



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	Savageの行為の或抽象化, Dedekindの数, 個人的確率, 及び, von Neumann-Morgenstern効用, について
Author(s)	園, 信太郎
Citation	経済學研究, 36(4), 1-16
Issue Date	1987-03
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/31755
Type	departmental bulletin paper
File Information	36(4)_P1-16.pdf



Savage の行為の或抽象化, Dedekind の数, 個人的確率, 及び, von Neumann-Morgenstern 効用, について

園 信太郎

1. 序

Savage [3] においては, 例えば, 同書33頁最後の段落中の確率測度の定義, 及び, 73頁定理4の証明中の Dedekind 切断, が指摘できる様に, 暗黙の内に実数論が仮定されているのではあるが, 一方, 例えば, 同書第2章第7節の21頁から22頁最後から2番目の段落まで, における, sure-thing principle に関する議論, 及び, 38頁下から12行目から39頁上から4行目までの, 公準 P6' に関する議論, に見られる様に, 同書における7個の公準達は, 数学的議論の為の大前提であるのみならず, 方法論的な解釈における自明性を所有しているのである。従って, もしかかりに, 純粋数学的概念である「Dedekind 切断に基づく実数」, の存在を, これらの公準達と共に仮定する事が必要であるのならば, Savage の方法論は, 存在論的に不自然であると, 筆者は考える。しかし, 以下で指摘する様に, 第1公準から第6公準までに基づいて, Dedekind の実数が構成され, さらにまた, 「集合の連鎖」及び Dedekind 有限, 各各河野訳 [1] 第二編 § 4, 74頁四四, 及び, § 5, 80頁から81頁, 六四, を参照, によって, 事象の分割, Savage [3] 24頁, 及び, 事象達の合併, を定式化しなす事によって, 上述の6個の公準達に基づいて, Dedekind の自然数, 上掲訳書86頁七三, の存在が示され, 且

つ, 有理数間の演算を定義せずに, 直接に, 実数間の乗法が定義される事, が指摘される。従って, Savage の公準達は自然に数の概念を導く者であり, その意味において, 自己完結的と言える。

一方 Savage [3] においては, 行為 (act) は, 状態達の全体である「世界 (world)」と呼ばれる集合から結果達の全体への写像として, 定義されるのであるが (同書14頁下から10行目から7行目までを参照。なお, 結果, consequence, の概念については, 同書第2章第5節, 13頁から, 14頁表1の直後の段落まで, を参照。), しかしながら, 「Savage が同書第2章第4節, 10頁最後の段落から13頁までで指摘している様に, 世界の状態に言及しないのならば, 事象間の所謂集合算は, Boole 代数によって数学的に定式化されるので, かりに基本概念である行為が, 世界の状態なる概念に基づかず, 事象達, 結果達, 及び, Boole 代数, に基づいて定義され, 且つ, その抽象化された行為に基づいて, 個人的確率及び von Neumann-Morgenstern 効用 (この呼称については, 同書第5章第6節, 98頁最後の段落, を参照) の存在と, 自明な多様性を無視した場合の, 一意性, とが, 導かれるのならば, 世界の状態なる概念を用いずに基本的結果が得られると言う意味で, Savage の方法論の論理的構造は十分に初等的 (elementary) である」と, 筆者は考える。また, この様な行為の概念の抽象化は, 以

下で指摘する様に、容易に行なう事ができる。

結局, Savage の方法論にとって有利な, 但し論理的な, 証拠達の提出が意図されるのである。なお, 以下では, Savage [3] 及び Dedekind, 河野伊三郎訳, [1] を, 各各, S書及び DK書と略称する。なお, 第4節においては, 簡潔な, 方法論的注意達が述べられる。

2. 数達の存在, 及び, 定量的確率の存在

S書32頁の冒頭の段落及び定理1によって, 第1公準から第5公準までに基づいて, 定性的確率 (qualitative probability) と呼ばれる事象間の関係の存在が演繹される事, が知られる。また, 第6公準 P6 (S書39頁から40頁) の方法論的妥当性の根拠の1つとして提示される, 「定理4 (S書38頁) における, 定性的確率が精密 (fine) 且つ緊密 (tight) になる為の必要十分条件」である所の公準 P6' (S書38頁), が明示され, 且つ, P6' に対する明確な解釈が述べられている。(S書38頁から39頁にかけての論述を参照。) これら定性的確率及び P6' に基づいて, 単純無限集合 (DK書第二篇 § 6, 七一, 85頁), 及び, Dedekind の実数, の, 或 Boole 代数 B の内部における, 存在が演繹される。また, さらに, 定量的確率 (qualitative probability, S書第3章第3節, 33頁, 下から2番目の段落の冒頭から3行目) の存在が示される。

[命題1]. $\langle B, \vee, \wedge, \neg, 0, 1 \rangle$ を Boole 代数, 即ち, 次の B1, B2, B3, B4, を満足する代数系, とする。

- B1. 「任意の $b' \in B$ と $b'' \in B$ とに対して;
 $b' \vee b'' = b'' \vee b'$, 且つ, $b' \wedge b'' = b'' \wedge b'$,
 が成立する。
- B2. 「任意の $b' \in B$ と $b'' \in B$ と $b''' \in B$ とに
 対して; $b' \vee (b'' \wedge b''') = (b' \vee b'') \wedge (b' \vee b''')$, 且つ, $b' \wedge (b'' \vee b''') = (b' \wedge b'') \vee$

$(b' \wedge b''')$ 」, が成立する。

- B3. 「任意の $b' \in B$ と $b'' \in B$ とに対して;
 $b' \vee (b'' \wedge \neg b'') = b'$, 且つ,
 $b' \wedge (b'' \vee \neg b'') = b'$ 」, が成立する。
- B4. 「 $0 \neq 1$, 且つ, 或 $b' \in B$ と $b'' \in B$ とが存在して, $0 = b' \wedge \neg b'$, 且つ,
 $1 = b' \vee \neg b'$ 」, が成立する。

(以下の議論においては, Boole 代数上の自然な半順序を, $\leq$, と表現する。即ち, $b' \leq b''$ を $b' = b' \wedge b''$ によって定義する。)

この Boole 代数 B 上に, 次の条件 QL1, QL2, QL3, を満足する線形順序 $\leq$, 即ち, 定性的確率, が与えられているものとする。

- QL1. 任意の $b' \in B$ に対して $0 \leq b'$ である。
- QL2. 「任意の $b' \in B$ と $b'' \in B$ と $b''' \in B$ とに対して; $b' \wedge b''' = b'' \wedge b''' = 0$ ならば,
 $b' \vee b''' \leq b'' \vee b'''$ の場合, またその場合に限って, $b' \leq b''$ 」である。
- QL3. $1 \leq 0$ は成立しない。

(以下では, 「 $b' \leq b''$, 且つ, $b'' \leq b'$ 」によって定義される自然な同値関係を, 「 $b' = b''$ 」, と表現する。また, 「 $b' < b''$ 」を, 「 $b' \leq b'$ に非ず」によって定義する。)

この定性的確率 $\leq$ は, 次の条件 DP6', を満足する, と仮定する。

DP6'. 「任意の $b' \in B$ と $b'' \in B$ とに対して;
 $b' < b''$ ならば, 或 D 有限 (Dedekind finite), 即ち, 自身への全射でない単射が存在しない,
 B の部分集合 X で,

- PA1. X の上限 $\vee X \in B$ が存在して, 且つ,
 $\vee X = 1$. (従って, B4 より, $X \neq \phi$.)
- PA2. 任意の $x' \in X$ と $x'' \in X$ とに対して;
 $x' \wedge x'' \neq 0$ ならば, $x' = x''$.

なる条件 PA1 及び PA2 をみたすものが存在

して、『任意の $x' \in X$ に対して, $b' \vee x' \leq b''$ 』である。

(以下では, 「条件 PA1 中の 1 を $b \in B$ で置かえた条件, 及び, 条件 PA2」をみたす X の全体を, $\text{Par}(b)$, と表現する。)

これらの仮定の上に, さらに,

DΣ. 「任意の単純無限集合 $Y \subseteq B$, 即ち,
“或 φ と或 y とが存在して; φ は Y から Y への単射であり, 且つ, $y \in Y - \varphi[Y]$, 且つ,

$$(*) \quad Y = \bigcap \{X; X \subseteq Y, \text{ 且つ, } y \in X, \text{ 且つ, } \varphi[X] \subseteq X\}$$

”をみたす任意の $Y \subseteq B$, に対して, 上限 $\vee Y \in B$ が存在する,

(上記式 $(*)$ の右辺において, φ を単射とは限らない一般の写像と仮定して, 与えられる集合を, $\varphi_*[y]$, と表現する。即ち, $\varphi_*[y]$ とは「集合 $\{y\}$ の連鎖」, DK 書74頁四四参照, である。)

なる条件 DΣ を Boole 代数 B が満足するものと仮定する。

以上の仮定達の下で以下の結論 1, 2, 及び, 3, が成立する。

結論 1. $B_+ = \{b \in B; 0 \leq b\}$ と置く。この場合 B_+ から B_+ への写像 ϕ で, 「任意の $b \in B_+$ に対して, $\phi(b) \leq b$ 」, をみたすものが存在する。従って, 末尾の付録における [命題 A] より, 自然数系列 (DK 書86頁七三) の存在が従う。そこで, DK 書第二編 § 6 から § 10, 85頁から 118頁まで, において演繹されている, 「自然数系列」に関する, 諸結果, 及び, 同書 § 14, 130頁から140頁まで, において演繹されている (但し, 「一六八 (137頁)」及び「一六九 (138頁)」を除く) D 有限集合に関する諸結果, を, 以下のこの第2節においては, 仮定する。

結論 2. 任意の $b \in B$ に対して, 或 $b' \in B$ と $b'' \in B$ とが存在して, 「 $b = b' \vee b''$, $b' \wedge b'' = 0$, 且つ, $b' \neq b''$ 」をみたす。また, 任意の $b \in B$ に対して, $\text{Par}(b)$ から $\text{Par}(b)$ への或写像 ϕ で, 「任意の $X \in \text{Par}(b)$ と任意の $x \in X$ とに対して, 或 $\{x', x''\} \subseteq \phi(X)$ が存在して; $x = x' \vee x''$, $x' \wedge x'' = 0$, 且つ, $x' \neq x''$ 」, をみたすものが存在する。

結論 3. 或 $H \subseteq B$ で, 「 $1 \in H$, 任意の $h \in H$ に対して $\neg h \in H$, 且つ, 任意の $h' \in H$ と $h'' \in H$ とに対して $h' \vee h'' \in H$ 」, 且つ, 「任意の $b \in B$ に対して, H から H への或写像 θ で, “任意の $h \in H$ に対して $h \leq \theta(h)$ ” 且つ “或 $h' \in H$ が存在して; $\theta_*[h']$ の B における上限が存在して, $\vee \theta_*[h'] = b$ ”」, 且つ, 「任意の $\{H', H''\}$ に対して; “ $H' \neq \phi$, $H'' \neq \phi$, $H' \cap H'' = \phi$, $H = H' \cup H''$ ” 且つ, 任意の $h' \in H'$ と任意の $h'' \in H''$ とに対して $h' \leq h''$ ”」, ならば, “或 $b \in B$ が存在して; 任意の $h' \in H'$ と任意の $h'' \in H''$ とに対して, $h' \leq b$ 且つ $b \leq h''$ ”」, 且つ, 「 H は単純無限集合」, をみたすものが存在する。この場合, $I = B / \equiv$, $[H] = \{x; x \in B / \equiv \text{ 且つ } x \cap H \neq \phi\}$, と置き, I を「 B 単位区間」, $[H]$ の元を「 H 有理数」, と呼ぶことにする。

