R. F. Warming. Flux vector splitting of the inviscid gasdynamics equations with application to finite difference methods. *J. Comp. Phys.*, Vol. 40, pp. 263–293, 1981.

[69] 保原充, 大宮司久明（編）. 数値流体力学 — 基礎と応用. 東京大学出版会, 1992.

付 録A　散逸を考慮した速度ポテンシャルに関する非線形波動方程式の導出

ここでは，流体の速度，圧力，密度といった物理量は全て半径 r と時刻 t のみに依存する１次元問題を取り扱う．また，流れの代表速さ u_0 と静止一様状態における音速 c_0 との比を $u_0/c_0 = \epsilon$ とおく．つぎに，各物理量を静止一様状態における値 $(\rho_0,\ p_0,\ T_0,\ s_0)$ とそこからの十分に小さい摂動量の和として，

$$u = u, \quad \rho = \rho_0 + \rho', \quad p = p_0 + p', \quad T = T_0 + T', \quad s = s_0 + s' \tag{A.1}$$

と表す．s' を除いた全ての摂動量の大きさは，それぞれの一様状態における値と比較して ϵ のオーダーである．さらに，気体の粘性や熱伝導によるエネルギーの散逸の効果も $O(\epsilon)$ であると仮定する．

質量の保存則は，

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial r} + \frac{m}{r}\rho u = 0 \tag{A.2}$$

と書ける．ここで，m は音場の幾何形状を指定するパラメータで，平面波: $m = 0$，円筒波: $m = 1$，球面波: $m = 2$ である．

運動量とエネルギーに関する保存則はそれぞれ，

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{m}{r}u\right) + \frac{\zeta + \frac{1}{3}\mu}{\rho}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{m}{r}u\right) \tag{A.3}$$

$$\rho T\left(\frac{\partial s}{\partial t} + u\frac{\partial s}{\partial r}\right) = \kappa\left(\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{m}{r}\frac{\partial T}{\partial r}\right) + \zeta\left(\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{2}\mu\left(\frac{4}{3}\frac{\partial u}{\partial r}\right)^2 \tag{A.4}$$

となる．ただし，μ, ζ, κ はそれぞれ粘性係数，体積粘性率，温度伝導率であり前述したように全て ϵ 程度の大きさの量である．

いま，式 (A.4) に式 (A.1) を代入し，線形化を行なうと

$$\rho_0 T_0 \frac{\partial s'}{\partial t} = \kappa \left(\frac{\partial^2 T'}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial T'}{\partial r} \right) \tag{A.5}$$

となり，s' は ϵ に関する 2 次の微小量であることがわかる．したがって，熱力学の関係式より 1 次のオーダーで

$$T' = \left(\frac{\partial T}{\partial \rho} \right)_s \rho' = \left(\frac{c_0^2}{\rho_0 c_p} \right) \rho' \tag{A.6}$$

が成り立つ．ここで，c_p は定圧比熱である．式 (A.6) を式 (A.5) に代入し，線形の波動方程式

$$\frac{\partial^2 \rho'}{\partial t^2} = c_0^2 \left(\frac{\partial^2 \rho'}{\partial r^2} + \frac{m}{r} \frac{\partial \rho'}{\partial r} \right) \tag{A.7}$$

および線形化された質量保存則より，

$$s' = \frac{\kappa}{c_p \rho_0^2 T_0} \frac{\partial \rho'}{\partial t} = -\frac{\kappa}{c_p \rho_0 T_0} \left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{m}{r} \right) \tag{A.8}$$

を得る．

次に，運動量保存に関する方程式 (A.3) に (A.1) の関係式を代入し，２次の微小量まで考慮した近似式を求めることを考える．いま，圧力 $p(\rho, s)$ を展開し，３次以上の項を無視すると，

$$p' = \left(\frac{\partial p}{\partial \rho} \right)_{s,0} \rho' + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial \rho^2} \right)_{s,0} \rho'^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho,0} s' \tag{A.9}$$

を得る．この式に対して等エントロピー変化の関係式 $p/p_0 = (\rho/\rho_0)^\gamma$ および局所音速の定義式 $c^2 = (\partial p/\partial \rho)_s$ を用いると次のように書くことができる．

$$p' = c_0^2 \rho' + \frac{\gamma - 1}{2} \frac{c_0^2}{\rho_0} \rho'^2 + \left(\frac{\partial p}{\partial s} \right)_{\rho,0} s' \tag{A.10}$$

さらに，理想気体の状態方程式

$$p = \rho R T = (c_p - c_v) T \qquad (c_v \text{ は定積比熱}) \tag{A.11}$$

および，熱力学の第 1 法則

$$T ds = c_v dT - \frac{p}{\rho^2} d\rho \tag{A.12}$$

を用いると式 (A.10) の右辺第 3 項の係数は

$$\left(\frac{\partial p}{\partial s}\right)_{\rho,0} = (\gamma - 1)\rho_0 T_0 \tag{A.13}$$

と書ける．

式 (A.10)，(A.13) および (A.8) より運動方程式 (A.3) は

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{2}{\gamma - 1}\frac{\partial c^2}{\partial r} = \delta\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{m}{r}u\right) \tag{A.14}$$

と表すことができる．ただし，δ は音の散逸率といわれるもので，

$$\delta = \nu\left\{\frac{4}{3} + \frac{\zeta}{\mu} + \frac{\gamma - 1}{Pr}\right\} \tag{A.15}$$

と定義される [41]．ここで，$\nu = \mu/\rho_0$ は動粘性係数，$Pr = \mu c_p/\kappa$ はプラントル数である．

次に，

$$u = \Phi_r \tag{A.16}$$

によって定義される速度ポテンシャル Φ を導入する．ここで，Φ_r は速度ポテンシャル Φ の r による微分を表す．以下では，表式の簡単のため時刻 t に関する微分についても同様の表記をする．式 (A.16) を (A.14) に代入し，r について積分を実行すると

$$\Phi_t + \frac{1}{2}\Phi_r^2 + \frac{1}{\gamma - 1}c^2 = \delta\left(\Phi_{rr} + \frac{m}{r}\Phi_r\right) \tag{A.17}$$

