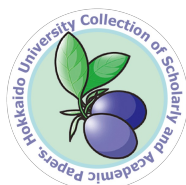




Title	均衡価格を求めるアルゴリズムとしてのシンプレックス法
Author(s)	永田, 信
Citation	経済學研究, 36(2), 1-17
Issue Date	1986-09
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/31739
Type	departmental bulletin paper
File Information	36(2)_P1-17.pdf



均衡価格を求めるアルゴリズムとしての シンプレックス法

永 田 信

線型計画法 (LP) で扱われる典型的な生産問題は、消費者と生産者からなる経済としてとらえ直すことができる。最適生産を求めることは、双対定理のいうようにシャドウプライスを求めることに相等するが、このシャドウプライスは均衡価格として理解できる。したがって、シンプレックス (simplex) 法は均衡価格を求めるアルゴリズムとして理解できることになる。

以下第Ⅰ節で生産問題を定式化¹⁾、第Ⅱ節で simplex 法の通常理解を示し、第Ⅲ節で均衡価格を求めるアルゴリズムとして捉え直す。更に、均衡価格が双対問題の解になることから、第Ⅳ節で双対定理の証明を与え、最後に、このアルゴリズムの自然な応用として、輸送問題を第Ⅴ節で述べる。

Ⅰ 線型の生産問題の定式

Ⅰ-1 具体例

「資本」と「労働」を投入財として用い、「生産物」を作る。「技術」は2つあって、1つは4単位の資本と2単位の労働で3単位の生産物を作るもので、もう1つは3単位の資本と5単位の労働で4単位の生産物を作るものとする。資本と労働の賦与量がそれぞれ12単位、10単位であるとき、生産物を最大にするには2つの技

術をどう用いたら良いだろうか。

技術は、「一次同次」かつ「加法的」とする。前者は投入物を (全て) n 倍 ($n \geq 0$) すれば、生産物も n 倍になることを意味し、後者は同時に2つ (或いは一般に幾つも) の技術を用いても互いに干渉し合わないことを意味する。技術はそれぞれ n 倍できるのだから、ある基準の何倍用いているか、ということができる。ここでは上述の組合わせを基準にとり、第1の技術を x_1 倍用い、第2の技術を x_2 倍用いることにすれば、資本を $4x_1 + 3x_2$ 、労働を $2x_1 + 5x_2$ 投入し、生産物を $3x_1 + 4x_2$ 生産することになる。従って、賦与量の制約のもとで生産を最大にするという問題は、以下の如く書ける。

$$(IA) \quad \begin{cases} \max & 3x_1 + 4x_2 & (\text{生産物}) \\ \text{s.t.} & 4x_1 + 3x_2 \leq 12 & (\text{資本}) \\ & 2x_1 + 5x_2 \leq 10 & (\text{労働}) \\ & x_j \geq 0 \text{ for } j=1, 2 \end{cases}$$

投入物は必ずしも全て使い切られるとは限らない。題意から、資本、労働ともに使い切らない場合は最適ではないが、どちらに余剰が生じるか即断もできない。どちらに対しても余剰が生じる可能性を保証するために、形式上余っている資本、及び労働を、それぞれ y_1 、 y_2 で ($y_1 \geq 0$, $y_2 \geq 0$)、表すことにしよう。これらを slack 変数と呼ぶ。このとき y_1 及び y_2 はゼロかも知れず、正かも知れない。即ち「非負」である。(IA) の不等式は以下の如く書換え

1) このノートは H. Scarf の講義をもとに LP の初習者を念頭に書いている。既習者は第Ⅰ、Ⅱ節をとばして第Ⅲ節より読まれて差支えない。

これを simplex tableau で表わせば次の通りとなる。

$$(IIC) \begin{array}{c|cccccccc} z & y_1 & y_2 & \cdots & y_n & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & b \\ \hline 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 & -c_2 & \cdots & -c_m & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & 0 & a_{11} & a_{12} & & a_{1m} & b_1 \\ 0 & 0 & 1 & & 0 & a_{21} & a_{22} & & a_{2m} & b_2 \\ \vdots & & & \ddots & & & & \ddots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & & 1 & a_{n1} & a_{n2} & & a_{nm} & b_n \end{array}$$

我々の扱う LP 問題は幾つかの点で一般的ではない。まず、もともと狭義の制約条件が全て不等式で与えられている。また、符号条件が(もともとの)全ての変数を非負としている(この2つの条件を満たすものは「基準型」として知られている)。更には右辺相当の、つまり tableau の最右列が(第1行要素はゼロだがそれ以外)、全て正である。この3条件を満たすものを「単純形」と呼ぼう。以下では単純形であり「非退化」のものだけを扱うことにする²⁾。

II Simplex 法

II-1 幾可的解法

(I A) の定式は簡単に第1図の様に示せる。「許容解」(広義の制約条件を満たす x_1, x_2 の組合せ)の集合が斜線で示された四角形となり、また目的関数の値を同じくする x_1, x_2 の軌跡(図上、等目的値直線と呼ぶ)を描くことができる。このとき、④許容解が凸多角形をなすこと、及び、⑥最大値がその端点³⁾で与えられることが見てとれる。

(I B) の定式では、図示は $((z, y_1, y_2, x_1, x_2)$ の5次元空間での話になるので)できないが⁴⁾、上述の④⑥に同様のことがいえる。

2) 「退化」の定義、及び単純形以外へ、或いは退化する場合へ、このノートの議論を一般化するやり方については、LP の教科書にゆずる。

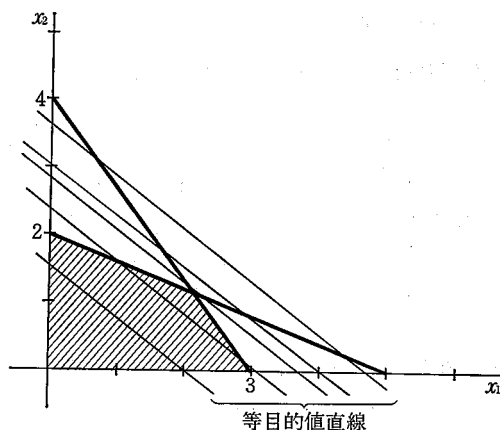
3) (30/17, 28/17)。

4) 2変数1制約不等式は等式系に変換してもなお図示可能。例： $x_1 + x_2 \leq 1, x_1, x_2 \geq 0$ は、 $y_1 + x_1 + x_2 = 1, y_1, x_1, x_2 \geq 0$ となり、3次元の simplex となる。

またこれは一般にもいえる⁵⁾。

II-2 端点の代数的解法：Part I

さて、端点を図上でなく代数的に求めるにはどうしたら良いだろうか。第1図でも $(0, 0)$,



第1図

$(3, 0)$, $(0, 2)$ はすぐ分かるが、4つ目は代数的に解かねばならないだろう。

実際、許容解の集合は4つの不等式；

$$x_1 \geq 0 \quad \cdots \cdots (1)$$

$$x_2 \geq 0 \quad \cdots \cdots (2)$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 12 \quad \cdots \cdots (3)$$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 10 \quad \cdots \cdots (4)$$

のそれぞれの表わす半空間の交りとして求めたものである。その端は、つまり境界線は上の不等式が等式で成立しているところなのだから、端点を求めるには、この4つの不等式から2本を選び、それを等式として連立方程式を作り、解けば良い。勿論、この2本の選び方は「適当」なものであって、他の2本の不等式をも満たしていなければ端点ではない。実際4本から2本選ぶには ${}_4C_2=6$ の組合せがあり、2個余分がでている。これは6つの組合せのうちの2つは $(5, 0)$ と $(0, 4)$ を与えるものとなっていて余