[証明]. 結論 1 は DP6' より従う。(結論 1 から得られる自然数系列を利用して, 「 $X \subseteq B$ なる任意の D 有限集合 X は上限 $\vee X \in B$ をもつ」事, 及び, 「 B から B への任意の写像 ω と任意の $b \in B$ とに対して, $\omega_*[b]$ の上限 $\vee \omega_*[b] \in B$ が存在する」事, が示される。)

結論 2 の前半は, 自明な相違を無視すれば, S 書第 3 章第 3 節定理 3, 37 頁, の証明中の「Part 5 (同書38頁第 1 番目の段落から第 3 番目の段落まで)」と同じ論法により従う。(この場合, DP6' 及び DΣ が利用される。また, 後半は前半より従う。)

結論 3 は, 結論 2 において「 ϕ の定義域が $\text{Par}(1)$ 」の場合を考えて, $H = \{h;$ 或 D 有限

集合 $X \subseteq \bigcup \Phi_*[\{1\}]$ が存在して $h = \bigcup X$, と置けば従う。〔証明終〕

〔命題2〕. (〔命題1〕の仮定達を仮定する。)
 “〔命題1〕の結論3”の〔証明〕における, H と $\Phi_*[\{1\}]$ に対して; 任意の $b \in B$ に対して, 或 $\Phi_*[\{1\}]$ から H への写像 θ が存在して; 「任意の $X \in \Phi_*[\{1\}]$ に対して; $\theta(X) \leq \theta(\Phi(X))$ 」且つ “ $b \in H$ ならば; $\theta(X) \neq 0$ ならば $\theta(X) < \theta(\Phi(X))$ », 且つ, 「任意の $X \in \Phi_*[\{1\}]$ に対して, 或 $Y \subseteq X$ が存在して; $\forall Y \leq b$ 且つ “ $Y \subseteq Z$ 且つ $Z \subseteq X$ 且つ $Y \neq Z$ なる任意の Z に対して, $b < \vee Z$ ”», をみたす。また, この θ に対して, 或 $\Phi_*[\{1\}]$ から H への写像 A が存在して; $A(\{1\}) = \theta(\{1\})$, 且つ, “任意の $X \in \Phi_*[\{1\}]$ に対して, $A(\Phi(X)) = \theta(\Phi(X)) \wedge \neg \theta(X)$,” をみたす。また, この A に対して, $\vee A[\Phi_*[\{1\}]] \doteq b$, が成立する。
 (〔証明〕は「帰納法による決定の定理」(DK書106頁一二六), 及び, 「 H の定義」, による。以下, A を「 b の H 表現」と呼ぶ事にする。)

〔命題3〕. (〔命題1〕の仮定達を仮定する。)
 B^Δ を, B と同様に, [命題1] の仮定達をみたす Boole 代数とする。 B に関する諸概念に対応する, B^Δ に関する諸概念を「上つきの Δ 」をつかって表現する。この場合, $B/\doteq$ から $B^\Delta/\doteq^\Delta$ への全単射 I が存在して; 「任意の $b' \in B$ と $b'' \in B$ と $b''' \in B^\Delta$ と $b'''' \in B^\Delta$ とに対して; “ $b' \doteq b''$ ”, 且つ, $b' \wedge b'' = 0$, 且つ, $b''' \doteq^\Delta b''''$, 且つ, $b''' \wedge b'''' = 0^\Delta$, 且つ, $I(\pi(b' \vee b'')) = \pi^\Delta(b''' \vee b''')$ ”, ならば, $I(\pi(b')) = \pi^\Delta(b''')$ », 且つ, 「任意の $x \in B/\doteq$ と $y \in B/\doteq$ とに対して; $x \leq y$ (但し, $B/\doteq$ 上の線形順序「 $x \leq y$ 」を, 「或 $b' \in x$ と或 $b'' \in y$ とが存在して $b' \leq b''$ », によって定義する) は $I(x) \leq^\Delta I(y)$ と同値である», をみたす。従って, B 単位区間 $\langle I, \leq \rangle$ と B^Δ 単位区間 $\langle I^\Delta, \leq^\Delta \rangle$ とは順序同形となる。(即ち, 単位区間 I は, 順序同形を無視すれば, 一意的

に定まる。) また, この様な順序同形写像 I は一意的に定まる。そこで, 以下では, この様な写像 I に基づく「順序同形」を, 「強順序同形」と呼ぶことにする。

〔証明〕. (〔命題2〕における記号達を用いる。)
 $x \in I$ 且つ $b \in x$ とする。また, A を b の H 表現とする。 $\bigcup \Phi_*[\{1\}] - \{0\}$ から $\bigcup \Phi^\Delta_*[\{1^\Delta\}] - \{0^\Delta\}$ への全単射 J で, 「 $b' \leq b''$ と $J(b') \leq J(b'')$ とは同値», をみたすものが存在する。この J に対して, 「 $h = A(X)$ 且つ $h = \vee Y$ 且つ $Y \subseteq X$ 且つ $h \neq 0$, ならば, $K(h) = \vee J[Y]$ 」且つ 「 $K(0) = 0^\Delta$ », をみたす, $A[\Phi_*[\{1\}]]$ から H^Δ への写像 K が存在する。 π^Δ を, B^Δ から $B^\Delta/\doteq^\Delta$ への標準的全射, 即ち, 「任意の $b' \in B^\Delta$ に対して $b' \in \pi^\Delta(b')$ をみたす写像», とし, この K に対して,

$$I(x) = \pi^\Delta(\vee K[A[\Phi_*[\{1\}]]]),$$

と定義すればよい。〔証明終〕

〔命題4〕. (〔命題1〕の仮定達を仮定し, 且つ, [命題2] の記号達を用いる。また, π を B から $B/\doteq$ への標準的全射とする。)
 任意の $b \in B$ と, b の任意の H 表現達, A 及び A' , とに対して; $\pi \circ A = \pi \circ A'$ が成立し, 且つ, 「 $b \in H$ ならば; 或 $X \in \Phi_*[\{1\}]$ が存在して, $\pi(A(X)) = \pi(b)$ », 且つ, 「 $b \in B - H$ ならば; 任意の $X \in \Phi_*[\{1\}]$ に対して, “ $\pi(A(X)) \neq \pi(0)$ ならば, $\pi(A(X)) \leq \pi(A(\Phi(X)))$ (但し「 $x \leq y$ に非ず」を「 $y \leq x$ 」と表現する。))», が成立する。(この写像 $\pi \circ A$ を「 b の二進展開 (binary expansion)」と呼ぶ。) この場合, 「 A を定義する際に用いられる Φ 」と「 A' を定義する際に用いられる Φ 」とは, “〔命題1〕の結論2”の条件をみたしているのならば, 同じ写像である必要はない, 事を注意する。従って, この命題は, 「 b の二進展開は一意的に定まる», と表現できる。〔証明〕は A の定義より従う。

〔命題5〕. (〔命題1〕の仮定達を仮定する。)

任意の $b \in B_+$ に対して; $B^{(b)} = \{b' \in B; b' \leq b\}$,
とおき, 且つ, 任意の $b' \in B^{(b)}$ と $b'' \in B^{(b)}$ とに
対して, 「 $b' \leq^{(b)} b''$ 」, 「 $b' \vee^{(b)} b''$ 」, 「 $b' \wedge^{(b)} b''$ 」,
「 $\neg^{(b)} b'$ 」, 「 $0^{(b)}$ 」, 及び, 「 $1^{(b)}$ 」, を, 各各,
「 $b' \leq b''$ 」, 「 $b' \vee b''$ 」, 「 $b' \wedge b''$ 」, 「 $b \wedge \neg b'$ 」,
「 0 」, 及び, 「 b 」, によって定義するのならば,
定性的確率 $\leq^{(b)}$ 及び Boole 代数 $B^{(b)}$ は,
[命題 1] の仮定達を満足する。従って, [命
題 3], 但し, そこでの記法において, 「上つきの
 Δ 」を「上つきの $\langle b \rangle$ 」で置きかえる, より,
 B 単位区間 $\langle I, \leq \rangle$ と $B^{(b)}$ 単位区間 $\langle I^{(b)},$
 $\leq^{(b)} \rangle$ とは, 強順序同形となる。

[命題 6]. ([命題 1] の仮定達を仮定する。)
或写像 ζ が存在して; 「 ζ の定義域 $\text{dom}(\zeta)$ は
 B の部分集合であり, 且つ, ζ の値域 $\text{ran}(\zeta)$
($=\zeta[\text{dom}(\zeta)]$) は $\text{dom}(\zeta)$ の部分集合であり,
且つ, $0 \in \text{dom}(\zeta)$ であり, 且つ, “或 $b \in \text{dom}(\zeta)$
が存在して; $0 < b_*$, 且つ, $\text{dom}(\zeta) = \zeta_*[b_*] \cup$
 $\zeta_*[0]$, 且つ, $\zeta_*[b_*] \cap \zeta_*[0] = \emptyset$,” 且つ, “任
意の $b' \in \text{dom}(\zeta)$ に対して; $b' \leq \zeta(b')$, 且つ,
 $b' < \zeta(b')$,” 且つ, “ $\langle \text{dom}(\zeta) - \zeta_*[0], \leq \rangle$ と
 $\langle \zeta_*[\zeta(0)], \leq \rangle$ とは順序同形である”, を
みたま。この場合, ζ は単射であり, 且つ, 上
記の「 b_* 」なる元は, ζ に対して, 一意的に定
まる事を注意する。また, $\langle \text{dom}(\zeta) - \zeta_*[0],$
 $\leq \rangle$ から $\langle \zeta_*[\zeta(0)], \leq \rangle$ 上への順序同形写像
を α とすると, この α も亦, 一意的に定まる。
なお, 以下においては, ζ を「 B 整数系列」,
 $\text{dom}(\zeta)$ の元を「 ζ 整数」, 元「 b_* 」を「 B 整
数系列 ζ の生成元」, 写像「 α 」を「 ζ の反転」,
と呼ぶことにする。

[証明]. ([命題 5] の記法を用いる。) 任意の
 $b \in B_+$ に対して; 「 $B^{(b)}$ から $B^{(b)}$ への写像 ξ が
存在して, 任意の $b' \in B^{(b)}$ に対して, “ $\xi(b') \leq$
 $b \wedge \neg b'$, 且つ, $\xi(b') \equiv (b \wedge \neg b') \wedge \neg \xi(b')$ ”
が, 成立する。また, 或 $\{b'', b'''\} \subseteq B$ が存在
して; 「 $b'' \leq b'$, 且つ, $\neg b'' \equiv b'$, 且つ, $b'' \wedge$
 $\neg b''' \equiv b'''$ 」が, 成立する。この様な b' , 及

