HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	数学教育の試み ： 文系の一般教育・基礎教育として
Author(s)	岡部, 恒治
Citation	高等教育ジャーナル, 2, 235-242
Issue Date	1997
DOI	https://doi.org/10.14943/J.HighEdu.2.235
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/29862
Type	departmental bulletin paper
File Information	2_P235-242.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

数学教育の試み

―文系の一般教育・基礎教育として―

岡 部　恒 治

埼玉大学経済学部

Some Attempt to Activate Teaching of Mathematics as Minor Subject

Tsuneharu Okabe

Faculty of Economics, Saitama University

Abstract—In recent years, the detachment of students of liberal arts and social studies from mathematics and the increasing difficulty in their teaching have been pointed out and discussed outside as well as inside the world of mathematical education. This might be partly due to the minimization of the subjects for entrance examinations, students' tendency to economize labor, etc. We, ourselves, however, must confront the criticism that math is tough and uninteresting. This paper deals with an attempt made by the author in mathematics lectures, one for economics mathematics and another for general education, to let students study mathematics with less stress and even pleasure. My attempt, specifically speaking, making of mathematical comic strips, has two main features: focus on mathematical images and more active participation in class. We attempted this method in senior high schools as well and obtained the desired result.

0. はじめに

筆者は埼玉大学で経済経営数学を担当している。また，非常勤講師として，数年前まで中央大学の商学部で教えていた。また，現在も結構有名なＳ大学経済学部で必修科目の数学を教えている。経済系以外では，一般教育の数学を続けているし，教養学部（これは文学部に近い）で数学イメージ論を担当し，看護系の短大の非常勤講師も続けている。2 年前までは理学部の学生の授業も担当していた。教養科目，あるいは基礎科目としての数学については，かなりの多くのバリエーションを経験してきた。これらのうち，理学部の学生向きのもの以外はほとんど文系向きの授業と見なして良いのではないかと思われる（看護系は理系に分類するところもあるが，数学への対応は文系学生そのものである）。今回は，それらのうち，「経済経営数学」と看護系の数学と数学イメージ論についての試みについて述べたい。

1. 経済経営数学の悩み

経済学部の学生の数学力は以前にも指摘した（西村・岡部 1993）。基本的には文系ということで，想像がつくであろう（北大はまだマシなほうに違いない）。特に，私立のＳ大学では，「私立文系」の学生に，数学が必修となっている（学生は「サギだ」と嘆いている）。数学担当教官に要求されて

いるのは，専門のミクロ経済学などの教科書を読めるだけの数学的素養である。でも，その教科書を開けば，そこに書いてある数式は理系と呼ばれている生物系の教科書など遠く及ばない。以前，数学教育関係の集まりで，ある経済の参考書の一部を配布して，「これは何の参考書からコピーしたものですか」とたずねたことがある。多くの参加者は「工学系の参考書だろう」と答えたほどである。しかし，その参考書は，公務員試験の経済学の参考書だった。つまり，公務員試験程度の問題に，偏微分がドサドサ出てくるのである。

ここで，経済数学で教えるべき内容を列挙しておこう。

行列についていえば，ｎ×ｎの行列・行列式はいうに及ばず，行列の対角化，階数，正値性などおよそ理系の学生が基礎で学ぶべき行列のほとんどが使われている。

解析についていえば，極限と積分関係が少し弱いだけで，これも多変数関数を中心にして，かなりのものが使われている。最もよく使われるのが，偏微分とその合成関数微分であるが，テイラー展開，微分方程式，最近は特異点の理論も良く使われるようになった。

それを教える相手の数学の知識は，私立文系の必修授業では，中学校レベルという設定になる。数Ⅰを課している埼玉大学でも，数学の苦手の学生が多い。となると，このギャップは相当なものである。しかも，理学部の授業が解析だけで１年かけるのに，文系では半年で解析の偏微分までやって，後期は「行列と行列式」である(注1)。さらに，このギャップを埋める良い教科書があるかというと，お寒い状況である。筆者の共同研究者でもある京都大学の西村和雄氏の本（西村 1982）が唯一それに迫っているくらいのものであろう。基本的に経済学者が数学の基礎の本を書けば，一般の予想を大いに裏切って，経済学部の学生には難しすぎる。一言でいうと，きちんと書き過ぎる（文系の学生の程度からみて）ものが多い。これは当然といえば当然かもしれない。

このように，まるで３重苦の状態である。でも，それだからこそやりがいのあるところでもある。そこで，筆者の工夫を幾つか述べて，文系学生（これは数学が得意でない理系の学生も含む）の教育の議論の資料としたいと思う。