5) 証明は、LP の教科書にゆずる。ここでは直感的に理解できればよい。

分だからである。(第1図参照)。

従って、単に2本を選ぶことは「端点の候補」を求めることに過ぎず、端点を求めるには不充分である。

どのように「適当」な選び方をすべきかの議論は先にのぼして、このような「端点の候補」の求め方が等式系 (I B) や一般にはどうなるのか、考えてみよう。

(I A) で不等式から等式として成立するものを選ぶことは、等式系 (I B) にあってはどのような意味を持つであろうか。不等式系から等式として成立するものとして狭義の制約条件を選び出したとしよう (例えば、上述の(3), (4))。それは対応する slack 変数 (y_1, y_2) をゼロにしたことに等しい。また符号条件である不等式 ((1), (2)式) を選んだのであれば、その変数 (x_1, x_2) をゼロにしたことになる。

一般的に考えてみよう。(II A) では m 次元空間で考えている。従って、 m 本の (独立で無矛盾の) 一次方程式により一点が与えられる。符号条件として m 本の不等式が与えられ、(狭義の) 制約式の n 本の不等式とともに、許容解が定義されている。従って「端点の候補」を求めるには、この $m+n$ 本から m 本選び出し等式とし、その連立方程式系を解けば良いことになる⁶⁾。(II B) に於いてはゼロにすべき変数を m 個選ぶことに等しいことは上述の議論から明らかであろう。

II-3 自明な解

I-1 の最後で述べた様に、simplex tableau が与えられると、それは逆に生産問題として解釈できる。また単純形の simplex tableau については、更に、「自明な解」を示しているとの解釈もできる⁷⁾。

6) m 個の変数で m 個の方程式だから解けると言う訳である。勿論 rank 条件が必要だが、詳述しない。

7) 単純形での simplex 法では、自明な解であるばかりでなく、自明な「端点の候補」であり、しかも自明な端点でさえある。

「自明な解」とは、tableau の中に単位行列が含まれる時、それを除いた左辺相当の列に当たる変数をゼロとおいて、制約式を解いたものである。例えば (I C) では第1, 2, 3列によって単位行列が作られるので、それ以外の列に対応する変数をゼロとおき ($x_1=x_2=0$)、(I B) を書き出せば、

$$\begin{cases} z & = 0 \\ y_1 & = 12 \\ y_2 & = 10 \end{cases}$$

となる。これは解くまでもなく (故に「自明」と呼ぶ) 解を与える。また右辺は非負であるので、ゼロにおかなかった変数 (ここでは z, y_1, y_2) も非負、ゼロにおいた変数 (x_1, x_2) も勿論非負なので符号条件も満たす。一般例でも同様のことが言える。

$$\begin{cases} z_1 & = 0 \\ y_1 & = b_1 \\ & \vdots \\ y_n & = b_n \end{cases}$$

y_j の定義は余剰であった。少し見方を変えよう。 y_j に相当する tableau の列を x_i に相当する列と同様に解釈するのである。即ち、 j 番目の投入財を1単位用いて、そして他の投入財は使わずに、生産物をゼロ単位生産する技術と考えるのである。これは j 番目の投入財を捨てることに他ならないので、disposal activity と考えられる。

従って、simplex tableau の始めの形 (I C) に対応する自明の解は、各投入財を全て捨て、生産物を何も生まない状態を表わしていたことになる。

さて、「自明な解」が端点の候補を与えることは、II-2 の議論と多少の数え上げで明らかになる。一般例で tableau (II C) は $(n+1) \times (m+n+2)$ 次元のマトリックスであった。このとき単位行列は $(n+1) \times (n+1)$ 次元であり、残りの変数は (右辺の定数を除いて) m 個

である (x_j の個数でもあるので確か)。故にゼロにおいた変数は m 個であり、従って自明な解は端点の候補でもある。しかも単純形なので右辺相当の要素は非負であり、符号条件も満たすので、実際、端点であった。

II-4 端点の代数的解法: Part II

(I B) で、「端点の候補」を求めるために、 $x_2=0, y_1=0$ としたとすれば、連立方程式は、

$$\begin{cases} z & -3x_1 & = 0 \\ & 4x_1 & = 12 \\ & y_2 + 2x_1 & = 10 \end{cases}$$

となる。これらの各式に定数をかけたり辺々加えるなどして; (第1式) $+3/4 \times$ (第2式), $1/4 \times$ (第2式), (第3式) $-2/4 \times$ (第2式);

$$\begin{cases} z & & = 9 \\ & x_1 & = 3 \\ & y_2 & = 4 \end{cases}$$

を得る。この演算は通常の消去法に他ならない。

以上の端点の候補を求める手続きは、④もとの等式系に ($x_2=0, y_1=0$) の条件を代入し、⑥消去法に相当する演算を行う、という2段階からなっている。この順序を逆にして、先に同じ演算⑥を (I B) に行い、

$$(ID) \begin{cases} z + 3/4 y_1 & - 7/4 x_2 = 9 \\ & 1/4 y_1 & + x_1 + 3/4 x_2 = 3 \\ & -1/2 y_1 + y_2 & + 7/2 x_2 = 4 \end{cases}$$

を得て、④ $x_2=0, y_1=0$ を代入しても同じことである。(I D) を tableau の形で表わせば、

$$(IE) \begin{array}{cccccc} & z & y_1 & y_2 & x_1 & x_2 & b \\ \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 0 & 0 & -7/4 & 9 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1 & 3/4 & 3 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 & 7/2 & 4 \end{pmatrix} \end{array}$$

の形になる。第2, 5, 6列 (i.e. y_1 と x_2 と b 相当の列) を省くと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

の形になり「列の乱れた単位行列」⁸⁾ となる。

これを基礎に自明の解を求めてやれば (z, y_1, y_2, x_1, x_2) = (9, 0, 4, 3, 0) となる。

上の④ゼロにおく、⑥演算、の順を逆にすることを一般的に、連立方程式系 (II C) に対して考えるには、2つの単純な観察が助けになる。1つは連立一次方程式を解くという演算は行列表現では「列の乱れた単位行列」を作ることである点。もう一つは m 個の変数をゼロにすれば他の変数 $n+1$ 個は連立方程式の解として求められるという点である。

手続きは次のようになる。ゼロにする m 個の変数が決まれば (上の例では y_1, x_2) 同時に連立方程式として解くべき $n+1$ 個の変数が決まる (z, y_2, x_1)。そこで、①それに対応する列が「列の乱れた単位行列」となるように、行に関する「実数倍」と「他の行を加える」という2種の基本演算を施す (I E を求める)。次に、②ゼロにすべき変数にゼロを代入してやる (I D に代入する)。これは (I E に対して) 自明な解を見てとれば良いことになる。

ここで、ほとんど自明のことであるが、左辺相当の列の $n+m+1$ 本 (z, y_i, x_j) から選ぶ $n+1$ 本 (解くべき変数、列) には z に対応する最左列を含むべきであることに注意しよう。何故なら、 z を導入したのは目的関数を見易くする為だったからである。

II-5 pivoting

II-4 までの議論を用いれば、理論上 LP は代数的に解ける事になる。まず、II-1 で最適解は端点で与えられる事を直感的に見た。II-2 では、 m 個の変数をゼロにおき連立方程式を解くことで端点の候補の得られることを見た。

8) 行の乱れた単位行列でもある。乱れのない (通常の) 単位行列にしても議論は変わらないが、計算が多少複雑になる。

II-3では, tableau が単位行列を含むとき, それを自明な解を表わすものとして見ることを学んだ。更にII-4で単位行列をどの $n+1$ 本の列に出現させるかによって端点の候補を様々に得ることが出来ることを見た。また, m 個の変数はゼロ, $n+1$ 個の変数の値は改訂された tableau の右辺相当の列に与えられるので, 改訂された tableau を見るだけで, その端点の候補が実際, 端点であるか否か判断がつく。しかも右辺の第1行要素は z であり, 目的関数の値を与えるので, $m+nC_m$ 個の tableau を計算すれば⁹⁾, それらの tableau を比較するだけで (最右列は非負のものだけとり出し, その中で第1行要素の最大のものを選び出せば, 各変数の値もその tableau に自明なものとして) 解が与えられる。

勿論, この様な網羅的な方法では ($m+nC_n$ 個の tableau の計算) 時間がかかって仕様がな。何らかの方法で systematic に計算しようと考えられたのが simplex 法である。