び, $\neg b''$, に対応する, 上記 ξ に相当する写像
達を, 各各, ξ' , 及び, ξ'' , とする。また,
 $Z' = \{x \in B^{(b)}; \text{或 } x' \in \xi'_*[b''']\}$ が存在して,
 $x = \vee (\xi'_*[b'''] - \xi'_*[\xi'(x')])$, と置く。この
場合, Z' から Z' への写像 η' で, 「任意の
 $x \in Z'$ に対して, 或 $x' \in \xi'_*[b''']$ が存在して;
 $\eta'(x) = x \vee \xi'(x')$, 且つ, $x \wedge \xi'(x') = 0$ 」, をみ
たすものが一意的に存在する。 ξ'' に対しても,
“ $b''' \leq \neg b''$, 且つ, $b''' \equiv \neg b'' \wedge \neg b'''$ ” なる任
意の $b'''' \in B$ に対して, この η' と同様の写像,
 η'' , が一意的に存在する。この場合, $Z = \text{dom}$
 $(\eta'') \cup \{0\} \cup \text{dom}(\eta')$ と置き, 「 $\zeta(0) = b'''$ 」, 且
つ, 「任意の $x' \in \text{dom}(\eta')$ に対して, $\zeta(x') =$
 $\eta'(x')$ 」, 且つ, 「任意の $x'' \in \text{dom}(\eta'')$ に対
して, $\zeta(x'') = \eta''(x'')$ 」, によって, Z から Z へ
の写像 ζ を定義する。この ζ は「 B 整数系
列」の諸条件をみたす。[証明終]

[命題 7]. ([命題 1] の仮定達を仮定する。)
 ζ を B 整数系列, b_* を ζ の生成元, α を ζ
の反転, とする。任意の $b \in \zeta_*[0]$ に対して,
 $\text{dom}(\zeta)$, 以下 Z と記す, から Z への或写像
 τ が存在して; 「 $\tau(0) = b$ 」, 且つ, 「任意の
 $x \in \zeta_*[0]$ に対して, $\tau(\zeta(x)) = \zeta(\tau(x))$ 」, 且つ,
「任意の $y \in \zeta_*[b_*]$ に対して; “ $\zeta_*[b] \subseteq \zeta_*[\alpha(y)]$,
ならば; $\zeta_*[\alpha(y)] - \zeta_*[\zeta(b)]$ から $\zeta_*[0]$ への
或写像 τ' で, $\tau'(\alpha(y)) = 0$, 且つ, 任意の
 $b' \in \zeta_*[\alpha(y)] - \zeta_*[b]$ に対して, $\tau'(\zeta(b')) =$
 $\zeta(\tau'(b'))$ 」, をみたすものが存在して, $\tau(y) =$
 $\tau'(b)$ ”, 且つ, “ $\zeta_*[\alpha(y)] \subseteq \zeta_*[b]$, ならば,
 $\zeta_*[b] - \zeta_*[\zeta(\alpha(y))]$ から $\zeta_*[0]$ への或写像 τ''
で, $\tau''(b) = 0$, 且つ, 任意の $b'' \in \zeta_*[b] -$
 $\zeta_*[\alpha(y)]$ に対して, $\tau''(\zeta(b'')) = \zeta(\tau''(b''))$ 」, を
みたすものが存在して, $\tau(y) = \alpha^{-1}(\tau''(\alpha(y)))$ ”
また, この様な写像 τ は, 各 $b \in \zeta_*[0]$ に対
して, 一意的に定まるので, 各 $b \in \zeta_*[0]$ に対応
する τ を, 「 τ_b 」, と記す事にし, 且つ, 各 $b \in$
 $\zeta_*[b_*]$ に対して, 「「任意の $b' \in \zeta_*[b_*]$ に対
して, $\hat{\alpha}(b') = \alpha(b')$ 」, 且つ, 「任意の $b' \in \zeta_*[\zeta(0)]$
に対して, $\hat{\alpha}(b') = \alpha^{-1}(b')$ 」, 且つ, 「 $\hat{\alpha}(0) =$

0』, によって定義される Z から Z への全単射 $\hat{\alpha}$ に対して, $\tau_b = \hat{\alpha}^{-1} \circ \tau_{\alpha(b)} \circ \hat{\alpha}$, と定義する。この場合, Z 上の「二項演算」, $+$, を, 「任意の $b \in Z$ と $b' \in Z$ とに対して, $b + b' = \tau_b(b')$ 」, によって定義すると, 代数系 $\langle Z, + \rangle$ は加群となり, 零元は 0 となり, また, $\hat{\alpha}$ が, 逆元を与える写像となる。この場合, 「任意の $z \in Z$ に対して, Z から Z への或写像 μ が存在して; $\mu(0) = 0$, 且つ, $\mu(b_*) = -z$, 但し, z の逆元を「 $-z$ 」と表現する, 且つ, 任意の $y \in Z$ に対して, $\mu(\zeta(y)) = \mu(y) + z$ 」が成立する。この様な写像 μ は, 各 $z \in Z$ に対して, 一意的に定まるので, 各 $z \in Z$ に対応する μ を, 「 μ_z 」, と記す事にする。この場合, Z 上の「乗法」, $\cdot$, を, 「任意の $z \in Z$ と $z' \in Z$ とに対して, $z \cdot z' = \mu_z(z')$ 」, によって定義すると, 代数系 $\langle Z, +, \cdot \rangle$ は, 単位元 $\zeta(0)$ を持つ, 可換環となる。

[命題 8]. ([命題 1] の仮定達を仮定し, 且つ, [命題 7] の記号達を用い, 且つ, [命題 5] における「上つきの $\langle b \rangle$ 」を用いる記法を利用する。また, 可換環 $\langle Z, +, \cdot \rangle$ における零元 0 , 及び, 単位元 $\zeta(0)$, を, 各各, 0_ζ , 及び, 1_ζ , と記し, 且つ, Z 上の線形順序「 $\leq_\zeta$ 」を, 「任意の $z \in Z$ と $z' \in Z$ とに対して; $z' + (-z) \in_* [0]$ の場合, またその場合に限って, $z \leq_\zeta z'$ 」, によって定義する。) $L = \{b \in B; \text{或 } b' \in Z \text{ が存在して, 「} b' \leq b, \text{ 且つ, } b \leq_\zeta(b')\text{」, 或いは, 「} b \leq b', \text{ 且つ, } b' = -1_\zeta\text{」}\}$, と置く。この場合, L 上の同値関係 $\sim_L$ を, 「任意の $b' \in L$ と $b'' \in L$ とに対して; 「 $b' \doteq b''$ 」, 且つ, 『或 $b''' \in Z$ が存在して; “ $b''' \leq b'$, 且つ, $b''' \leq b''$, 且つ, $b' \leq_\zeta(b''')$, 且つ, $b'' \leq_\zeta(b''')$ ”, 或いは, “ $b' \leq b'''$, 且つ, $b'' \leq b'''$, 且つ, $b''' = -1_\zeta$ ”』, の場合, またその場合に限って, 「 $b' \sim_L b''$ 」, によって定義する。また, $R = L / \sim_L$, と置き, L から $L / \sim_L$ への標準的全射を π_R とする。

この場合, $R_0 = \{x \in R; \text{或 } b \in L \text{ と或 } b' \in Z \text{ が存在して, } x = \pi_R(b), \text{ 且つ, } 0_\zeta \leq_\zeta b', \text{ 且つ,}$

$b' \leq b, \text{ 且つ, } b \leq_\zeta(b')\}$, 且つ, $R_* = R - R_0$, 且つ, $R_0^* = R_0 - \{\pi_R(0_\zeta)\}$, と置くと, R_* から R_0^* への全単射 β が存在して; 「任意の $b \in \pi_R^{-1}[R_*]$ と $b' \in \pi_R^{-1}[R_*]$ とに対して; 『“ $b \leq b'$ ” と “或 $b'' \in \beta(\pi_R(b))$ と或 $b''' \in \beta(\pi_R(b'))$ とが存在して; $b'' \leq b'''$ ” とは同値』, 且つ, 『任意の $l \in L$ と $l' \in L$ とに対して; “或 $z \in Z$ が存在して; $z + 1_\zeta \leq b$, 且つ, $z + 1_\zeta \leq b'$, 且つ, $b \leq z$, 且つ, $b' \leq z$, 且つ, $b \doteq b'$, 且つ, $b \wedge b' \wedge \neg(z + 1_\zeta) = 0$, 且つ, $-(z + 1_\zeta) \leq l$, 且つ, $-(z + 1_\zeta) \leq l'$, 且つ, $l \leq -z$, 且つ, $l' \leq -z$, 且つ, $l \wedge l' \wedge \neg(z + 1_\zeta) = 0$ ”, 且つ, $l \doteq l'$, 且つ, $\beta(\pi_R(b \vee b')) = \pi_R(l \vee l')$ 」, ならば, $\beta(\pi_R(b)) = \pi_R(l)$ 』, をみたす。また, この様な β は一意的に定まる。(この β を, 「 R の反転」, と呼ぶ事にする。)

また, $0_\zeta \leq_\zeta z$ なる任意の $z \in Z$ に対して, $B^{\langle 1_\zeta \rangle} / \doteq \langle 1_\zeta \rangle$ から $B^{\langle (z+1_\zeta) \wedge \neg b \rangle} / \doteq \langle (z+1_\zeta) \wedge \neg b \rangle$ への全単射 L が存在して; 「任意の $l \in B^{\langle 1_\zeta \rangle}$ と $l' \in B^{\langle 1_\zeta \rangle}$ と $b \in B^{\langle (z+1_\zeta) \wedge \neg b \rangle}$ と $b' \in B^{\langle (z+1_\zeta) \wedge \neg b \rangle}$ とに対して; 『 $l \leq \langle 1_\zeta \rangle l'$ と $L(\pi^{\langle 1_\zeta \rangle}(l)) \leq \langle (z+1_\zeta) \wedge \neg b \rangle L(\pi^{\langle 1_\zeta \rangle}(l'))$ とは同値』, 且つ, 『“ $l \wedge l' = 0$; 且つ, $l \doteq l'$, 且つ, $b \wedge b' = 0$, 且つ, $b \doteq b'$, 且つ, $L(\pi^{\langle 1_\zeta \rangle}(l \vee l')) = \pi^{\langle (z+1_\zeta) \wedge \neg b \rangle}(b \vee b')$ ”, ならば, $L(\pi^{\langle 1_\zeta \rangle}(l)) = \pi^{\langle (z+1_\zeta) \wedge \neg b \rangle}(b)$ 』, をみたす。従って, L は強順序同形写像であり, 且つ, ([命題 3] より,) $0_\zeta \leq_\zeta z$ なる各 $z \in Z$ に対して, 一意的に定まる。この L を, L_z , と記す。

