



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	数値的Laplace逆変換について
Author(s)	木村, 俊一
Citation	経済學研究, 37(2), 144-155
Issue Date	1987-09
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/31776
Type	departmental bulletin paper
File Information	37(2)_P144-155.pdf



<研究ノート>

数値的 Laplace 逆変換について

木村 俊一

1. はじめに

Laplace 変換 (Laplace transform; 以下 LT と略す) または Laplace-Stieltjes 変換は, オペレーションズ・リサーチ, 数理物理学, 自動制御工学を含む広範な学問領域において, 微分方程式や積分方程式の形に定式化される問題を解くための強力な解析手法として古くから知られている。

一般に, 微(積)分方程式を解析的に解くにあたっては, その方程式の特殊性を利用した種々の発見的ともいえる複雑な解法を用いる必要がある。LT は, 微積分という極限演算を代数演算に置き換える働きをもち, あるクラスの微(積)分方程式を変換形に関する代数方程式に容易に帰着させることができる。元の方程式の解は, この代数方程式の解を逆変換することで得られる。

本稿の目的は, LT のオペレーションズ・リサーチにおけるいくつかの応用例を示すと同時に, 数値的 Laplace 逆変換のための代表的なアルゴリズムに関するサーベイを行なうことにある。本稿は次のように構成されている。まず 2 節では, LT の定義と解析的な逆変換の方法について述べる。3 節では, 保全性や待ち行列等の確率モデルへの典型的な LT の応用例を示す。また, 4 節では, これまでに開発された Laplace 逆変換を数値的に行なうためのアルゴリズムを分類・整理し, 実用の立場からの評

価を行なう。さらに, 小型コンピュータ上でも十分に利用可能なある逆変換アルゴリズムに対し, そのプログラムと数値実験結果を与える。

2. 数学的準備

2.1. 定義

$f(t)$ を $t \geq 0$ で定義された実数値関数であるとする。 $f(t)$ に対する 1 つの基本的な制約として, ある定数 A と B に対し, $|f(t)| \leq Ae^{Bt}$ ($t \geq 0$) を仮定する。このとき, $f(t)$ の LT $f^*(s)$ は, 積分

$$f^*(s) = \mathcal{L}[f(t)] \equiv \int_0^{\infty} e^{-st} f(t) dt \quad (1)$$

で定義される。ここで, $\mathcal{L}$ は LT 作用素を表わし, s は $Re(s) > B$ を満たす複素数を表わすものとする。明らかに積分(1)は, $Re(s) > B$ のとき常に存在する。

$f^*(s)$ に対し, 複素積分

$$\tilde{f}(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f^*(s) e^{st} ds \quad (2)$$

によって $\tilde{f}(t)$ を定義する。ただし, $i = \sqrt{-1}$ 。 $\tilde{f}(t)$ は $f(t)$ と密接にかかわりあっており,

$$\tilde{f}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \frac{1}{2}f(0+), & t = 0 \\ f(t), & t > 0 \end{cases} \quad (3)$$

を満たしている。すなわち, $t > 0$ に対しては, $\tilde{f}(t)$ は $f(t)$ と一致する。ここで, c は $f^*(s)$ の全ての特異点が $Re(s) < c$ に存在するような

実数を表わす。関係式(3)は、(2)が Laplace 逆変換の解析的表現に他ならないことを示しており、この意味で、 $t > 0$ に対し、

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[f^*(s)] \quad (4)$$

と表わすことにする。

さらに、一般性を失うことなしに、 $c=0$ 、すなわち、 $f^*(s)$ の全ての特異点が複素平面 C の左半平面にあると仮定できる。これは、虚軸の平行移動 $f^*(s+\alpha) \equiv g^*(s)$ ($\alpha > 0$) によって、 $g^*(s)$ の特異点が左半平面に入るようにできることから、 $f^*(s)$ の逆変換を $g^*(s)$ の逆変換に帰着できること、*i. e.*, $\mathcal{L}^{-1}[f^*(s)] = e^{at} \mathcal{L}^{-1}[g^*(s)]$ 、によっている。

$f^*(s)$ の定義から、直ちに次の結果が導かれる。

- (i) 関数 $f(t)$ が関数 $g(t)$, $h(t)$ の線形結合で表わされるとき、*i. e.*, ある定数 a , b に対し、

$$f(t) = ag(t) + bh(t)$$

のとき、

$$f^*(s) = ag^*(s) + bh^*(s).$$

- (ii) 関数 $f(t)$ に対し、

$$F(t) = \int_0^t f(x) dx$$

とおくと、

$$\mathcal{L}[F(t)] = \frac{1}{s} f^*(s).$$

また、 $f(t)$ が導関数 $f'(t)$ をもつならば、

$$\mathcal{L}[f'(t)] = sf^*(s) - f(0).$$

- (iii) 関数 $f(t)$ が関数 $g(t)$, $h(t)$ のたたみ込み積分で表わされるとき、*i. e.*,

$$f(t) = \int_0^t g(t-x)h(x)dx$$

のとき、

$$f^*(s) = g^*(s)h^*(s).$$

- (iv) 関数 $f(t)$ がある非負確率変数 X の密度関数を表わすときには、

$$f^*(s) = E[e^{-sX}],$$

$$E[X^n] = (-1)^n \lim_{s \rightarrow 0} \frac{d^n f^*}{ds^n}, \quad n=1, 2, \dots$$