我々の問題では, もともとの tableau に (z と y_i に対応するところに) 単位行列がはいっている。まず1つ x_j を選び, これに対応する列を単位行列の中に「呼び込」んでやろう。すると1つの y_i に対応する列が「掃き出」されることになる。例えば, (I C) に対して x_1 を呼び込み, y_1 を掃き出せば, (I E) を得る。このように1つずつ変数を選び換え, 単位行列化を計ることを pivotting と呼ぶ。

さて (I C) に対して, x_1 を呼び込み, y_1 を掃き出すことに決めれば, x_1 の列は $(0, 1, 0)^T$ の形の単位ベクトルに, 基本演算の繰返しで変形されることになる。逆に x_1 の列をどの単位ベクトルに変形するかを決めれば, どの列が掃き出されることになるか決まる。例えば, $(0, 0, 1)^T$ へ変形するのであれば y_2 が掃き出されることになる。

即ち, どの列を呼び込み, そのどの行をゼロにせずに (i.e. 1にして) 残すかを決定すれば, pivotting は一意に決まる。このように特定された要素を「pivot 要素」と呼ぶ。

例えば, (I E) の x_2 列の第3行要素, 即ち $\frac{7}{2}$ を pivot 要素として掃き出しを行う。まず, 第3行を $\frac{2}{7}$ 倍して $(0, -\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, 0, 1, \frac{8}{7})$ とする。その $-\frac{3}{4}$ 倍を第2行へ, また $\frac{7}{4}$ 倍を第1行へ加えてやれば, x_2 列の第1, 2行はゼロになり, (I F) を得る。

$$(IF) \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 & 0 & 11 \\ 0 & \frac{5}{14} - \frac{3}{14} & 1 & 0 & 15\frac{1}{7} \\ 0 & -\frac{1}{7} & \frac{2}{7} & 0 & 1 & \frac{8}{7} \end{pmatrix}$$

残された課題は, どのように pivot 要素を選び出すか (i.e. 行と列) である。

II-6 pivot 要素: 列の選び方

まず一般的な simplex tableau を次の如く定義する。

$$(IID) \begin{pmatrix} z & y_1 & y_2 & \cdots & y_n & x_1 & x_2 & \cdots & x_m & b \\ 1 & \pi_1 & \pi_2 & \cdots & \pi_n & \pi_{n+1} & \pi_{n+2} & \cdots & \pi_{n+m} & b'_0 \\ 0 & a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} & a'_{1,n+1} & a'_{1,n+2} & \cdots & a'_{1,n+m} & b'_1 \\ 0 & a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} & a'_{2,n+1} & a'_{2,n+2} & \cdots & a'_{2,n+m} & b'_2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} & a'_{n,n+1} & a'_{n,n+2} & \cdots & a'_{n,n+m} & b'_n \end{pmatrix}$$

9) $m+n+2$ 行より $n+1$ 行 (もしくは m 行) を選ぶが, 最右列は定数相当の列なので選ばない,

最左列は z に相当なので必ず選ぶ。従って選択は, 残された列に関するものになる。

勿論, もととの tableau (II C) も (II D) の特殊として包含される。我々の興味があるのは更に次の条件を満たすものである。③(II D)の中には単位行列を含むこと。これはもととの tableau についても言えるし, pivoting の結果, そうなるので, 我々の興味をこのように限定しても良いからである。また, ④最右の b 列は正 (例外的に, もととの tableau の b_0 だけゼロを許す) とする¹⁰⁾。この条件を要請するのは, tableau を自明の解として見る時, 自明の解が端点になることを保証するためである。

以上の2条件を満たす (I D) を, 生産問題を示すものとして, 2通りに解釈ができる。これを具体例 (I E) に関して述べて見よう。まず第一は, もととの問題 (I A) とは別の問題 (併し, 解は一致する¹¹⁾) と考えるのである。(I C) から (I A) を (逆に) 求めた様に (I E) から次の問題を得る。

$$(IG) \begin{cases} \max & -\frac{3}{4}y_1 & +\frac{7}{4}x_2+9 \\ \text{s.t.} & \frac{1}{4}y_1 & +x_1+\frac{3}{4}x_2\leq 3 \\ & -\frac{1}{2}y_1+y_2 & +\frac{7}{2}x_2\leq 4 \\ & y_j, x_j & \geq 0, j=1, 2 \end{cases}$$

この時, y_2 と x_1 は disposal activities を表わし, y_1 と x_2 は「生産技術」を表わすと理解される。但し, y_1 は資本 $\frac{1}{4}$ 単位と労働を $-\frac{1}{2}$ 単位用いて生産物を $-\frac{3}{4}$ 単位産出する技術で, 換言すれば, 生産物 $\frac{3}{4}$ 単位と資本 $\frac{1}{4}$ 単位で労働を $\frac{1}{2}$ 単位生み出す技術と読める。

この解釈に従い, 等式系で問題を考えると, もととの問題とは形式上違うが, $(z, y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m)$ 空間での許容解が (数学的に) 同じ問題であることに気付く。また, 目的関数 (z のみ) が同じなので, 最適解も同じ

10) 正でなく, 非負であれば, 充分。また, b'_0 については制限は不要。しかし, もととの tableau でゼロであり, 以下で述べるように pivoting 毎に増加するので, 本文の様に言うことができる。

11) 基本操作の前の式を満たす x は, 後の式をも満たす。また, 逆も言える。

問題として把握される。

もう一つの解釈は, もととの問題に即して, 各変数に意味を与えるものである。これについては付論2に譲る。

さて, (I G) に於いて, 自明の解では y_1 と x_2 をゼロにおいてある。それらのうちでゼロ以外 (i.e. 正・非負条件) にすることで目的関数を増大できるものがあるだろうか。答は是である。 x_2 を正にすることは好ましい。故に, 「非ゼロの変数の組」, i.e. 「単位行列の列」として x_2 を呼び込むことが要請される。

一般の場合もまったく同様である。(II D) の第1行は

$$z + (\pi_1 y_1 + \pi_2 y_2 + \dots + \pi_n y_n) + (\pi_{n+1} x_1 + \pi_{n+2} x_2 + \dots + \pi_{n+m} x_m) = b'_0$$

であるが移項して, 目的関数の形にすれば,

$$(II-F) \quad z = (-\pi_1 y_1 - \pi_2 y_2 - \dots - \pi_n y_n) + (-\pi_{n+1} x_1 - \pi_{n+2} x_2 - \dots - \pi_{n+m} x_m) + b'_0$$

となる。この右辺の $n+m$ 個の変数のうち n 個の係数はゼロである (・条件②)。もし $\pi_j \geq 0, j=1, 2, \dots, n+m$ であれば, z は b'_0 以上増大できないので, その時の自明の解が最大値を与えており, もし $\pi_i < 0$ なるものがあれば, 対応する変数 ($\pi_i < 0$ であれば単位行列の構成列にはいっていない。故に自明の解としては負数になっている) を正にすることで目的関数の値を増大できる。故に,

pivot 行の選び方

1. π_j の中から, $\pi_j < 0$ のものを選ぶ¹²⁾。
2. π_j の中に, $\pi_j < 0$ がない (i.e. $\pi_j \geq 0$ for all j) ならば, その時の自明の解が, 最適値 b'_0 を与える。

12) $\pi_i < 0$ なる j が2つ以上ある場合は, そのうちのどれを取っても良い。そのうちの絶対値が最大である j を選ぶのが通例だが, これは本質的な選択ではない。負であれば充分である。

II-7 pivot 要素：行の選び方

前節で, tableau の最右列に要請された条件は, 非負であることであった。従って行の選び方は, 最右列に負数はいり込まない様にすれば良い。選択を誤ると負数が生じることは, (I C) から x_1 列を pivot 列として選んだが第3行を pivot 行として, 要素2を pivot 要素とした場合に明らかである。

$$(IH) \begin{pmatrix} 1 & 0 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{7}{2} & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 0 & -7 & -8 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & \frac{5}{2} & 5 \end{pmatrix}$$