[命題 9]. ([命題 8] における, 仮定達, 及び, 記号達, を仮定する。) 任意の $a \in R_0$ と, $0_\zeta \leq_\zeta z$ なる任意の $z \in Z$ と, 任意の $l \in L$ とに対して; 「 $a = \pi_R(l)$, 且つ, $z \leq l$, 且つ, $l \leq_\zeta(z)$ 」, ならば, R から R への全単射 T が存在して; $T(\pi_R(0_\zeta)) = a$, 且つ, 『任意の $z' \in Z$ と, 任意の $l' \in L$ とに対して; 「 $0_\zeta \leq_\zeta z'$, 且つ, $z' \leq l'$, 且つ, $l' \leq_\zeta(z')$ 」, ならば, 「任意の $b \leq 1_\zeta$ と $b' \leq 1_\zeta$ と, 任意の $b'' \in B^{\langle \zeta(z+z') \wedge \neg \zeta(z+z') \rangle}$ と, 任意の $b''' \in B^{\langle \zeta(z+z') \wedge \neg \zeta(z+z') \rangle}$ とに対して; 「 $b \wedge b' = 0$, 且つ, $L_z(\pi^{\langle 1_\zeta \rangle}(b)) = \pi^{\langle \zeta(z) \wedge \neg b \rangle}(l \wedge \neg z)$, 且つ, $L_{z'}(\pi^{\langle 1_\zeta \rangle}(b')) = \pi^{\langle \zeta(z') \wedge \neg b' \rangle}(l' \wedge \neg z')$,

且つ, $L_{z+z'}(\pi^{(1)}(b \vee b')) = \pi^{(z+z') \wedge (z+z')}(b'')$,
 ならば, $T(\pi_R(l')) = \pi_R((z+z') \vee b'')$, 且つ,
 $\llbracket 1 \leq b \leq b' \rrbracket$, 且つ, $L_z(\pi^{(1)}(b)) = \pi^{(z) \wedge (z)}(l \wedge \neg z)$, 且つ,
 $L_{z'}(\pi^{(1)}(b')) = \pi^{(z') \wedge (z')}(l' \wedge \neg z')$, 且つ,
 $L_{z+z'}(\pi^{(1)}(b \vee b')) = \pi^{(z+z') \wedge (z+z')}(l \wedge \neg z \vee l' \wedge \neg z')$,
 ならば, $T(\pi_R(l')) = \pi_R((z+z') \vee b'')$, 且つ,
 $\llbracket z' + 1 \leq z' \rrbracket$, 且つ, $\llbracket z' + 1 \leq z' \rrbracket$, ならば, 「任意の
 $z' \in Z$ と, 任意の $l' \in L$ と, 任意の $b \leq 1$ と
 $b' \leq 1$ と, に対して; $\beta(\pi_R(z' + 1)) = \pi_R(z')$,
 且つ, $\beta(\pi_R(l')) = \pi_R(l')$, 且つ, $L_z(\pi^{(1)}(b)) = \pi^{(z) \wedge (z)}(l \wedge \neg z)$,
 且つ, $L_{z'}(\pi^{(1)}(b')) = \pi^{(z') \wedge (z')}(l' \wedge \neg z')$, ならば, $\llbracket 1 \leq z + (-z') \rrbracket$,
 ならば, $\llbracket b'' \leq b \rrbracket$, ならば, $L_{z+(-z')}(\pi^{(1)}(b \wedge \neg b'')) = \pi^{(z+(-z')) \wedge (z+(-z'))}(b''')$
 なる任意の $b''' \in B^{(z+(-z')) \wedge (z+(-z'))}$ に対して,
 $T(\pi_R(l')) = \pi_R((z+(-z')) \vee b''')$, 且つ,
 $\llbracket b \leq b'' \rrbracket$, ならば, $L_{z+(-z')}(\pi^{(1)}(1 \leq \neg \neg (b'' \wedge \neg b))) = \pi^{(z+(-z')) \wedge (z+(-z'))}(b''')$
 なる任意の $b''' \in B^{(z+(-z')) \wedge (z+(-z'))}$ に対して,
 $T(\pi_R(l')) = \pi_R(((z+(-z')) + (-1)) \vee b''')$, 且つ,
 $\llbracket 0 \leq z + (-z') \rrbracket$, ならば, $\llbracket b'' \leq b \rrbracket$, ならば, $T(\pi_R(l')) = \pi_R(b \wedge \neg b')$,
 且つ, $\llbracket b \leq b'' \rrbracket$, ならば, $\llbracket \pi_R(b'' \wedge \neg b) \equiv \pi_R(0) \rrbracket$,
 ならば, $T(\pi_R(l')) = \beta^{-1}(\pi_R(b'' \wedge \neg b))$, 且つ,
 $\llbracket \pi_R(b'' \wedge \neg b) = \pi_R(0) \rrbracket$, ならば, $T(\pi_R(l')) = \pi_R(0)$,
 且つ, $\llbracket z + (-z') \leq -1 \rrbracket$, ならば, $\llbracket b \leq b'' \rrbracket$, ならば,
 $L_{-(z+(-z'))}(\pi^{(1)}(b'' \wedge \neg b)) = \pi^{(z+(-z')) \wedge (z+(-z'))}(b''')$
 なる任意の $b''' \in B^{(z+(-z')) \wedge (z+(-z'))}$ に対して,
 $T(\pi_R(l')) = \beta^{-1}(\pi_R((- (z+(-z')) \vee b'''))$,
 且つ, $\llbracket b'' \leq b \rrbracket$, ならば, $L_{-(z+(-z'))}(\pi^{(1)}(1 \leq \neg \neg (b \wedge \neg b'')) = \pi^{(z+(-z')) \wedge (z+(-z'))}(b''')$
 なる任意の $b''' \in B^{(z+(-z')) \wedge (z+(-z'))}$ に対して,
 $\llbracket \pi_R((- ((z+(-z')) + 1) \vee b''')) \equiv \pi_R(0) \rrbracket$,
 ならば, $T(\pi_R(l')) = \beta^{-1}(\pi_R((- ((z+(-z')) + 1) \vee b'''))$,
 且つ, $\llbracket \pi_R((- ((z+(-z')) + 1) \vee b''')) = \pi_R(0) \rrbracket$, ならば,
 $T(\pi_R(l')) = \pi_R(0)$, をみたす。また, この様な T は, 各 $a \in R_0$ に対して, 一意的に定

まる。各 $a \in R_0$ に対して定まるこの T を, T_a , と記すことにし, 且つ, 各 $a' \in R_*$ に対して,
 $\llbracket \text{「任意の } a'' \in R_* \text{ に対して, } \beta(a'') = \beta(a'') \rrbracket$, 且つ, 「任意の $a'' \in R_0^*$ に対して,
 $\beta(a'') = \beta^{-1}(a'')$, 且つ, $\llbracket \beta(\pi_R(0)) = \pi_R(0) \rrbracket$,
 によって定義される, R から R への全単射 β , に対して,
 $T_a = \beta^{-1} \circ T_{\beta(a)} \circ \beta$, によって, R から R への全単射 T_a を定義する。

この場合, 「任意の $a \in R$ と $a' \in R$ とに対して,
 $a +_R a' = T_a(a')$, によって, R 上の「二項演算」,
 $\llbracket +_R \rrbracket$, を定義すると, 代数系 $\langle R, +_R \rangle$ は加群となり,
 且つ, β は逆元を与える写像となり, 且つ, 零元は $\pi_R(0)$, 以下, この零元を 0_R と記す,
 によって与えられ, 且つ, 「任意の $z \in Z$ と $z' \in Z$ とに対して,
 $\pi_R(z) +_R \pi_R(z') = \pi_R(z + z')$ 」が成立する。
 また, 「任意の $a \in R$ と $a' \in R$ とに対して;
 $a' +_R (-a) \in R_0$, の場合, またその場合に限って,
 $a \leq_R a'$, によって, R 上の線形順序, $\leq_R$,
 を定義し, 且つ, $\llbracket a \leq_R a' \rrbracket$, 且つ, $a \not\leq_R a'$ を「 $a \not\leq_R a'$ 」と略記する。

この場合, 「任意の $a \in R$ と $a' \in R$ とに対して;
 $a \not\leq_R a'$, ならば, 或 $a'' \in R$ が存在して, $\llbracket a \not\leq_R a'' \rrbracket$,
 且つ, $a'' \not\leq_R a'$, が成立し, さらに, また, 「Dedekind の連続性公理 (Dedekind's axiom of continuity)」,
 即ち, 「任意の $A \subseteq R$ と $A' \subseteq R$ とに対して;
 $A \cap A' = \emptyset$, 且つ, $R = A \cup A'$, 且つ, 「任意の $a \in A$ なる a と, 任意の $a' \in A'$ なる a' とに対して,
 $a \not\leq_R a'$ 」, ならば, 「或 $a'' \in R$ が存在して;
 $\llbracket \text{「任意の } a \in A \text{ と, 任意の } a' \in A' \text{ とに対して; } a \leq_R a'', \text{ 且つ, } a'' \leq_R a' \rrbracket$, が成立する。また,
 「任意の $a \in R$ に対して, 或 $a' \in \pi_R[Z]$ と或 $a'' \in R$ とが存在して;
 $a = a' +_R a''$, 且つ, $0_R \leq_R a''$, 且つ, $a'' \not\leq_R \pi_R(1)$, が成立する。
 また, この様な $a' \in \pi_R[Z]$ と $a'' \in R$ とは, 各 $a \in R$ に対して,
 一意的に定まる。そこで, 各 $a \in R$ に対して一意的に定まる,
 この様な $a' \in \pi_R[Z]$ 及び $a'' \in R$ を, 各各, $\text{Gau}(a)$ 及び $\text{Rem}(a)$, と表記する事にする。

[命題10]. ([命題8], 及び, [命題9], における, 仮定達, 及び, 記号達, を仮定する。また, $Z_R = \pi_R[Z]$ と置く。)

任意の $a \in R$ に対して, Z_R から R への或写像 M' が存在して; $M'(0_R) = 0_R$, 且つ, 「任意の $a' \in Z_R$ に対して, $M'(a' +_R \pi_R(1_c)) = M'(a') +_R a$ 」, をみたす。また, この様な写像 M' は, 各 $a \in R$ に対して, 一意的に定まる。そこで, 各 $a \in R$ に対して, この様な写像 M' を, M'_a , と記す。

「 $0 < l$, 且つ, $l \leq 1_c$ 」なる任意の $l \in L$ に対して, $B^{(1)} / \equiv^{(1)}$ から $B^{(2)} / \equiv^{(2)}$ への強順序同形写像が一意的に存在する事, が, [命題5] より従うので, この様な強順序同形写像を, $L^{(2)}$, と記すことにする。この場合, 「 $0_R \leq_R h$, 且つ, $h \leq_R \pi_R(1_c)$ 」なる任意の $h \in R$ に対して, R から R への或写像 M'' が存在して; 「任意の「 $0 < l$, 且つ, $l \leq 1_c$ 」なる $l \in L$ と, 任意の $a' \in Z_R$ と, 任意の $l' \in B^{(1)}$ と, 任意の $l'' \in B^{(2)}$ とに対して; 「 $h = \pi_R(l)$, 且つ, $L^{(2)}(\pi^{(1)}(l')) = \pi^{(2)}(l'')$ 」, ならば, $M''(a' +_R \pi_R(l')) = M'_h(a') +_R \pi_R(l'')$ 」, が成立する。また, この様な写像 M'' は, 各「 $0_R \leq_R h$, 且つ, $h \leq_R \pi_R(1_c)$ 」なる $h \in R$ に対して, 一意的に定まる。そこで, 「 $0_R \leq_R h$, 且つ, $h \leq_R \pi_R(1_c)$ 」なる各 $h \in R$ に対して, この様な写像 M'' を, M''_h , と記す。