(1) 証明においても，厳密さよりも，イメージの重視を。
(2) そのためには，定義も式で言うだけでなく，具体例と意味を明確に。
(3) さらに，なぜその定義が必要なのか，流れを言う。
(4) その際もそうであるが，図を多用する。

例：ラグランジュの未定係数法

図１の同心円状の曲線は
f(x,y)＝ｋのｋを０～５
と動かしてできる等高線
点(x,y)が曲線　g(x,y)=0
にそって動くとき，f(x,y)
の最大値・最小値，極大値・
極小値はどこで取るだろ
うか？

また，そのときの共通
点は何か？

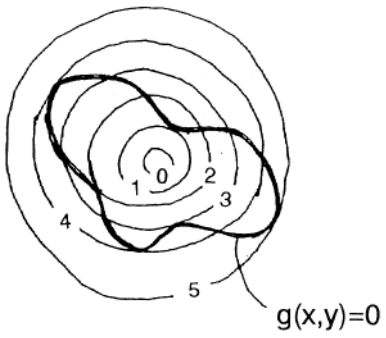


図１

(5) そして，仕上げは学生に発言させることである。私自身，強烈な睡魔に襲われたときに，一言発言することで，それを霧散させた経験がある。板書の式の変形の一部でも，（私の経験では，つまらないことでもよい）とにかく学生に質問する。そうすると，一気に緊張感が走る。その点では，図1の問題などは格好のものである。この図を黒板に書いて，学生に当てて，極大点と極小点に印を付けさせると面白い。

2. 数学とは何か，看護系の学生への授業

看護系の学生への授業では，「“数学とは何か”をパズルで考える」試みを行っている。これはあらかじめ50題ほどの問題を出しておき，毎週5問づつ学生に解いてもらう。その解答をもとに，もっと簡単に解けないか，と問いかける。場合によってはヒントを出して，解いてもらう。そして，複数の解き方が出た場合にはどちらがラクかを皆に議論してもらう。こういう形式の授業である。具体的な問題例は図の2～6にある（皆さんも考えてください）。解答はそれぞれ対応するマンガ（図7～12）を参考にしてください。

さて，こういうときには，必ず「パズルは数学とは違う」と主張するかたがいらっしゃる。その方には，次の問題と，それに対するコメントをプレゼントしたい。これは，私が毎年来ている北海道教育研究所の研修のときに得たものである。そこでの実践報告にあった，A中学での「パズルを工夫して解いて発表する」という形式の授業の中の一つの課題である。まず直感的に答えてほしい。

問題

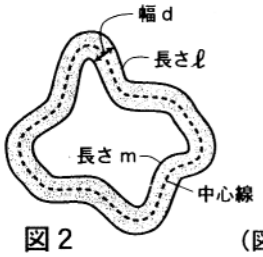
厚さ0.2 mmの新聞紙を50回折ったらその高さはどのくらいになるでしょう。1回折るたびに2倍の厚さになります。

(a) 太陽までの距離（1億5千万km）よりある。

(b) 富士山の高さ（3776 m）くらい。

問題1

山の手線のような、途中凸凹があっても、幅は一定であり、一周すると元に戻る線路を考える（この2本のレールの幅が2m）ならば、レールの長さの差は4πmとなることがわかっている。さて、幅が2m、内側のレールの長さが4kmとするとき、この2本のレールで囲まれる部分の面積はどれくらいか。



どんな形でも、幅が一定なら
$\ell - m = 2\pi d$
となっている。

図2　（図7のマンガ参照）

問題2

図の灰色の部分の面積はおよそいくらか。

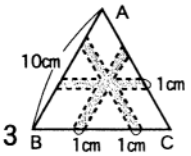


図3　（図8のマンガ参照）

問題3

図の灰色の部分の面積はいくらか。

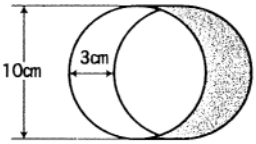


図4　（図8のマンガ参照）

問題4

図の灰色の部分の面積はおよそいくらか。

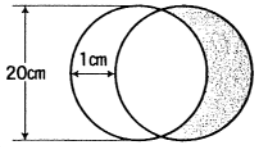


図5　（図9・10のマンガ参照）

問題5

図のトイレットペーパーの長さはいくらか。

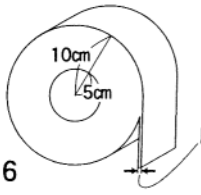


図6　（図11のマンガ参照）

(c) 東京タワーの高さ（333 m）くらい
(d) 学校の校舎の高さ（12 m）くらい。

どうでしょうか。「こんな問題は大きいに違いないが，いくらなんでも (c) くらいだろう」と思っていませんでしたか。わりと多くの人が, (a) が正解と聞いて驚く。その意味で意外性のある良質のパズルと言えよう。