この時, 自明の解は $(z, y_1, y_2, x_1, x_0) = (15, -8, 0, 5, 0)$ であり, もともとの問題に対しては $(x_1, x_2) = (5, 0)$ で, 目的関数を15にするが, 資本についての制約条件を満たさない (第1図参照)。

一般的な場合 (II D) に於いて, 第 j 列を pivot 列に選んだとしよう ($\pi_j < 0$)。このとき更に第 i 行を pivot 行とすれば, どのような条件のとき, pivoting によって最右列に負数はいり込むか考えてみよう。

まず, a'_{ij} を1へ換えるべく, 第 i 行を a'_{ij} で割り, a'_{kj} ($k \neq i$) を0に換えるべく第 k 行に第 i 行の $-a'_{ki}/a'_{ij}$ 倍を加える。従って¹³⁾,

$$(IIE) \begin{pmatrix} j \text{ 列} & \text{最右列} \\ \downarrow & \downarrow \\ 0 & b'_0 - b'_i \cdot \pi_j / a'_{ij} \\ 0 & b'_1 - b'_i \cdot a'_{1j} / a'_{ij} \\ \vdots & \vdots \\ 1 & b'_i / a'_{ij} \\ \vdots & \vdots \\ 0 & b'_n - b'_i \cdot a'_{nj} / a'_{ij} \end{pmatrix} \leftarrow i \text{ 行}$$

を得る。このとき最右列が正であるためには,

$$(I) \quad b'_i / a'_{ij} > 0$$

$$(II) \quad b'_k - b'_i \cdot a'_{kj} / a'_{ij} > 0$$

$$k=1, 2, \dots, n, \text{ but } i.$$

13) 最右辺の第1行 (目的関数相当の行) の吟味は後述。

の2つの条件が必要となる¹⁴⁾。条件 (I) は, pivoting 前の tableau の最右列が正であるので

$$(I') \quad a'_{ij} > 0$$

と同じである。この条件を用いて (II) を書き直せば (移項し, 正である $a'_{ij}/(b'_k \cdot b'_i)$ をかけると),

$$(II') \quad \frac{a'_{ij}}{b'_i} > \frac{a'_{kj}}{b'_k} \quad \text{for } k=1, 2, \dots, n, \text{ but } i.$$

となる。即ち, 各行ごとに当該列 (j) と最右列の「比, a'_{ki}/b'_k 」をとり最大のものを選べば (これを「比テスト」と呼ぶ ((II'), 故に (II)), を満足する¹⁵⁾。

さて, この2条件を満たすものが常にあるか, 吟味してみよう。まず (I') を満たす i がいない場合もある。つまり, (II D) のある列 j に関して, $\pi_j < 0$ で $a'_{ij} \leq 0$, for $i=1, 2, \dots, n$ という場合である。この時の j 列の意味を考えてみれば, $\pi_j < 0$ なので生産物を生産することができ, しかも正の投入がない ($a'_{ij} > 0$ がない)。負の投入があるかも知れないが, そうであれば, 投入財をも同時に生じていることになる (cf. II-6 (I G) の解釈)。もしこの様な技術があれば, 投入財の制限に抵触することなく, 産出をいくらでも増大できることになる。

では, a'_{ij} の符号が, あるものは正, またあるものは非正であったとすればどうか。まず (I') を満たすべく i の候補を選ぶことができまた (II') を満たすものを選ぶ。何故なら比, a'_{ki}/b'_k は有限なので最大のものを選ぶからである。

次に, II-6, 7によって pivot 要素が一

14) (II E) では第 j 列と最右列 (数えてみれば, 第 $n+m+2$ 列) のみを記した。他の列は議論に関係がないので略した。

15) (I H) で b 列に負が生じたのは (II') の条件を満たさない行を選んだためである。

意に定まるかを考えてみよう。まず $\pi_j < 0$ を満たす j は複数個あるかも知れない。併しこれは後に述べる様に、どれを選んでも差支えない。次に「比テスト」に於いて最大値を与えるものが複数個あるとどうなるだろうか。「比テスト」は(II)を満足させるためのものであった。「比」の最大値が2つ(以上)あれば、新しい tableau (II E) の右辺にゼロが生じることになる。この場合、自明の解に於いて、ゼロになる変数は $m+1$ 個(以上)となる。等式系で表現した時の「変数がゼロになる」は、不等式系での「不等式が等式で成立する」である。つまり、 $(x_1, \dots, x_n)$ 空間で境界(超)平面が $m+1$ 個、交っていることになる¹⁶⁾。これは自明の解が端点であることに反する訳ではない。但し、次の比テストを行う時に「比」が定義できなくなるという不都合が生じる。この様に「比テスト」で同点首位の生じる場合を「退化」と呼び、このノートでは「退化」は生じないと仮定する¹⁷⁾。まとめると以下のようになる。

pivot 行の選び方：比テスト

- ① その列(j とする)における a'_{ij} 要素のうち、正のもののみとり出す。無ければ、目的関数は無限大をとりうる。
- ② 当該 a'_{ij} の各々について対応する最右列要素との比 a'_{ij}/b'_i を計算し、最大のものを選ぶ。

II-8 Simplex 法

今迄の議論をまとめ、simplex 法により単純形で退化のない LP 問題で最適解(∞ を含む)が得られることを示す。

- 16) m 次元空間に慣れない者は $m=2$ 、つまり平面内で3本の境界線が交っている場合を想定すれば良い。
- 17) m 次元空間で $(m-1)$ 次(超)平面が $m+1$ 個交わる(m を2として読んでも可)確率がゼロであるとして「退化」を無視する「実務的」扱いもある。厳密な扱いは教科書にゆずる。

- ① 問題を simplex tableau に書き表わす(II-1参照)。
- ② これを(II D)の特殊と見なし(II-6参照)、第一行に負数があるか調べ、④なければ、その tableau の示す自明の解(II-3参照)が最適値を与える。⑧あれば、その列を pivot 列とし、③へ進む(II-6参照)。
- ③ pivot 列の a'_{ij} 要素から正のものを取り出す。④もしなければ、最適値は無限大となる¹⁸⁾。⑧もしあれば、それらの中で比テストを行い、pivot 行を決定する(II-7参照)。
- ④ 得られた pivot 要素に関して pivoting を施し(II-5)、改訂された tableau について、②を行う。

simplex 法が必ず終了することは、次の2つの事実より明らかである。

1. 端点の数は、端点の候補より少なく、候補の数は $m+nC_m$ であり有限である。端点の候補は全て(上の列や行の選び方を無視すれば)、pivoting で自明の解として得られる。
2. 上の手続きのもとで、pivoting 毎に目的関数の値は(強意に)増加している。これは(II E)より明らか。新しい z の自明の値は $b'_0 - b'_i \cdot \pi_j / a'_{ij}$ であるが、 $b'_i > 0$ (II-6, b), $\pi_j < 0$ (II-6, 1)そして $a'_{ij} > 0$ (II-7, (I'))なので、pivoting 前の z の自明な値 b'_0 より大きい。

さて上述の1より、simplex 法は循環しなければ②-④もしくは③-④の意味で必ず終了するが、2は循環しないことを保証する。

(幾度かの pivoting の末、得られた)第1行の π_j が全て非負である tableau を「最終 tableau」と呼ぶ。最終 tableau の示す自明の解が最適値を与えることは($z, y_1, \dots, y_n, x_1, \dots, x_m$)空間で考えた時、明らかである。

- 18) この時対応する変数を無限大にするのは自明だが、同時に他の変数も何らかの比率で無限大にしなければ、(一般には)制約を満たさなくなる。

任意の許容解は、(II B) を満たすものとして定めるが、それに基本操作を加えて得られた (II F) 式をも満たす。同様に、最終 tableau の定義する制約をも満たす。ところが、最終 tableau では $\pi_j \geq 0$ ($j=1, 2, \dots, m+n$)。また、任意の許容解について $y_i \geq 0$ ($i=1, 2, \dots, n$)、また $x_j \geq 0$ ($j=1, 2, \dots, m$)。故に、最終 tableau の係数 b'_0 と任意の許容解について $z \leq b'_0$ が成立する。また最終 tableau の与える自明の解を $(z^*, y^*_1, \dots, y^*_n, x^*_1, \dots, x^*_m)$ で示せば、 $z^* = b'_0$ 。故に、任意の許容解について、 $z \leq z^*$ 。