この場合, R 上の「二項演算」, 「 $\cdot_R$ 」, を, 「任意の $a' \in Z_R$ と, 任意の $a \in R$ とに対して, $a' \cdot_R a = M'_a(a')$ 」, 且つ, 「任意の $a' \in Z_R$ と, 任意の $a \in R$ と, 「 $0_R \leq_R h$, 且つ, $h \leq_R \pi_R(1_c)$ 」なる任意の $h \in R$ とに対して, $(a' +_R h) \cdot_R a = M'_a(a') +_R M''_h(a)$ 」, によって定義するのならば, 代数系 $\langle R, +_R, \cdot_R \rangle$ は, 加法, $+_R$, 及び, 乗法, $\cdot_R$, に関して, 可換環となり, 零元, 0_R , 及び, 単位元, $\pi_R(1_c)$, 以下, これを, 1_R , と記す, を持つ。また, 「任意の $a' \in R$ と $a'' \in R$ と $a''' \in R$ とに対して; $a' \leq_R a''$, ならば, $a' +_R a''' \leq_R a'' +_R a'''$ 」, 及び, 「任意の $a' \in R$ と $a'' \in R$ と, 任意の $a''' \in R_0^*$ とに対して; $a' \leq_R a''$, ならば, $a' \cdot_R a''' \leq_R a'' \cdot_R a'''$ 」, が成立する。さ

らに, また, 「Archimedes の公理」, 即ち, 「任意の $a' \in R_0^*$ と $a'' \in R_0^*$ とに対して, 或 $z \in Z_R$ が存在して; $0_R \leq_R z$, 且つ, $a'' \leq_R z \cdot_R a'$ 」, が成立する。

「Dedekind の連続性公理」 ([命題9] 参照), 及び, 「Archimedes の公理」により, 「任意の $a' \in R - \{0_R\}$ に対して, 或 $a'' \in R - \{0_R\}$ が存在して; $a' \cdot_R a'' = 1_R$, 且つ, $a'' \cdot_R a' = 1_R$ 」, が示される。従って, 代数系 $\langle R, +_R, \cdot_R \rangle$ は, 可換体であり, 且つ, 線形順序 $\leq_R$ に関して順序体であり, 且つ, 「Dedekind の連続性公理」をみたす。故に, 代数系 $\langle R, +_R, \cdot_R \rangle$ は, 「実数体」となる。

[命題11]. ([命題1] における仮定達, 及び, [命題5] 及び [命題10] における記号達, を用いる。) $b \in B$, 且つ, $0 < b$, なる任意の b に対して, B から実数体 $\langle R, +_R, \cdot_R \rangle$ への写像 P が存在して, 次の条件 QN1, QN2, QN3, 及び, QLN, をみたし, 且つ, この様な写像 P は, 各 $b \in B_+$ に対して, 一意的に定まる。各 $b \in B_+$ に対して, この様な写像 P を, $P(\cdot | b)$, と記し, 「条件 $b \in B_+$ が与えられる場合の, 定性的確率 $\leq$ によって誘導される条件付き定量的確率 (conditional quantitative probability)」, と呼ぶ。

QN1. 任意の $b' \in B$ に対して; $0_R \leq_R P(b' | b)$.

QN2. 任意の $b' \in B$ と $b'' \in B$ とに対して;

$b' \wedge b'' = 0$, ならば,

$P(b' \vee b'' | b) = P(b' | b) +_R P(b'' | b)$.

QN3. $P(1 | b) = 1_R$.

QLN. 任意の $b' \in B$ と $b'' \in B$ とに対して;

$b' \wedge b \leq b'' \wedge b$ の場合, またその場合に
限って, $P(b' | b) \leq_R P(b'' | b)$.

また, さらに, 「任意の $b \in B_+$ と任意の $b' \in B$ と, $0_R \leq_R h$ 且つ $h \leq_R 1_R$ なる任意の $h \in R$ とに対して, 或 $b'' \in B$ が存在して; $b'' \leq b$, 且つ, $P(b'' | b) = h \cdot_R P(b' | b)$ 」, が成立する。また,

「任意の $b \in B_+$ と任意の $b' \in B$ とに対して,
 $P(b' \wedge b | 1) = P(b | 1) \cdot {}_R P(b' | b)$ 」, が成立する。

〔証明〕. [命題5] により, $B^{(b)}/\equiv^{(b)}$ から $B^{(1)}/\equiv^{(1)}$ への強順序同形写像が一意的に存在するので, これを I_b とする。また, $I_R = \{h \in R; 0_R \leq_R h, \text{ 且つ, } h \leq_R 1_R\}$, と置くと, $B^{(1)}/\equiv^{(1)}$ から I_R への全単射 I_c で, 「任意の $b \in B^{(1)}/\equiv^{(1)}$ に対して, $I_c(\pi^{(1)}/\equiv^{(1)}(b)) = \pi_R(b)$ 」, をみたすものが一意的に定まる。さらに, また, 「任意の $b' \in B$ に対して, $R_b(b') = b' \wedge b$ 」, によって, B から $B^{(b)}/\equiv^{(b)}$ への写像を定義する。以上の写像達を用いて, 「任意の $b' \in B$ に対して,

$$P(b' | b) = I_c(I_b(\pi^{(b)}/\equiv^{(b)}(R_b(b')))),$$

によって, $P(\cdot | b)$ を定義すれば結論が従う。

〔証明終〕

[命題12]. ([命題1] における仮定達, 及び, [命題5] 及び [命題10] における記号達, を用いる。) 任意の $b \in B_+$ と, 任意の $b' \in B$ と $b'' \in B$ とに対して; 「条件 b が与えられる場合, b' は b'' から統計的に独立である」とは, 「 $b' \wedge b = 0$, 或いは, $B^{(b)}/\equiv^{(b)}$ から $B^{(b' \wedge b'')}/\equiv^{(b' \wedge b'')}$ への強順序同形写像 Γ が存在して, $\Gamma(\pi^{(b)}/\equiv^{(b)}(b' \wedge b)) = \pi^{(b' \wedge b'')}/\equiv^{(b' \wedge b'')}(b' \wedge b'')$ 」の事である, と定義し, 且つ, この関係を, $b' \perp^{(b)} b''$, と記す事にする。この場合, 任意の $b \in B_+$ と, 任意の $b' \in B$ と $b'' \in B$ とに対して; 「 $b' \perp^{(b)} b''$, ならば, $b'' \perp^{(b)} b'$ 」, 且つ, 「或 $b''' \in B$ が存在して; $b' \equiv b'''$ 」, 且つ, 「 $b''' \perp^{(b)} b''$ 」, 且つ, 「 $b' \perp^{(b)} b''$ と $P(b' \wedge b'' | b) = P(b' | b) \cdot {}_R P(b'' | b)$ とは同値」, が成立する。

[命題13]. ([命題1] における仮定達, 及び, [命題10], [命題11], 及び, [命題12], における記号達, を用いる。) 任意の $a \in R$ に対して, $L(a) = \{a' \in R; a' \leq_R a\}$, $L_*(a) = \{a' \in R; a' \leq_R a\}$, $U(a) = \{a' \in R; a \leq_R a'\}$, 且つ, $U^*(a) = \{a' \in R; a \leq_R a'\}$, と置き, また, さらに, $\mathcal{L}_R = \{X; X \subseteq R, \text{ 且つ, 或 } a \in R \text{ が存在して, } X = L(a),$

或いは, $X = L_*(a)$, 或いは, $X = U(a)$, 或いは, $X = U^*(a)\}$, と置く。この場合, $\mathcal{L}_R$ から B への写像 $\tilde{x}$ が, 「任意の $a \in R$ に対して; $\tilde{x}(U^*(a)) = \neg \tilde{x}(L(a))$, 且つ, $\tilde{x}(U(a)) = \neg \tilde{x}(L_*(a))$, 且つ, 「任意の $a' \in R$ に対して; $a \leq_R a'$, ならば, $\tilde{x}(L(a)) \leq \tilde{x}(L(a'))$ 」, 且つ, $\tilde{x}(L_*(a)) \leq \tilde{x}(L(a))$, 且つ, 「任意の $a' \in U^*(a)$ に対して $b \leq \tilde{x}(L(a'))$ 」なる条件をみたす, 任意の $b \in B$ に対して; $b \leq \tilde{x}(L(a))$ 」, 且つ, 「任意の $a' \in L_*(a)$ に対して $\tilde{x}(L(a')) \leq b$ 」なる条件をみたす, 任意の $b \in B$ に対して; $\tilde{x}(L_*(a)) \leq b$ 」, なる条件をみたす場合, またその場合に限って, 写像 $\tilde{x}$ を, 「抽象的変数」, と呼ぶことにする。特に, 任意の $a \in R$ に対して; 「任意の $l \in \mathcal{L}_R$ に対して; 「 $a \in l$, ならば, $\tilde{a}(l) = 1$ 」, 且つ, 「 $a \notin l$, ならば, $\tilde{a}(l) = 0$ 」」, によって, 抽象的変数 $\tilde{a}$ を定義する。また, 任意の $a \in R$ に対して; 「任意の $a' \in R$ に対して; $\tilde{y}(L(a')) = \tilde{x}(L(a' +_R (-a)))$ 」, なる条件をみたす抽象的変数 $\tilde{y}$ が一意的に定まるので, この $\tilde{y}$ を, $\tilde{x} \mp \tilde{a}$, と記す事にする。さらに, また, 任意の抽象的変数 $\tilde{x}$ に対して; 「任意の $a' \in R$ に対して; $\tilde{z}(L(a')) = \tilde{x}(U(-a'))$ 」, なる条件をみたす抽象的変数 $\tilde{z}$ が一意的に定まるので, この $\tilde{z}$ を, $-\tilde{x}$, と記す事にする。また, 任意の $a \in R$ と, 任意の抽象的変数 $\tilde{x}$ に対して; 「任意の $a' \in R$ に対して; 「 $a = 0_R$, ならば, $\tilde{w} = \tilde{0}_R$ 」, 且つ, 「 $0_R \leq_R a$, ならば, $\tilde{w}(L(a')) = \tilde{x}(L(a' \cdot_R a^{-1}))$ 」, 且つ, 「 $a \leq_R 0_R$, ならば, $\tilde{w}(L(a')) = \tilde{x}(U(a' \cdot_R a^{-1}))$ 」」, なる条件をみたす抽象的変数 $\tilde{w}$ が一意的に定まるので, この $\tilde{w}$ を, $a\tilde{x}$, と記す事にする。

