HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	M.G.ケンダールの時系列解析論 : いわゆる「自己回帰系列」とその研究法について
Author(s)	近, 昭夫
Citation	北海道大學　經濟學研究, 16(2), 179-202
Issue Date	1966-08
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/31148
Type	departmental bulletin paper
File Information	16(2)_P179-202.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

M・G・ケンダールの時系列解析論

——いわゆる「自己回帰系列」とその研究法について——

近　　昭　夫

ま　え　が　き

本稿は，G・U・コールの時系列解析に関する研究を，M・G・ケンダールがいかに受継ぎ，そしてどのように発展させたかを考察することを目的とする。

今日の数理統計学的時系列解析論において，自己相関，コレログラム，自己回帰方程式等の手法が大きな位置を占めている。これらの統計的手法の研究は1920年代のG・U・ユールの研究に起源をもつ。ユールは“ステューデント”およびO・アンダーソンによって一応定式化された階差法 (variate difference method) と，A・シュスターにより考案され，W・ビヴァリッジによって小麦価格系列の分析に適用されたペリオドグラム分析 (periodogram analysis) を批判的に研究する過程で，それらの方法を案出したのであった。ユールの研究はその後1930年代に入って，H・ウォルド，R・フリッシュ，T・ハーベルモ等の研究にも影響を与えたが，ユールの研究を統計学の場面で直接受け継ぎ，さらに発展させたのはM・G・ケンダールであった。本稿では，ケンダールがユールの研究をどのように継承し，発展させたかをみることに問題を限定し，若干の考察を行いたい。私は先にユールの研究の紹介，検討を行ったが（「G・U・ユールの時系列解析論」経済統計研究会『統計学』15号，1965年12月，参照。）本稿はその続稿である。

さて，ケンダールは時系列が，次の三つの構成要因から構成されると考える。すなわち，(1)トレンドあるいは趨勢運動 (secular movement)，(2)このトレ

ンドをめぐるある規則性をもった振動的変動 (oscillation) および (3)偶然的変動あるいはランダムな変動，この三つである。[1] ケンダールにあっては，時系列解析の主要な課題の一つが「別々に研究するために，これらの構成要因を分離すること」にあるが，彼の研究は特に(2)の振動的変動に中心が置かれ，それを如何なる方法を用いて分析すべきかを考察することが主要な研究のテーマとなっている。[2] したがって本稿ではケンダールの「振動的変動の研究」がコールからどのような影響を受け，そしてユールの所説とはいかなる相違を有するかを検討することが主要な課題となる。

ケンダールはユールと同様に，「振動的変動」の研究に際してペリオドグラムを用いるのを拒否し，自己回帰図式 (scheme of autoregressive) を採る。そして，彼の研究の主要な論点は (1)「振動的変動」の研究に自己回帰図式が有効適切なのはなぜかについて論拠を与えること，および(2)自己回帰図式で表現できる時系列，すなわち自己回帰系列 (autoregressive series) の特性を研究すること，に置れた。しかし，(2)の問題は専ら統計技術的問題にとどまるので，ここでは彼の研究の結論のみを紹介するにとどめ，本稿では(1)の問題を中心に考察を進める。なお，以下では，まずケンダールの見解を紹介し，次いでそこにおけるユールの影響あるいはユールとの相違を検討していくことにする。

ケンダールには時系列解析に関する次の諸論文がある。

"The Effect of the Elimination of Trend on Oscillation in Time-Series." Journal of the Royal Statistical Society (以下 J. R. S. S. と略記する), vol. 104, 1941. (以下 "Elimination." と略称。)

"Oscillatory Movements in English Agriculture." J. R. S. S., vol. 106, 1943. (以下 "Agricalture." と略称。)

"On Autoregressive Time-Series," Biometrika vol. 33, 1943, (以下 "Autoregressive." と略称。)

"On the Analysis of Oscillatory Time Series." J. R. S. S., vol. 108, 1945. (以下 "Analysis." と略称。)

Contributions to the Study of Oscillatory Time-Series. Cambrige. 1946. (以下 Contribution. と略称。)

"The Estimation of Parameters in Autoregressive Time Series," Econometrica, vol. 17, 1949.

The Advanced Theory of Statistics, vol. II. London. Ist ed., 1946.（以下 Advanced Theory. と略称。）

An Introduction to the Theory of Statistics. 14 th ed., 1950.（Yule と共著，以下 Introduction. と略称。）

また対照されるユールの見解は，次の三論文において展開されている。

"On the Time-Correlation Problem, with Especial Reference to the Variate-Difference Correlation Method." J. R. S. S., vol. 84. 1921.（以下21年論文と略称)。

"Why Do We sometimes Get Nonsense-Correlations between Time-Series ? — A Study in Sampling and the Nature of Time Series." J. R. S. S., vol. 89. 1926.（以下26年論文と略称。）

"On a Method of Investigating Periodicities in Disturbed Series, with Special Reference to Wolfer's Sunspot Number." Philosophical Transactions, ser. A. vol. 226, 1927.（以下27年論文と略称。）

注

(1) この三要因への分解は繰り返えし主張されている。cf. "Elimination." p. 43. Advanced Theory. vol. II. p. 369. Introduction. p. 614.

(2) 勿論，ケンダール研究は三つの要因の全体にわたってはいる。Introduction や Advanced Theory の時系列解析を論じた諸章では，時系列解析の主要方法が殆んど網羅されているといってよかろう。しかし，これらの諸著はそれらの諸方法のいわゆる教科書風な平板な解説に終っており，特に注目すべきものをもっていない。「振動的変動」の解析法の叙述にしても，以前に発表された諸論文での研究の要約的紹介にとどまっている。したがって，これらの諸研究のよりわかりやすい説明の仕方を知り，あるいは具体的な適用の仕方を知るための参考にはなっても，それ自身が独創的な研究であるというわけではない。また，Advanced Theory を中心とするケンダールの時系列解析論全体についての検討はすでに山本正氏によって行われ，基本的な批判論点はほぼ指摘されつくしている。（山本正「経済時系列解析法の前提に関する一考察 ——M・G・ケンドールの時系列解析論の検討を中心として——」静岡大学法経短期学部『法経論集』第6号，1957，12）このような理由でここではケンダールの時系列の「振動的変動」の解析論および解析法の研究を検討することに問題を限定する。