III 均衡価格を求めるアルゴリズムとして の simplex 法

III-1 経済、均衡価格、部分経済での均衡価格

I で考えた生産問題 (II-B, C) を価格機構の働く分権的な経済として考えてみよう。

「経済」は消費者と企業からなる。消費者は price-taker であり、与えられた価格で彼の効用を最大化する様、行動し、企業も price-taker であって、与えられた価格のもとで、自らの技術により利潤を最大化する様、行動する。

消費者は 1 人で¹⁹⁾、投入財を初期保有として持っている。その量は、各々、 $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ で与えられる。それらは、価格 $(p_1, p_2, \dots, p_n) \geq 0$ で売ることが出来、売上げで生産物 (価格は 1) を買う。彼の効用は生産物の量だけの単調増加関数である。彼の行動は極めて単純である。保有する投入財を全て売却し、全て生産物の購入にあてる。(細かく言えば、 $p_j \geq 0$ のみを仮定するので、中には $p_j = 0$ の場合もある。彼は売っても売らなくても無差別である。併し、この場合も売ってしまうと仮定する。)

19) 消費者が 1 人なのに、独占を形成し価格を設定しようとしなのは、暗然に r -倍の経済を考えているからである。つまり、実は非常に多くの r 人の消費者が居、また企業も同様に、同じタイプの企業が r ずつ居ると仮定しているのである。

企業は $m+n$ 個ある²⁰⁾。それぞれ 1 つの線型な技術を持っている。例えば $n+j$ 番目 ($j=1, 2, \dots, m$) の企業は投入財を $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ 用いて生産物を c_j だけ産出できる。また i 番目 ($i=1, 2, \dots, n$) の企業は、 i 番目の投入財を只捨てるものとする。各企業は消費者と同じ価格体系 (投入財は $(p_1, p_2, \dots, p_n)$ 生産物は 1) のもとで利潤最大化を計る。

企業の行動もそれ程、複雑ではないが、技術が線型なので、限界原理 (限界生産物価値 = 価格) に従って投入、産出を決定するとは言いがたい。現行の価格体系 $(p_1, p_2, \dots, p_n; 1)$ のもとで、 j 番目 ($j=1, 2, \dots, m+n$) の企業が、基準の水準で生産を行った時の利潤を「単位利潤」 π_j と呼べば、

$$(II G) \quad \begin{cases} \pi_i = -[& +p_i &] \\ & i=1, 2, \dots, n \\ \pi_{n+j} = -[-c_j + p_1 a_{1j} + p_2 a_{2j} + \\ & \dots + p_n a_{nj}] \quad j=1, 2, \dots, m \end{cases}$$

で与えられる。もし単位利潤が負であれば、この企業は生産を中止 ($x_j=0$) するのが、最適行動である。もし正であれば、生産水準を上げて、利潤を更に増大しようとするだろう。単独の企業にとって、生産水準に上限はないので、その企業は無限大の利潤を上げようとすることになる²¹⁾。また利潤がゼロならば、企業は行動を変える誘因を持たない。

従って均衡であれば、企業の利潤は負で生産を行わないか、利潤がゼロで、有限の生産活動を行うかのどちらかでなければならない。逆に全ての企業の単位利潤を非正にするような価格を「均衡価格」と呼ぶことにしよう。消費者にとっては、どのような価格でも均衡的である。彼は単に (初期保有である投入財を) 売りつくし、(生産物を) 買いつくすだけである²²⁾。

20) 上の注に同様。

21) 勿論、特定の企業が無限に投入を増大しようとするれば、投入財市場で超過需要が生じ、価格は上らざるを得ず、上った価格では、利潤は低下する。

22) 価格は非負とする。

次に「部分経済」という概念を導入する。これは一般に (II-B, C) で与えられる「経済」からいくつかの企業を取り去ったものである。特に、「部分経済」として自明な解で正の水準で用いられる技術=企業のみからなる経済を考える。即ち技術 (or 企業) の数が $m+n$ から n へ減少した、小さい経済を考えることになる。この部分経済に対する均衡価格を考え、これを「部分経済均衡価格」と呼ぶ²³⁾。(I C) に対応する部分経済均衡価格は $(0, 0, \dots, 0)$ である。何故なら、各 disposal activity が利潤ゼロになる (正の水準で用いられる技術は利潤ゼロ) 為には、対応する投入財価格はゼロでなければならないからである。

この価格体系の時、第1番目の技術 $(-3, 4, 2)^T$ を持った企業がこの経済に参入したとしよう。この企業が利潤を上げられるのは明らかである。そこで生産をゼロの水準から上昇させる。勿論、無限に投入量を増大できるわけもなく、資源の制約にぶつかる。第2番目の技術をまだ考えに入れていないので $x_2=0$ として、(I B) の (狭義の) 制約式を記せば

$$\begin{aligned} y_1 + 4x_1 &= 12 \\ y_2 + 2x_1 &= 10 \end{aligned}$$

上の式から x_1 は $1\frac{1}{4}$ まで増大できる ($y_1 \geq 0$ より) ことが分かるし、下の式からは $1\frac{1}{2}$ までと分かる。どちらか先に制約につきあたった方が先にきいてくるのでこの比の小さい方が有効であり、 x_1 は3まで増大し、 y_1 は0となる。

この考察は、実は「比テスト」と同じことである。まず、問題となる変数の係数が全て正ならば、ここでの比は「比テスト」のときのその逆数なので、ここでの最小は「比テスト」の最大である。右辺は正なので、問題となる変数の係数にゼロもしくは負のものがある時は、この企業はその資源制約に抵触しないことになる。「比テスト」で、 a'_{ij} の負のものを顧慮し

- 23) ここで言う部分経済均衡は通常の経済学で言う部分均衡とは、別の概念である。

ないことに対応する²⁴⁾。

この状態 (価格はまだ変わらず、生産が変わった) で技術1を持つ企業は生産計画を固定、するかと云えば、しない。何故なら、相変わらず、利潤が正だからである。故に生産を増大しようと、資本を更に需要するので、超過需要が発生する。価格は上昇し、この企業の利潤がゼロになった時、企業の生産増大誘因がなくなり、部分経済は均衡する。

この状態 (y_2 と x_1 が用いられ y_1 と x_2 がゼロである) は (I E) の自明の解として与えられる。均衡価格も、割に簡単に計算できる。労働価格は y_2 が用いられているのでゼロ、資本価格は $p_2=0$ を用いて、企業1の単位利潤ゼロの条件 $3-4p_1+2p_2=0$ より、 $p_1=\frac{3}{4}$ 。これは (I E) の第1行に π_1 として与えられている²⁵⁾。この状態は、 y_2 と x_1 に対応する企業

- 24) これが「比テスト」のもう一つの解釈である。

- 25) 用いられる技術全ての単位利潤をゼロとするものとして部分均衡価格を定義して、tableau の第一行 y_i 相当の要素行 $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ が自明の解からなる部分経済の部分均衡投入財価格を与えることを (多少技巧的だが以下の様に) 証明できる。

はじめに、もともとの tableau (II C) に基本操作を行ない、得られた tableau として (II D) を考える。このとき、これに対応する要素価格は、 $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ in (II D) で考えられることを示す。一般的に考え、もともとの tableau の左 $n+1$ 列に右へもう1つ $(1, 0, \dots, 0)^T$ を並べ、更に右に自明の解に含まれる列のもともとの列を並べる。すると次のような $(n+1) \times (2n+2)$ 次の行列が出来る。

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & 0 & \dots & 0 & 1 & c \\ 0 & & & & 0 & \\ \vdots & & I & & \vdots & \tilde{A} \\ 0 & & & & 0 & \end{array} \right)$$

但し、 c は $(1 \times n)$ 、 I と $\tilde{A}$ はともに $(n \times n)$ 行列である。この行列に、自明な解を与える行列を得るため行った操作で