となる．ただし，r について積分することによって現れる時間 t に関する任意関数は Φ に含めている．さらに，式 (A.17) を t に関して微分すると

$$\Phi_{tt} + \frac{1}{2}(\Phi_r^2)_t = -c^2\frac{\rho_t}{\rho} + \delta\left(\Phi_{rr} + \frac{m}{r}\Phi_r\right)_t \tag{A.18}$$

を得る．質量保存についての方程式 (A.2) も同様に速度ポテンシャルを用いて書き直すと

$$\frac{\rho_t}{\rho} = -\frac{\rho_r}{\rho}\Phi_r - \Phi_r r - \frac{m}{r}\Phi_r \tag{A.19}$$

となる．これを式 (A.18) の右辺第 1 項に代入し，

$$c^2\frac{\rho_r}{\rho} = \frac{(c^2)_r}{\gamma - 1} = -\Phi_{rt} - \frac{1}{2}(\Phi_r^2)_t \tag{A.20}$$

という関係を考慮すれば

$$(c^2-\Phi_r^2)\Phi_{rr}+\frac{m}{r}c^2\Phi_r=\Phi_{tt}+(\Phi_r^2)_t-\delta\left(\Phi_{rr}+\frac{m}{r}\Phi_r\right)_t \tag{A.21}$$

となる．式 (A.20) は理想気体に対する圧力方程式

$$c^2=c_0^2-(\gamma-1)\left[\Phi_t+\frac{1}{2}\Phi_r^2\right] \tag{A.22}$$

を時間 t に関して微分することにより得られる．

式 (A.21),(A.22) より，速度ポテンシャル Φ に関する単一の支配方程式が以下のように求まる．

$$\begin{aligned}c_0^2\Delta\Phi-\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=&\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{\partial\Phi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2\\&+(\gamma-1)\Delta\Phi\left\{\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right)^2\right\}-\delta\frac{\partial}{\partial t}\Delta\Phi\end{aligned} \tag{A.23}$$

ただし，

$$\Delta=\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{m}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r} \tag{A.24}$$

である．

付 録B　線形解に関する考察

定常解

線形の波動方程式

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{n}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0 \tag{B.1}$$

の解は変数分離によって容易に求めることができる．ただし，$n=1$ の場合は円筒波，$n=2$ の場合は球面波のふるまいを記述する．また，本付録では扱わないが，$n=0$ の場合は平面波を記述する方程式となる．ここでは，次のような境界条件を考える．

$$r=\alpha r_s \text{ において} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial r}=0 \tag{B.2}$$

$$r=r_s \text{ において} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial r}=M\sin t \tag{B.3}$$

境界条件 (B.2)，(B.3) を満たす波動方程式 (B.1) の解は，円筒波，球面波それぞれについて以下のような定在波解として求まる．

円筒波:

$$\Phi(r,t)=-M\sin t\frac{J_0(r)N_1(\alpha r_s)-J_1(\alpha r_s)N_0(r)}{J_1(r_s)N_1(\alpha r_s)-J_1(\alpha r_s)N_1(r_s)} \tag{B.4}$$

球面波:

$$\Phi(r,t)=M\sin t\frac{S(r)C'(\alpha r_s)-S'(\alpha r_s)C(r)}{S'(r_s)C'(\alpha r_s)-S'(\alpha r_s)C'(r_s)} \tag{B.5}$$

ここで，$J_n,\ N_n\ (n=0,1)$ や $S,\ C$ といった関数は第 3 章において定義されたものと同一である．内部円柱あるいは内部球のない単純な円筒 (球殻) 内に励起される定在波解は，$\alpha\to 0$ のとき，$J_1(\alpha r_s)\to 0$，$N_1(\alpha r_s)\to-\infty$，$S'(\alpha r_s)\to 0$，$C'(\alpha r_s)\to-\infty$ であるという関係に注意して式 (B.4)，(B.5) において $\alpha\to 0$ の極限をとることによって求められる．

円筒波:

$$\Phi(r,t) = -M\sin t\frac{J_0(r)}{J_1(r_s)} \tag{B.6}$$

球面波:

$$\Phi(r,t) = M\sin t\frac{S(r)}{S'(r_s)} \tag{B.7}$$

線形解 (B.4) および (B.5)(あるいは (B.6)，(B.7)) において右辺の分母がゼロに近づいていくとき，定在波の振幅は極めて大きくなる．さらに，

$$J_1(r_s)N_1(\alpha r_s) - J_1(\alpha r_s)N_1(r_s) = 0 \tag{B.8}$$

$$S'(r_s)C'(\alpha r_s) - S'(\alpha r_s)C'(r_s) = 0 \tag{B.9}$$

となるとき線形解 (B.4)，(B.5) は発散し，その意味を失う．外部円筒 (球殻) の平均半径 r_s が式 (B.8)，(B.9) の関係を満たすとき，そのときの r_s を’線形解析により求められた共鳴半径’(あるいは単に’共鳴半径’) とよび，r_0 と表す．第 3 章の図 3.1 に示された曲線群は，線形解析によって求められた共鳴条件 (B.8)，(B.9) を満たす α と r_0 の集合をあらわしている．

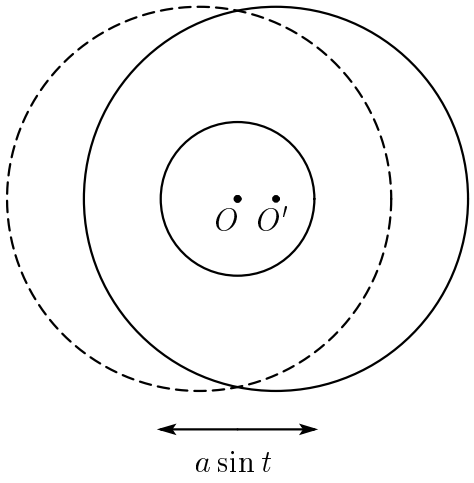

図 B.1: 振動する二重円筒の概念図.

