HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Concave Programming の Gradient Method について(1)
Author(s)	戸島, 凞
Citation	北海道大學　經濟學研究, 18, 27-54
Issue Date	1961
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/31069
Type	departmental bulletin paper
File Information	18_P27-54.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

Concave Programming の Gradient Method について (1)*

戸島 濕

この小論では concave programming の algorithm として計算機の使用によつてその偉力を発揮すると考えられる gradient method に関する 2, 3 の基本的な問題をあつかう。§1 では問題の概観をかねて gradient method の outline をのべ, §2 では予備的考察として 2, 3 の命題と注意がのべられる。§3 では gradient method の微分方程式の解の存在定理があつかわれ, §4 ではその解の saddle point への収斂があつかわれる。§5 では定差方程式による近似化の問題にふれる。§6 はいわゆる historical note である。

§1 1次不等式であらわされた拘束条件のもとに, 1次式の最大値または最小値をもとめるという形式をもつ linear programming の解法として広く用いられている逐次計算法は simplex method であるが, この計算法の存在こそが linear programming の実用的性格のほとんどを背おつているといつても過言でないのである。ところが, 現実にわれわれが種々の状況において直面する問題は, それを linear programming の形式をふんで定式化することが問題の本質をそこなうほど drastic である場合がしばしばおこる。それゆえ, *linear* programming における *linear* という制約をゆるめ, さらに一

---

* この小論をかくにいたつた主な動機は Uzawa [15] の (i) 解の存在証明でおかれた仮定, (ii) 収斂の証明に充分なつとくの行かないものを感じたからである。この機会に, 筆者のこの方面への興味を刺戟した小樽商大の古瀬大六教授, それに日頃ご指導をいただき, この小論のなり立ちもそのご教示に負う所が大きい札幌医大の山元周行教授に深い感謝を捧げる。また, たえず討論の機会をあたえられた北大大学院の穂鷹良介氏にお礼申しあげる。しかし, いうまでもなく, 本稿のあやまりはすべて筆者に帰因する。(追記) なお, 本稿は gradient method に関するより大きい研究の1部である。続編「同題」(2) の内容は 1960 年度の計量経済学会 (於名古屋大学) で報告した。近刊予定。また,「同題」(3), (4) に関しては後註 21), 23) をみよ。

般化して考える必要が生じてくる。すぐあとで詳しく定義されるが，ある拘束条件のもとに1次函数とはかぎらない，あたえられた函数の最大値または最小値をもとめる問題を，とりあえず *non*-linear programming とよんでおけば，不幸なことには，この non-linear programming に対しては，simplex method はもはや有効な計算法ではなくなる。そこで，non-linear programming が linear programming と同様に実用的な性格をもつためには，解の存在の吟味などの non-linear programming の位相的構造の研究とならんで，その解法の研究が是非とも必要である。linear programming が最大問題と最小問題をもつことに対応して，non-linear programming においても最大問題と最小問題のいずれをも考えることができるが，一般性を失うことなく考察を最大問題にかぎつても差支えがない。以下においては，x は n 次元ベクター $(x_1,\cdots,x_n)$ をあらわし，$f(x)$, $g_j(x)$ $(j=1,\cdots,m)$ は非負の n 次元ベクター $x\geqq 0$ に対して定義された実数値函数とする。また，$g(x)=(g_1(x),\cdots,g_m(x))'$ である。ここで，プライムはベクターの転置をいみする。最大問題はつぎのように定式化される。

(A)　最大問題　$\max_{g(x)\geqq 0,\,x\geqq 0} f(x)$ をあたえる x をもとめよ。

(A) を non-linear programming の最大問題とよぶ。

(A) だけでは $f(x)$, $g_j(x)$ $(j=1,\cdots,m)$ などの函数が何ら特定化されていないから non-linear programming としてはきわめて一般的であるが linear programming との類似をたどつて研究をすすめていくには，この (A) をやや特殊化して内包をます方向にすすむことが必要である。ここで，$f(x)$, $g_j(x)$ $(j=1,\cdots,m)$ に関して仮定をもうける。

(B)　Concavity の仮定　$f(x)$, $g_j(x)$ $(j=1,\cdots,m)$ は *concave function*[1]

1) $f(x)$ の定義域に属する任意の $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ に対して
$f(\theta x^{(1)}+(1-\theta)x^{(2)})\geqq \theta f(x^{(1)})+(1-\theta)f(x^{(2)})$, $0\leqq\theta\leqq 1$
がなり立てば，$f(x)$ は concave function といわれる。不等号のみでなりたてば，$f(x)$ は *strictly* concave function といわれる。$-g(x)$ が concave function であれば，$g(x)$ は convex function といわれる。

である。

(B) は最大問題に対応した仮定であつて，最小問題の場合には $f(x)$, $g_j(x)$ $(j=1,\cdots,m)$ は *convex function* である，と仮定されることになる。仮定 (B) がおかれた non-linear programming を concave programming とよぶ。あきらかに，linear programming (の最大問題) は concave programming であるが，逆はつねになり立つとはいえないから，(A), (B) は linear programming よりも一般的である。とくに (B) のような仮定をおく理由は，(B) によつても linear programming がもつている最大値 (ないし最小値) の大域性という性質がそこなわれることがないからである。このことは行論の展開過程においてもあきらかになるであろう。われわれが本稿であつかうのは，(A), (B) によつて示される concave programming の解法，すなわち計算法であるが，ここで計算法というのは人力にたよるものよりも主として機械的・電気的なそれを念頭においている[2]。

さて，そこでのちに厳密に証明される concave programming の解法の直観的背景の outline をあらかじめのべておくことが便利である。そのためにひるがえつて以下のような問題を考えてみよう。$h(x)$ はすべての n 次元ベクター x に対して定義された実数値の concave function で $x=\bar{x}$ において (かく element ごとに) 最大値をとるものとする。そのとき $\bar{x}$ をいかにしてもとめることができるであろうか。まず，n 次元ベクターの全体を R'_n とすればこれは linear space をなす。$h(x)$ は R'_n 上で定義されていることになるが，このことは見方をかえれば R'_n のかく点に scalar が attach されているということにほかならない。すなわち，$h(x)$ によつて R'_n に scalar の場ができているとみることができるであろう。ここで，つぎのことを仮定する。

(C′)　**微分可能性**　　$h(x)$ は微分可能である。

この仮定 (C′) によつて偏微係数 $\dfrac{\partial h(x)}{\partial x_i}$ $(i=1,\cdots,n)$ が存在する。いま，ベク

2) 後述の historical note をみよ。

ターを $\frac{\partial h(x)}{\partial x}=\left(\frac{\partial h(x)}{\partial x_1}\cdots,\ \frac{\partial h(x)}{\partial x_n}\right)'$ によつて定義し，このようなベクターが R_n' のかく点に attach されていると考えれば，R_n' にベクターの場ができているとみることができる。力学における用語法をかりて $\frac{\partial h(x)}{\partial x}$ を x における scalar の場の *gradient* とよぶ。$x=\bar{x}$ における gradient は，$h(x)$ の最大値の必要条件より，n 次元のゼロベクターであるから，$h(x)$ が concave function という条件のもとでは，$h(x)$ が最大値をとる必要かつ十分条件は $x=\bar{x}$ における gradient がゼロベクターであることである。gradient がゼロベクターである点を critical point とよぶ。この同等性に着目するならば，$h(x)$ に最大値をあたえる $\bar{x}$ のもとめ方としてつぎのような計算法を考えることができるであろう。すなわち，$x=x_0$ において gradient の第 i 成分がゼロでなければ $x=x_0$ は $h(x)$ に最大値をあたえないので x_i を $\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}$ がゼロになる方向に，いいかえれば $h(x)$ が最大になる方向に動かせばよい。

$$\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}=\lim_{(\hat{x}_i-x_i)\to 0}\left\{h(x_1,\cdots,x_{i-1},\hat{x}_i,x_{i+1},\cdots,x_n)-h(x_1,\cdots,x_n)\right\}/(\hat{x}_i-x_i)$$

であるから，$\Delta x_i\equiv\hat{x}_i-x_i$ を十分小さくとつておくなら，$\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}\gtrless 0$ であるのに応じて，$\Delta x_i\gtrless 0$ とすれば $h(x)$ は増加することがわかる。この考え方をもつと連続的に適用してつぎのような連立微分方程式をたてる。

$$\frac{dx_i}{dt}=\frac{\partial h(x)}{\partial x_i}\qquad(i=1,\cdots,n).$$

このような連立微分方程式体系によつて critical point に逐次接近する方法を *gradient method* という。

さて，(**A**), (**B**) に gradient method を適用することを考えよう。まず，(**C**′) に対応して

(**C**)　**微分可能性**　$f(x)$, $g_j(x)$ $(j=1,\cdots,m)$ は微分可能である。

という仮定をおくことが必要である。(**A**), (**B**), (**C**) は拘束条件つき最大問題であるから，ここでの第1の問題として，(1) (**A**), (**B**), (**C**) をそれと同等な拘束条件なしの critical point をもとめる問題に帰着させることがなされなけ