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & \pi_1 & \dots & \pi_n & 1 & 0 \\ 0 & B & & & 0 & I \end{array} \right)$$

を得る。このとき

$$\left(\begin{array}{cccc|cc} 1 & \pi_1 & \dots & \pi_n & 1 & c \\ 0 & B & & & 0 & \tilde{A} \end{array} \right)$$

の逆行列であって、特に $c + \pi \tilde{A} = 0^T$ である。故に全ての単位利潤は価格を $(\pi_1 \dots \pi_n)$ としてゼロである。また、この方程式は π について n 元一次連立方程式であり、rank 条件を仮定して、一意に決まる。

と消費者からなる部分経済の均衡とも、更に y_1 に対応する企業をも含む（多少拡大された）部分経済の均衡とも考えられる。と言うのは y_1 に対応する技術に対する単位利潤はこの価格体系で負だからである。

Ⅲ-2 機会価格

価格の持つ意味には、もう一つある。その財の単位当たりの機会費用である。この意味に用いる時、「機会価格」と呼ぶことにしよう。機会費用とは、その経済に於いて得られるであろう最大の利得である。

この様に定義されるならば、機会費用は、生産の様子により異なるものである。と言うのは、用いられている技術が異れば、得られるであろう最大の利得が異なるからである。

Ⅲ-1 に於いて、(I C) の与える自明な解からなる部分経済に x_1 に対応する企業を加えようと考えたとき、(I C) の与える部分経済均衡価格を用いて、加わることがその企業にとって有益であるか否かで判断を行ったが、題意に沿って考えるならば、 x_1 の企業に生産を行わせることが、経済全体の生産を増大させるか否かで判断されるべきだろう。つまり、 x_1 の企業に生産を行わせるために資源を他の用途から振り分けてこななければならないが、それによる生産減と x_1 の導入による生産増を比較する必要がある。ところが部分経済価格に対する企業の利益の有無は、その企業がその部分経済に加わることによる社会厚生（ここでは総生産）の増減に一致する。このことを以下で見てみよう。

第 j 企業がその部分経済に加わるとき、基準単位で生産を行ったとすれば、投入財をそれぞれ $(a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{nj})$ 用い c_j の生産を得る。従って、投入財のそれぞれの減少による生産量の減少が分かれば、第 j 企業をその部分経済に加えることが総生産を増大するか否かが分かることになる。

さて一般に投入財に対する機会価格は、その投入財一単位が追加的に存在した場合の追加的

に得られる生産物 (i. e. 利得) として測られる。投入財の追加的な減少による生産物の追加的な減少も同様に測られるので、機会価格が与えられれば、企業を部分経済に加えることによる総生産の増減が計算できることになる。

(I C) の与える自明の解からなる (disposal activities) のみが実行されている) 部分経済では、機会価格も、自明的に全てゼロである。何故なら、どの投入財が追加的に存在しても生産物を増大しないからである。この場合、部分経済均衡価格と、同じ部分経済に対する機会価格は (ゼロで) 一致した。

次に (I E) の与える自明の解からなる部分経済 (或いは更に y_1 を加えたもの) を考え、これに関する機会価格を計算してみよう。まず資本が 1 単位追加的に増大したとしよう。生産量はどれ程増大するだろうか。問題は、

$$\begin{aligned} \max \quad & 3x_1 + 4x_2 \\ \text{s.t.} \quad & y_1 + 4x_1 + 3x_2 = 12 + 1 \\ & y_2 + 2x_1 + 5x_2 = 10 \end{aligned}$$

となり、simplex tableau で表わせば²⁶⁾、

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -3 & -4 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 5 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ 12 \\ 10 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 0 \\ 1 \\ 0 \end{array} \right)$$

となり、(I C) から (I E) を求めたのと同じ演算を行えば、

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 3/4 & 0 & 0 & -7/4 \\ 0 & 1/4 & 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & -1/2 & 1 & 0 & 17/2 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 9 \\ 3 \\ 4 \end{array} \right) + \left(\begin{array}{c} 3/4 \\ 1/4 \\ -1/2 \end{array} \right)$$

を得る。これがこの部分経済にとって最適であることは、対応する (x_2 の例を除く、 $\therefore$ 部分経済に含まれない) 第 1 行要素が非負であることから明らかである (cf. II-8②A)。従って、生産物の増大量は $3/4$ である。

この機会費用が第 1 行第 2 列で与えられてい

26) x_2 に関する列は不要であるが、他の tableau と比較し易い様に加えてある。単に無視すれば良い。

ことは注目し値する。資源増を示す右辺への加算列と左辺第2列の disposal activity の列がもともと同じであって、同じ「行への演算」が施こされたのであるから、同じになるのは当たり前であった。これを一般的に言うてみよう。

定理 1 n 個の生産ベクトル (disposal activity を含むことも可) を選び部分経済を構成する。この時、もともとの tableau に pivotting を (何度も) 施し、対応する列が (乱れた) 単位行列になる様に tableau を変形すれば、各投入財のこの部分経済における機会価格は得られた tableau の対応する disposal activity を表わす列の第1行要素として示される。

証明: もともとの tableau を (II C) とする。そして pivotting の結果 (II D) を得たとする。定理の結論は、投入財の価格は $(\pi_1, \dots, \pi_n)$ で与えられるということである。さて、第 j 投入財が微小量 $\delta^{27)}$ だけ増大したとすれば、新しい問題に対応する simplex tableau は次のようになる。

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & 0 & \cdots & 0 & -c_1 & \cdots & -c_m \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & a_{11} & \cdots & a_{1m} \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & & & 1 & a_{n1} & & a_{nm} \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_j \\ \vdots \\ b_n \end{array} \right) + \delta \left(\begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{array} \right)$$

これに、前と同じ pivotting を施せば、

$$\left(\begin{array}{cccc|ccc} 1 & \pi_1 & \cdots & \pi_n & \pi_{n+1} & \cdots & \pi_{n+m} \\ 0 & & & & & & \\ \vdots & & & & * & & \\ 0 & & & & & & \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} b'_0 \\ b'_1 \\ \vdots \\ b'_j \\ \vdots \\ b'_n \end{array} \right) + \delta \left(\begin{array}{c} \pi_j \\ a'_{1j} \\ \vdots \\ a'_{jj} \\ \vdots \\ a'_{nj} \end{array} \right)$$

が得られる。

さて、各投入財の機会価格は同時に対応する

27) 第 j 投入財の増大が離散的であると、最適な技術の組合わせが変わってしまう可能性がある。勿論、 n 個の技術からなる部分経済に限れば、この可能性は否定される。

disposal activity の負の単位利潤を表わしている (cf. (II G))。つまり、この技術の、この価格体系 (自明の解の与える機会価格) のもとの負の単位利潤が、対応する第1行要素に示されていることにもなっている。このことは、他の生産技術についても言える。

定理 2 部分経済に於ける機会費用で評価した各技術の単位利潤は、部分経済を構成する技術を自明の解とする tableau の第1行要素の負数で与えられる。

証明: $n+j$ 列 ($j=1, 2, \dots, m$) について示せば充分である (i 列 ($i=1, 2, \dots, n$) については既述)。(II C) にあては、 $n+j$ 列は初めの $n+1$ 列の線型結合として、次の様に書ける。

$$\begin{pmatrix} -c_j \\ a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} = -c_j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{1j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{2j} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + a_{nj} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

この両辺に、(II C) より (II D) を得たのに用いた行に関する演算を施せば、これらの演算が列に関する線型関係を保存するので、

$$\begin{pmatrix} \pi_{n+j} \\ * \\ 0 \end{pmatrix} = -c_j \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + a_{1j} \begin{pmatrix} \pi_1 \\ * \end{pmatrix} + a_{2j} \begin{pmatrix} \pi_2 \\ * \end{pmatrix} + \cdots + a_{nj} \begin{pmatrix} \pi_n \\ * \end{pmatrix}$$