次に，外部円筒の半径は変化せずにその中心軸がある平衡点を中心にして正弦的に振動する場合について考える (図 B.1 参照)．このとき，二重円筒内部の気体のふるまいは次の空間

２次元の波動方程式によって記述される．

$$\frac{\partial^2\Phi}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial\theta^2}-\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2}=0 \tag{B.10}$$

また，境界条件は，

$$\left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=\alpha r_s}=0,\qquad \left.\frac{\partial\Phi}{\partial r}\right|_{r=r_s}=M\sin t\cos\theta \tag{B.11}$$

と表される．さきほどと同様，変数分離法によって境界条件 (B.11) を満たす波動方程式 (B.10) の解が

$$\Phi=M\sin t\cos\theta\frac{J_1(r)N_1'(\alpha r_s)-J_1'(\alpha r_s)N_1(r)}{J_1'(r_s)N_1'(\alpha r_s)-J_1'(\alpha r_s)N_1'(r_s)} \tag{B.12}$$

と求まる．式 (B.12) の右辺の分母は第５章の偏心円筒問題に対する線形解における $Z_2(\alpha,r_s)$ に他ならない．

非定常解

これまでは，定在波の振幅が時間的に変化しない定常振動状態における波動方程式の解について述べてきたが，定常振動を仮定しなければ，円筒 (球殻) の平均半径が共鳴半径 r_0 と一致した場合であっても境界条件 (B.2)，(B.3) を満たす解を求めることができる．

いま，

$$\Omega=\frac{r_b\omega}{c_0}=r_s \tag{B.13}$$

によって定義される無次元化された角振動数 Ω を導入し，これによって以下のように各変数を定義しなおす．

$$t=\Omega\tilde{t},\quad r=\Omega\tilde{r},\quad \Phi=\Omega\tilde{\Phi} \tag{B.14}$$

定義しなおされた無次元変数 (B.14) によって表される座標系では，外部円筒 (球殻) の平均半径は１に，内部円柱 (球) の半径は α に規格化される．これに対し，(3.1) によって無次元化された系では，音源の振動数を１に規格化し振動数の変化を円筒 (球殻) の半径に対応させることによって，異なる振動数の定在波，共鳴波を表現していた．しかし，このような方法では，同一の半径をもつ二重円筒 (つまり，境界の位置が同じ円筒) 内に複数の振動数をもった

波が共存するような状況を記述することができず[1]式 (B.17) で示されるような解を考えることができない．このような理由から，本付録では，(B.14) のような無次元変数を定義した．

このとき，境界条件は次のようになる．

$$r=\alpha \ \text{において} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial r}=0 \tag{B.15}$$

$$r=1 \ \text{において} \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial r}=M\sin t \tag{B.16}$$

また，式 (B.13) からわかるとおり，Ω と r_s は本質的に同じもの[2]なので，共鳴条件を満たすときの Ω を Ω_0 とすれば，$\Omega_0=r_0$ となる．

ここで，波動方程式の解として次のような解を考える．

$$\tilde{\Phi}(\tilde{r},\tilde{t})=\frac{M}{\Omega_0}\frac{E(\Omega,\Omega)\sin\Omega t-E(\Omega_0,\Omega_0)\sin\Omega_0 t}{D(\Omega)} \tag{B.17}$$

ただし，$D(\Omega)$ と $E(\Omega_1,\Omega_2)$ は，

円筒波について:

$$D(\Omega)=J_1(\Omega)N_1(\alpha\Omega)-J_1(\alpha\Omega)N_1(\Omega) \tag{B.18}$$

$$E(\Omega_1,\Omega_2)=-[J_0(\tilde{r}\Omega_1)N_1(\alpha\Omega_2)-J_1(\alpha\Omega_2)N_1(\tilde{r}\Omega_1)] \tag{B.19}$$

球面波について:

$$D(\Omega)=S'(\Omega)C'(\alpha\Omega)-S'(\alpha\Omega)C'(\Omega) \tag{B.20}$$

$$E(\Omega_1,\Omega_2)=S(\tilde{r}\Omega_1)C'(\alpha\Omega_2)-S'(\alpha\Omega_2)C(\tilde{r}\Omega_1) \tag{B.21}$$

と定義される．$\tilde{\Phi}$ が波動方程式 (B.1) と境界条件 (B.15) を満足することは，(B.17)–(B.21) を直接これらの式に代入することで容易に確かめることができる．解 (B.17) は，$D(\Omega_0)=0$ であることに注意すれば，次のような形に書き改めることができる．

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\tilde{r},\tilde{t})=&\frac{M}{\Omega_0}\left[E(\Omega,\Omega)\frac{\sin\Omega\tilde{t}-\sin\Omega_0\tilde{t}}{D(\Omega)-D(\Omega_0)}\right.\\&\left.+\sin\Omega_0\tilde{t}\frac{E(\Omega,\Omega)-E(\Omega_0,\Omega)}{D(\Omega)-D(\Omega_0)}+\sin\Omega_0\tilde{t}\frac{E(\Omega_0,\Omega)-E(\Omega_0,\Omega_0)}{D(\Omega)-D(\Omega_0)}\right]\end{aligned} \tag{B.22}$$

[1]ただし，非線形効果によって生じる高調波などは除く．

[2]式 (B.13) において r_b を固定して ω を変数と見た場合の表現が Ω であり，反対に r_b を変数とみた場合が r_s となる．

ここで右辺の各項は，$\Omega \to \Omega_0$ のとき，分母・分子ともにゼロとなり，不定型となる．そこで，ロピタルの定理を用いて (B.22) の各項の分母と分子をそれぞれ Ω に関する導関数でおきかえて $\Omega \to \Omega_0$ の極限をとれば，
円筒波について:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\tilde{r},\tilde{t}) = -\frac{M}{\Omega_0 Z(\alpha,\Omega_0)}\Big\{&\tilde{t}\cos\Omega\tilde{t}\big[J_0(\tilde{r}\Omega_0)N_1(\alpha\Omega_0) - J_1(\alpha\Omega_0)N_0(\tilde{r}\Omega_0)\big]\\ &- \tilde{r}\sin\Omega_0\tilde{t}\big[J_1(\tilde{r}\Omega_0)N_1(\alpha\Omega_0) - J_1(\alpha\Omega_0)N_1(\tilde{r}\Omega_0)\big]\\ &+ \alpha\sin\Omega_0\tilde{t}\big[J_0(\tilde{r}\Omega_0)N_1'(\alpha\Omega_0) - J_1'(\alpha\Omega_0)N_0(\tilde{r}\Omega_0)\big]\Big\}\end{aligned} \tag{B.23}$$

$$\begin{aligned}Z(\alpha,\Omega_0) =&J_1'(\Omega_0)N_1(\alpha\Omega_0) - J_1(\alpha\Omega_0)N_1'(\Omega_0)\\ &+ \alpha[J_1(\Omega_0)N_1'(\alpha\Omega_0) - J_1'(\alpha\Omega_0)N_1(\Omega_0)]\end{aligned} \tag{B.24}$$