れば gradient method の適用ははじめから不可能である。しかし，この問題は後述の historical note にみられるようにすでに一応の解決をみている[3]。(A), (B), (C) に gradient method を適用するにさいしてこの点については問題がないのである。つぎに第2の問題として，(2) gradient method によつて果して (A), (B), (C) をとくことができるか，いなか，すなわち gradient method の微分方程式の解が critical point に向つて *converge* するか，いなかが数学的に厳密に証明されなければならない。gradient method の微分方程式は直観的考察によつてえられたものであるから，それが一般的に converge するものか，どうかは証明を要することがらである。第3の問題は，(3) (A) における $x \geqq 0$ という拘束条件 (ないし定義域) がもたらす困難に関するもので，具体的には解の存在問題である。つぎに，(4) gradient method が実用的な algorithm であるための具体的方法がとわれなければならない。これは微分方程式をときうる計算機の設計・製作という工学上の問題と微分方程式の定差方程式による近似化という数値計算上の問題をともにふくんでいる。これは実際的場面における計算担当者の立場からは非常に重要な問題であり，これが最終的に解決されたときに concave programming は linear programming がもつているのと同じ程度の実用性を有することになるであろう。最後に，(5) gradient method と経済理論，ことに経済均衡の動学的安定理論との関連はどうかという問題があるが（これは計算の問題よりも経済的解釈の問題に属する），興味ある結果がえられると予想される[4]。本稿では (2), (3), (4) の3つの問題をとりあつかう。

§2　$\varphi(x, u)$ は非負の n 次元ベクター $x=(x_1,\cdots,x_n)' \geqq 0$ および非負の m 次元ベクター $u=(u_1,\cdots,u_m)' \geqq 0$ に対して定義せられた実数値函数とする。すでにふれたように，このようなベクター (x, u) の全体は $n+m$ 次元の linear

3) Kuhn-Tucker の定理がそれである。Kuhn-Tucker [9] をみよ。

4) その1，2の業績については，後述の historical note をみよ。なお，本稿脱稿後に Arrow-Hurwicz [20] を読むことができた。(5) の問題の文献に追加されるべきものである。

space の非負象限をなすが，ここで，のちの便宜を考えて，この linear space の非負象限に Euclidean distance が定義されているものとしよう。$\varphi(x, u)$ は非負の saddle point $(\bar{x}, \bar{u}) \geqq 0$ をもつと仮定する。すなわち

$$\varphi(x, \bar{u}) \leqq \varphi(\bar{x}, \bar{u}) \leqq \varphi(\bar{x}, u) \text{ for all } x \geqq 0,\ u \geqq 0$$

となる $(\bar{x}, \bar{u}) \geqq 0$ が存在するものとする。さらに，$\varphi(x, u)$ は（あたえられた u について）x に関して strictly concave，（あたえられた x について）u に関して convex であり，かつ $\varphi(x, u)$ は連続2回微分可能であると仮定する。このとき，すべての $x \geqq 0$，$u \geqq 0$ に対してつぎの不等式が成立することは concave-convex function の定義と極限算法によつて容易に証明される[5]。

(1)　$\varphi(x, u) - \varphi(\bar{x}, u) < \bar{\varphi}'_x \cdot (x - \bar{x}) \qquad (x \neq \bar{x})$,

(2)　$\varphi(x, u) - \varphi(x, \bar{u}) \geqq \bar{\varphi}'_u \cdot (u - \bar{u})$

ただし，ここで

$$\varphi_x = \left(\frac{\partial \varphi(x, u)}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial \varphi(x, u)}{\partial x_n} \right)', \quad \varphi_u = \left(\frac{\partial \varphi(x, u)}{\partial u_1}, \cdots, \frac{\partial \varphi(x, u)}{\partial u_m} \right)'$$

であり，$\bar{\varphi}_x$, $\bar{\varphi}_u$ は φ_x, φ_u の $(\bar{x}, \bar{u})$ における評価を示す。ここでつぎの予備定理は基本的に重要である。

予備定理1（Kuhn-Tucker の予備定理）[6]。**$\varphi(x, u)$ が x に関して concave，u に関して convex で微分可能ならば，$(\bar{x}, \bar{u})$ が $\varphi(x, u)$ の非負の saddle point である必要かつ十分条件は**

$$\bar{\varphi}_x \leqq 0,\ \bar{\varphi}'_x \bar{x} = 0,\ \bar{x} \geqq 0,$$
$$\bar{\varphi}_u \geqq 0,\ \bar{\varphi}'_u \bar{u} = 0,\ \bar{u} \geqq 0$$

がなり立つことである。

---

5) $f(x)$ が concave function ならば，$0 < \theta \leqq 1$, $x^{(1)} \neq x^{(2)}$ に対して

$$\frac{f(x^{(2)} + \theta(x^{(1)} - x^{(2)})) - f(x^{(2)})}{\theta(x^{(1)} - x^{(2)})} (x^{(1)} - x^{(2)}) \geqq f(x^{(1)}) - f(x^{(2)})$$

がなり立つから，$f(x)$ が微分可能なら，$\theta \to 0$ とすればよい。

6) Kuhn-Tucker [9] をみよ。

われわれの問題は $\varphi(x, u)$ の非負の saddle point を gradient method によつてもとめることであるが，そのための微分方程式[7] のひとつとして以下のようなものを考えることができる。

$$(3)\qquad \begin{aligned} \dot{x}_i &= \delta_{x_i}\varphi_{x_i} \qquad (i=1,\cdots,n),\\ \dot{u}_j &= -\delta_{u_j}\varphi_{u_j} \qquad (j=1,\cdots,m) \end{aligned}$$

ここで

$$\delta_{x_i}=\begin{cases} 0 & \text{if } x_i=0 \text{ and } \varphi_{x_i}<0,\\ 1 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

$$\delta_{u_j}=\begin{cases} 0 & \text{if } u_j=0 \text{ and } \varphi_{u_j}>0,\\ 1 & \text{otherwise}\end{cases}$$

また，φ_{x_i}, φ_{u_j} はそれぞれ φ_x の第 i 成分，φ_u の第 j 成分であり，ドットは t に関して微分することを示す。

この微分方程式の解についてあらかじめつぎの点を注意しておくことが適切である。この微分方程式に解 $x(t)$, $u(t)$(ベクター)が存在するならば，たとえば，$\delta_{x_i}\varphi_{x_i}(x(t), u(t))$ は t の連続函数ではないから，$x_i(t_1)=0$ かつ $x_i(t)>0$ for $t_0\leqq t<t_1$ となる t_0, t_1 が存在して $\delta_{x_i}\varphi_{x_i}$ は t_1 で不連続になる可能性を排除することはできない。したがつて，$t=t_1$ において微分方程式の解の t に関する右側微係数と左側微係数が一致しない可能性がでてくる。いいかえれば，解は孤立点で微分不可能でありうる。そこで，このような解の微分不可能点における t の微係数は実は右側微係数をあらわすものと考えなければならない。このことはつぎの例であきらかである。

$$\dot{x}=\delta_x\varphi'(x),$$
$$x(0)>0,$$
$$\delta_x=\begin{cases} 0 & \text{if } x=0 \text{ and } \varphi'(x)=0,\\ 1 & \text{otherwise,}\end{cases}$$

7) 種々の型の微分方程式については古瀬 [19], Kose [8] をみよ。本稿の続編「同題」(2) では古瀬が suggest した他の微分方程式の解の saddle point への収斂が証明される。そこでは，(3) はもうすこし一般的な形で考えられている。

$$\varphi(x)=-x^2/2-Lx+Q \qquad 0<L<1,$$
$$\varphi'(x)=-(x+L),$$
$$\varphi''(x)=-1<0.$$

容易にみられるように $\varphi(x)$[8] は concave function である。この微分方程式の解は

$$x(t)=\exp(-t+c)-L \qquad 0\leqq t\leqq \bar{t},$$
$$x(t)=0 \qquad \bar{t}<t$$

である。ただし，$t=\bar{t}$ で $\exp(-t+c)-L=0$ となるものとする。$t=\bar{t}$ で解が微分不可能であることは直ちにわかる。一方，微分不可能点をふくまない解も，もちろん，存在しうる。つぎの例はそれを示す。

$$\dot{x}=\delta_x\varphi'(x),$$
$$x(0)=a^3 \qquad a>0,$$
$$\delta_x=\begin{cases}0 & \text{if } x=0 \text{ and } \varphi'(x)<0,\\ 1 & \text{otherwise,}\end{cases}$$
$$\varphi(x)=-9/5\,x^{5/3}+K \qquad K>0,$$
$$\varphi'(x)=-3\,x^{2/3},$$
$$\varphi''(x)=-2\,x^{-1/3}<0 \qquad (x\neq 0).$$