第1節　自己回帰系列とその分析法

本節では，(1)ケンダールが研究の対象を「振動的変動」と規定する理由，および (2)その研究法として自己回帰図式を選ぶ理由について考察する。なお，ケンダールの以下の見解は主としてW・ビヴァリッジによって行なわれた。小麦価格系列のペリオドグラム分析の批判を念頭において展開されている。(cf. W. Bevereridge, "Wheat Prices and Rainfall in Western Europe." J.R.S.S., vol. 85. 1922，尚，第2節注5参照(1)。)

(1)　研究の対象およびその特性

ケンダールは経済変動の特徴を「振動的変動」と規定する。彼によれば，この「振動的変動」は二つの点で注意されなければならない。

第一は，それがデタラメにあるいは偶然的に (haphazardly) に生ずるものではなく一定の秩序をもっているということである。ケンダールは次のように言っている。「経済研究において出会う時系列の型は，通常，明らかに偶然に起因するものではない振動的諸特徴(oscillatory features)をもっている。すなわち，その変動を全くデタラメに生ずるものとみなすことはできない。何かある仮りの順序で帽子の中から諸々の値をアト・ランダムにとり出すならば，その値の系列は揺れ動くであろう。これはわれわれが観察するところのものとは異なる。というのは，一般的にいって連続的な値は大なり小なりの程度で従属しているからである。要するに，そこには系列のシステマティックな要素として説明さるべき何かが存在しているのである。」(2)

しかし，振動的変動は決してサインやコサインの項から成る調和函数の表示するような，一定の決まりきった周期と振幅をもった厳密に周期的な変動ではない。ケンダールによれば，時系列の運動形態は，変動 (fluctuation)，振動的変動 (oscillation)，循環 (cycle) および周期的運動 (periodic movement) の四つに区別されるべきである。「変動」とは，システマティックであるか否かを問わない「定常的」運動（トレンドを含まない反復的運動，以下の三要因も「定常

的」時系列について考えられている）である。「振動的変動」とは，よりシステマティックではあるが振幅と位相が変化する運動である。「循環」とは，さらにシステマティックに変化するが，しかし偶然的要素 (temporal element) を含んでいる運動である。最後に，「周期的運動」というのはサインやコサインの項で表現される厳密に周期的な運動である。したがって，時系列分析に際しては「循環」という用語の使用を避けなくてはならない。これが第二の注意点である。われわれの観察する時系列は，それをグラフに表わすとピーク (peak)，底 (trough)，アップクロス (upcross——時系列の曲線がその平均線の下から上へ転換する点) およびダウンクロス (downcross——平均線の上から下へ転換する点) を示す。しかし，多くの時系列についてみると，それらは決して一定の決まりきった仕方で生ずることはない。したがって，われわれが系列の周期 (period) という用語を用いるとするならば，これらの諸指標の区間（インターバル）の平均距離 (mean distance) のことを意味しているのである。

ケンダールによれば，以上の二つの特徴をもつ経済現象に特有な「振動的運動」とは，要するに，「時系列におけるある現象の，システマティックな（しかし，必ずしも循環的ではない）繰返えし」[3] のことである。ケンダールが経済変動の特質を特に「振動的変動」と規定するのは，後にみるように，経済変動はペリオドグラム分析に耐え得ず，それに代る分析方法の探究すべきことを強調するためである。

「振動的変動」という用語の使用は，経済現象について「周期的」(periodic) という言葉を用いるのをやめ，「振動的変動（オッシレーション）」という用語を使用すべきであるという，ユールの主張に由来する。ユールがこの用語を使ったのは“ステューデンド”の研究した階差法を批判した21年論文においてであった。“ステューデンド”は「生命的変動あるいは商業的変動」の連続的年間値 (successive anual values) の系列について相関を求めるとき，「これらの値は一般的には大きな趨勢的変動に，ときおり周期的変動 (periodic variation) に，ときには一定の型の加速運動にしたがっており，それらのそのままの数字の間の相関をとるならば全く誤った値へ導くであろう」[4] と述べ，いわゆる「ニセの相

関」(spurious correlation) の理論を展開した。そして，この「ニセの相関」を免れるための方法として階差法 (variate difference method) を提唱したのであった。これに対しユールは，21年論文で階差法では「ニセの相関」の問題は解決できないと反駁した。そして，その論証の過程で附随的に経済現象は「周期的」でなく「振動的」であると指摘し，「周期という用語を使用をさけるために，私はそれらを与えられた期間(duration)の振動的変動(オツシレーション)ということを提案する。期間という用語は，固定された一定の期間を意味するのではなく，平均的期間のみを意味する」(5) と述べたのであった 。

ユールのこの指摘は，21年論文の段階ではまだペリオドグラムの批判と結びつけて考えられていない。これに対しケンダールは，ユールが27年論文で展開したペリオドグラム批判を考慮しつつ，ユールの指摘をより一層細分化したのであった。

さて，「振動的変動」の「システマティックな効果の存在」が示されたならば，ケンダールの次の研究課題は，その本性を吟味し，そしてもし可能ならば「それのビヘビイアーの法則を定式化すること」(6) である。しかし，ここで彼が「本性」の研究といい，「ビヘビイアーの法則の定式化」といっても，ことの実質的内容は時系列の主要特徴を要約的に確認することに帰する。しかもそれは，経済学的理論と直接関係のないところで行なわれる。ケンダールのこのような考え方は，彼の次の言葉から明瞭に読みとることができる。「……これらの法則の経済学による説明は統計学者の仕事というよりも経済学者の仕事である，――というものの，前者がそれに全く無関心であるというのではない。しかしながら，彼の研究の最初の段階は説明されるべきものを正確にみつけ出すことである。」(7)

時系列の変動を要約的に把握するための方法を検討すること，これがケンダールの研究の一つの要点である。ユールは27年論文において太陽黒点の観察値系列のいわゆる「攪乱的系列」(disturbed series) の周期性を問題にし，定差方程式がその最良の研究法であると結論した。そのときユールは，明言はしていないが，ケンダールと同一の観点に立っていたものと思われる。した