これは，0.2×2^{50} (mm) を計算すればよい。この A 中学の 2 年生のある生徒は次のようなことに着目した。

「2^{50} を計算するために , まず途中までやってみた。$2^1 = 2$, $2^2 = 2 \times 2 = 4$, $2^3 = 2 \times 2 \times 2 = 8$, $2^4 = 16$, $2^5 = 32$, $2^6 = 64$, $2^7 = 128$, $2^8 = 256$, $2^9 = 512$, $2^{10} = 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 1024$,・・・。2^{10} まで計算すると，2^{10} がほとんど $1000 = 10^3$ で，それより少し多いことに気づいた。これを利用すると簡単だ。」

この生徒の発想で答えを完成させてみる。

解答

2^{50} は $2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10} \times 2^{10}$ で, 2^{10} が 10^3 より少し多いから， $10^3 \times 10^3 \times 10^3 \times 10^3 \times 10^3 = 10^{15}$ より少し多くなる。結局，折った後の新聞紙の厚さは 0.2×10^{15} mm より大きいことになる。単位の変換をすると（10 mm で 1 cm，100 cm で 1m，1000 m で 1 km），$2 \times 10^8 = 200{,}000{,}000$km。つまり 2 億 km で太陽までの距離をはるかに越えてしまう。よって正解は (a)（図 12 のマンガも参照）。

実は，この中学生の発想を純化したものが「対数」である。ここでは詳しく定義はしないが，対数はこの計算のように，小さい数字（0.2）とやたらと大きな数字（2×10^{15}）が同じ計算の中に同居するときに, 桁数で大体の値を示すものと考えられる。桁数は「おおよその値の権化」と言ってもよいと思う。この新聞紙を折る問題では，大ざっぱに考えることが必要なのである。

さて, さきほどのA中学の話に戻る。中学生が, 自分でも気づかずに, こんな素晴らしいアイデアの一端を示した。しかし，そのレポートには「パズル的な考え方が創造力を高めるか疑問である」との（恐らく参観者からの）コメントが載せられていた。それに対する反論の中には「直接数学に関係なくとも・・・」というのもあった。

パズルも使い方によっては，単なる遊びで終わってしまうのかな，というのが私の感想である。対数をこんなにも，面白く導いているのに！

これ以外でも，中学校レベルのパズルで，数学の本質を伝えられるものはたくさんあるというのが私の持論である。こう考えているのは私だけではあるまい(注 2)。

この授業で何人かの学生にもらった感想も記しておく（こういうものは，良いことしか書かないものだから，無条件に信じてはいない）。

「数学は公式を覚えて計算するだけのものと思っていた。考えるとこんな簡単な方法が出るとは，数学というものの考え方が変わった。」

3. さらに，それをイメージ化する試み ー数学イメージ論ー

教養学部の学生は, ある意味では経済系はもちろんのこと, 看護系の学生よりも数学に対するアレルギーが強い。さらに，悪いことに，パズルで気をひくなどといった小細工を見破ることだけは達者なのである。そこで，「パズルは解きたい人が解けばよい，それよりも，このパズルをうまく解いたその考え方を 4 コマのマンガで表現してみよう」と提案した。ただし，マンガの原案を考えるのであって，絵はヘタでもよいし，パズルは他人に解いてもらってもよいとした。

4 コマのマンガに練るには，数学的内容を自分のものにしなければならないはずで, どれだけ数学嫌いの学生が乗ってくるかが心配でもあった。

図 7

図 8

中心線に幅をつけた形の領域について，一般に次のことが成り立つ。「中心線に垂直に切ったときの長さが一定の値 d ならば，その面積は d × {中心線の長さ} となる」。

問 1 (図 2) の図形の中心線の長さは 4000 + 2 π だから，面積は 8000 + 4 π (m^2) 上のマンガはこの計算法をイメージ化した。

面積を求めるときには面積を変えないで，わかりやすい図形に変形する方法も有効である。このマンガで扱っているのは，いわゆる「カバリエリの原理」で文系の諸君には「寄せてみる」と説明する。問題 2 (図 3) と問題 3 (図 4) の灰色の部分はこの操作で，それぞれ等脚台形と長方形になる。