この場合, 任意の抽象的変数 $\tilde{x}$ と $\tilde{y}$ とに対して; 「任意の $a \in R$ に対して, $\tilde{z}(L_*(a)) = \bigvee \{b \in B; \text{ 或 } a' \in R \text{ が存在して, } b = \tilde{x}(L_*(a')) \wedge ((-\tilde{y}) \mp \tilde{a})(U^*(a'))\}$ 」, をみたす抽象的変数 $\tilde{z}$ が一意的に存在する。そこで, この $\tilde{z}$ を, $\tilde{x} \mp \tilde{y}$, と記す事にする。(なお, $\tilde{x} \mp \tilde{y}$, を定義する為に用いた式の右辺の上限は, 抽象的変数の定義, 及び, 仮定DΣ, より存在することが

容易に示される。) また, この場合, $\tilde{x} \sim \tilde{y} = \tilde{y} \sim \tilde{x}$, が成立する。

また, 任意の抽象的変数 $\tilde{x}$ と $\tilde{y}$ とに対して;
「任意の $a \in R$ に対して, $\tilde{z}(L_*(a)) = \bigvee \{b \in B; b = \tilde{x}(L(0_R)) \wedge \tilde{x}(U(0_R)) \wedge \tilde{0}_R(L_*(a)), \text{ 或いは, 「或 } a' \in R \text{ が存在して, } b = \tilde{x}(U_*(0_R)) \wedge \tilde{y}(L_*(a')) \wedge (a' \tilde{x})(L_*(a))\}$, 或いは, 「或 } $a'' \in R$ が存在して, $b = \tilde{x}(L_*(0_R)) \wedge \tilde{y}(U_*(a'')) \wedge (a'' \tilde{x})(L_*(a))\}$ 」, をみたす抽象的変数 $\tilde{z}$ が一意的に存在する。そこで, この $\tilde{z}$ を, $\tilde{x} \sim \tilde{y}$, と記す事にする。この場合, $\tilde{x} \sim \tilde{y} = \tilde{y} \sim \tilde{x}$, が成立する。

また, 任意の抽象的変数 $\tilde{x}$ と $\tilde{y}$ と, 任意の $b \in B_+$ とに対して; 「任意の $a' \in R$ と $a'' \in R$ とに対して, $\tilde{x}(L(a')) \wedge b \perp \tilde{y}(L(a'')) \wedge b$, が成立する場合, またその場合に限って, 「条件 b が与えられる場合, $\tilde{x}$ は $\tilde{y}$ から統計的に独立である」, と定義し, 且つ, この関係を, $\tilde{x} \perp \tilde{y}$, と記す事にする。

また, 任意の $b \in B$ に対して; 「任意の $a \in R$ に対して; 「 $1_R \leq_R a$, ならば, $\tilde{z}(L(a)) = 1$ 」, 且つ, 「 $0_R \leq_R a$, 且つ, $a \not\leq_R 1_R$ 」, ならば, $\tilde{z}(L(a)) = \neg b$ 」, 且つ, 「 $a \not\leq_R 0_R$, ならば, $\tilde{z}(L(a)) = 0$ 」, をみたす抽象的変数 $\tilde{z}$ が一意的に存在するので, この $\tilde{z}$ を, $\tilde{z}(b)$, と記す事にする。さらに, また, 任意の抽象的変数 $\tilde{x}$ に対して; 「或 $a' \in R$ と或 $a'' \in R$ とが存在して; $\tilde{x}(L(a')) = 1$, 且つ, $\tilde{x}(L(a'')) = 0$ 」, が成立する場合, またその場合に限って, 「 $\tilde{x}$ は有界である」, と定義する。

有界である抽象的変数の全体を C とする。この場合, 任意の $b \in B_+$ に対して; C から R への或写像で, 次の条件 I1, I2, 及び, I3, をみたすものが, 一意的に存在する。そこで, 各 $b \in B_+$ に対して, この写像を, $E(\cdot | b)$, と記す。

- I1. 任意の $a' \in R$ と $a'' \in R$ と, 任意の $\tilde{x}' \in C$ と $\tilde{x}'' \in C$ とに対して;
 $E((a' \tilde{x}') \sim (a'' \tilde{x}'') | b)$

$$= a' \cdot_R E(\tilde{x}' | b) +_R a'' \cdot_R E(\tilde{x}'' | b).$$

- I2. 任意の $\tilde{x} \in C$ に対して;

$$P(\tilde{x}(L_*(0_R)) | b) = 0_R, \text{ ならば,}$$

$$0_R \leq_R E(\tilde{x} | b).$$

- I3. 任意の $b' \in B$ に対して;

$$E(\tilde{x} \langle b' \rangle | b) = P(b' | b).$$

さらに, また, 任意の $b \in B_+$ に対して; 「任意の $\tilde{x} \in C$ と $\tilde{y} \in C$ とに対して; $\tilde{x} \perp \tilde{y}$, ならば, $E(\tilde{x} \sim \tilde{y} | b) = E(\tilde{x} | b) \cdot_R E(\tilde{y} | b)$ 」, が成立する。

任意の $b \in B_+$ と任意の $\tilde{x} \in C$ とに対して; $E(\tilde{x} | b)$ を, 「条件 b が与えられる場合の, $\tilde{x}$ の条件付き期待値」, と呼ぶ。

3. 抽象的行為, 及び, 効用

(この節においては, 第2節 [命題1] において導入された記法達を用いる。)

Boole 代数 $\langle C, \bigvee_C, \bigwedge_C, \neg_C, 0_C, 1_C \rangle$ から Boole 代数 $\langle B, \bigvee_B, \bigwedge_B, \neg_B, 0_B, 1_B \rangle$ への準同形写像の全体を $\mathcal{H}$, 即ち, 「 C から B への任意の写像 H に対して; 「任意の $c' \in C$ と $c'' \in C$ とに対して; $H(c' \bigvee_C c'') = H(c') \bigvee_B H(c'')$, 且つ, $H(\neg_C c') = \neg_B H(c')$ 」の場合, またその場合に限って, $H \in \mathcal{H}$ 」, とする。また, Boole 代数 C 及び B 上の自然な半順序を, 各各, $\leq_C$ 及び $\leq_B$, と記す。

[定義1]. 任意の $d \in C$ に対して; 「任意の $c \in C$ に対して; $c \leq_C d$, ならば, $c = d$ 」, が成立する場合, またその場合に限って, 「 d は C における基本的結果である」, と定義される。また, C における基本的結果の全体を D と記す。

[定義2]. 任意の $H \in \mathcal{H}$ に対して; 「 $D' \subseteq D$ なる空でない D 有限集合 D' が存在して; $\bigvee_B H[D'] = 1$ 」, が成立する場合, またその場合に限って, 「 H は $\mathcal{H}$ における基本的行為である」, と定義される。また, $\mathcal{H}$ における基本

の行為の全体を $\mathcal{C}$ と記す。

[定義3]. 任意の $H \in \mathcal{H}$ と $H' \in \mathcal{H}$ とに対して; 「任意の $d \in D$ に対して, $H(d) = H'(d)$ 」, が成立する場合, またその場合に限って, 「 H と H' とは D 同値である」, と定義し, 且つ, この関係を, 「 $H \stackrel{D}{=} H'$ 」, と記す。関係 $\stackrel{D}{=}$ は $\mathcal{H}$ 上の同値関係となる。

[定義4]. 任意の $d \in D$ に対して; 「任意の $c \in C$ に対して; 「 $d \leq_c c$, ならば, $\Delta_d(c) = 1_B$ 」, 且つ, 「 $d \leq_c c$ に非ず」, ならば, $\Delta_d(c) = 0_B$ 」, によって C から B への写像 Δ_d を定義し, 且つ, この Δ_d を, 「 d 行為」, と呼ぶ事にする。「任意の $d \in D$ に対して, $\Delta_d \in \mathcal{E}$ 」, が成立する。 $\mathcal{D} = \{H \in \mathcal{H}; \text{或 } d \in D \text{ が存在して, } H = \Delta_d\}$, と置く。

[定義5]. 任意の $H \in \mathcal{H}$ と $H' \in \mathcal{H}$ と, 任意の $b \in B$ とに対して; 「任意の $c \in C$ に対して; $\langle H, H'; b \rangle(c) = (H(c) \wedge_B b) \vee_B (H'(c) \wedge_B \neg_B b)$ 」, によって C から B への写像 $\langle H, H'; b \rangle$ を定義する。「任意の $H \in \mathcal{H}$ と $H' \in \mathcal{H}$ と, 任意の $b \in B$ とに対して, $\langle H, H'; b \rangle \in \mathcal{H}$ 」, が成立する。

[定義6]. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$ なる任意の $\mathcal{A}$ に対して; 「任意の $F \in \mathcal{A}$ と $F' \in \mathcal{A}$ と, 任意の $b \in B$ とに対して, $\langle F, F'; b \rangle \in \mathcal{H}$ 」, が成立する場合, またその場合に限って, 「 $\mathcal{A}$ は行為空間 (space of acts) である」, と定義する。例えば, $\phi, \mathcal{E}$, 及び, $\mathcal{H}$ は行為空間である。

[定義7]. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$ なる任意の行為空間 $\mathcal{A}$ と, $\mathcal{A}$ 上の任意の二項関係 $\preceq$ とに対して; 「任意の $F \in \mathcal{A}$ と $F' \in \mathcal{A}$ と $F'' \in \mathcal{A}$ とに対して; 「 $F \preceq F'$ 」, 或いは, $F' \preceq F$ 」, 且つ, 「 $F \preceq F'$ 」, 且つ, $F' \preceq F''$ 」, ならば, $F \preceq F''$ 」, 且つ, 「 $F \stackrel{D}{=} F'$ 」, ならば, 「 $F \preceq F'$ 」, 且つ, $F' \preceq F$ 」, が成立する場合, またその場合に限って, 「 $\preceq$

は $\mathcal{A}$ 上の選好 (preference) である」, と定義される。また, $\mathcal{A}$ 上の任意の選好 $\preceq$ に対して; 「任意の $F \in \mathcal{A}$ と $F' \in \mathcal{A}$ とに対して; 「 $F \preceq F'$ 」, 且つ, $F' \preceq F$ 」, の場合, またその場合に限って, 「 $F' \approx F$ 」, によって, $\mathcal{A}$ 上の同値関係 $\approx$ を定義する。また, 「 $F' \preceq F$ に非ず」, を, 「 $F \not\preceq F'$ 」, と記す事にする。

[定義8]. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$ なる任意の行為空間 $\mathcal{A}$ と, $\mathcal{A}$ 上の任意の選好 $\preceq$ とに対して; $D[\mathcal{A}] = \{d \in D; \Delta_d \in \mathcal{A}\}$, と定義し, 且つ, 「任意の $d \in D[\mathcal{A}]$ と $d' \in D[\mathcal{A}]$ とに対して; $\Delta_d \preceq \Delta_{d'}$ 」, の場合, またその場合に限って, $d \stackrel{D}{\preceq} d'$ 」, によって, $D[\mathcal{A}]$ 上の関係, $\stackrel{D}{\preceq}$, を定義する。

[定義9]. $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{H}$ なる任意の $\mathcal{A}$ と, $\mathcal{A}$ 上の任意の関係, $\preceq$, に対して; 次の AP1 から AP6 までの条件達が成立する場合, またその場合に限って, $\langle \mathcal{A}, \preceq \rangle$ を Savage 系 (Savage system) と呼ぶ。