$\varphi(x)$ は定義域が $x\geqq 0$ で concave function である。この微分方程式の解は

$$x(t)=-(t-a)^3 \qquad 0\leqq t\leqq a,$$
$$x(t)=0 \qquad a<t$$

であたえられる。この解は微分不可能な点をふくまない。

なお，以上の例からも知られるように，δ_x という函数は一見したところ，あたかも，解が負になるのを防止する装置のようにみえるが，実はその真の働きは非負象限で，すべての $t\geqq 0$ に対して解の存在を確保するところにある。したがつて，$\varphi(x)$ の定義域に非負という制限が課されていなければ，δ_x のいかんにかかわらず，解は負になりうる[9]。

8) 定義域は $x\geqq 0$ である。

さて，微分方程式 (3) の解が任意の初期条件に対して $(x^*, u^*) \geqq 0$ に収敛するならば，(x^*, u^*) は saddle point である。実際，(x^*, u^*) においては $\dot{x}_i = \dot{u}_j = 0$ であるから

$$\delta_{x_i}\varphi^*_{x_i} = -\delta_{u_j}\varphi^*_{u_j} = 0 \qquad (i = 1, \cdots, n\,;\ j = 1, \cdots, m).$$

これから，$\varphi^*_{x_i} = 0$ または $\varphi^*_{x_i} < 0$ ($x^*_i = 0$ のとき)，$\varphi^*_{u_j} = 0$ または $\varphi^*_{u_j} > 0$ ($u^*_j = 0$ のとき) がいえる。ここで，φ_{x_i}, φ_{u_j} に附された $*$ は (x^*, u^*) における評価を示すものとする。これがなり立つということは (x^*, u^*) が saddle point であるということと同等である (**予備定理 1** による)。$\varphi(x, u)$ は x に関して strictly concave function であるというここでの仮定のもとでは $\bar{x}$ は一意である。ここに $(\bar{x}, \bar{u})$ は非負の saddle point とする。実際，(1), (2) から $(\hat{x}, \hat{u})$ が他の saddle point であれば

$$\varphi(\hat{x}, \bar{u}) < \varphi(\bar{x}, \bar{u}) \leqq \varphi(\bar{x}, \hat{u}) < \varphi(\hat{x}, \hat{u}) \leqq \varphi(\hat{x}, \bar{u})$$

となつて矛盾がおきるゆえ，$\bar{x} = \hat{x}$ でなければならない。

ここで，簡単化のため記号をつぎのように変換する。

$$(3')\quad \begin{aligned} &y = (y_1 \cdots, y_r)' = (x_1, \cdots, x_n, u_1, \cdots, u_m)' \qquad (r = n+m),\\ &\varphi_s = \varphi_{x_i},\ \delta_s = \delta_{x_i} \qquad (s = i = 1, \cdots, n),\\ &\varphi_s = -\varphi_{u_j},\ \delta_s = \delta_{u_j} \qquad (s = j+n\,;\ j = 1, \cdots, m),\\ &\dot{y}_s = \delta_s\varphi_s,\\ &\delta_s = \begin{cases} 0 & \text{if } y_s = 0 \text{ and } \varphi_s < 0,\\ 1 & \text{otherwise.} \end{cases} \end{aligned}$$

§3

予備定理 2　**$\varphi_s(y)$ $(s = 1, \cdots, r)$ は連続微分可能であると仮定する。そのとき，微分方程式**

9) この点に関して，例えば，古瀬 [19, p. 4] のかき方は heuristic な叙述としても，多分に misleading である。δ_x のこのような作用は別の方面からも確認できる。「同題」(2) をみよ。

$$(4)\quad \dot{y}_s=\begin{cases}\varphi_s(y) & s\in S^0,\\ \max[0,\varphi_s(y)] & s\in T^0,\\ 0 & s\in R^0\end{cases}$$

は t の小さな区間で，任意の初期条件 $y^0=(y_1^0,\cdots,y_r^0)'\geqq 0$ に対して連続な解をもち，それはひとつ，しかも，ただひとつである。ただし，S^0, T^0, R^0 は $y^0=(y_1^0,\cdots,y_r^0)$ の **suffix** の集合 $I=\{1,\cdots,r\}$ の互いに素でかつ和集合が I であるつぎのような部分集合である。

$$S^0=\left\{s\,|\,y_s^0>0 \text{ or } y_s^0=0 \text{ and } \varphi_s(y^0)>0\right\},$$

$$(5)\quad T^0=\left\{s\,|\,y_s^0=0 \text{ and } \varphi_s(y^0)=0\right\},$$

$$R^0=\left\{s\,|\,y_s^0=0 \text{ and } \varphi_s(y^0)<0\right\}.$$

ここで，つぎのことにとくに注意しなければならない。$\varphi_s(y)\,(s=1,\cdots,r)$ は $y\geqq 0$ に対してのみ定義されているから，うえの**予備定理**で存在がいわれる (4) の解は当然に非負でなければ意味がない。以下の証明ではこの解の非負性に特別な注意がはらわれる。

証明　まず，(4) に対応してつぎのような微分方程式[10]をあらたに考える。

$$\dot{y}_s=\begin{cases}\varphi_s(|y|) & s\in S^0,\\ \max[0,\varphi_s(|y|)] & s\in T^0,\\ 0 & s\in R^0.\end{cases}$$

また

$$S_1^0=\left\{s\,|\,\varphi_s(y^0)>0,\ s\in S^0\right\},$$
$$S_2^0=S^0-S_1^0,$$
$$m=\min_{s\in S_2^0} y_s^0$$

と定義する。さらに

10)　ここに，$|y|=(|y_1|,\cdots,|y_r|)$ である。

$$D=\left\{y \mid y=(y_1,\cdots,y_r),\ |y_1-y_1^0|\leqq\varepsilon,\cdots,|y_r-y_r^0|\leqq\varepsilon,\ \varepsilon>0\right\},$$

$$\varphi_s(|y|)>0 \qquad s\in S_1^0 \text{ and } y\in D,$$

$$\varphi_s(|y|)>-\frac{M}{\varepsilon}m \qquad s\in S_2^0 \text{ and } y\in D$$

ただし

$$M\geqq\max_s\max_{y\in D}|\varphi_s(|y|)|$$

となるように ε をえらぶものとする。適当な M に対して十分小さな ε はそのような ε である。容易にしられるように，D は非空で convex, compact な集合である。いま，$0\leqq t\leqq\frac{\varepsilon}{M}$ なる t に対して

$$z_s(t)=y_s^0+\int_0^t\varphi_s(|y(p)|)\,dp \qquad s\in S^0,$$

$$z_s(t)=y_s^0+\int_0^t\max[0,\varphi_s(|y(p)|)]\,dp \qquad s\in T^0,$$

$$z_s(t)=y_s(t)=0 \qquad s\in R^0$$

によつて，その値の n 個の組が D に属する t の連続函数 $y_s(t)$[11] $(s=1,\cdots,r)$ と $z_s(t)$ $(s=1,\cdots,r)$ を対応させる変換 T を定義して，これを

$$z=Ty$$

とかくことにする。ここに

$$z=(z_1,\cdots,z_r)',\ z_s=z_s(t) \qquad (s=1,\cdots,r)$$

である。z は $\mathscr{Z}$[12] に属する。実際

$$|z_s(t)-y_s^0|\leqq\int_0^t|\varphi_s(|y(p)|)|\,dp\leqq M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon \qquad s\in S^0,$$

$$|z_s(t)-y_s^0|\leqq\int_0^t|\max[0,\varphi_s(|y(p)|)]|\,dp\leqq M\cdot\frac{\varepsilon}{M}=\varepsilon \qquad s\in T^0,$$

$$|z_s(t)-y_s^0|=0<\varepsilon \qquad s\in R^0$$

---

11) すなわち，かかる函数の n 個の組は，区間 $0\leqq t\leqq\frac{\varepsilon}{M}$ を定義域とし，値域が D にふくまれる連続ベクター値函数である。そのようなものの全体は Banach 空間の部分集合 $\mathscr{Z}$ をなす。なお，$y_s(0)=y_s^0$ $(s=1,\cdots,r)$ とする。$\mathscr{Z}$ は非空で convex, closed, compact な集合である。