がって，上述のケンダールの見解は，ユールの考えを明文化したものとみなすことができよう。

(2)　研究の方法

従来，周期解析法としてペリオドグラムが用いられてきたが，ケンダールは「振動的変動」の研究法としてペリオドグラムを採るのを拒否し，自己回帰図式を選ぶ。その理由を聞こう。

1．ペリオドグラム拒否の理由　ケンダールによれば，ペリオドグラムは次の二つのことを仮定している。①われわれの観察する変動は基本的には一定の周期・振幅および位相をもって変動しサインやコサインの項から成る調和函数によって表現できること。②その函数と実際の時系列との乖離，すなわち誤差が生じてもそれは観察誤差と同一性質をもっているとみなしうること。つまり，その誤差は観察時点でのみ生じる誤差であり，「生じた後でシステムの将来の運動に影響を及ぼすことなく消えていく，純粋に一時的な偏倚(purely temporary aberration)」[8]である。しかし，この二つの命題はわれわれの研究対象である経済の「振動的変動」については，共に妥当しない。経済時系列は，第1に(1)でみたように決して調和函数的な厳密に周期的な変動ではなく，かえって「位相の連続的移動と振幅の連続的変化」こそ，それの著しい特徴なのである。第2に，この場合の誤差は決して観察誤差と同一視できる性質のものではなく，一度生ずると必ずシステムの中に組込まれていきそれの将来の運動に影響を与えるのである。ケンダールは以上のことを主張して，次のように言っている。「……周期図式(periodic scheme)の基礎となっている諸仮説は，ア・プリオリに妥当でもなければ観察によって検証されることもない。系列が連続的な諸ピークの間にある諸区間(インターバル)において大きく変化するということ，および諸運動が同じ位相で維持される傾向はないこと，これらのことが経済的時系列にとって典型的なことなのである。さらに攪乱(disturbance)が生じると，それは忘れ去られずに，将来に対しても何らかの効果を及し続けるのである。それは，それの生じることが全く予測できな

いという意味で，それてまたそれが時折偶然的にシステムに影響を与える攪乱の分布の一部を形成するという意味でランダムであるかもしれない。しかし，それは一度生じるとシステムの中に組込まれていき，それの将来の運動に影響するのである。」(9)

ケンダールのこの主張も，基本的にはすでにユールによって述べられていた見解である。第1点と同じ見解は前節でみたように21年論文で述べられていたが，いわゆる「振動的変動」の特徴を「位相の連続的移動と振幅の連続的変化」において捉え，それを「攪乱」，すなわち誤差の累積として説明した（第2点）のは27年論文においてであった。また，このような特徴をもつ系列の分析にペリオドグラムが不適であることが指摘されたのも，27年論文においてである。この論文で問題にしたヴォルファーによる太陽黒点の観測値系列は，ユールによると「振動的系列」の特徴をもつ。そして彼はこの特徴を誤差の累積として説明できると考えたのである。ここで彼は二つの事例を考えた。一つは，滑らかなサイン・カーブにランダムな誤差が附加わる場合である。このときには，誤差が大きくなるにつれて曲線の形は非常に不規則的なものにはなるが，しかし依然として「基調となっている調和項の周期と振幅に対して密な近似を与える」(10)一定の周期的な運動がみられる。これに対して，第二に，揺れ動いている振子に，例えば連続的に豆を投げ続けて連続的な衝撃を与え，攪乱を生じさせる場合に事態はどうなるか。この場合には，ある時点での攪乱はそれ以後の時点での運動に影響を与える。その時には誤差（あるいは攪乱）が累積されていく。しかしこの場合でも，振子の運動はそれをグラフに表わすと，そのグラフは「驚くほど滑らか」であり続ける。ただ，「振幅と位相は連続的に変化するであろう。」(11)ユールによれば，太陽黒点系列のグラフはこの振子の運動のグラフに酷似している。そして，このような特徴を示す系列は，もはやペリオドグラムでは処理しえない，という。

ケンダールの上述の見解は，ユールの21年論文での主張を考慮しながら27年論文で展開された見解を整理，反復したものに外ならない。このかぎりで

は，ケンダールはユールの見解に特に新しいものを附加えてはいない。

2．自己回帰図式の規定　では，「振動的変動」を研究するのに適切な方法は何か。ケンダールによれば，それは自己回帰図式である。自己回帰図式は一般に

$$u_{t+k}=f(u_{t+k-1},\cdots\cdots u_t)+\phi(t)\ \cdots\cdots①$$

で与えられる。（u は時系列の項を表わす。u_t は t 時点での時系列の項である。$\phi(t)$ は外部から加えられる攪乱の函数である。）この図式は時系列の各項がA．特定数のそれ以前の項の値によって（つまり「過去の歴史のラグ」"the lag of past history" によって）決定されるシステマティックな要素と，B．外部的攪乱という，二つの相異なる部分の和であるという考慮に基づいている。Aの部分は一般に周期函数で表わされるので（次項参照），この図式は前項で考察した経済変動の性質とも合致す。それでケンダールは，「それは……妥当で，かつ容易に理解される経済的振動のモデルであるように思える」と結論する。なお，①の型の方程式によって規定される系列が自己回帰系列とよばれているものである。

さて，この図式はユールが先にみた振子の例を考慮して導いた定差方程式

$$u_{t+2}+au_{t+1}+bu_t-\phi(t)=0\ \cdots\cdots②$$

に由来する。（a, b は定数）。G・ウォーカー[12]はこの方程式を

$$u_{t+k}+a_1u_{t+k-1}+\cdots\cdots+a_ku_k-\phi(t)=0\ \cdots\cdots③$$

という形に展開し，それを気象データーにあてはめる方法を考えた。①の図式は，③をより一般化したものである。また，ユールの定差方程式に自己回帰図式という呼称を与えたのはウオルド[13]である。ここにもケンダールの独自的見解はみられない。但し，ユールにあっては考察の対象が自然現象に限られていたが，ケンダールにおいては経済変動が専らの研究対象であり，そのための図式の定式化であるという点で，両者は異っている。

ところで，ケンダールにあってはこの図式が「振動的変動」の性質と合致するということで，さしあたり充分なのであり合致する理を問う必要はない。彼はいう。「純粋に記述的な観点からすると (from purely descriptive point

of view), われわれは，最初は，ある特定時点での値がそれ以前の諸値に関連するのは何故かという理由，あるいは攪乱はどこから来るのかということについては関知しない，——もちろん，両者は共に結果の討論においては考察されるのではあるが。」[14] われわれは先に，統計学者の仕事は時系列の「法則の定式化」に限られるというケンダールの主張をみたが，ここではその主張がより具体的に言い表わされている。ユールは方程式を導き出しただけでこのような発言は全く行なっていない。