球面波について:

$$\begin{aligned}\tilde{\Phi}(\tilde{r},\tilde{t}) = \frac{M}{\Omega_0 Z(\alpha,\Omega_0)}\Big\{&\tilde{t}\cos\Omega\tilde{t}\big[S(\tilde{r}\Omega_0)C'(\alpha\Omega_0) - S'(\alpha\Omega_0)C(\tilde{r}\Omega_0)\big]\\ &+ \tilde{r}\sin\Omega_0\tilde{t}\big[S'(\tilde{r}\Omega_0)C'(\alpha\Omega_0) - S'(\alpha\Omega_0)C'(\tilde{r}\Omega_0)\big]\\ &+ \alpha\sin\Omega_0\tilde{t}\big[S(\tilde{r}\Omega_0)C''(\alpha\Omega_0)S''(\alpha\Omega_0)C(\tilde{r}\Omega_0)\big]\Big\}\end{aligned} \tag{B.25}$$

$$\begin{aligned}Z(\alpha,\Omega_0) =&S''(\Omega_0)C'(\alpha\Omega_0) - S'(\alpha\Omega_0)C''(\Omega_0)\\ &+ \alpha[S'(\Omega_0)C''(\alpha\Omega_0) - S''(\alpha\Omega_0)C'(\Omega_0)]\end{aligned} \tag{B.26}$$

となる．解 (B.23)，(B.25) は，$\tilde{r} = 1$ における境界条件 (B.16) を満足する．

解 (B.23)，(B.25) の右辺には時刻 $\tilde{t}$ に比例する項が含まれている (右辺第１項目)．これは，時間に比例して共鳴波の振幅が成長することを示しており，音源 (外部円筒および外部球殻) が脈動を開始してからある程度の時間が経過すると，他の項に比較して振幅が時間 $\tilde{t}$ に比例する項の影響が卓越するものと考えられる[3]．このことは，第３章の弱非線形解析の結果や第４章で行われる強非線形問題に対する数値解析の結果ともよく対応している．ただし，脈動開始から十分な時間が経過するともはや振幅を無限小とみなすことはできず，線形近似は

[3] このような項は永年項と呼ばれる．

有効でなくなる (波動方程式 (B.1) が使えなくなる). 具体的に, $\tilde{t} = O(M^{-2/3})$ となるような時刻においては, 線形解の共鳴解 (B.23), (B.25) と非線形解のふるまいが大きく異なることが第 3 章および第 4 章の結果からみてとれる.

付 録C　弱非線形共鳴波における定常振動解とその性質

ここでは，第 3 章で導出された弱非線形共鳴波の振幅 a に関する複 3 次式 (3.86) の解を求め，その性質を調べることを目的とする．また，セパラトリクス上の振幅に関する 3 次方程式 (3.74) の解も全く同様の方法で求めることができる．なお，以下に現れる記号 A や C' などは本文中に現れる変数 (関数) とは無関係の係数であることを注意しておく．

C.1　Cardanoの解法による定常振動の振幅

定常振動解の振幅方程式

$$\sigma^2 a^6 + 2\sigma\Gamma\delta a^4 + \left(\Gamma^2\delta^2 + \frac{\eta^2}{4}\right) a^2 - \beta^2 = 0 \tag{C.1}$$

より，

$$f(x) = x^3 + A'x^2 + B'x + C' \tag{C.2}$$

とおき，$f(x) = 0$ の解を求めることを考える．ただし，

$$\begin{aligned} A' &= \frac{2\Gamma\delta}{\sigma}, \\ B' &= \frac{1}{\sigma^2}\left(\Gamma^2\delta^2 + \frac{\eta^2}{4}\right), \\ C' &= -\frac{\beta^2}{\sigma^2}, \\ x &= a^2 \end{aligned}$$

である．

いま，$x = X - \frac{1}{3}A'$ とおくと，

$$\begin{aligned} g(X) &= f(X - \frac{1}{3}A') \\ &= X^3 + \left(B' - \frac{A'^2}{3}\right)X + \frac{2A'^3}{27} - \frac{A'B'}{3} + C' \end{aligned} \tag{C.3}$$

となる．ここで，$A = B' - \dfrac{A'^2}{3}$，$B = \dfrac{2A'^3}{27} - \dfrac{A'B'}{3} + C'$，とおけば，

$$g(X) = X^3 + AX + B \tag{C.4}$$

となる．いま，$X = u + v$ の形の解を考えると，式 (C.4) は，

$$\begin{aligned} g(u+v) &= u^3 + 3uv(u+v) + v^3 + A(u+v) + B \\ &= u^3 + v^3 + B + (3uv + A)(u+v) = 0 \end{aligned} \tag{C.5}$$

ここで，

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -B \\ uv = -\dfrac{A}{3} \end{cases} \tag{C.6}$$

を考えると式 (C.6) は確かに式 (C.5) を満足する．

$$\begin{cases} u^3 + v^3 = -B \\ u^3 v^3 = -\dfrac{A^3}{27} \end{cases} \tag{C.7}$$

したがって式 (C.7) より，u^3, v^3 は二次方程式

$$T^2 + BT - \frac{A^3}{27} = 0 \tag{C.8}$$

の解である．

$$\begin{aligned} \therefore \quad u^3 &= -\frac{B}{2} + \sqrt{D(g)} \\ v^3 &= -\frac{B}{2} - \sqrt{D(g)} \end{aligned}$$

ここで，$D(g)$ は式 (C.8) の判別式であり，

$$D(g) = \frac{B^2}{4} + \frac{A^3}{27} \tag{C.9}$$

と定義される．

u^3, v^3 の根の 1 つを

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} + \sqrt{D}}$$
$$v_1 = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} - \sqrt{D}}$$

とおけば，

$$X_1 = u_1 + v_1$$
$$X_2 = \omega u_1 + \omega^2 v_1$$
$$X_3 = \omega^2 u_1 + \omega v_1$$