である。変換 T はあきらかに連続であるから，T は $\mathscr{D}$ のそれ自身への写像である。よつて，不動点の存在定理[13]が適用できるから

$$y = Ty$$

なる y の存在がいえる。すなわち

$$y_s(t) = y_s^0 + \int_0^t \varphi_s(|y(p)|)\,dp \qquad s \in S^0,$$

$$(*)\quad y_s(t) = y_s^0 + \int_0^t \max[0, \varphi(|y(p)|)]\,dp \qquad s \in T^0,$$

$$y_s(t) = 0 \qquad s \in R^0$$

となる。さて，$y_s(t) \geqq 0 \qquad s \in S^0 \cup T^0$ がなり立つ。実際

$$y_s(t) = y_s^0 + \int_0^t \varphi_s(|y(p)|)\,dp > 0 \qquad s \in S_1^0,$$

$$y_s(t) = y_s^0 + \int_0^t \varphi_s(|y(p)|)\,dp > y_s^0 + \int_0^t \left(-\frac{M}{\varepsilon} m\right) dp$$

$$= y_s^0 - \frac{M}{\varepsilon} mt \geqq 0 \qquad s \in S_2^0,$$

$$y_s(t) = y_s^0 + \int_0^t \max[0, \varphi_s(|y(p)|)]\,dp \geqq 0 \qquad s \in T^0$$

である。そこで

$$y = y_s(t) \qquad (s = 1, \cdots, r) \qquad 0 \leqq t \leqq \frac{\varepsilon}{M}$$

は微分方程式 (4) を満足するから[14]，これはあきらかに (4) の区間 $\left[0, \frac{\varepsilon}{M}\right]$ における解である。ところで，仮定によつて

$$\frac{\partial \varphi_s(y)}{\partial y_p} \quad (s, p = 1, \cdots, r)$$

は連続であるから，これは D で有界である。よつて，その絶対値はある N

12) 前註 11) をみよ。

13) "ノルム空間において $\mathscr{D}$ は convex な集合，$\mathfrak{F}$ は $\mathscr{D}$ にふくまれる compact な閉集合，T は $\mathscr{D}$ を $\mathfrak{F}$ の中に写す連続な写像とする。そのとき $f = Tf$ であるような $f \in \mathfrak{F}$ が存在する。"

14) (*) で $|y(p)| = y(p)$ となるから，(*) を t に関して微分すれば，(4) がえられる。

をこえない。ここで平均値定理を使えば

$$|\varphi_s(y^{(1)})-\varphi_s(y^{(2)})| \leqq \sum_{p=1}^{r}\left|\frac{\partial\varphi_s(\theta_p)}{\partial y_p}(y_p^{(1)}-y_p^{(2)})\right| \leqq N\sum_{p=1}^{r}|y_p^{(1)}-y_p^{(2)}|$$

ただし

$$\theta_p=(y_1^{(2)},\cdots,y_{p-1}^{(2)},\theta y_p^{(1)}+(1-\theta)y_p^{(2)},y_{p+1}^{(2)},\cdots,y_r^{(2)}),\ 0\leqq\theta\leqq 1$$

となり，$\varphi_s(y)\ (s=1,\cdots,r)$ は Lipschitz 条件を満足する。ゆえに，微分方程式 (4) の解は一意である[15]。また，解は t および初期条件に関して連続であることも容易に証明することができる（証了）。

定理 A　$\varphi(x,u)$ は n 次元ベクター $x\geqq 0$ および m 次元ベクター $u\geqq 0$ について定義された連続 2 回微分可能な実数値函数で，x に関して **concave**，u に関して **convex** であり，さらに，すべての $x,u\geqq 0$ に対して **saddle point** $(\bar{x},\bar{u})\geqq 0$ をもつものとする。また，$\varphi(x,u)$ は微分方程式 (4) の解がつぎの条件を満足するような函数と仮定する。

$(\hat{\mathrm{C}})$[16] $t_0\geqq 0$, $t^\nu>0$ かつ $\lim_{\nu\to\infty}t^\nu=t^0$ となるようなある数列 $\{t^\nu\}$ に対して，

$$\varphi_s[y(t^\nu)]=0 \qquad \nu=1,2,\cdots$$

となるならば，ある $\bar{t}>0$ が存在して

---

15) Lipschitz 条件は微分方程式の解が初期条件について一意であるためのひとつの十分条件である。解が初期条件について一意となる条件は，また，解が初期条件について連続であることも保証する。

16) この条件は Uzawa [15] の条件 (X) に対応するものである。なお，本稿脱稿後に Morishima [21] のここにおける定理と同様な定理の証明を知りえた。Morishima がおいている，函数は無限回微分可能であるという仮定はきわめてきつく，そのいみでいささか不当のようにおもわれる。(追記) 札医大の山元教授は (X) に対してつぎのような条件を suggest された。(X')「$y_s^n\downarrow 0$ となる数列 $\{y^n\}$ に対して $\varphi_s(y^n)\leqq 0$ となれば，ある $\bar{y}_s>0$ が存在して $\varphi_s(y)\leqq 0$ for $0<y_s<\bar{y}_s$ となる。」これは直接 φ_s に対する条件という点で logical に (X), $(\hat{\mathrm{C}})$ よりすぐれているといえる。なお，同教授の Gradient Method の基礎定理に関する包括的かつ厳密な証明が，近刊予定の英文の論文でなされているときく。本稿での**定理 A** の証明は基本的には Uzawa [15] 式の論法に従っているが (Morishima もそうである)，別証をあたえることも可能である。「同題」(2) をみよ。

$$\varphi_s[y(t)] = 0 \quad \text{for } t_0 < t < \bar{t}$$

となる。ここで，$y(t)$ は (4) の解 (ベクター) である。

このとき，任意の初期条件 $y^0 = (y_1^0, \cdots y_r^0) \geqq 0$ に対して，(3′) は (Ĉ) をみたす連続かつ一意な解 $y_s[t, y^0]$ $(s=1, \cdots, r)$ を $t \geqq 0$ でもつ。

証明 微分方程式 (3′) の任意の初期条件 $y^0 = (y_1^0, \cdots, y_r^0) \geqq 0$ に対して，(5) と同様な suffix の集合を定義し，その集合にもとづいて微分方程式 (4) を考える。予備定理の仮定は定理でも仮定としておかれているから，(4) の解は t のある小さな区間において存在し，それは連続かつ一意である。ところで，(i) $s \in S^0$ なる suffix をもつ (4) の解はある区間 $[0, a)$, $a > 0$ において $y_s(t) > 0$ となる。これは予備定理の証明からもあきらかである。(ii) $s \in R^0$ なる s については，$\varphi_s(y(\tau)) < 0$, $\tau \in [0, c)$, $c > 0$ なる区間 $[0, c)$ が存在する。実際，$\varphi_s(y(t))$ は t の連続函数であり，かつ，$\varphi_s(y^0) < 0$ であるから，そのような区間 $[0, c)$ はたしかに存在する。(iii) $s \in T^0$ なる s については予備定理の証明から，解 $y_s(t)$ は $y_s(t) \geqq 0$ である。また，微分方程式の形より，$\dot{y}_s(t) \geqq 0$ となる。ここで，つぎのことがいえる。ある区間 $(0, b)$, $b > 0$ が存在して，$y_s(\tau) = 0$ or $\varphi_s(y(\tau)) > 0$, $\tau \in (0, b)$ and $s \in T^0$ となる。この命題の証明としては $y_s(t)$ が任意の区間でゼロでなければ，$\varphi_s(y(t)) > 0$ がつねになり立つ区間があることを示せばよい。ところが，$y_s(t) \geqq 0$, $\dot{y}_s(t) \geqq 0$ だけからこのことをいうことはできない。なぜなら，$t^\nu > 0$ かつ $\lim_{\nu \to \infty} t^\nu = 0$ となるある数列 $\{t^\nu\}$ に対して，$\dot{y}_s(t^\nu) = 0$ となれば，$b > 0$ であるいかなる区間 $(0, b)$ をとつても，その区間内で $\dot{y}_s(t^\nu) = 0$ となる t^ν が存在するから，$\varphi_s(y(t))$ はその区間でつねに正とはならない。ところで，(Ĉ) はそのような可能性を排除する。すなわち，仮にうえのようなことがおこつても (Ĉ) により $\varphi_s(y(t)) = 0$ がある区間 $0 < t < \bar{t}$ でなり立つから，$\dot{y}_s(\tau) = 0$, $\tau \in (0, \bar{t})$, $\bar{t} > 0$ となり，$y_s(\tau) = 0$, $\tau \in [0, \bar{t})$ が結果し仮定に矛盾する。よつて，ある区間 $(0, b)$, $b > 0$ があつて $\dot{y}_s(t) > 0$ すなわち $\varphi_s(y(t)) > 0$, $t \in (0, b)$ >となる。いま

$$(0, t^1) = (0, a) \cap (0, b) \cap (0, c)$$

とすれば，あきらかに $t^1>0$ である。以上をまとめれば，$\tau\in(0,t^1)$ なる τ に対して

$$\begin{aligned}
&y_s(\tau)>0 && s\in S^0,\\
&y_s(\tau)\equiv 0 \quad \text{またはつねに } \varphi_s(y(\tau))>0 && s\in T^0,\\
&\varphi_s(y(\tau))<0 && s\in R^0
\end{aligned}$$