さて，ケンダールによると実際の時系列の研究では高次の方程式は必要でなく

$$u_{t+2}+au_{t+1}+bu_t+\varepsilon_t=0 \quad \cdots\cdots④$$

で充分である。というのは，u_{t+3} 以上の項を附加えても，それと u_{t+2}, u_{t+1}, u_t との偏相関が非常に小さく，したがって時系列の分析に際してあまり寄与するところがないからである。このことはユールも確認している。なお，④は u_{t+2} の u_{t+1} と u_t に対する回帰方程式である。同一系列の項間の回帰方程式，——自己回帰の名称はこのことに由来する。

3．自己回帰方程式の一般解　　定差方程式の一般解はその同次方程式の解（=補完函数）と特殊解（=特殊積分）との和で表わされる。[15] ④式の解は次のようにして求められる。[16] ④の同次方程式

$$u_{t+2}+au_{t+1}+bu_t=0 \quad \cdots\cdots⑤$$

について，u_t が ξ^x という特殊解をもっているとすると

$$\xi^{x+2}+a\xi^{x+1}+b\xi^x=0 \quad \cdots\cdots⑥$$

したがって

$$\xi^2+a\xi+b=0 \quad \cdots\cdots⑦$$

⑦が $\alpha\pm i\beta$ という根をもつならば，⑦の解，つまり⑤の補完函数は

$$\xi_t=p^t(A\cos\theta t+B\sin\theta t) \quad \cdots\cdots⑧$$

である。（但し，$p=\sqrt{b}$, $\theta=arctan\sqrt{\frac{4b}{a^2}-1}$, A, B は任意の定数である。かつ $b<1$, $4b>a$。）したがって⑧は，tが大きくなるとともに $2\pi/\theta$ という基本周期 (fundamental period) をもって急激に減衰する函数である。

ここで ξ_t が，$\xi_0=0$，$\xi_1=1$ であるような一定の値をもつとしよう。そうすると ξ_t は，

$$\xi_t=\frac{2}{\sqrt{(4P^2-a^2)}}p^t sin\theta t \quad \cdots\cdots⑨$$

となる。したがって，⑤の特殊積分は

$$\sum_{j=0}^{\infty}\xi_j\varepsilon_{t-j+1}\cdots\cdots⑩$$

である。ゆえに⑤の解 (complete solution) は，⑧と⑩の和である。すなわち

$$u_t=p^t(Acos\,\theta t+B\,sin\,\theta t)+\sum_{j=0}^{\infty}\xi_j\,\varepsilon_{t-j+1}\cdots\cdots⑪$$

である。ところで，時系列が「暫く前に出発した (started off)」と仮定するならば，p^t が0に近ずくので⑨も0に近ずく。そのときには，時系列は

$$u_t=\sum_{j=0}^{\infty}\xi_j\,\varepsilon_{t-j+1}\cdots\cdots⑫$$

で表わされる。すなわち，時系列は「攪乱誤差」の累積として表わされる。⑫は ξ 項と同じ $2\pi/\theta$ という基本周期をもっている。ここで基本周期というのは，自己回帰系列は一定の規則的に繰返えす周期をもっていず，様々な長さのピークからピークへの，底から底への，あるいはアップクロスからアップクロスへの等々の距りをもっているだけであり，したがって周期といってもそれらの平均距離しか問題にしえないからである。

以上の自己回帰方程式の解法の展開はケンダールに独自なものである。ユールは定差方程式

$$u_x=b_1\,u_{x1}-b_2\,u_{x2}$$

を解いて

$$u_x=e^{\lambda x}(Acos\,\theta x+Bsin\,\theta x)\qquad(\lambda\ \text{は定数})$$

を示しているだけで，[17] 定差方程式の解法を特に詳細に展開してはいない。

4．自己回帰図式の妥当する客観的根拠　以上でわれわれは，ケンダールが自己回帰図式をとる理由，およびその解法をみた。ケンダールによれば自己回帰図式の妥当性はさらにその根拠を経済現象そのものの本性に求めることにより補強される。すなわち，経済組織は元来均衡状態にあるものであ

るが，それに外から衝撃が加えられ運動が生じるが，やがて再び均衡へ帰っていく傾向をもっている。経済の内部構造によって規定される均衡への傾向と，運動の動因としての外部からの衝撃という図式が実際と合致するが故にこそ自己回帰図式は経済変動現象を適格に表現しうる，とケンダールはいうのである。彼はこの均衡論動見解を次のように説明している。「経済組織(economic system) が静態的均衡あるいは動態的均衡の状態にあるものと想定しよう。その状態の中で小さな混乱が生じるならば，均衡状態にひき戻す傾向がよび起されるであろう。（というのは，さもなければ安定性は存在しえないであろうから)。これらの力は混乱の程度に応じて変化し，かつそれらは，t 時点で観察された変数の値がそれ以前の時点での値の線型函数 (linear function) として（少くとも近似的には）表現されうるものとみなせよう。自己回帰方程の係数 a, b はかくて組織（システム）の経済構造を表わすものなのである。もしその組織（システム）がある一つの衝撃（ショック）をうけたとするならば，それは一時の間振動するであろうが，一般的について，その振動はかなり急速に減衰するであろう。われわれが自然において観察する連続的振動はランダムであろうところの衝撃 (impulse) の連続的系列によって説明されよう。また組織（システム）の振動 (vibration) には影響しないだろうが，しかし自己回帰図式の諸定数を推定しようとする試みとは抵触するところのつみ重さなった効果も存在しよう。この図式は，われわれが実際に観察する振幅の変化と位相の移動を説明する。経済的観点からみて，それは非常にもっともなもの (plausible) なように，私には思える。」(18)