が得られる．ただし，$\omega = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$ である．

判別式 $D(g)$ が負のとき，3 次方程式 (C.4) の 3 つの解は全て実数解となる．一方，$D(g)$ が正の場合，実数解は X_1 のみとなる．

定常振動解の振幅方程式において $\delta \leq 0$ のとき，判別式 $D(g)$ は常に正であり，定常解の振幅はただひとつの実解をもつ．とくに $\delta = \eta = 0$ の場合，式 (C.1) は

$$x^3 = \frac{\beta^2}{\sigma^2} \tag{C.10}$$

となり，定常振動解の振幅

$$a = \sqrt{x} = \sqrt[3]{\frac{\beta}{\sigma}} \tag{C.11}$$

がただちに求まる．

C.2　定常振幅の解の性質

ここでは，$\eta = 0$ の場合の方程式 (C.2) の解 x のふるまいについて考察をすすめる．

前節の結果より，$a^2 = x = X - \dfrac{A'}{3}$ となる．ここで，

$$u_1 = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} + \sqrt{D}} \tag{C.12}$$

$$v_1 = \sqrt[3]{-\frac{B}{2} - \sqrt{D}} \tag{C.13}$$

$$B = -\frac{1}{\sigma^2}\left(\frac{2\Gamma^3\delta^3}{27\sigma} + \beta^2\right) \tag{C.14}$$

$$D = \frac{\beta^2}{\sigma^4}\left(\frac{\Gamma^3\delta^3}{27\sigma} + \frac{\beta^2}{4}\right) \tag{C.15}$$

$$A' = \frac{2\Gamma\delta}{\sigma} \tag{C.16}$$

である．また，図 3.2 より，$\sigma > 0,\ \beta < 0,\ \Gamma < 0$ である．

C.2.1　$D < 0$ の場合 (異なる３実解が存在)

u_1, v_1 は複素数となる．また，式 (C.15) より δ はつねに正であるので式 (C.16) と $\sigma > 0, \Gamma < 0$ より $A' < 0$ である．いま，$\sqrt{D} = \sqrt{|D|}i$ と置くと，

$$|u_1^3| = |v_1^3| = \sqrt{\left(-\frac{B}{2}\right)^2 + |D|} = \sqrt{\left(-\frac{B}{2}\right)^2 - D}$$

$$\left(-\frac{B}{2}\right)^2 - D = \frac{1}{4\sigma^4}\left(\frac{4\Gamma^6\delta^6}{27^2\sigma^2} + \frac{4\Gamma^3\delta^3\beta^2}{27\sigma} + \beta^4\right) - \frac{\beta^2}{\sigma^4}\left(\frac{\Gamma^3\delta^3}{27\sigma} + \frac{\beta^2}{4}\right) = \left(\frac{\Gamma\delta}{3\sigma}\right)^6$$

$$\therefore \quad |u_1| = |v_1| = \left|\frac{\Gamma\delta}{3\sigma}\right|$$

よって，

$$|u_1 + v_1| \le |u_1| + |v_1| = \left|\frac{2\Gamma\delta}{3\sigma}\right| = \left|\frac{A'}{3}\right|$$

より

$$x = X - \frac{A'}{3} = u_1 + v_1 - \frac{A'}{3} \ge 0 \tag{C.17}$$

となる．また，$X_2 = \omega u_1 + \omega^2 v_1,\ X_3 = \omega^2 u_1 + \omega v_1$ についても同様の議論がなりたつ．

C.2.2　$D \geq 0$ の場合 (ただひとつの実解が存在)

$D > 0$ のとき B はつねに負の値をとる．つまり，$-B/2$ はつねに正となる．また，

$$\left(-\frac{B}{2}\right)^2 - D = \left(\frac{\Gamma\delta}{3\sigma}\right)^6 \geq 0 \tag{C.18}$$

であるので，u_1, v_1 はともに正の値をとる．ゆえに相加相乗平均の関係より，

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &= \sqrt[3]{-\frac{B}{2} + \sqrt{D}} + \sqrt[3]{-\frac{B}{2} - \sqrt{D}} \geq 2\sqrt[6]{\left(-\frac{B}{2}\right)^2 - D} = 2\sqrt[6]{\left(\frac{\Gamma\delta}{3\sigma}\right)^6} \\ \therefore \quad u_1 + v_1 &\geq \frac{1}{3}\left|\frac{2\Gamma\delta}{\sigma}\right| = \left|\frac{A'}{3}\right| > 0 \end{aligned} \tag{C.19}$$

$\delta \geq 0$ のとき

$\sigma > 0, \Gamma < 0$ より A' はつねに負となる．ゆえに，

$$u_1 + v_1 > -\frac{A'}{3} > 0$$

であるから

$$x = X - \frac{A'}{3} = u_1 + v_1 - \frac{A'}{3} > -\frac{2}{3}A' > 0 \tag{C.20}$$

$\delta < 0$ のとき

A' はつねに正であるので，式 (C.19) より，

$$\begin{aligned} u_1 + v_1 &> \frac{A'}{3} \\ \therefore \quad x = X - \frac{A'}{3} &= u_1 + v_1 - \frac{A'}{3} > 0 \end{aligned} \tag{C.21}$$

式 (C.17),(C.20),(C.21) より，方程式 (C.2) は，判別式 D が正のときはひとつ，負のときには 3 つの異なる実数解をもち，その全てが正の値をとることが証明された．

付 録D　Chakravarthy–Osherの高次精度TVD風上差分スキーム

ここでは，本論文の第４章と第５章で行われた非線形共鳴音波の数値シミュレーションで用いられた数値計算スキームについての概要を述べる．まず，流体力学の基礎方程式系 (Euler 方程式系) に対する１次精度の風上差分スキームのひとつである Osher のスキームの構成について述べる．つづいて Osher のスキームを高次精度化した Chakravarthy–Osher のスキームについての解説がなされる．最後に，Osher のスキームと Chakravarthy–Osher のスキームの計算精度と解像度についての検証を行う．

D.1　Osherのスキーム

Osher のスキームは，Euler 方程式系に対して開発された近似 Riemann 解法の一つである [53, 65]．ここで，Riemann 問題とは任意の双曲型微分方程式に対して区分的に一定となる初期値が与えられた初期値問題である．いま，あるセル境界において左右の計算セル内の状態が異なっているとき，その状態量に応じて，衝撃波，膨張波，接触不連続面が伝播する．