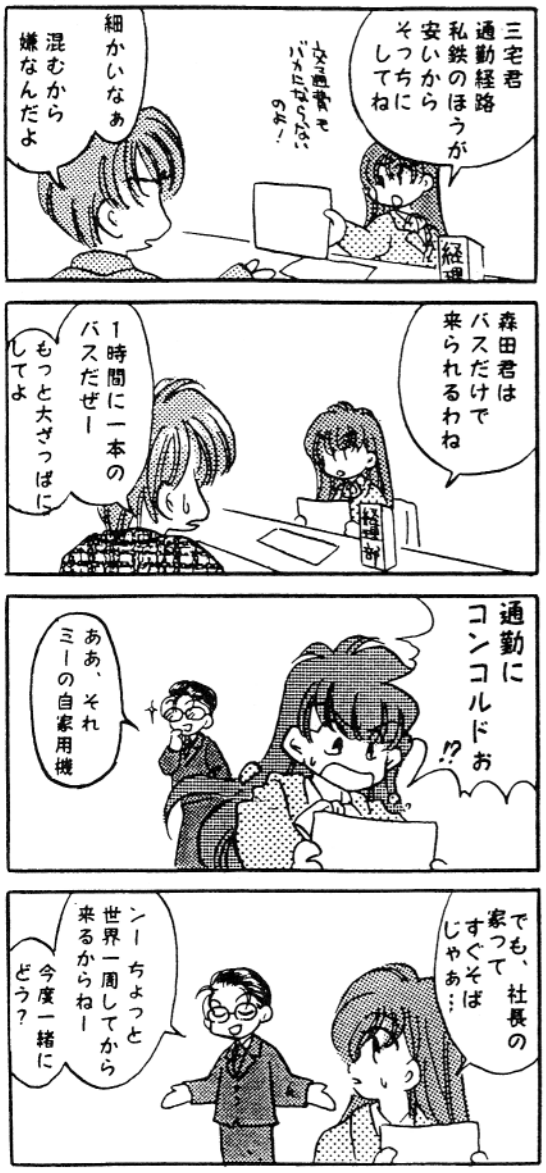


図 9

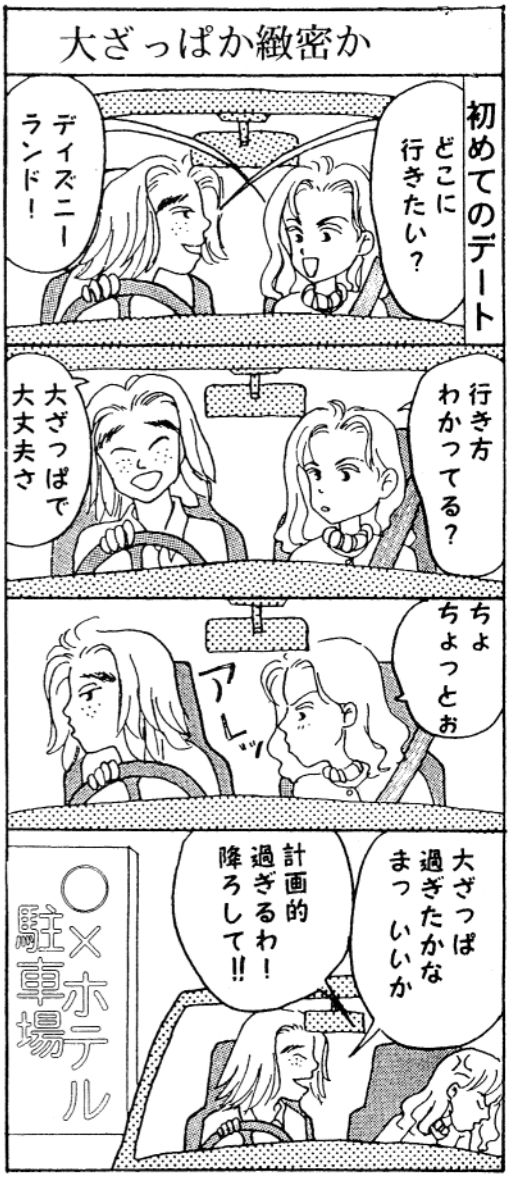


図 10

問題 4 (図 5) では，正確な値は求められない。そこで「おおよその値」という言葉が使われている。問題図がおおげさにかいてあってダマされたかもしれない。しかし，これは誤差を無視すれば問題 3 と同じ変形で解ける。この「小さなことは無視せよ」というイメージから上の 2 つのマンガが生まれた。