がなり立つ。そこで，微分方程式(4)の区間 $[0,t^1)$ における解は微分方程式(3′)の解でもある。逆に，(Ĉ) をみたす(3′)の解が存在するならば，それは区間 $[0,t^1)$ で(4)の解にもなることが容易に示されうる。よつて，(Ĉ)をみたす(3′)の解と(4)の解は一致する。したがつて，**予備定理 2** により，(3′)解は一意かつ連続である。つぎに，$y^1=(y_1(t^1),\cdots,y_r(t^1))'$ は非負であるから，y^1 について，S^0, T^0, R^0 と同様に S^1, T^1, R^1 を定義して以上と同じように考えれば，$t^1<t^2$ なるある t^2 が存在して，$[t^1,t^1+t^2)$ なる区間において y^1 を初期条件とする(3′)の解がただひとつ存在する。そこで，$[0,t^1+t^2)$ なる区間の(3′)の解をつぎのように定義する。

$$y_s[t,y^0]=\begin{cases} y_s[t,y^0] & t\in[0,t^1),\\ y_s[t-t^1,y^1] & t\in[t^1,t^1+t^2),\end{cases}\qquad (s=1,\cdots,r).$$

このように定義された(3′)の解は $[0,t^1+t^2)$ であきらかに一意かつ連続である。この解の接続は無限に可能である。もし不可能なら，ある $t^*<\infty$ があつて，解の存在する区間の右端は t^* をこえることができない[17]。一方，任意の初期条件に対して(3′)の解が t の小さな区間で存在することはすでに証明されているので，$y_s[t^*,y^0]$ $(s=1,\cdots,r)$ を初期条件とする解が $[t^*,t^*+t^{**})$,

17) その厳密な証明については，Uzawa [15, p. 130] をみよ。ただし，そこで $\{z^\nu:\nu=1,2,\cdots\}$ の有界性は $z_i=|\varphi_i(z)|$ $(i=1,\cdots,l)$ という majorant equation からはでない。それは**定理 B** の証明における $V(t+\Delta t)-V(t)\leqq 0$ からいえる。ただし，容易にわかるように，これは，解が，t の小さな区間であつても，とにかく存在すればなり立つことであるから，**定理 A** の証明は**定理 B** の証明を前提するわけではないことに注意する。**解の $t=\infty$ までの接続のためには，$y[t^*,y^0]$ が有限であることが，決定的に重要である。** 詳細は「同題」(2) をみよ。

$t^{**}>t^{*}$ なる区間で存在することがいえる。これは t^{*} が解の存在する区間の右端(の上限)ということに矛盾する。ゆえに，(3′) の解はすべての $t\geqq 0$ に対して存在する（証了)。

§4　微分方程式の解が安定であるということの定義を一般的にあたえる。$f_i(x)$ は $x=(x_1,\cdots,x_n)'$ に対して定義された連続な実数値函数であり，ある $\bar{x}$ があつて，$f_i(\bar{x})=0$ $(i=1,\cdots,n)$ とする。微分方程式

(6)　$\dot{x}_i=f_i(x)$　　$(i=1,\cdots,n)$

は任意の初期条件 $x^0=(x_1^0,\cdots,x_n^0)$ に対して，$t\geqq 0$ で連続かつ一意な解 $x[t,x^0]=(x_1[t,x^0],\cdots,x_n[t,x^0])'$ をもつと仮定する。なお，$\|x\|$ はベクター x の長さをあらわすものとする。

定義　微分方程式 (6) の解は $x=\bar{x}$ において

(i)　任意の $\varepsilon>0$ があたえられれば，$\delta(\varepsilon)$ が存在して $\|x-\bar{x}\|<\delta(\varepsilon)$ なら $t\geqq 0$ に対して $\|x[t,x^0]-\bar{x}\|<\varepsilon$ となるとき，安定であるといわれ，

(ii)　任意の x^0 に対して $t\to\infty$ なるとき $\|x[t,x^0]-\bar{x}\|\to 0$ となれば準漸近的安定といわれ[18]，

(iii)　うえの (i), (ii) がともになり立てば漸近的安定といわれる。

まず，つぎの**予備定理**を証明する。

予備定理 3　**微分方程式 (6) は任意の初期条件 x^0 に対して $t\geqq 0$ で連続かつ一意な解 $x[t,x^0]$ をもつと仮定する。そのとき，$x[t,x^{\nu}]$, $x[t,x(0)]$ がそれぞれ x^{ν}, $x(0)$ を初期条件とする解であれば**

$$x[t+t^{\nu},x(0)]=x[t,x^{\nu}]$$

となる。ただし，$x^{\nu}=x[t^{\nu},x(0)]$ である。

証明　$x[t,x(0)]$ が微分方程式 (6) の解であることと

$$\frac{d}{dt}x_i[t,x(0)]=f_i(x[t,x(0)])\quad(i=1,\cdots,n)$$

18) 本稿では，収斂という言葉がこのいみで使用されている。より，厳密にのべるには ε-δ 論法を用いなければならない。

がなり立つこととは同等である。それゆえ，$x[t, x(0)]$ が (6) の解であれば $x^{(1)}(t) \equiv x[t+t^\nu, x(0)]$ も (6) の解である。実際

$$\frac{d}{dt}x_i^{(1)} = \frac{d}{d\tau}x_i[\tau, x(0)]\Big|_{\tau=t+t^\nu} = f_i(x[\tau, x(0)])\Big|_{\tau=t+t^\nu} = f_i(x[t+t^\nu, x(0)])$$
$$= f_i(x^{(1)}(t)) \qquad (i=1,\cdots,n)$$

がなり立つ。また，(6) の解 $x^{(1)}(t)$ の初期条件は $x^{(1)}(0) = x(t^\nu, x(0)) = x^\nu$ である。そこで，(6) の解の一意性により

$$x[t, x^\nu] = x^{(1)}(t) \equiv x[t+t^\nu, x(0)]$$

がなり立つ (証了)。

定理 B　$\varphi(x, u)$ は n 次元ベクター $x \geqq 0$ に関して **strictly concave** でかつ連続 2 回微分可能であり，m 次元ベクター $u \geqq 0$ に関して **convex** でかつ連続 2 回微分可能とする。また，$\varphi(x, u)$ は **saddle point** $(\bar{x}, \bar{u}) \geqq 0$ をすべての $x, u \geqq 0$ に対してもつものとする。そのとき，定理 A で存在を保証された微分方程式 (3′) の解 $y[t, y^0] = (x[t, (x^0, u^0)],\ u[t, (x^0, u^0)])$ は $\bar{y} = (\bar{x}, \bar{u}) \geqq 0$ において安定である。さらに $x[t, (x^0, u^0)]$ は $x = \bar{x} \geqq 0$ において漸近的安定である。

証明　まず，任意の初期条件 $y^0 = (y_1^0, \cdots, y_r^0)'$ に対する (3′) の解 $y[t, y^0]$ と saddle point $\bar{y}$ について

$$V(t, y^0) = \frac{1}{2}\| y[t, y^0] - \bar{y} \|^2$$

とおく。以下，とくに初期条件を明示する必要がないかぎり，$V(t, y^0)$ などを $V(t)$ などと記す。最初に十分小さい任意の $\Delta t > 0$ に対して

$$V(t+\Delta t) - V(t) < 0 \text{ if } \tilde{x}(t) \neq \tilde{\bar{x}}$$

となることを示そう[19]。さて

19) $V(t)$ は $\bar{y}_\tau > 0$　$\tau \in \{s \mid y_s(t) = 0 \text{ for some } t \geqq 0\}$ ならすべての $t \geqq 0$ に対して微分可能でないことがありうる。$\tilde{x}(t)$, $\tilde{\bar{x}}$ などの記号はすぐあとで定義される。

$$V(t+\Delta t)-V(t)=\frac{1}{2}\left\{(y(t+\Delta t)-\bar{y})'(y(t+\Delta t)-\bar{y})-(y(t)-\bar{y})'(y(t)-\bar{y})\right\}$$
$$=\frac{1}{2}\left\{(y(t+\Delta t)+y(t)-2\bar{y})'(y(t+\Delta t)-y(t))\right\}$$