(但し、議論に不要な要素は * で示した)。第1行のみをとり出せば

$$\pi_{n+j} = -c_j + a_{1j}\pi_1 + a_{2j}\pi_2 + \cdots + a_{nj}\pi_n$$

となり、 π_{n+j} で投入価格が $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ であるときの (定理1より、これらは部分経済に於ける投入財の機会価格) 負の利潤が示されることが分かる。

定理 3 最終 tableau の投入財の機会価格 $(\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n)$ はこの経済の均衡価格を与え、この均衡価格で生産量と資源の均衡価格評価は等しくなる。

証明：前半は、最終 tableau では第1行が全て非負であることと、定理2から明らか。後半部は、定理2の証明に用いた議論を最右列に適用して、

$$b'_0 = 0 \cdot 1 + b_1 \pi_1 + b_2 \pi_2 + \cdots + b_n \pi_n$$

を得ることで言える。

上の式の右辺は均衡価格 ($\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$) での消費者による投入財の売上げであり、生産物の需要である。左辺は生産量であるので、生産物供給であり、需給均衡を表わしている。

IV 双対定理

双対定理の一般的な議論はLPの教科書に譲り、ここではその肝要のみ、即ち主問題と双対問題の有限最適値が同一であることを論じる。

(II A) を行列表示で示せば、

$$(III A) \begin{cases} \max & cx \\ \text{s.t.} & Ax \leq b \\ & x \geq 0 \end{cases}$$

となる。双対問題は

$$(III B) \begin{cases} \min & yb \\ \text{s.t.} & yA \geq c \\ & y \geq 0 \end{cases}$$

で、定義され、この時、(III A) を主問題と呼ぶ。このとき、(III A) と (III B) の任意の許容解について

$$cx \leq yAx \leq yb$$

が成立する。

ところで主問題を simplex 法で解き、均衡価格 ($\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_n$) があれば、これは双対問題での許容解である ($\because \pi_i \geq 0$, for $i=1, 2, \dots, n$ 。また $\pi_{n+j} \geq 0$ (for $j=1, 2, \dots, m$) は $\pi A \geq c$ を意味する)。

定理3の後半は、主問題に対する最適解を x^* とすれば、 $cx^* = \pi b$ と表わされる。故に、

上述の不等号より cx^* は主問題での最大値を与え、 πb は双対問題の最小値を与える。

V 輸送問題

V-1 具体例

出発地 A, B がありそれぞれに物資12単位、18単位ある。これを目的地 a, b, c へ、それぞれ10単位ずつ届けたい。輸送費用は左図の通りである。この時、5つの場所により区別された財についての生産問題として把握することもできる。但し、これは費用最小化の問題であり、次のように書ける。

	a	b	c
A	4	5	6
B	2	1	3

$$(IV A) \begin{cases} \min & 4x_{Aa} + 5x_{Ab} + 6x_{Ac} + 2x_{Ba} + x_{Bb} + 3x_{Bc} \\ \text{s.t.} & x_{Aa} + x_{Ab} + x_{Ac} \leq 12 \\ & x_{Ba} + x_{Bb} + x_{Bc} \leq 18 \\ & x_{Aa} + x_{Ba} \geq 10 \\ & x_{Ab} + x_{Bb} \geq 10 \\ & x_{Ac} + x_{Bc} \geq 10 \\ & x_{ij} \geq 0 \quad \begin{matrix} i=A, B \\ j=a, b, c \end{matrix} \end{cases}$$

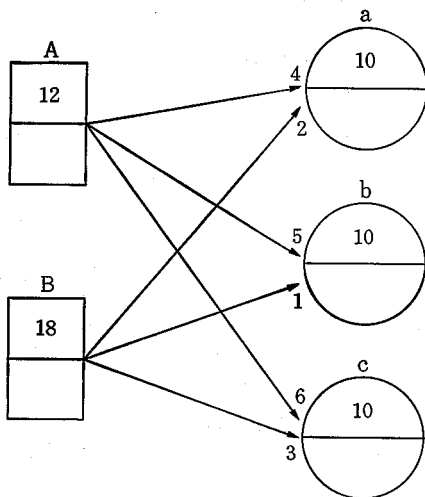
このLP問題を simplex tableau に書く為には、①目的関数に(-1)をかけて最大化問題とする。②この問題ではちょうど、出発地の保有量の総計(12+18)と目的地の要求量の総和(10+10+10)は等しく過不足がないので、上で不等式で書いてある制約は等式として成立する。また、その時、5本の制約式は独立でない(例えば、(第1式)+(第2式)-(第3式)-(第4式)=(第5式))、たとえば、第5式を除く。等式系で、(II B)類似の問題及び「simplex tableau」は以下の様になる。

$$(IV B) \begin{cases} \max & z \\ \text{s.t.} & z \quad 4x_{Aa} + 5x_{Ab} + 6x_{Ac} + 2x_{Ba} + x_{Bb} + 3x_{Bc} = 0 \\ & x_{Aa} + x_{Ab} + x_{Ac} = 12 \\ & x_{Ba} + x_{Bb} + x_{Bc} = 18 \\ & x_{Aa} + x_{Ba} = 10 \\ & x_{Ab} + x_{Bb} = 10 \\ & x_{ij} \geq 0 \end{cases}$$

$$(VC) \begin{pmatrix} 1 & 4 & 5 & 6 & 2 & 1 & 3 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 12 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 18 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 10 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

さて上の (VC) を II-6 で定義した simplex tableau と比較すると、これは単位行列を含んでいないので、自明の解を持たない。従って第1行が非負であるからと言って、これが最適を表わすと早断してはならない。

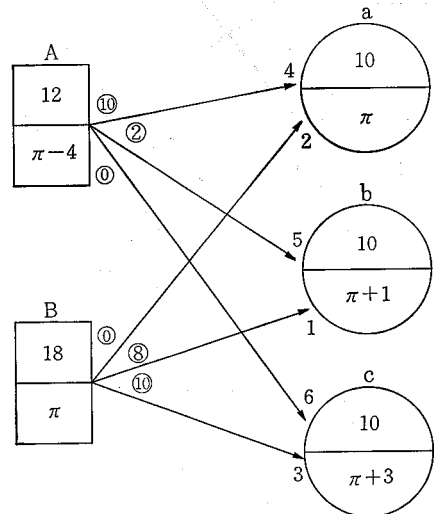
V-2 流れ図と価格による解法



上の図は V-1 の問題を図示している。A, B の長方形は出発地, a, b, c の円は目的地を表わす。出発地の上段には保有量, 目的地の上段には要求量が書かれ, それぞれ下段に価格を書くべくあけてある。矢印は, 可能な運輸方法を示し, それぞれに, その費用が与えられている。

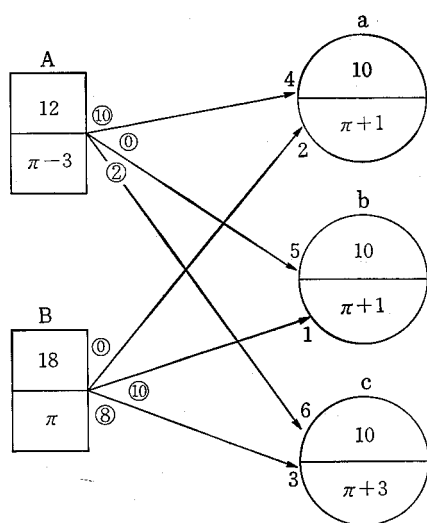
出発地の保有量の総計 (12+18) は目的地の要求量の総計 (10+10+10) に等しいので, 費用最小化を考えなければ, 実行可能な輸送計画を立てることは簡単である。例えば, A より a へ 10, 残った A の 2 を b へ, b で足りない分

を B から, そして残った B の 10 を c へ運ぶ。この計画は次の図の矢印にそえられたマル囲みの数字で示される。この時, 実行されている輸送活動は (部分経済) 均衡価格でゼロ利潤を実現



現しているのも, 仮に B に於ける価格を π とすれば, 輸送価格から c の価格では $\pi+3$, b では $\pi+1$ となる。また $A \rightarrow b$ という輸送活動も用いられているので, A の価格 x は $x+5=\pi+1$ i. e. $x=\pi-4$ となり, a では π となる。