またケンダールは同じ見解を，次のようにも説明している。いま，一台の自動車がデコボコ道を走っているとしよう。スプリングがよく効いているので，車が何かにぶつかったり路面の穴に落ち込んだりしても，車体（ボディ）は一時ゆれるが上下運動に関するかぎり，その動揺は直きに止むであろう。ところが車が連続的に何かにぶつかったり，穴に落ち込んだりすると，動揺の振幅とピークの距りが変化しつづける連続的振動が生ずるであろう。路面のデコボコは全くランダムに分布しているので，攪乱的振動は絶えずつくり出される。つまり，「運動の規則性は車の内部構造によって規定される。これに対

して，運動の存在は外的衝撃 (external impulses) によって規定される。」[19] ケンダールによれば，時系列の「振動的変動」はこのようなメカニズムによってつくり出されると考えるのが，「非常に妥当に思える」のである。

ケンダールのこの見解は，ユールの振子の運動についての見方に起源をもつ。このことは，自己回帰図式について彼が「……われわれはユールの諸論文の中に基本思想とそれの適用を可能にする実際的技術との両方を見出す，」[20] と明言していることからもうかがうことができる。しかし，ユールの考察は経済現象とは関係のない場面において行なわれたものであった。経済現象における均衡と攪乱の問題は，E・スルッツキー[21] と R・フリッシュ[22]によって論じられており，ケンダールはユールからだけではなくこの両者からも影響をうけている。スルッツキーはランダムな変化の累積が，ある規則的な，実際の経済変動の変化に類似した変化を示すことを強調した。またフリッシュは，K・ヴィックセル，J・アッカーマンの均衡論的見解を受継いで，経済の「波及の問題」(propagation problem) と「衝撃の問題」(impulse problem) を論じた。自己回帰図式の妥当性を主張するケンダールの経済現象の均衡論的解釈は，ユールの振子の運動に関する考察を「基本思想」としスルッツキー，フリッシュ等の研究の影響の下に形成されたものということができよう。しかしその実質的内容は，振子の運動の例を経済現象に類推適用したことにあるといわねばなるまい。

なお，森田優三氏は「経済変動の統計分析法」(岩波全書，1955) の第9章を「自己回帰系列」の解説にあてられ，その冒頭で「不規則衝撃説」を説いておられる。氏は経済変動の理論が，「しばしば内生理論と外生理論とに分類される。外生理論は経済の循環運動を非経済的な外的要因として説明するものであり，内生理論は経済組織それ自体の構造によって振動運動が自発するものと考えるものである」と説明し，以下「伝播」と「刺戟」の問題を説いておられる。これらは明らかに，フリッシュ・ケンダール等の所説の祖述である。

注

(1) ペリオドグラムの基礎は，フーリエ級数

$$a_0+a_1\cos\theta+a_2\cos 2\theta+\cdots\cdots+b_1\sin\theta+b_2\sin 2\theta+\cdots\cdots$$

(a_1, $a_1\cdots\cdots$, b_1, $b_2\cdots\cdots$は定数)

にある。いま周期を求めやすくするために $\theta=\frac{2\pi}{\lambda}$（$\lambda$は周期）とおき時系列 u_t が

$$u_t=a_0+a_1\cos\frac{2\pi}{\lambda}t+a_2\cos 2\frac{2\pi}{\lambda}t+\cdots\cdots+b_1\sin\frac{2\pi}{\lambda}t+b_2\sin 2\frac{2\pi}{\lambda}t+\cdots\cdots$$

と仮定すると，最小自乗法により

$$ai=\frac{2}{n}\Sigma u_t\cos i\frac{2\pi}{n}t \qquad bi=\frac{2}{n}\Sigma u_t\sin\frac{2\pi}{n}t$$

と求められる。かくして時系列は sin と cos の項に分解され，それらが時系列の構成要素であるとされる。ところが，これらの諸要素の中には偶然的原因に規定されているものもある。それをふるい落し，必然的原因により規定されているもののみをとり出そうという着想の下に作製されるのがペリオドグラムである。詳しくは小倉金之助「数理統計」『統計学』経済学全集 第35巻，改造社，昭和5年， M. Kendall Advanced Theory vol. II. ch. 30 を参照。

(2) Contributions. p. 63.

(3) Contributions. p. 3.　Kendall は次のように云っている。

「より一般的な定常的運動を，システマテイックであっても，あるいはそうでなくても私は fluctuation とよびたい。この意味においては，oscillation は fluctuation の特殊な場合であり，そしてまた cycle は oscillation の特殊な場合である。 periodic series は cyclical series の特殊な場合である……」(Contributions. p. 3)

(4) "Student." "The Elimination of Spurious Correlation due to Postion in Time or Space." Biometrika vol. X, 1914. p. 179. ("Student's" Collected Papers. Cambridge 1942, p. 58)

(5) G. U. Yule. 1921 年論文, p. 501.

(6) Contributions. p. 63.

(7) Contributions. p. 63.

(8) Contributions. p. 7.　このような見解は，M. G. Kendall. "Natural Law in the Social Sciences." (J. R. S. S., Ser. A, vol. 124, 1961) にもみられる。

(9) Contributions. p. 7,　これと同じ主張は，"Agriculture." p. 103,　"Analysis." p. 96,　Introdution. p. 641–642.

(10) G. U. Yule. 1927年論文, p. 267.

(11) G. U. Yule. 同上, p. 268.

(12) G. Walker, "On Periodicity in Series of Related Terms" Proceedings of Royal Society. Ser. A., vol. 131.

(13) H. Wold. A study in the Analysis of Stationary Time Series. Stockholm 1938.

(14) "Agriculture," p. 104. この "from purely descriptive point of view" という言葉は E. Slutsky が用いた言葉である。("The Summation of Random Causes as the Source of Cyclic processes", Econometrica, vol. 5)

(15) 定差方程式については R. G. D. Allen, Mathematical Analysis for Economists. 1938（邦訳 第6章 特に 227—284頁）参照。

(16) 以下の計算については，"Autoregressive." を参照。

(17) G. U. Yule. 1927年論文, pp. 280–281.

(18) "Agriculture." p. 108.

(19) Advanced Theory. vol. II. p. 423.

(20) "Analysis." p. 97.

(21) E. Slutsky, ibid.

(22) R. Frisch. "Propagation Problems and Impulse Problems In Dynamic Economics." Economic Essay in Honour of Gustav CasseI. 1933.