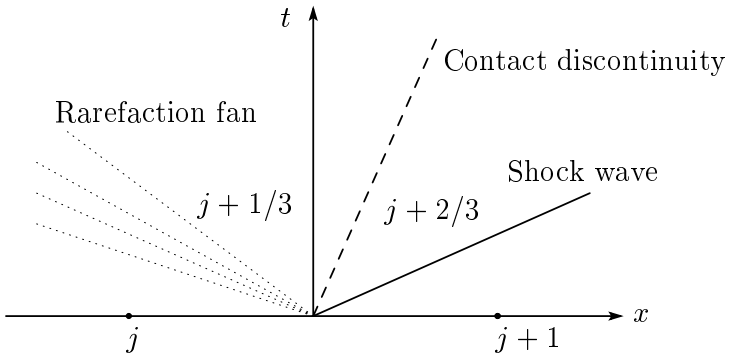

図 D.1: ３つの異なる特性速度によって伝播する波の模式図.

これらの波の族は，Euler 方程式の Jacobian 行列の 3 つの固有値 (特性速度:$u \pm c, u$) に対応する特性曲線に沿って伝播する [64]．Riemann 問題を解くとは，各セル境界において 3 つの固有値それぞれに対してその符号に応じて風上側を定義し，各セル間における流束を求めることにほかならない．その厳密解を求めるための数値解法が Godunov スキーム [66] であるが，Godunov スキームでは衝撃波が含まれるような場合，未知関数を陽的な形に表すことができないために繰り返し計算が必要となり，計算負荷が大きい．そこで，Riemann 問題の厳密解を求めるのではなく，近似的にこれを解く方法が数多く考案されている [67, 68]．

前述したように，Osher のスキームは Riemann 問題を近似的に解くスキームであるが，これは Godunov のスキームにおける衝撃波を膨張波に置き換えることによって構成されている．いま，ベクトル表記された空間 1 次元の Euler 方程式系[1]を

$$\frac{\partial q}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \tag{D.1}$$

$$q = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ E_t \end{bmatrix}, \quad f = \begin{bmatrix} \rho u \\ p + \rho u^2 \\ (E_t + p)u \end{bmatrix} \tag{D.2}$$

と表す．時間 t と空間 x のきざみ幅をそれぞれ Δt，Δx として式 (D.1) を差分表示すれば，

$$\frac{q_j^{n+1} - q_j^n}{\Delta t} + \frac{h(q_{j+1}^n, q_j^n) - h(q_j^n, q_{j-1}^n)}{\Delta x} = 0 \tag{D.3}$$

となる．ここで，上付の添字 n は時間ステップをあらわし，下付の添字 j は空間の格子点位置をあらわしている．式 (D.3) 中の $h(q_{j+1}^n, q_j^n)$ は数値流束とよばれるもので，Osher のスキームでは

$$h(q_{j+1}, q_j) = \frac{1}{2}[f(q_{j+1}) + f(q_j)] - \frac{1}{2}\left[\sum_{i=1}^{3} df_{j+1/2}^{i+} - \sum_{i=1}^{3} df_{j+1/2}^{i-}\right] \tag{D.4}$$

と与えられる．この式の右辺第 2 項目に含まれる $df_{j+1/2}^{i\pm}$ は，格子点 j と $j+1$ の間のセル境界における数値流束差分 (numerical flux difference) とよばれるもので，式 (D.1) における流束 f の微分を単純な中心差分によって評価する際には現れない量である．上付添字の番号 i $(i = 1, 2, 3)$ は 3 つの異なる特性速度で伝播する波の族を表しており，そのうしろの符号は

[1] ここでは，デカルト座標系における表式を用いる．本論文で扱われる円筒座標形では式 (D.1) の右辺に非保存量が現れる．また，一般の座標系に対しては本文第 4 章で述べられている一般座標変換を用いることで，計算空間における基礎方程式を式 (D.1) の形に表すことができる．

それぞれの波に対する方向 (風上・風下) を示している．一般に，双曲型方程式の数値解法に現れるこのような付加的な項は数値的な散逸の効果を担っており，計算を安定に実行するために極めて重要な役割を果たしている [56]．Osher のスキームにおける数値流束差分 df は，以下のように定義される．

$$\begin{aligned} df^{1+}_{j+1/2} &= \max[\mathrm{sgn}\{(u-c)_j\},0][f(q_{j+1/6})-f(q_j)] \\ &\quad + \max[\mathrm{sgn}\{(u-c)_{j+1/3}\},0][f(q_{j+1/3})-f(q_{j+1/6})] \end{aligned} \tag{D.5}$$

$$\begin{aligned} df^{1-}_{j+1/2} &= -\min[\mathrm{sgn}\{(u-c)_j\},0][f(q_{j+1/6})-f(q_j)] \\ &\quad - \min[\mathrm{sgn}\{(u-c)_{j+1/3}\},0][f(q_{j+1/3})-f(q_{j+1/6})] \end{aligned} \tag{D.6}$$

$$df^{2+}_{j+1/2} = \max[\mathrm{sgn}\{u_{j+1/3}\},0][f(q_{j+2/3})-f(q_{j+1/3})] \tag{D.7}$$

$$df^{2-}_{j+1/2} = -\min[\mathrm{sgn}\{u_{j+1/3}\},0][f(q_{j+2/3})-f(q_{j+1/3})] \tag{D.8}$$

$$\begin{aligned} df^{3+}_{j+1/2} &= \max[\mathrm{sgn}\{(u+c)_{j+2/3}\},0][f(q_{j+5/6})-f(q_{j+2/3})] \\ &\quad + \max[\mathrm{sgn}\{(u+c)_{j+1}\},0][f(q_{j+1})-f(q_{j+5/6})] \end{aligned} \tag{D.9}$$

$$\begin{aligned} df^{3-}_{j+1/2} &= -\min[\mathrm{sgn}\{(u+c)_{j+2/3}\},0][f(q_{j+5/6})-f(q_{j+2/3})] \\ &\quad - \max[\mathrm{sgn}\{(u+c)_{j+1}\},0][f(q_{j+1})-f(q_{j+5/6})] \end{aligned} \tag{D.10}$$