この時, 他の輸送活動 (用いられていないもの, i. e. $A \rightarrow c$ と $B \rightarrow a$) が正の利潤を生まなければ, 最適である。 $B \rightarrow a$ は, B で π で買い費用 2 をかけて, A で π で売るので単位利潤は -2 となる。 $A \rightarrow c$ では単位利潤は $(\pi+3) - [(\pi-4)+6] = +1$ であり, この活動は利用した方がよい。従前の輸送計画に更に加えて $A \rightarrow c$ を利用すると, A で不足, c で過剰を生じるので, 輸送, 計画調整が必要である。このため A から C を結ぶ実行されているルートを探せば, $A \rightarrow b$, $B \rightarrow b$, $B \rightarrow c$ があり, 最小量は $A \rightarrow b$ の 2 なので, その分量だけ計画を変更し, 次の図になる。



そして全てのルートで利潤が非正となり、最適解が得られた。

V-3 流れ図の解法と simplex 法

simplex 法にあっては、自明な解が単位行列を含む tableau から求められる事実を用いて、まず①そのような tableau を書き出し、②列を選び出し、③比テストで pivot 要素を特定して④ pivoting を行い、①もしくは②へ戻るという手続きをとった。

流れ図の解法では①の単位行列を含む tableau の書き出しが、「北西」方式によってなされる。即ち、出発地と目的地をそれぞれ順に並べ、順にそれぞれ、出発地は保有量を消費するまで、目的地は要求量を充足するまで、輸送計画を辞書式に立てて行くのである。

②の列の選び出し方は価格設定と、用いられなかった輸送活動の単位利潤の計算によって行われる。対応する tableau は

	A	B	a	b	c	x_{Aa}	x_{Ab}	x_{Ac}	x_{Ba}	x_{Bb}	x_{Bc}	b
1	$\pi-4$	π	π	$\pi+1$	$\pi+3$	0	0	-1	2	0	0	*
0						1	0	*	*	0	0	10
0						0	1	*	*	0	0	2
0		*				0	0	*	*	1	0	8
0						0	0	*	*	0	1	10

となる。投入財として A, B, a, b, c の 5 つがあげられているが、うちの 1 つは自由に決められる（ここでは B の価格を π とした）ので、本来、決定されるのは 4 つだけである。

列のテストから x_{Ac} をとり込むことが決定される。③と④に相当する作業はルートの変更である。これは、実行されているルートは増減どちらも可能、実行されていないルートは増加のみ可能、という事実をふまえて別のルートを探し出し、新しい実行可能計画を求めることにより、なされる。

付論 1 改訂 Simplex 法²⁸⁾

simplex 法は、simplex tableau に行の演算を次々に行って行くものである。simplex tableau S を

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & C & b_0 \\ \hline 0 & I & A & b \end{array} \right) = S$$

で定義すれば幾度かの pivoting で P・S と変わる（但し P は正則）。そして列のテストで必要なことは、P・S の第 1 行のはじめの n 個の要素（価格）さえ分かれば、もともとの tableau から負の利潤として計算できる（第 2 行～第 $n+1$ 行の計算はいらない）。

取り込むべき列が決まれば、もともとの tableau の当該列と P から、改訂すべき列は Px_j (x_j は取り込むべき列のもともとの表現)。として計算できる。しかも、P は改訂された tableau の左 $n+1$ 列として与えられている。

故に、以下の方法で simplex 法は代行でき、これを改訂 simplex 法と呼ぶ。

- ① 単位行列を含む tableau を書き出す。
- ② 第 1 行要素の符号を調べ、④負のものがなければ、既に最適である。⑥負のものがあれば、その列を pivot 列とする。
- ③ 左 $n+1$ 列と pivot 列と最右列について、

28) この節は他より少々高度な（と言っても教養部程度の）線型代数の知識を用いる。

比テストを行い, pivot 行を選び pivotting を施す。

- ④ 残りの列の単位利潤を, ①の tableau の列を③で得た価格 (第1行の第2列から第 $n+1$ 列迄の要素) で評価したものとして順に1つずつ計算し, 負のものがあれば, 「その列」を pivot 列とする。

- ⑤ ④で選んだ列は, ①の tableau で与えられただけなので, 左から③で得られた左 $n+1$ 列を行列としてかけて pivot 列とする。③へ戻る。

なお, ④で負のものが見つからなければ, 最適である。

付論2 pivot された simplex tableau をもともとの技術に即して解釈する

(I C) の様に与えられた tableau は生産問題 (I A) として解釈される。これに対し, (I E) は, (I A) と異なる問題として以下の様に解釈されうる。即ち,

$$\begin{aligned} \max \quad & -\frac{3}{4}y_1 + \frac{7}{4}x_2 + 9 \\ \text{s. t.} \quad & \frac{1}{4}y_1 + \frac{3}{4}x_2 \leq 3 \\ & -\frac{1}{2}y_1 + \frac{7}{2}x_2 \leq 4 \\ & x_j \geq 0 \quad j=1, 2 \end{aligned}$$

この問題と (I A) の最大値が一致することについては既に述べた。

(I E) を (I C) より pivotting で得たものと考え, 計算経過を見易くする為に書き直してみれば,

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0+1\cdot\frac{3}{4} & 0 & -3+4\cdot\frac{3}{4} & -4+3\cdot\frac{3}{4} & 0+12\cdot\frac{3}{4} \\ 0 & 1\div 4 & 0 & 4\div 4 & 3\div 4 & 12\div 4 \\ 0 & 0+1(-\frac{3}{4}) & 1 & 2+4(-\frac{3}{4}) & 5+3(-\frac{3}{4}) & 10+12(-\frac{3}{4}) \end{array} \right)$$

となる。第2行は単に4で割っただけで, 資本4単位をもって新しい1単位にすると単位を定義し直したことになる。そこでこれをもとにもどしてやれば

$$\left(\begin{array}{cccccc} 1 & 0+1\cdot\frac{3}{4} & 0 & -3+4\cdot\frac{3}{4} & -4+3\cdot\frac{3}{4} & 0+12\cdot\frac{3}{4} \\ 0 & 1 & 0 & 4 & 3 & 12 \\ 0 & 0+1(-\frac{3}{4}) & 1 & 2+4(-\frac{3}{4}) & 5+3(-\frac{3}{4}) & 10+12(-\frac{3}{4}) \end{array} \right)$$

となる。例えば, 第2列をとり出して考えれば, もともとの資本に関する disposal activity に1倍の $(\frac{3}{4}, 0, -\frac{3}{4})$ を加えたものとなっている。

この tableau (i. e. (I E)) は y_2 と x_1 に対応する技術で資本と労働を費消する部分経済を表している。もし y_1 に対応する技術 (i. e. 資本を捨てる) を用いようとするれば, 資本を使いきっている x_1 と抵触し, x_1 が生んでいた生産物は減少し, x_1 が用いていた投入財は他の技術にとって利用可能になってくる。それらが資本一単位あたりどれ程かと言えば $\frac{3}{4}$ 及び $\frac{7}{4}$ である。 y_2 の水準が1単位上昇するにつれ, 資本は1単位 x_1 へまわせなくなり x_1 を通しての効果としては生産を $(\frac{3}{4} \times 1)$ 単位減少させ, 労働を $\frac{7}{4} \times 1$ 単位増加させる。この x_1 を通しての効果をも合わせ考えたものとして (I E) の各列は読みとることができる。第4列 (x_1) については自ら用いる分と x_1 を通しての効果が同量逆方向なので打消し合うことになる。

最右列はむしろ $[0+3\cdot\frac{1}{4}, *, 10-2\cdot\frac{1}{4}]^T$ とした方が理解し易い。即ち $\frac{1}{4}$ は x_1 の最適水準 (勿論, 部分経済に於ける) を表わし, このときの生産物をどれだけ生じ, また x_1 にどれだけ投入しているかを計っていることになり, 合わせてこの部分経済でどれだけ他の技術で利用可能かを示すものとなる。