第2節　自己回帰系列の諸特性

ケンダールの次の課題は，自己回帰系列を他の種の系列から識別する方法を研究することであった。彼はコレログラム，ペリオドグラム，階差法および連の理論による自己回帰系列の解析を試みた。その結果，コレログラムを除く他の方法は自己回帰系列の研究法として不適切であると判断した。特にペリオドグラムによる解析は，自己回帰系列に対し誤った結論を与える，とケンダールは言う。以下，(1)，(2)でコレログラムによる，また(3)でペリオドグラムによる自己回帰系列の分析についてのケンダールの見解を検討する。（ペリオドグラムについては前節末の注を，コレログラムについては本節末の注(1) を参照。）

(1)　コレログラムによる自己回帰系列の研究

ケンダールはまずはじめに，コレログラムを用いて時系列を分類し，ついで自己回帰系列のコレログラムの特性について考えている。

1．コレログラムによる系列の分類(2)　ケンダールによると，典型的な

「振動的変動」は一応次の三つの図式に分けて考えることができる。

① 移動平均 (moving averages)―― ランダムな系列の移動平均の結果として得られる「振動的変動」(いわゆる「スルツツキー・ユール効果」)。

② 循環的諸成分の和 (sums of cyelical Components)―― フーリエ級数あるいはより一般的な調和函数により表現される運動。

③ 自己回帰方程式 (autoregression equations)―― 第1節でみたいわゆる「自己回帰系列」。

これらの系列のコレログラムは，どんな形を示すか。

① ランダムな系列が，a_1，a_2,……a_m というウエイトで移動平均されると，系列の j 番めの項 u_j は

$$u_j=a_1\xi_j+a_2\xi_{j+1}+\cdots\cdots+a_m\xi_{j+m+1}$$

で表わされる。u_j と u_{j+k} との自己相関 r_k は

$$r_k=1-\frac{k}{m}$$

で与えられる。だから，この場合 r_k は k が大きくなるにつれて減少してき，$k=m$ で0となるコレログラムを描く。

② 調和項を含む

$$u_j=A\sin\theta_j+\xi_j$$

の場合には，r_k は

$$r_k=\frac{B}{C}\cos\theta_k \qquad k>0$$

である。したがって，調和函数のコレログラムは原調和項と同一の周期で循環する。

③ 自己回帰方程式

$$u_{t+2}+au_{t+1}+bu_t=\varepsilon_{t+2}$$

については，すでにみたように

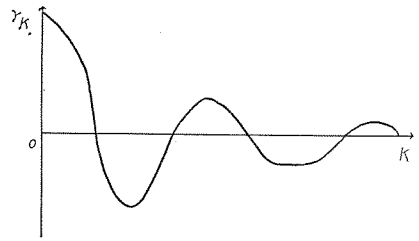
$$u_t=\sum_{j=0}^{\infty}\xi_j\,\varepsilon_{t-j+1}$$

が成立つ。u_t と u_{t+k} との自己相関 r_k は

$$r_k=\frac{p^k\sin(k\theta+\varphi)}{\sin\varphi}\qquad k>0$$

$$\tan\varphi=\frac{1+p^2}{1-p^2}\tan\theta$$

である。$p=\sqrt{b}<1$ であるから，r_k は k が大きくなると共に $2\pi/\theta$ の基本周期をもちながら急速に減衰する。それは次のような形のグラフを描く。



以上で時系列の三つの型のそれぞれについて，「理想的」なコレログラムの型が示されたわけだが，実際に手にする時系列がこれらのいずれの型に属するかを判断するためには，実際にその時系列の自己相関を計算してみて，それのコレログラムが①②③のどれに類似しているかを判断するのである。かしし，ケンダールによると，その判断の検定標準はなく「われわれの判断は直観的水準にとどまらねばならない，」という。

ところで，ケンダールの主要な関心は自己回帰系列のコレログラムであった。ここで彼は，われわれの手にする時系列が非常に短かいため，それが自己回帰系列であっても本来あるべき上図のような型のグラフを描き出さないという問題にぶつかった。ところで彼は「人工的系列」を作製し，自己回帰系のコレログラムについて研究した。(3)

(2)　自己回帰系列のコレログラムの特性

ケンダールは Contributions. において，自己回帰方程式の定数 a, b に任意の数値を入れて，次のような「人工的系列」をつくりあげた。すなわち

$$u_{t+2}=1.1u_{t+1}-0.5u_t+\varepsilon_{t+2}\cdots\cdots①$$

$$u_{t+2}=1.2u_{t+1}-0.4u_{t+1}+\varepsilon_{t+2}\cdots\cdots②$$

$$u_{t+2}=1.1u_{t+1}-0.8u_t+\varepsilon_{t+2}\cdots\cdots③$$

$$u_{t+2}=-u_{t+1}-0.5u_t+\varepsilon_{t+2}\cdots\cdots④$$

の４つである。ε 項は各値を乱数表から求め，u_t および u_{t+1} に任意の数値

を代入すると u_{t+2} 以上の項が連続的に得られる。例えば，いま乱数表から $\varepsilon_{t+2}=25$ を求め，同様に $u_{t+1}=(-35)$，$u_t=(-27)$ を求めると，①系列の第1項は

$$(1.1)(-35)-(0.5)(-27)+25=0$$

第2項は，再び乱数表から $\varepsilon=2$ を得て

$$(1.1)(0)-(0.5)(-35)-2=15.5$$

第3項は，$\varepsilon=9$ を得て

$$(1.1)(15.5)-(0.5)(0)+6=26.05$$

以下，同様にして計算される。ケンダールはその他の系列についても同様の計算を行い，①系列は480項，②系列，③系列および④系列は各240項の4つの系列を得た。

ケンダールはこれらの系列について研究を進めたが，ここで次の2つの問題が生じてきた。第1は，①系列のように480項から成る時系列は実際の時系列と比較して「非常に長い」といわなければならないが，それにも拘らず自己回帰型のコレログラムを明瞭に示さないのである。これはどのように解釈さるべきか。第2に，コレログラムは「鈍感」(inseible) なのではないかという疑問である。

第1の問題についてケンダールは，コレログラムによる研究においては系列の絶対的な長さが問題なのではなく，その系列に含まれている振動の数が問題なのだと考えている。

第2の問題については，彼は各系列の小部分のコレログラムの型と系列全体のコレログラムの型とを比較し，系列が長いほど自己回帰系列の本来的型に近づくことを確認した上で，コレログラムはたしかに「鈍感」だと答えている。