ここで，max(),min() はそれぞれ，それらの引数のなかで最大，最小の値を返す関数であり，sgn() はその引数の符号が正のとき 1，負のとき-1 となる関数である．また，$q_{j+1/3}, q_{j+1/6}$ などによって表される変数は，q_j, q_{j+1} から近似 Riemann 解法によって求まる量であり，計算セル内の位置とは無関係である．その具体的な表式は以下の関係式を用いて計算される [54].

$$\rho_{j+1/3} = \rho_j \left[\frac{(\gamma-1)(u_j-u_{j+1})/2 + c_j + c_{j+1}}{c_j\{1+(S_{j+1}/S_j)^{1/2\gamma}\}}\right]^{2/(\gamma-1)} \tag{D.11}$$

$$\rho_{j+2/3} = \rho_{j+1} \left[\frac{(\gamma-1)(u_j-u_{j+1})/2 + c_j + c_{j+1}}{c_j\{1+(S_j/S_{j+1})^{1/2\gamma}\}}\right]^{2/(\gamma-1)} \tag{D.12}$$

$$\text{ただし，}\ S_j = \frac{p_j}{\rho_j^{\gamma}}$$

$$p_{j+1/3} = p_{j+2/3} = \left(\frac{\rho_{j+1/3}}{\rho_j}\right)^{\gamma} p_j \tag{D.13}$$

$$u_{j+1/3} = u_{j+2/3} = u_j + \frac{2}{\gamma-1}\left(c_j - \sqrt{\gamma\frac{p_{j+1/3}}{\rho_{j+1/3}}}\right) \tag{D.14}$$

$$u_{j+1/6} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left[u_j + \frac{2}{\gamma-1}c_j\right] \tag{D.15}$$

$$u_{j+5/6} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1}\left[u_{j+1} - \frac{2}{\gamma-1}c_{j+1}\right] \tag{D.16}$$

$$\rho_{j+1/6} = \rho_j \left(\frac{u_{j+1/6}}{c_j}\right)^{2/(\gamma-1)} \tag{D.17}$$

$$\rho_{j+5/6} = \rho_{j+1} \left(\frac{-u_{j+5/6}}{c_{j+1}}\right)^{2/(\gamma-1)} \tag{D.18}$$

$$p_{j+1/6} = \left(\frac{\rho_{j+1/6}}{\rho_j}\right)^{\gamma} p_j \tag{D.19}$$

$$p_{j+5/6} = \left(\frac{\rho_{j+5/6}}{\rho_{j+1}}\right)^{\gamma} p_{j+1} \tag{D.20}$$

ただし，

$$E_{t\,j} = \frac{1}{2}\rho_j u_j^2 + \frac{p_j}{\gamma-1} \tag{D.21}$$

$$c_j = \sqrt{\gamma\frac{p_j}{\rho_j}} \tag{D.22}$$

である．

D.2　Chakravarthy–Osher のスキーム

Osher のスキームは空間 1 次精度であるため，このスキームを用いて精度良く計算を実行するためには空間のきざみ幅 Δx および時間のきざみ幅 Δt を極めて小さくとらなければならず，数値計算にかかるコストが大きくなってしまう．そこで，本研究では Osher のスキームを発展させた空間 3 次精度の Chakravarthy–Osher のスキームを採用する．

Chakravarthy–Osher のスキームは，高次精度 TVD スキームと呼ばれるものの一種である．ここで，TVD(total variation diminishing) スキームとは以下に示すような性質をもっている計算スキームの総称である．問題の簡単のため，ある未知関数 u についての 1 次元のスカラー方程式を考える．いま，離散化された u についての全変動 (TV:total variation) を

$$TV(u) \equiv \sum_j |u_{j+1} - u_j| \tag{D.23}$$

と定義する．このとき TVD 条件は以下のように表される．

$$TV(u^{n+1}) \leq TV(u^n) \tag{D.24}$$

この条件下では u に新たに極値ができることは許されず，解 u の単調性が保たれることになる [69]．もちろん，1 次精度の風上差分法である Osher のスキームは TVD 条件を満足する．

続いて，Chakravarthy–Osher スキームの概要を以下に示す．Chakravarthy–Osher スキームの数値流束 $\hat{f}_{j+1/2}$ は，Osher のスキームによって求められた数値流束 $h(q_{j+1}, q_j)$ とこれを高次精度化するための補正項からなる．

$$\begin{aligned}\hat{f}_{j+1/2} = h(q_{j+1}, q_j) &\frac{1-\phi}{4}\sum_{i=1}^{3}\tilde{d}f^{i-}_{j+3/2} - \frac{1+\phi}{4}\sum_{i=1}^{3}\tilde{\tilde{d}}f^{i-}_{j+1/2} \\ &\frac{1+\phi}{4}\sum_{i=1}^{3}\tilde{d}f^{i+}_{j+1/2} - \frac{1-\phi}{4}\sum_{i=1}^{3}\tilde{\tilde{d}}f^{i+}_{j-1/2}\end{aligned} \tag{D.25}$$

ここで $\tilde{d}f^{i+}_{j+1/2}$，$\tilde{d}f^{i-}_{j+1/2}$ 等によって表される補正項は，j 番目と $j+1$ 番目のセルの間のセル境界において 3 つの異なる特性曲線に沿って伝播する波をそれぞれ正の方向，負の方向から通過する際の波の前後における流束の差を表す．なお，式中に現れるインデックス “i” は，ベクトル表記された方程式 (D.1)，(D.2) の各成分に対応している．式 (D.25) の右辺第 2 項以降は制限された数値流束差分とよばれる．これらの値は以下の式によって計算される．

$$\tilde{d}f^{i-}_{j+3/2} = \mathrm{minmod}[df^{i-}_{j+3/2}, b\,df^{i-}_{j+1/2}] \tag{D.26}$$

$$\tilde{\tilde{d}}f^{i-}_{j+1/2} = \mathrm{minmod}[df^{i-}_{j+1/2}, b\,df^{i-}_{j+3/2}] \tag{D.27}$$

$$\tilde{d}f^{i+}_{j+1/2} = \mathrm{minmod}[df^{i+}_{j+1/2}, b\,df^{i-}_{j-1/2}] \tag{D.28}$$

$$\tilde{\tilde{d}}f^{i+}_{j-1/2} = \mathrm{minmod}[df^{i+}_{j-1/2}, b\,df^{i-}_{j+1/2}] \tag{D.29}$$