であるから $V(t+\Delta t)-V(t)$ を $\Delta t>0$ で除して右側から極限をとれば

$$(7)\quad \lim_{\Delta t\to 0+}\frac{V(t+\Delta t)-V(t)}{\Delta t}=(y(t)-\bar{y})'\delta\varphi(y(t))$$
$$=(x(t)-\bar{x})'\delta_x\varphi_x-(u(t)-\bar{u})\,\delta_u\varphi_u$$

ただし

$$\delta=\begin{bmatrix}\delta_x & 0\\ 0 & \delta_u\end{bmatrix},\quad \delta_x=\begin{bmatrix}\delta_{x_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_{x_n}\end{bmatrix},\quad \delta_u=\begin{bmatrix}\delta_{u_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_{u_m}\end{bmatrix}$$

である。ここで(7)の成立は §2 における (3′) の解の微分可能性についての注意により，すべての $t\geqq 0$ について

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\left\{y_s(t+\Delta t)-y_s(t)\right\}/\Delta t=\varphi_s(y(t))\qquad (s=1,\cdots,r)$$

となることからあきらかである。ここで，(1) で x と $\bar{x}$ を交換し，(2) で u と $\bar{u}$ を交換すれば

$$\varphi(\bar{x},u)-\varphi(x,u)<\varphi'_x\cdot(\bar{x}-x)\qquad (x\neq\bar{x}),$$
$$\varphi(x,\bar{u})-\varphi(x,u)\geqq\varphi'_u\cdot(\bar{u}-u)$$

をうる。$(\bar{x},\bar{u})$ がすべての $x\geqq 0$, $u\geqq 0$ に対して $\varphi(x,u)$ の saddle point であることを使えば

$$(8)\quad 0\leqq\varphi(\bar{x},u)-\varphi(x,\bar{u})<\varphi'_x\cdot(\bar{u}-x)-\varphi'_u\cdot(\bar{x}-u)\qquad (x\neq\bar{x})$$

となる。いま，$\delta_x\varphi_x=\varphi^*_x$, $\delta_u\varphi_u=\varphi^*_u$ とおけば，これらはいずれも δ_{x_i}, δ_{u_j} がゼロ (すなわち，$x_i=0$ かつ $\varphi_{x_i}<0$: $u_j=0$ かつ $\varphi_{u_j}>0$) であるのに応じてそれぞれ第 i 成分，第 j 成分がゼロとなつているベクターである ($1\leqq i\leqq n$, $1\leqq j\leqq m$)。そこで，$\tilde{x}(t)$ を $x(t)$ で $\delta_{x_i}=0$ を成立させている成分を除いた $x(t)$ のサブベクター，$\tilde{\bar{x}}$ を $\tilde{x}(t)$ に対応する $\bar{x}$ のサブベクター，$\tilde{\varphi}_x$ を $\tilde{x}(t)$ に対応する φ_x のサブベクターとすれば

$$(x(t)-\bar{x})'\varphi_x^* = (\tilde{x}(t)-\bar{\tilde{x}})'\bar{\varphi}_x$$

である。$\tilde{u}(t)$, $\bar{u}$, $\bar{\varphi}_u$ も同様に定義すれば

$$(u(t)-\bar{u})'\varphi_u^* = (\tilde{u}(t)-\bar{\tilde{u}})'\bar{\varphi}_u$$

である。よつて

(9) $$(x(t)-\bar{x})'\varphi_x^*-(u(t)-\bar{u})'\varphi_u^* = (\tilde{x}(t)-\bar{\tilde{x}})'\bar{\varphi}_x-(\tilde{u}(t)-\bar{\tilde{u}})'\bar{\varphi}_u$$

となる。$\tilde{x}(t)$, $\tilde{u}(t)$ の成分となつていない $x(t)$, $u(t)$ の成分はすべてゼロであるから，$\varphi_{x_i}[x(t), u(t)]$, $\varphi_{u_j}[x(t), u(t)]$ $(i=1,\cdots,n;\ j=1,\cdots,m)$ はあたえられた δ に対して，$\tilde{x}(t)$, $\tilde{u}(t)$ のみの函数とみなすことができる。$\varphi(x, u)$ は x および u の若干の成分がつねにゼロとおかれることによつてのぞかれても，のこりの成分に関して concave-convex function という性質を失うことはないから (9) の右辺は (8) によつて，$\tilde{x}(t)\neq\bar{\tilde{x}}$ ならば負である。よつて

$$\lim_{\Delta t\to 0+}\left\{V(t+\Delta t)-V(t)\right\}/\Delta t<0 \text{ if } \tilde{x}(t)\neq\bar{\tilde{x}}$$

をうる。$\Delta t>0$ を十分小さくとれば

$$V(t+\Delta t)-V(t)<0 \text{ if } \tilde{x}(t)\neq\bar{\tilde{x}}$$

である。つぎに，$V(t+\Delta t)-V(t)=0$ for all $t\geqq 0$ ならば $\tilde{x}(t)=\bar{\tilde{x}}$ のみならず，実は $x(t)=\bar{x}$ となることを示す。実際，$t=t_0\geqq 0$ で $\tilde{x}(t)$ の成分である $x_{i_0}(t)$ は $x_{i_0}(t)=\bar{x}_{i_0}$ for all $t\geqq 0$ である。$\bar{x}_{i_0}=0$ なら $x_{i_0}(t)=\bar{x}_{i_0}$ はあきらかである。$\bar{x}_{i_0}>0$ なるとき，$x_{i_0}(t)\neq\bar{x}_{i_0}$ となるなら解の連続性により $\tilde{x}(t)\neq\bar{\tilde{x}}$ となり矛盾がおこる。$\tilde{x}(t)$ の成分でない $x(t)$ の成分 $x_{i_1}(t)$ に対する $\bar{x}$ の成分 $\bar{x}_{i_1}$ はゼロである。もし，正ならば $x_{i_1}(t)$ が $\tilde{x}(t)$ の成分となるとき $\tilde{x}(t)\neq\bar{\tilde{x}}$ となり (解の連続性により) 矛盾である。一方，$x_{i_1}(t)$ が決して $\tilde{x}(t)$ の成分とならないなら，$\bar{x}_{i_1}=0$ も $\bar{x}$ の第 i_1 成分となりうるから，$\bar{x}$ の一意性に矛盾する。よつて，$x_{i_1}=0$ である。

以上の結果から，$V(t^\nu)$ $(\nu=1, 2,\cdots)$ は非増加の単調数列である。また，$V(t)$ はその構成から非負であるから下方に有界である。よつて

(10)　$\lim_{\nu\to\infty} V(t^\nu) = V^*$

なる V^* が存在する。ここで数列 $\{t^\nu : \nu = 1, 2, \cdots\}$ のえらび方は任意である。また

$$\left\{\boldsymbol{y}(t^\nu) : \nu = 1, 2, \cdots\right\}$$

は有界である ($V(t)$ が有界であることからいえる) から，集積点 $\boldsymbol{y}^* = (\boldsymbol{x}^*, u^*)$ が存在する。それゆえ $\{t^\nu\}$ の部分列 $\{t^{\nu_k} : k = 1, 2, \cdots\}$ を適当にえらべば

$$\lim_{k\to\infty} \boldsymbol{y}(t^{\nu_k}) = \boldsymbol{y}^*$$

とすることができる。**定理 A** により $\boldsymbol{y}^\nu = \boldsymbol{y}[t, \boldsymbol{y}^0]$ を初期条件とする (3′) の解 $\boldsymbol{y}[t, \boldsymbol{y}^\nu]$ が存在し，**予備定理 3** により

$$\boldsymbol{y}[t, \boldsymbol{y}^\nu] = \boldsymbol{y}[t + t^\nu, \boldsymbol{y}^0]$$

がなり立つから

$$V(t, \boldsymbol{y}^*) = \lim_{k\to\infty} V(t, \boldsymbol{y}^{\nu_k}) = \lim_{k\to\infty} V(t + t^{\nu_k}, \boldsymbol{y}^0) = V^*$$

が $\boldsymbol{y}(t)$ および $V(t)$ の t に関する連続性と (10) からいえる。よつて，任意の $\Delta t > 0$ に対して

$$V(t + \Delta t, \boldsymbol{y}^*) - V(t, \boldsymbol{y}^*) = 0 \text{ for all } t \geqq 0$$

となる。よつて

$$\boldsymbol{x}[t, (\boldsymbol{x}^*, u^*)] = \bar{x} \text{ for all } t \geqq 0$$