自己回帰系列のコレログラムに対する，ケンダールの見解の要点は次のようになる。

「1. 有限な長さの自己回帰系列については，コレログラムは無限な長さの系列に特有な理論的結論とは非常に異なる。そこでは，コレログラムは期

待通りには減衰しない。

2．生じている過程の真の本性の決定的な指示を与えるためには，非常に長い系列が要求されるようである。

3．コレログラム分析は自己回帰の存在をたしかに指示するようだが，短かい系列についてはいささか鈍感のようである。

4．時系列の理論におけるいくつかの意図にとっては，実質的なサンプリングの数は，実験誤差を判断するという観点からみると，カバーされる周期の数であって系列の項数ではないようにみえる。」(4)

(3)　自己回帰系列のペリオドグラム

次に自己回帰系列のペリオドグラムについてみよう。ここでのケンダールの目的は，ビヴァリッジの行なった小麦系列のペリオドグラム分析を反駁することである。彼はまずはじめに，上記の「人工的系列」のペリオドグラムについて，次いでビヴァリッジの研究について考えている。

ケンダールは各「人工的系列」のコレログラムを検討した後で，ペリオドグラムは大きな誤りへ導くこと，特に自己回帰の $p=\sqrt{b}$ の値が小さいほどしたがって原系列の減衰の程度が大きいほど誤りへ導く度合が大きいと結論する。このような考えからケンダールは，ビヴァリッジが300年にわたる西欧の小麦価格系列の中に19ケの相異なった周期のサイクルを見出しているのに対して，それらの大部分は「ニセ」であると判断すべきであろうというのである。(5)

ペリオドグラムについての，ケンダールの主張の要点は次の通りである。

「1．自己回帰系列のペリオドグラムは，実在している振動的効果を示すのに失敗し，全く誤った結論へ導くであろう。また悪いことに，実際には存在しない効果を有意であるかのように示すのである。

2．系列の減衰が激しいほど，より一層ニセの効果が現われてくるようにみえる。

3．したがって，自己相関あるいはその他の証拠が系列の連結した諸項の

中に減衰のあることを示すところでは，ペリオドグラム解析は危険である。私は，多くの場合に，それが計算の労苦に値するものかどうかを疑わしく思う。」(6)

自己相関 (serial correlation)，およびコレログラム (Correlogram) に相当する統計的手法はユールが考案したものである。

自己相関という考えは，21年論文で提出されている。(7) この論文の主題は既述したように階差法の批判であった。その批判論点は，階差をとるとなるほど大きな周期をもつ変動は除去されるが，しかし短かい周期をもつ変動は降去されずにかえってますます増大していく，ということにあった。ここで附随的に，ランダムな系列の階差系列も階差の階数が大きくなるにつれてしだいに波動運動を生み出す傾向があり，この波動運動の増大テンポと短かい周期の運動の増大テンポとの比較が問題にされた。結局は，後者の方がはるかに大きく前者は特に考慮に値しないと結論されたが，ランダム系列からの波動運動の生成，増大を確証するための方法として，ランダム系列およびその諸階差系列の隣接諸項間の相関係数の算出が試みられた。21年論文においては，まだ自己相関という名称は与えられなかったが，ケンダールも指摘しているように，これが最初の自己相関の計算であった。(8)

自己相関とい名称が与えられたのは，26年論文においてである。この論文では「無意味（ナンセンス）な相関」が問題にされ，それの原因が①われわれの手にする時系列がサイン・カーブに類似する運動を示すこと，および②われわれの時系列は，本来数世紀間にもわたって継続するはずの経済現象の極く一部しかカバーしないことに求められた。次にユールは，このような「無意味な相関」を生み出す系列を探し出すために，自己相関を利用して時系列を次のように分類した。

1. random な系列——すべての自己相関がゼロになる系列。
2. conjunct な系列——自己相関がすべて正になる系列。
3. disjunct な系列——自己相関がすべて負になる系列。

4.　oscillate な系列――自己相関が交互に正負になる系列。

2．の conjunct な系列はさらに

a．　階差系列が random な系列である conjunct な系列

b．　階差系列も conjunct である conjunct な系列

の二つに分けられる。そして，ユールはこのｂの系列こそ「無意味な相関」を生ぜしめる系列であると結論したのである。

ユールは自己相関のこのような利用と並んで，それを一つの系列の周期性の研究にも利用している。すなわち，26年論文の末節でビヴァリッジの小麦価格系列，およびグリニッチでの降雨量の観測データーについて自己相関を計算し，この自己相関のグラフに基づいてそれらのデーターの周期性について考察している。その自己相関のグラフは，明らかにコレログラムと同一のものである。ここで特徴的なのは，コレログラムと 2，3……項の間隔を置いた項同志の自己相関も計算し，そのグラフも併用していることである。

しかし，27年論文においてユールは自己相関に全く言及していない。したがって，ユールにあってはいわゆる自己回帰系列と自己相関，あるいはコレログムとの関係については何ら考慮されることがなかった。自己相関のグラフにコレログラムという名称を与え，それを実際の統計データの分析に利用したのはH・ウォルドてあり,(9) ケンダールの研究はウォルドから大きな影響を受けている。しかし研究対象を特に自己回帰系列に限定し，その諸特性をコレログラムを用いて詳細に検討したのは，ケンダールの独自的な仕事である。本節でみた研究においては，ケンダールはユールの研究を大きく乗越えている。

注

(1)　普通，相関係数は相異なる二つの系列について計算される。これに対し，自己相関係数というのは同一時系列の，ある一定の間をおいた項同志の相関係数である。いま，時系列 $u_1, u_2, \cdots\cdots u_n$ があるとすると，その平均値を求め，それからの偏差 $x_1, x_2, \cdots\cdots x_n$ を求める。原時系列の準備偏差を σ で表わすと，k 項離れた項同志の自己相関係数 r_k は

$$r_k=\frac{\Sigma xi\ xi+k}{n\sigma^2} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