ただし，“minmod[ ]” は

$$\mathrm{minmod}[x, y] = \mathrm{sgn}(x)\cdot\max[0, \min\{|x|, y\,\mathrm{sgn}(x)\}] \tag{D.30}$$

と定義される流束制限関数 (minmod limiter) [56] である．

また，式 (D.26)–(D.29) に現れるパラメータ b は圧縮 (compression) パラメータとよばれ，その値がとり得る範囲は

$$1 < b \leq \frac{3-\phi}{1-\phi} \tag{D.31}$$

によって定められる．b は数値粘性の効果の大きさを表しており，b が大きいほど数値的な散逸による誤差が小さくなる．

なお，このスキームによる打ち切り誤差 TE は，

$$TE = -\frac{\phi - \frac{1}{3}}{4}(\Delta x)^2 \frac{\partial^3 f}{\partial x^3} \tag{D.32}$$

と表される [54]．したがって，式 (D.25) にあらわれるパラメータ ϕ を 1/3 としたときに打ち切り誤差が最小 (Δx に関する 2 次の項がゼロ) となることがわかる．このとき b のとり得る範囲は，

$$1 < b \leq 4 \tag{D.33}$$

となる．既に述べたように，パラメータ b の値が大きいほど数値粘性の影響を小さくすることができるが，本研究において $b = 4$ とすると基礎方程式系 (4.4)–(4.6) の右辺に含まれる非保存の項の影響により計算が不安定になってしまうことがわかった．そのため，本研究では数値計算を実行するにあたり，$b = 1.01 \sim 1.1$ 程度の値を採用した．

D.3　Chakravarthy–Osher スキームによる衝撃波捕獲

ここでは，Chakravarthy–Osher のスキームによる衝撃波捕獲の精度を検証するために，空間 1 次精度の Osher のスキームによる計算との比較を行う．計算はそれぞれのスキームに対して空間分割数 $n = 1000$ として実行した．

図 D.2 は，平行な無限平板間に励起された平面共鳴波が衝撃波へと発展した際の波形である．図 D.2(a) は音源の Mach 数 M が 1×10^{-2} の場合における波形を示している．Chakravarthy–Osher のスキームにより得られた波形 (実線) と Osher のスキームによる波形 (破線) はともに良く一致しており，両者とも衝撃波面が一つの不連続面として捕えられていることがよくわかる．一方，図 D.2(b) は音源の Mach 数が $M = 1 \times 10^{-4}$ の場合の共鳴波の波形を示した図であるが，この場合には Chakravarthy–Osher のスキームによる結果は比較的鮮明に衝撃波面を捕えることができているが，Osher のスキームによる波形は衝撃波が有限の厚さを持った領域として表されてしまっている．これは，数値粘性による散逸効果が衝撃波を含む共鳴波の振

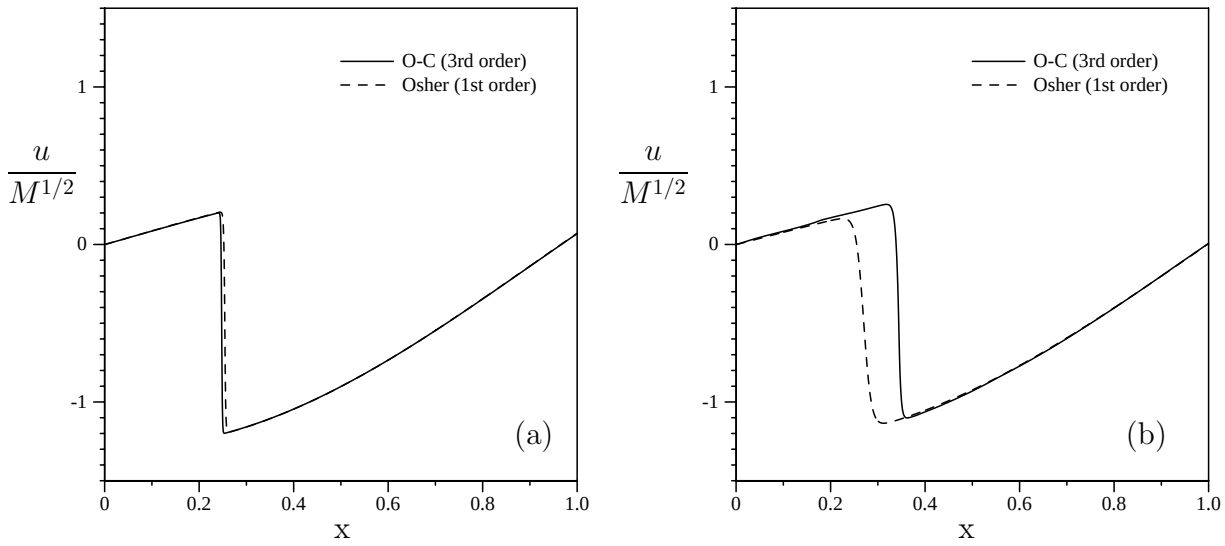

図 D.2: Osher のスキーム (破線) と Chakravarthy–Osher のスキーム (実線) による衝撃波の解像度の違い．(a): $M = 1 \times 10^{-2}$，(b): $M = 1 \times 10^{-4}$.

幅に対して無視できない大きさを持っていることを示す[2]．これに対し，Chakravarthy–Osher のスキームでは流束制限関数が有効に働いているため衝撃波面をほぼ不連続な面として捕えている．なお，図から衝撃波面近傍を除いた領域では両者による結果はともによく一致していることがわかる．

以上のことから，音源の振幅が小さい場合における衝撃波の捕獲に対して，Chakravarthy–Osher のスキームが有効であることが確かめられた．また，音源の振幅が大きく強い衝撃波が形成される場合や逆に衝撃波が形成されないようなケースでは，格子点数が十分に確保できるならば Osher のスキームでも計算精度の低下は比較的小さいと考えられる．

[2]図 D.2 の縦軸は音源の Mach 数 M の平方根によって正規化されている [40]．したがって，図 D.2(b) の実際の振幅は (a) のおよそ 1/10 となる．