なお，問題 4 の実際の面積を S とおいたとき S は次の範囲内にあることがわかる。

$$\sqrt{399} < S < 20$$

なお，$\sqrt{399}$ は約19.97 でこの計算による誤差がかなり小さいことがわかるであろう。

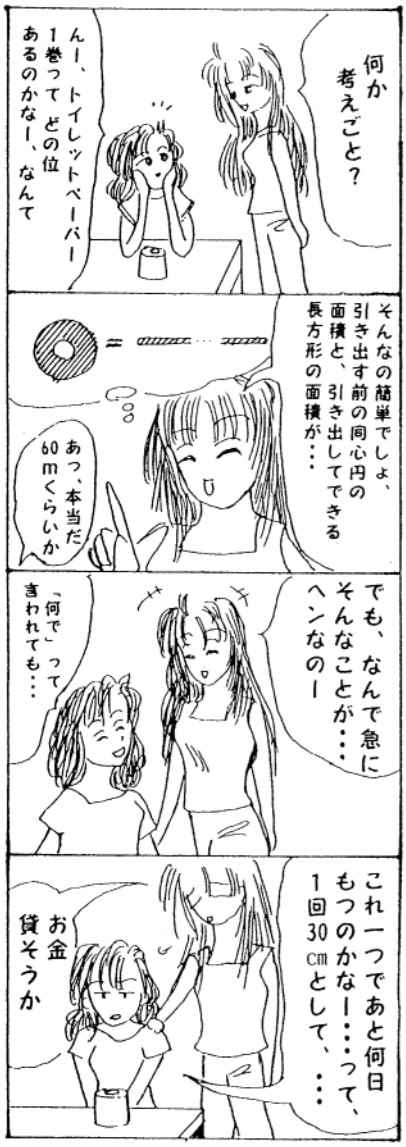


図 11

図 12

領域を細い長方形に細かく切って変形する方法によって，問題 5 (図 6) が解ける。この発想は積分の発想と考えることもできる。この計算との関係で生まれたのが上のマンガである。

紙を 50 回折ることの難しさは，直感的には分からない。しかし，折って積み重ねた高さを計算してみると，とんでもない値になる。これは意外性を持ち数学に興味をつなぐおもしろいパズルである。このイメージを 4 コマに表現したのが上のマンガである。

受講生がいなければどうしようかとも考えたくらいである。1 年目の前期は，やはり「数学」の文字におそれをなして，「文転」の学生を中心にこじんまりとしたクラス編成だったが，後期からだんだん増え始め，2 年目は大きい教室に移らざるをえないくらいになっている。これは，1 学年の学生数が百数十名の教養学部での，数学関係の授業では珍しいことといえよう(注 3)。

授業は，2. の看護系学生にしたのと同じパズルの問題で，同じ形式のものを 1 週目に行う。次の週にその解答の本質的な部分を 4 コマに書いてこさせ，それについて，氏名を伏せて，みんなでどう変えたら面白くなるかも議論してもらった。その次の週は，また，パズルを解き，・・・というように続けた。議論の中で，マンガにも改善が加わった場合もあったり，他人の作品の「本歌取り」が行われたりで，私自身も授業を楽しませてもらった。

マンガとしてのレベルも，最初のうちは，低かった学生が半年くらい経つと，素晴らしい水準になった者もいる（この論文にそれらの作品のうちの幾つかを紹介する）。これらのうちの幾つかは実際に実務教育出版と筑摩書房（岡部 1997a, b）の本の中で使われる予定である。

学生の次の感想文は，私の意図をそのまま文にしてくれたようなものである。

「マンガを考えることで，何度も問題を読み返し，その内容が頭の中に入ってしまった。これは力になると思う」

注

1. 理学部のように，「解析」と「行列と行列式」それぞれ 1 年ずつかけるというのはおそらく学生には歓迎されないだろう。つまり，「それだけ苦痛が長引く」というわけである。

2. 1995 年の数学会年会 50 回記念講演会で一緒に講演した森重文氏（フィールズ賞受賞者）が，やはりパズルをもとに数学の話をしてくれたので，大変嬉しかった。

3. そのうちに多くの数学嫌いの学生が交じっていたのは確かである。何人かの学生に「大学で数学関係の授業を取るとは思わなかった」と言われた。

参考文献

西村和雄 (1982),『経済数学早わかり』，日本評論社

西村和雄・岡部恒治 (1993),「経済数学の教育上の問題点」,『数学教育学会発表論文集』

岡部恒治（1997a),『アルキメデスの発想術』（仮題）, 実務教育出版

岡部恒治 (1997b),『マンガ数学感覚』（仮題）, 筑摩書房