となる。これから

$$\boldsymbol{x}^* = \bar{x}$$

である。すなわち，集積点の $\boldsymbol{x}$ 成分 $\boldsymbol{x}^*$ は一意である。そこで

$$\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \bar{x}$$

がなり立つ。以上，$V(t)$ の単調非増加性は定理の前半の命題を支持する。後半の命題はうえのことから直ちにでる (証了)。

注意1　**定理 B** の前半の命題の成立のためには $\varphi(x, u)$ は x に関して strictly concave でなくてもよく，単に concave だけで十分である。また後半の命題と類似の命題が $u[t, (x^0, u^0)]$ についてなり立つためには，$\varphi(x, u)$ が u に関して strictly convex であればよい。すなわち，そのとき (3′) の解 $y[t, y^0]$ は $y=\bar{y}$ において漸近的安定である。

注意2　これで gradient method の微分方程式 (3) の解の存在とその一意性および安定性が証明せられたことになるが，**定理 B** の仮定のもとでは，初期点が saddle point でなければ，解が saddle point に attain するには無限の時間を要する。すなわち，実際には attain しないことに注意しなければならない。もし，有限な時間内に saddle point に attain したとすれば，ある t_0 があつて $t=t_0$ で $x=\bar{x}$, $u=\bar{u}$ となる解が存在することになる。ところが，$x(t)\equiv\bar{x}$, $u(t)\equiv\bar{u}$ もあきらかにそのような解であるから，これは解の一意性に矛盾する。よつて，saddle point には有限時間内に attain することはない。

§5　ここでは gradient method の微分方程式のひとつの定差方程式化に関して heuristic な議論をこころみる。$\varphi(x, u)$ は実数値函数で**定理 B** の仮定をみたす。ただし，$\varphi(x, u)$ はすべての (x, u) に関して定義されているものとする。(x, u) を y であらわす従前の記号法を採用する。微分方程式体系 (3′) に analogous な定差方程式体系として，つぎのようなものを考える。以下これを *F–D* system という。

$$
\begin{aligned}
&y_s(t+\Delta t)=z_s \text{ if } z_s\geqq 0,\\
&y_s(t+\Delta t)=y_s(t) \text{ if } z_s<0,\\
&z_s=\Delta t\,\varphi_s(z)+y_s(t) \qquad \Delta t>0,\\
&z=(z_1,\cdots,z_r).
\end{aligned}
\tag{11}
$$

この定差方程式に解が存在すれば，その解は初期条件が非負であるかぎり，つねに非負である。また

$$\text{sign } \varphi_s(z) = \text{sign } \varphi_s[y_s(t+\Delta t)]$$
$$\text{for } z_s < 0,\ y_s(t+\Delta t) = y_s(t)$$

がなり立つほど $\Delta t > 0$ が十分に小なる数であり[20]，$w_s = y_s(t+\Delta t) = y_s(t)$ for $t = 0, \Delta t, \cdots, (s = 1, \cdots, r)$ となれば，$w = (w_1, \cdots, w_r)'$ は saddle point である。ここで，つぎのように定義する。$y(t, y_0)$ を F–D system の解とし，y^0 を初期条件とする。そのとき

$$\|y^0 - \bar{y}\| \geqq \|y(t, y^0) - \bar{y}\| \equiv [2D(t)]^{\frac{1}{2}}$$

がなり立てば，解 $y(t, y^0)$ は **D–安定**といわれる。$\bar{y}$ は $\varphi(y)$ の saddle point である。さて，$\Delta t_0 > 0$ なるある Δt_0 が存在し $0 < \Delta t \leqq \Delta t_0$ なる Δt に対して (11) には解が存在する。実際，いま解は

$$|z_1 - y_1(t)| \leqq \varepsilon, \cdots, |z_r - y_r(t)| \leqq \varepsilon,\ \varepsilon > 0$$

を満足しなければならないものとし，そのような z の集合を D_z とすれば D_z は非空で convex な有界閉集合である。よつて，D_z で $\max_s |\varphi_s| \leqq M$ なる定数 M が存在する。$\Delta t_0 = \dfrac{\varepsilon}{M}$ とする。そこで

$$w_s(z) = \Delta t\, \varphi_s(z) + y_s(t) \qquad (s = 1, \cdots, r)$$

によつて函数 $w_s(z)$ を定義して，これを D_z に属する z と $w(z)$ の対応 T とみなして

$$w(z) = Tz \qquad w(z) = (w_1(z), \cdots, w_r(z))'$$

とかけば，あきらかに $w(z) \in D_z$ である。よつて，T なる変換は convex compact set D_z をそれ自身に写す変換であつて，しかも，それは連続写像であ

20) Δt は constant でなくてもよい。具体的な計算では Δt の評価が重要な問題である。一橋大学の溝口敏行氏は適切にも筆者のこの点についての注意を喚起された。こうした問題については J. B. Dennis などの興味ぶかい業績があるが，本稿作成中には未読であつた。この節の議論では，そうした practical な問題はあつかわない。Δt の評価に関しては機会をえて考察したい。Dennis, J. B., *Mathematical Programming and Electorical Networks*, New York: Wiley, 1959 参照。

る。よつて，不動点 z^* が存在して

$$z^* = Tz^*$$

となる。これは (11) の解である。また，F–D system の解は **D–安定**である。実際

$$1/\Delta t\left\{D(t+\Delta t)-D(t)\right\} = 1/2\,\Delta t\Big\{[y(t+\Delta t)-\bar{y}]'[y(t+\Delta t)-\bar{y}]$$
$$-[y(t)-\bar{y}]'[y(t)-\bar{y}]\Big\} = 1/2\Delta t[y(t+\Delta t)-y(t)-2\bar{y}]'[y(t+\Delta t)$$
$$-y(t)] \leqq 1/\Delta t\,[y(t+\Delta t)-\bar{y}]'[y(t+\Delta t)-y(t)].$$

ここで，最後の不等式が成立することは，x, y, z を任意の実数とすれば不等式

$$(x+y-2z)\,(x-y) \leqq 2(x-z)\,(x-y)$$

がなり立つことからあきらかである。$I=\{1,2,\cdots,r\}$, $I_1=\{s\,|\,z_s \geqq 0\}$, $I_2=I-I_1$ とおく。そこで

$$\sum_{s=1}^{r}(y_s(t+\Delta t)-\bar{y}_s)(y_s(t+\Delta t)-y_s(t)) = \sum_{s\in I_1}(y_s(t+\Delta t)-\bar{y}_s)\,(y_s(t+\Delta t)$$
$$-y_s(t))+\sum_{s\in I_2}(y_s(t+\Delta t)-\bar{y}_s)\,(y_s(t+\Delta t)-y_s(t)) = \sum_{s\in I_1}(y_s(t+\Delta t)$$
$$-\bar{y}_s)\,(y_s(t+\Delta t)-y_s(t))$$

である。よつて

$$1/\Delta t\left\{D(t+\Delta t)-D(t)\right\} \leqq \sum_{s\in I_1}(z_s-\bar{y}_s)\,\varphi_s(z) = \sum_{s=1}^{r}(z_s-\bar{y}_s)\,\varphi_s(z)$$
$$-\sum_{s\in I_2}(z_s-\bar{y}_s)\,\varphi_s(z) \leqq 0.$$

$\Delta t > 0$ であるから，$D(t+\Delta t)-D(t) \leqq 0$ がえられる。

§6　v. Neumann は Brown との共同論文で anti-symmetric な zero sum two-person game を微分方程式によつてとく方法をあたえた [4]。anti-symmetric という制限のない一般の zero sum two-person game は容易に anti-symmetric game に帰着させうることが Gale, Kuhn, Tucker らによつて示されているから [6], v. Neumann と Brown の anti-symmetric な zero sum

two-person game の解法は zero sum two-person game の解法として一般的なものであるということができる。一方，Dantzig はその論文 [5] で linear programming と zero sum two-person game が数学的には同等であることを証明した。そこで，微分方程式による zero sum two-person game の解法は当然に linear programming をとくのにも使用することができるようになる。この観点に立つて古瀬 [8, 17] は v. Neumann と Brown が anti-symmetric な zero sum two-person game をとくために考察した微分方程式を linear programming をとくための微分方程式にかきあらためた[21]。ところで，Koopmans は生産の efficient point が何らかの動学的過程によつて到達されうることを明示的にではないがとにかく指摘している [7]。生産の efficient point をもとめる問題は制約条件を明示化し，適当に目的函数をえらべば linear programming をとく問題となるから，Koopmans の指摘は linear programming の optimal solution に何らかの動学的過程によつて到達するという含意をもつことになる。v. Neumann と Brown の微分方程式による anti-symmetric な zero sum two-person game ないし linear programming の解法は game の optimal strategy ないし linear programming の optimal solution を微分方程式の解の収斂値としてもとめようとするものであるから，うえの Koopmans の指摘は v. Neumann と Brown の業績とは別個になされてはいるが，実はこのような微分方程式などによる動学的な解法を予想したもので，思想的には同一の系譜に属するものであつたと考えることができる。また，Samuelson はその先駆的な論文において，Koopmans と同様な考察に導かれて linear programming をとくための微分方程式を v. Neumann と Brown は別個に考案しているが [12]，これはきわめて重要な方程式であつたにもかかわらず，その数学的とりあつかいは不完全なものであつた。も