で表わされる。これを k 次の自己相関係数という。r_0（つまり原系列との相関）は

$$r_0=\frac{\Sigma xi\,xi}{n\sigma^2}=\frac{\sigma^2}{\sigma^2}=1$$

となる。また

$$\frac{\Sigma x_i\,x_{i-k}}{n\sigma^2}=\frac{\Sigma x_{i-k}xi}{n\sigma^2}=\frac{\Sigma xi\,x_{i+k}}{n\sigma^2}$$

であるから，$r_k=-r_{-k}$ である。さて，k は1から n まで変化させることができる。kが変化すると共に r_k も変化する。k を横軸にとり，r_k の値を縦軸にとったグラフを描くと，それがコレログラムである。

さて，原系列が全くランダムであるならば，k を1から順次変化させると r_k も全くランダムな値をとり，したがってそのコレログラムは不規則的である。もし時系列が何らかの周期的な変動をするならば，コレログラムも一定の型の変化を示すに違いない。例えば，調和函数のコレログラムは周期的変化を示す。それゆえ，自己相関およびコレログラムは時系列の変動を分析するための有効な手段たりうるとされている。

①式では，標準偏差とした仮りに原系列のそれを用いたが，実際には xi と $xi+k$ の標準偏差でなければならない。つまり

$$r_k=\frac{\sum_{i=1}^{n-k} xi\,xi+k}{n\sigma\ \sigma i+k}\quad\cdots\cdots②$$

でなければならない。②は

$$r_k=\frac{\sum_{i=1}^{n-k} x_i\,x_i+k}{\left\{\sum_{i=i}^{n-k} x_i^2\sum_{i=1}^{n-k} x_{i+k}\right\}^{\frac{1}{2}}}\quad\cdots\cdots③$$

と書ける。kendall が実際に利用しているのは③式である。なお米沢治文「統計系列の自己相関について」（日本統計会年報 第12年，昭和19年），「自己相関測定の理論」（東北大学「経済学」25，1952，No. 2）参照。

(2) 以下 Advanced Theory. Vol. II. pp. 399–400. 参照。

(3) see. "Analysis." Contributions.

(4) Contributions. p. 40. なお，この点については，宮川公男「経済時系列分析における困難と横断分析」（「一橋論叢」第37巻 第3号）参照。

(5) そもそも "Analysis" での Kendall の目的は，Beveridge の研究を再検討することであった。Kendall は，この論文の冒頭で次のように云っている。「……William 郷は，彼のあげた資料が……19 の Cycle' を含んでいるという結論に達した。私は1949年に，その資料のコレログラム分析を行った。そして私は，……二つの oscillatory movement のみの証拠をみつけることができた。二つの手法の結論の相違は非常に著しく，かつ全く理解しがたい。というのは，有限系列については，それら

は理論的にいって同等だからである。わずかに三つの説明だけが可能のように思える。

(a) コレログラムは鈍感で，実在している Oscillation を明らかにするのに失敗した——少くとも私の目には。

(b) ペリオドグラムが誤って解釈されたのであり，William 郷の19の周期のうち17は無意味である。

(c) (a)と(b)は共にある程度まで正しいのであり，その資料について数であげることのできる実際の周期の数は，2と19の間のどこかにある。

以下で述べる研究は，この難問を明らかにしようとする願望によって促されたものであった。」("Analysis." p. 93)

(6) Contribution. p. 48.

(7) ユールの研究については，前記拙稿を参照されたい。

(8) "Elimination." p. 45

(9) H. Wold. bibd.,

むすび

以上でみたように，ケンダールの自己回帰系列に関する研究はユールに大きく依拠している。特に自己回帰図式のいわば「理論的」基礎づけにあたる部分では，ユールの見解をそのまま受け入れ，反復，敷衍しているところが多い。

しかし他方では，①ユールの研究は経済現象とそれほど関係のない場面で展開された（特に27年論文において）のに対しケンダールの関心は専ら経済現象に向けられていること，②ユールにおいてはまだ萌芽的形態において利用されていた統計的手法が，より広範に利用され，かつ「精密化」されたこと，③ユールにあってはまだ結合されていなかった自己相関，コレログラムと定差方程式を相互に結びつけ，一つの一体化した統計的研究法につくりあげたこと，これらの点でケンダールはユールを凌駕している。

しかしながら，ケンダールにあってこれらの統計的手法が経済現象の研究において対象をどのように反映し，表現するかについて反省されることがない。（もっとも，自己回帰図式についてはそれを主張する根拠が経済の均衡論的解釈に求められてはいる。しかし，その解釈は，経済現象の本質を把握しているとは決していえ

ないのみならず，ケンダールが自己回帰図式の妥当性を主張するとき，この図式は均衡論的解釈と切離されて，対象を要約的に把握するためのア・プリオリに用意された道具に転化している。)(1)

われわれはコレログラム，自己回帰系列の研究を行う前に，それらの研究が経済現象の研究にどのように役立つかについて反省しなくてはなるまい。経済現象の研究において，変動の形（あるいは型）そのものを数学的に処理することが，研究を進める上でどれほど役立つであろうか。その変動は経済の歴史的・社会的諸条件によって規定されているのであり，したがってそれらの諸条件こそまず第一に研究さるべきものである。そのような研究を行なわずに，統計数字そしてそれの描くグラフの形だけを研究したところで何が明らかになろうか。そのような「研究」を如何に多く積み重ねても，結局は現象の表面をなでまわすことで終ってしまうであろう。

われわれは第1節で，ケンダールが統計学の課題を，現象を要約し経済学者の研究に素材を提供することに限定していることをみた。この研究態度は，ケンダールの研究を一貫している。この研究態度こそ，彼の数学主義的思考をおし進め，数学的諸方法のより詳細な研究，尨大な統計資料の数学的処理へと伺わせたのであった。しかし，その研究成果の科学的意義は極わめて乏しいといわなければなるまい。

われわれには，次の諸点がまだ問題として残されている。①統計学の課題をデーターの要約にありとするケンダールの見解はどのような思想的背景をもっているのか。例えばK・ピアソンとの関係はどうかを明らかにすること。②ケンダールの均衡論が，いかなる学説史的背景をもって成立したかをより具体的に研究すること。③ケンダールの研究が今日の近代経済学および数理統計学にいかなる影響を与えているかを追究すること。これらの諸点の研究は今後の課題としたい。

注

(1)　このような考え方の批判については，岩崎允胤「現代社会科学方法論の批判」（未来社 1965）参照。