AP1. $\mathcal{A}$ は行為空間であり, 且つ, $\preceq$ は $\mathcal{A}$ 上の選好である。

AP2. 任意の $F \in \mathcal{A}$ と $F' \in \mathcal{A}$ と, 任意の $G \in \mathcal{A}$ と $G' \in \mathcal{A}$ と, 任意の $b \in B$ とに対して; $\langle F, G; b \rangle \preceq \langle F', G; b \rangle$, ならば, $\langle F, G'; b \rangle \preceq \langle F', G'; b \rangle$ 。

AP3. 任意の $d \in D$ と $d' \in D$ と, 任意の $b \in B$ とに対して; 「 $\Delta_d \in \mathcal{A}$ 」, 且つ, $\Delta_{d'} \in \mathcal{A}$ 」, 且つ, 「或 $F \in \mathcal{A}$ と或 $F' \in \mathcal{A}$ とが存在して; 或 $G \in \mathcal{A}$ が存在して, $\langle F, G; b \rangle \not\preceq \langle F', G; b \rangle$ 」, ならば, 「 $\Delta_d \preceq \Delta_{d'}$ 」, の場合, またその場合に限って, 「或 $G \in \mathcal{A}$ が存在して, $\langle \Delta_d, G; b \rangle \preceq \langle \Delta_{d'}, G; b \rangle$ 」。

AP4. 任意の $b \in B$ と $b' \in B$ と, 任意の $d \in D$ と $e \in D$ と, 任意の $d' \in D$ と $e' \in D$ と, に対して; 「 $\Delta_d \in \mathcal{A}$ 」, 且つ, $\Delta_e \in \mathcal{A}$ 」, 且つ, $\Delta_{d'} \in \mathcal{A}$ 」,

且つ, $d_{e'} \in \mathcal{A}$, 且つ, $d_e \not\sim d_{e'}$, 且つ, $d_{e'} \not\sim d_e$, 且つ, $\langle d_a, d_e; b \rangle \preceq \langle d_a, d_{e'}; b' \rangle$, ならば, $\langle d_a, d_{e'}; b \rangle \preceq \langle d_a, d_e; b' \rangle$.

AP5. 或 $d \in D$ と或 $d' \in D$ とが存在して; $d_a \in \mathcal{A}$, 且つ, $d_{a'} \in \mathcal{A}$, 且つ, $d_a \not\sim d_{a'}$.

AP6. 任意の $F \in \mathcal{A}$ と $F' \in \mathcal{A}$ とに対して; $F \not\sim F'$, ならば, 「 $d_a \in \mathcal{A}$ なる任意の $d \in D$ に対して, $X \subseteq B$ なる或 D 有限集合 X と, $Y \subseteq B$ なる或 D 有限集合 Y とが存在して; 「任意の $x \in X$ と $x' \in X$ と, 任意の $y \in Y$ と $y' \in Y$ とに対して; 「 $x \wedge_B x' \neq 0_B$, ならば, $x = x'$ 」, 且つ, 「 $y \wedge_B y' \neq 0_B$, ならば, $y = y'$ 」, 且つ, $\bigvee_B X = 1_B$, 且つ, $\bigvee_B Y = 1_B$, 且つ, 「任意の $x \in X$ と任意の $y \in Y$ とに対して; $\langle d_a, F; x \rangle \not\sim \langle F', y \rangle$, 且つ, $F \not\sim \langle d_a, F'; y \rangle$ 」.

[定義10]. 任意の Savage 系 $\langle \mathcal{A}, \preceq \rangle$ と, 任意の $b \in B$ とに対して; 「任意の $F \in \mathcal{A}$ と $F' \in \mathcal{A}$ とに対して; 「或 $G \in \mathcal{A}$ が存在して, $\langle F, G; b \rangle \preceq \langle F', G; b \rangle$ 」, の場合, またその場合に限って, $F \preceq^{(b)} F'$, によって, $\mathcal{A}$ 上の関係, $\preceq^{(b)}$, を定義する。この場合, 「任意の $b \in B$ に対して; $\preceq^{(b)}$ は $\mathcal{A}$ 上の選好であり, 且つ, 「任意の $F \in \mathcal{A}$ と $F' \in \mathcal{A}$ とに対して; 「任意の $d \in D$ に対して, $F(d) \wedge_B b = F'(d) \wedge_B b$, ならば, 「 $F \preceq^{(b)} F'$, 且つ, $F' \preceq^{(b)} F$ 」, が成立する。また, 「 $F \preceq^{(b)} F'$ に非ず」, 及び, 「 $F \preceq^{(b)} F'$, 且つ, $F' \preceq^{(b)} F$ 」, を, 各各, 「 $F \not\sim^{(b)} F'$ 」, 及び, 「 $F \sim^{(b)} F'$ 」, と記す。

また, この場合, 任意の $b \in B$ に対して; 「任意の $F \in \mathcal{A}$ と $F' \in \mathcal{A}$ とに対して, $F \preceq^{(b)} F'$, が成立する場合, またその場合に限って, 「 b は零事象 (null event) である」, と定義する。

[定義11]. 任意の Savage 系 $\langle \mathcal{A}, \preceq \rangle$ に対して; 「任意の $b \in B$ と $b' \in B$ とに対して; 「或

$d \in D$ と或 $e \in D$ とが存在して; $d_a \in \mathcal{A}$, 且つ, $d_e \in \mathcal{A}$, 且つ, $d_e \not\sim d_a$, 且つ, $\langle d_a, d_e; b \rangle \preceq \langle d_a, d_e; b' \rangle$ 」, が成立する場合, またその場合に限って, 「 $b \preceq b'$ 」, によって B 上の関係, $\preceq$, を定義する。また, 「 $b \preceq b'$ に非ず」, 及び, 「 $b \preceq b'$, 且つ, $b' \preceq b$ 」, を, 各各, 「 $b \not\sim b'$ 」, 及び, 「 $b \sim b'$ 」, と記す。この場合, $\preceq$ は, B 上の定性的確率となる, 即ち, [命題1] における条件 QL1, QL2, 及び, QL3, を満足する, 事が, Savage 系の定義, [定義9], より, 容易に従う。(但し, その際, 条件 AP6 を用いる必要はない。) さらに, 条件 AP6 を用いる事によって, この定性的確率, $\preceq$, が, [命題1] における条件 DP6' を満足する事, が従う。

また, この場合, 「任意の $b \in B$ に対して; $0_B \not\sim b$, ならば, 「 $\langle \mathcal{A}, \preceq^{(b)} \rangle$ は Savage 系であり, 且つ, ($\preceq^{(b)}$ から定義される定性的確率 $\preceq^{(b)}$ に対して), 「任意の $b' \in B$ と $b'' \in B$ とに対して; $b' \wedge_B b \preceq b'' \wedge_B b$, の場合, またその場合に限って, $b' \preceq^{(b)} b''$ 」, が成立する。

また, Boole 代数 B が [命題1] における条件 DΣ を満足するのならば, [命題11] より, 「 $0_B \not\sim b$ なる任意の $b \in B$ に対して; 条件 b が与えられる場合の, 定性的確率 $\preceq$ によって誘導される, 条件付き定量的確率, $P(\cdot | b)$, が一意的に存在し, 且つ, 条件 1_B が与えられる場合の, 定性的確率 $\preceq^{(b)}$ によって誘導される, 条件付き定量的確率, $P^{(b)}(\cdot)$, が一意的に存在し, 且つ, 「任意の $b' \in B$ に対して, $P(b' | b) = P^{(b)}(b')$ 」, が成立する。

[定義12]. ([命題13] における記法達を用いる。また, Boole 代数 B が条件 DΣ をみたすと仮定する。) 任意の Savage 系 $\langle \mathcal{A}, \preceq \rangle$ に対して; 「任意の $d \in D$ と $d' \in D$ とに対して; $d \preceq^D d'$ の場合, またその場合に限って, $U(d) \leq_R U(d')$ 」なる条件を満足する, D から R への任意の写像, U , (以下, この様な写像を, 「 D 単調な写像」, と呼ぶ事にする), と, 任意の

$F \in \mathcal{A}$ とに対して; 「任意の $a \in R$ に対して, 或 $b' \in B$ が存在して, $b' = \bigvee_B F[U^{-1}[L(a)]]$ 」, ならば, 「任意の $a \in R$ に対して; $\tilde{x}(L(a)) = \bigvee_B F[U^{-1}[L(a)]]$ 」, を満足する抽象的変数 $\tilde{x}$ が一意に存在する, が, 容易に示される。この様な抽象的変数 $\tilde{x}$ を, 「 F の U 表現」, と呼び, $\tilde{F}^U$, と記す事にする。この場合, 任意の D 単調な写像 U に対して; 「任意の $F \in \mathcal{A}$ と $F' \in \mathcal{A}$ と, $0_B \not\leq b$ なる任意の $b \in B$ とに対して; $F \prec^{(D)} F'$, の場合, またその場合に限って, $E(\tilde{F}^U|b) \leq_R E(\tilde{F}'^U|b)$ 」, が成立する場合, またその場合に限って, 「 U は基本的効用である」, と定義する。なお, 「或基本的効用 U が存在して, 任意の基本的効用 U' に対して, $0_R \leq_R a$ なる或 $a \in R$ と, 或 $a' \in R$ とが存在して, 任意の $d \in D$ に対して, $U(d) = a \cdot_R U'(d) +_R a'$ 」, が, 自明な相違を無視すれば, S書第5章第3節, 73頁から76頁まで, における議論と同じ議論によって, 示される。(但し, S書第5章第3節定理3, の証明, 74頁から75頁まで, において, 行列式が利用されているが, 同じ定理が, 同書第5章第2節定理4, 73頁, に基づいて容易に示されるので, この論文で指摘する所の, Savage の公準達の持つ「自己完結性」が, 「不自然」なものとなる恐れはない事, を注意する。)

さらに, また, 任意の D 単調な写像 U に対して; 「任意の $F \in \mathcal{A}$ に対して, F の U 表現が存在して, $\tilde{F}^U$ は有界な抽象的変数」, 且つ, 「任意の $F \in \mathcal{A}$ と $F' \in \mathcal{A}$ と, $0_B \not\leq b$ なる任意の $b \in B$ とに対して; $F \prec^{(D)} F'$, の場合, またその場合に限って, $E(\tilde{F}^U|b) \leq_R E(\tilde{F}'^U|b)$ 」, が成立する場合, またその場合に限って, 「 U は強効用 (strong utility) である」, と定義する。

[定義13]. (Boole 代数 B が条件 DΣ を満たすと仮定する。) 任意の Savage 系 $\langle \mathcal{A}, \prec \rangle$ に対して; 次の条件 ML, 及び, AP7, が成立する場合, またその場合に限って, $\langle \mathcal{A}, \prec \rangle$ を強 Savage 系 (strong Savage system) と

呼ぶ事にする。

ML. 任意の $F \in \mathcal{A}$ と任意の $d \in D$ とに対して, 或 $b' \in B$ が存在して, $F(d') \asymp 0_B$ なる任意の $d' \in D$ に対して; $d' \prec^D d$, の場合, またその場合に限って, $F(d') \leq_B b'$ 。