21) 同じ型の微分方程式は concave programming にも有効なことが示されうる。さきの註 7) をみよ。(追記) この型の微分方程式の concave programming への適用について，筆者は北大応用電気研究所の応用数学のシンポジウムで報告した。「同題」(3)，応用数学シンポジウムの *proceedings* (近刊) 参照。

とより，この Samuelson の業績も Koopmans–v. Neumann, Brown の思想的系列に属するものである。

さて，Kuhn と Tucker はかれらの論文 [9] で concave programming はある constraint qualification のもとに Lagrange 形式の saddle point をもとめる問題に同等であることを "Kuhn-Tucker の定理" として確立した。Kuhn-Tucker は函数の微分可能性を仮定してうえの定理を証明したが，のちに Uzawa [14] は他の qualification のもとに微分可能性を前提しないで Kuhn-Tucker の定理を証明した。いま，Kuhn-Tucker の定理を考慮に入れるならば linear programming をとく問題は双1次形式の saddle point をもとめる問題と同等である。そこで，saddle point をもとめる問題に微分方程式による解法を適用することが当然に考えられることになる。

すでに，われわれが議論を展開してきたいわゆる gradient method として確立している方法はまさにこの内容をもつものであつた。gradient method が解法として有効であるのは linear programming よりもむしろ non-linear programming においてであつて，今日にいたるまで non-linear programming の中でも主として Kuhn-Tucker があつかつた concave programming への適用が比較的多く研究されている。

まず，Arrow と Hurwicz は concave programming において gradient method の微分方程式の解が local には saddle point に収斂することを証明した [1]。しかし，これは古瀬が批判するように [8] 具体的に concave programming などの解を計算するという観点からはきわめて不満足なものである。古瀬はややきつい条件のもとに gradient method の微分方程式の解が saddle point へ global に収斂することを証明しようとしたが [8]，その証明は 1, 2 の点で不満足であつた。そこで，Uzawa はこの古瀬の結果をさらに厳密に確定しようとした [15]。しかし，それでもなお問題がのこされているようにおもわれる[22]。Arrow-Hurwicz はこれらの業績のうえに立つて，古

22) 本稿ではその問題の解決をはかつた。なお，山元の論文(前註 16))をみよ。

瀬，Uzawa などがおいたきつい仮定をすこしゆるめても saddle point に収斂することを主張し，収斂しない場合の救済策を案出した [2]。収斂しないひとつの場合は Lagrangean が strictly に concave でない場合におこるが，古瀬もこの場合の救済策を提出している [8]。しかし，その証明は必ずしも一般的でない[23]。このような gradient method を一層条件をゆるめて concave programming のみならず一般の函数の場合までを local にではあるが考察したのが Arrow-Solow [3] と Uzawa [22] である (Uzawa は global に考察)。

さて，non-linear programming の解を微分方程式の収斂値としてもとめるといつても，そこに登場する微分方程式は非線型であり，かつ，連立方程式体系であるから，それらをといて解をもとめることには非常な困難が伴う。それゆえ，それらの微分方程式を適当な定差方程式によつて近似する必要がおこつてくる。これは微分方程式を digital computer にかけて解をもとめるさいにも必要になつてくる。Marschak は微分方程式を digital computer にかけるときに附随しておこるいくつかの問題にふれ，簡単な問題についての実際の計算例を示している [10]。Uzawa は gradient method の微分方程式の定差方程式による近似のいくつかの場合を考察した [16]。なお，gradient method の微分方程式は analogue computer にもかけることができるが，これに関しては古瀬の興味ぶかい業績がある [8, 19]。

以上の gradient method を decentralized decision making system と解釈すれば，これを経済 model と考えることもまた可能である。すなわち，gradient method の経済学的利用が可能である[24]。古瀬は単一財市場に関してではあるが，gradient method による分権的決定機構について分析してい

23) 続編「同題」(4) で一般的証明をあたえる。その earlier version は "Note on the Gradient Method for Concave Programming" という title の discussion paper として circulate された。

24) さきの註 4) をみよ。そこでの Arrow-Hurwicz [20] は，本稿のような数学的議論が結局は，経済学と密接に関係するというひとつの見本を示していることを，特に，ここで強調しておく。

る [18]。Samuelson は Spatial price equilibrium が一種の消費者余剰を最大にする gradient process によつて到達されることをあきらかにした [13]。しかし，この方面に対してなされたもつとも unique な貢献は Marschak によるものであろう [11]。そこでは，社会主義社会の経済的な効率に関して議論された古典的分権化の問題が新らしい観点から分析されている。

引 用 文 献

[1] Arrow, K. J. and L. Hurwicz. "Gradient Method for Concave Programming, I: Local Results", in K. J. Arrow, L. Hurwicz and H. Uzawa (eds.), *Studies in Linear and Non-linear Programming*, Stanford, Calif.: Stanford University Press, 1958 (以下本書を *Studies* と略記する)。

[2] Arrow, K. J. and L. Hurwicz. "Gradient Method for Concave Programming, III: Further Global Result and Applications to Resource Allocation", in *Studies*.

[3] Arrow, K. J. and R. M. Solow. "Gradient Method for Constrained Maxima, with Weakened Assumptions", in *Studies*.

[4] Brown, G. W. and J. von Neumann. "Solutions of Games by Differential Equation", *Annals of Mathematics Study*, No. 24.

[5] Dantzig, G. B.. "A Proof of Equivalence of the Programming Problem and the Game Problem", in T. C. Koopmans (ed.), *Activity Analysis of Production and Allocation*, Cowles Commission Monograph No. 13, New York: Wiley, 1951 (以下本書を *Activity Analysis* と略記する).

[6] Gale, D. H., H. W. Kuhn and A. W. Tucker. "On Symmetric Games", *Annals of Mathematics Study*, No. 24.

[7] Koopmans, T. C.. "Analysis of Production as an Efficient Combination of Activities", in *Activity Analysis*.

[8] Kose, T.. "Solutions of Saddle Value Problems by Differential Equations", *Econometrica*, Vol. 24, No. 1.

[9] Kuhn, H. W. and A. W. Tucker. "Non-linear Programming", in J. Neyman (ed.), *Proceedings of the Second Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, Berkeley and Los Angeles: University of California Press, 1955.

[10] Marschak, T.. "An Example of a Modified Gradient Method for Linear Programming", in *Studies*.

[11] Marschak, T.. "Centralization and Decentralization in Economic Organizations", *Econometrica*, Vol. 27, No. 3.

[12] Samuelson, P. A., *Market Mechanism and Maximization*, Santa Monica:

RAND Corporation, 1949.

[13] Samuelsen, P. A.. "Spatial Price Equilibrium and Linear Programming", *American Economic Review*, Vol. 42, No. 3.

[14] Uzawa, H.. "The Kuhn-Tucker Theorem in Concave Programming", in *Studies*.

[15] Uzawa, H.. "Gradient Method for Concave Programming, II : Global Stability in the Strictly Concave Case", in *Studies*.

[16] Uzawa, H.. "Iterative Methods for Concave Programming", in *Studies*.

[17] 古瀬大六.「線型計画の逐次解法」商学討究, 第3巻第3号.

[18] 古瀬大六.「計画法と分権的決定」商学討究, 第4巻第1号.

[19] 古瀬大六.「鞍点問題の微分方程式解法」商学討究, 第5巻第4号.

脱稿後に追加

[20] Arrow, K. J. and L. Hurwicz. "Decentralization and Computation in Resource Allocation", in R. W. Pfouts (ed.), *Essays in Economics and Econometrics*, Chapel Hill : The University of North Carolina Press, 1960.

[21] Morishima, M.. "A Reconsideration of the Walras-Cassel-Leontief Model of General Equilibrium", in K. J. Arrow, S. Karlin and P. Suppes (eds.), *Mathematical Methods in the Social Sciences, 1959*, Stanford, Calif. : Stanford University Press, 1960.

[22] Uzawa, H.. "Market Mechanisms and Mathematical Programming", *Econometrica*, Vol. 28, No. 4.