AP7. 任意の $F \in \mathcal{A}$ と $G \in \mathcal{A}$ と, 任意の $b \in B$ とに対して; 「任意の $d \in D$ に対して; $F(d) \asymp 0_B$, ならば, $A_d \prec^{(D)} G$ 」, ならば, $F \prec^{(D)} G$ 」, 且つ, 「任意の $d \in D$ に対して; $G(d) \asymp 0_B$, ならば, $F \prec^{(D)} A_d$ 」, ならば, $F \prec^{(D)} G$ 」。

この場合, 「任意の強 Savage 系 $\langle \mathcal{A}, \prec \rangle$ に対して, 或強効用 U が存在して, 任意の強効用 U' に対して, $0_R \leq_R a$ なる或 $a \in R$ と, 或 $a' \in R$ とが存在して, 任意の $d \in D$ に対して, $U(d) = a \cdot_R U'(d) +_R a'$ 」, が成立する事が, 自明な相違を無視すれば, S書第5章第4節, 79頁から80頁まで, における議論と同じ議論によって, 示される事を注意する。(但し, 「効用関数の有界性」が, 第7公準 P7 を利用する事によって, 示される事は, S書においては, 第5章第4節の脚注において言及されているのみで, 実際の証明は与えられていないのではあるが, しかしながら, この有界性は, P7, 及び, S書79頁の補題1, を利用する事によって, 容易に示される事, を注意する。)

4. 方法論的注意達

[注意1]. 屢, 或特定の条件達を満足する抽象的な測度を, 「確率測度」, と呼ぶことによって, 応用数学的な議論が展開されるのではあるが, この様な議論が, 仮りに, 何らかの意味における「有用性」を所有し得るとしても, 例えば, DK 書や S書において典型的に視られる所の, 「科学」と呼ばれる者の基礎付けに関する, 論理的考察と, 少なくとも直接的には, 連関を持ち得るとは, 筆者には思われない。また, 何

らかの「定性的」な「確からしさ」の存在を仮定して、何らかの「定量的」な「確からしさ」の存在を演繹する、と言う様な論理が、統計学の基礎付けとしての蓋然論において、十分な説得力を所有し得るとは、少なくとも筆者には、思われない。既に、Julius Wilhelm Richard Dedekind（西暦1831年10月6日－西暦1916年2月12日）が、DK書、例えば、第二篇第一版序文、45頁の後から4行目から51頁の本文の終りまで、において、簡潔、且つ、論理的に、主張している事なのではあるが、「「測り得る大きさ」の存在」を意識的に、或いは、暗黙の内に、仮定すると言う様な立場、或いは、この様な立場に類似する立場達、からは、「科学」の基礎付けを実行し得る程の、存在論的に、精確且つ的確な、論理を展開し得る、とは、筆者にも亦、思われないのである。

[注意2]. 第3節[定義9]における Savage 系に基づいて、但し、Boole 代数 B が条件 $D\Sigma$ をみたすと言う仮定の下で、 B 上の定性的確率の存在がみちびかれ、且つ、この定性的確率が条件 $DP6'$ をみたす事が示され、さらにまた、この Boole 代数 B と、この定性的確率とに基づいて、第2節における命題達、例えば、[命題10]における「実数体」の存在、及び、[命題11]における「定量的確率」の存在、等、が、演繹されるのではあるが、それ故に、この演繹の過程において、その存在が示される所の概念達は、皆、その基本的構造に関する限りでは、行為空間上の選好によって記述される事、を、注意する。

[注意3]. DK書第二篇第一版序文、45頁の後から4行目から46頁の本文の終りまで、において、既に、主張されている様に、「自然数系列」と「論理」とに基づいて、「新しい概念」を積極的に創造する事が、「科学」の本質的進歩にとっての不可欠、且つ、主要なる要因の一つである、と、筆者も亦考えるのではあるが、この論文においては、「或特定の人格が、決定を下す際に、考際し得る事象達の全体」なる自然

な解釈を持つ Boole 代数 B において、「既に、数達、確率達、効用達が『内在』している事」を指摘する為に、通常、純粋数学的構成の流儀を機械的に採用する事、を、避ける事にしたのである。特定の人格が、不確定なる要素が多く連関している一個の系に対して、「実際に」、的確なる判断を下し得る事、と、その特定の人格が、純粋数学、或いは、応用数学、或いは、自然科学、の素養がある事、またさらには、自然数の簡単な計算が出来る事、等等、とは、本質的に異なる、(但し、本質的連関は存在し得るかもしれないが)、より基本的な事柄達に連関し得る、と考えるのである。例えば、粗雑に表現するのならば、或種の集団からは、「野蛮人 (savage)」と呼ばれる一個の人格が、或特定の状況に対しては、その集団における任意の人格よりも「はるかに透徹した」判断を下し得る(但し、その一個の人格が、その自己の判断に対する演繹の過程を「論理的に表現する為の記号列」を所有しているとは限らない)事は十分に起こり得る事である、と、考えるのである。

また、統計学の基礎付けと本質的な連関のある分野にベイズ統計学があるが、この分野に関する簡潔且つ透徹した、但し、みかけ上は「書評」の形式を借りている、論述に、鈴木[6]、がある事を注意する。(また、この「書評」への補足的論述としては、園[4]、[5]、がある。)

なお、第2節[命題1]における Boole 代数の公理達の内、 $B1$ 、 $B2$ 、及び、 $B3$ 、は、西村、難波[2]の付章第2.1.1節、218頁、より、また、 $B4$ は、竹内外史[7]の第1章第2節、74頁、より、借用したものである。

5. 付録 (Dedekind による連鎖の概念)。

DK書における連鎖の概念(同書第二篇§4、72頁三七、74頁四四、)に連関した[補題A*]と[命題A]とを示す。

[定義A]. (DK 書74頁四四). 任意の空でない集合 X と X から X への任意の写像 ϕ とに対して; 任意の $x \in X$ に対して,

$$\phi_*[x] = \bigcap \{Y; x \in Y \text{ 且つ } Y \subseteq X \text{ 且つ } \phi[Y] \subseteq Y\},$$

によって, 集合 $\phi_*[x]$ を定義し, この集合を「 x の ϕ 連鎖」と呼ぶ。

[補題A°]. 「 ϕ 連鎖」に関して以下の 1° から 5° までが成立する。

- 1°. (DK 書76頁五七).
 $\phi[\phi_*[x]] = \phi_*[\phi(x)]$.
- 2°. (DK 書77頁五八).
 $\phi_*[x] = \{x\} \cup \phi_*[\phi(x)]$.
- 3°. (DK 書77頁から78頁). 完全帰納法の定理. 任意の集合 Z に対して; “ $x \in Z$, 且つ, 任意の $x' \in \phi_*[x] \cap Z$ に対して $\phi(x') \in Z$ ”, ならば, $\phi_*[x] \subseteq Z$.
- 4°. 任意の $x' \in \phi_*[x]$ と $x'' \in \phi_*[x]$ とに対して; “ $\phi_*[x'] \subseteq \phi_*[x'']$ ” 或いは “ $\phi_*[x''] \subseteq \phi_*[x']$ ” が成立する。(4° は 2°, 及び, 3°, より従う.)
- 5°. “ $x' \leq x''$ ” を “ $\phi_*[x''] \subseteq \phi_*[x']$ ” によって定義する。この場合, $\phi_*[x]$ 上の関係 $\leq$ は線形順序であり, 且つ, “ $x' \leq x''$ ” 且つ “ $x'' \leq x'$ ” を “ $x' \sim x''$ ” と表現すると, “ $x' = x''$ ” ならば “ $x' \sim x''$ ” が成立する。

[補題A*]. 任意の空でない集合 X , 任意の ϕ , 任意の ϕ , に対して; “ $\leq$ が X 上の線形順序であり, 且つ, ϕ が X から X への写像であり, 且つ, 任意の $x \in X$ に対して $\phi(x) \prec x$ (但し, “ $x' \prec x''$ ” に非ず) を “ $x'' \prec x'$ ” と表現する”, ならば, 任意の $y \in X$ と $y' \in X$ とに対して, “ $y' \in \phi[\phi_*[y]]$ ” ならば “ $y' \prec y$, 且つ, $\phi(y') \prec \phi(y)$ ”。

[命題A]. [補題A*] における仮定の下で (但し, [補題A°] の 5° における記号達を用いる), 以下の 1* から 5* が成立する。

- 1*. $x \notin \phi_*[\phi(x)]$.
- 2*. “ $x' \sim x''$ ” と “ $x' = x''$ ” とは同値である。
- 3*. “ $x' \prec x''$ ” と “ $x'' < x'$ ” (但し, “ $x' \leq x''$ ” に非ず) を “ $x'' < x'$ ” と表現する) とは同値である。
- 4*. “ $x'' < x'$ ” と “ $\phi(x'') < \phi(x')$ ” とは同値である。
- 5*. ϕ を $\phi_*[x]$ に制限した写像は単射である。従って, 1* より, $\phi_*[x]$ は, x を「基礎要素」とする, ϕ によって「順序づけられる」, 単純無限集合 (DK 書85頁, 七一) となる。

[補題A*の証明]. $z \in \phi_*[y]$ に対して, $\phi(z) \prec y$ 且つ $\phi(\phi(z)) \prec \phi(y)$, と仮定する。この場合; “ $\phi(\phi(z)) \prec \phi(z)$ 且つ $\phi(z) \prec y$ ” より “ $\phi(\phi(z)) \prec y$ ” が, また, “ $\phi(\phi(\phi(z))) \prec \phi(\phi(z))$ 且つ $\phi(\phi(z)) \prec \phi(y)$ ” より “ $\phi(\phi(\phi(z))) \prec \phi(y)$ ” が, 従う。故に [補題A°] の 3° より従う。[証明終]

[命題Aの証明]. 1* は [補題A*] 及び 1° より従う。2* は 1* 及び 2° より従う。3* は 4°, 2*, 2°, 及び, [補題A*], より従う。4* は 4°, 2*, 2°, 及び, [補題A*], より従う。5* は 1*, 1°, 及び, 4* より従う。[証明終]

参考文献

- [1] デーデキント (Dedekind, J. W. R.), 河野伊三郎訳, 『数について——連続性と数の本質——』, 岩波書店, 東京, 1961. (なお, 手元の『岩波数学辞典』第2版, 122頁左側, では, 「デデキント」, となっている。)
- [2] 西村敏男, 難波完爾, 『公理論的集合論』, 共立出版, 東京, 1985.
- [3] Savage, L. J., *The Foundations of Statistics, second revised edition*, Dover, New York, 1972.
- [4] 園信太郎, 「模型の選択に対するベイズ方法論的演繹について」, 『経済学研究』(北海道大学) 第35巻第2号, 21(197)-27(203), 9月, 1985.

- [5] 園信太郎, 「単純なベイズ学習, 母数空間の制限, 及び, Berger の見解について」, 『経済学研究』(北海道大学) 第35巻第4号, 130(700)-139(709), 3月, 1986.

第47巻第3号, 111-115, 10月, 1981.

- [7] 竹内外史, 『現代集合論入門』, 日本評論社, 東京, 1971.

(1986年, 10月6日(月), 脱稿)

- [6] 鈴木雪夫, 「書評」, 『経済学論集』(東京大学)