- (v) $\lim_{t \rightarrow \infty} f(t) = \lim_{s \rightarrow 0} sf^*(s).$

2.2. 解析的 Laplace 逆変数

$f^*(s)$ が与えられたとき、対応する $f(t)$ を見出す逆変換の問題は、応用上非常に重要である。簡単な初等関数に対しては $f^*(s)$ と $f(t)$ との対応表 (*e. g.*, [6]) が用意されているとはいえ、実際に対応表の中から求める $f(t)$ を探し出すことは、応用上の問題に対しては極めて稀であると言わざるを得ない。したがって、LT $f^*(s)$ が与えられたとき、解析的に逆変換を行なうには、基本的には複素積分(2)を実行する以外に方法はない。しかし、複素積分(2)が陽に求められるのは、 $f^*(s)$ が有理関数のように極およびその留数が容易に見つけられる場合に限られている。以下に示す Heaviside の公式は、有理関数型の LT に対してのみ適用できるが、 $f(t)$ が指数関数的増加（あるいは減少）を示す問題に対しては有用である。

$f^*(s)$ が有理関数で与えられることを仮定する。すなわち、

$$f^*(s) = \frac{N(s)}{D(s)}. \quad (5)$$

ここで、 $N(s)$ と $D(s)$ は s の多項式であり、 $N(s)$ の次数は $D(s)$ のそれよりも小さいものとする。明らかに、 $N(s)$ と $D(s)$ は共通の零点をもたないものと仮定できる。 $D(s)$ の C 上の異なった零点を $s_1, s_2, \dots, s_n$ で表わし、これらがいずれも $D(s)=0$ の単根であると仮定する。このとき、 $f^*(s)$ は次のように部分分数展開できる。

$$f^*(s) = \sum_{k=1}^n \frac{r_k}{s-s_k}. \quad (6)$$

ここで、

$$\begin{aligned} r_k &= \lim_{s \rightarrow s_k} (s-s_k) \frac{N(s)}{D(s)} \\ &= \frac{N(s_k)}{D'(s_k)}, \quad k=1, \dots, n. \end{aligned} \quad (7)$$

(6)の右辺において、 $f^*(s)$ は一位の極をもつ複素関数の一次結合で表わされるから、2.1節の $f^*(s)$ に関する基本的な性質 (i) を用いて、

$$f(t) = \sum_{k=1}^n \frac{N(s_k)}{D'(s_k)} e^{s_k t} \quad (8)$$

と求めることができる。

この結果は、 $D(s)=0$ の根のいくつかが重根である場合にも拡張できる。たとえば、 $f^*(s)$ が、

$$f^*(s) = \frac{N(s)}{(s-a)^n} \quad (6)$$

で与えられるものとする。ただし、 $N(s)$ は次数 $(n-1)$ 以下の s の多項式を表わす。このとき、原関数 $f(t)$ は、 $s=a$ が $f^*(s)$ の n 位の極であることを考慮すると、(2)より

$$f(t) = e^{at} \sum_{k=1}^n \frac{N^{(n-k)}(a)}{(n-k)!} \frac{t^{k-1}}{(k-1)!} \quad (10)$$

と導かれる。ここで、 $N^{(k)}(a)$ ($k=0, 1, \dots, n-1$) は、 $s=a$ における $N(s)$ の k 階微係数を表わす。 $f^*(s)$ が複数の異なった位数の極をもつ複素関数の一次結合で表わされる場合も、同様に $f(t)$ を求めることができる。

3. Laplace 変換の応用例

オペレーションズ・リサーチにおいては、システムの信頼性や保全性を検討する問題、在庫管理の問題、サービス施設における輻湊の問題等に対し、様々な確率モデルによる定式化が行なわれている。LT は、これらのモデルに現われるシステムの信頼度、客の待ち時間分布等の特性量を求める際に非常に有用である。

以下では、LT の典型的な応用例として

① 単一ユニットシステムの保全性

② $M/G/1$ 待ち行列の待ち時間分布

を取り上げ、LT が如何に用いられているかを示す。

① 単一ユニットシステムの保全性

対象とするシステムは単一ユニットシステムで、ユニットは故障すれば修理されるものとする。修理に要する時間は独立で同じ分布にしたがう (*independent and identically distri-*

buted; i. i. d. と略す) 確率変数で、その分布関数を $G(t)$ で表わす。修理後、ユニットは新品同様になるものと仮定する。また、(新品の) ユニットが、動作開始後故障を起こすまでの時間は *i. i. d.* 確率変数で、分布関数 $F(t)$ にしたがるものと仮定する。故障を起こすまでの時間および修理時間は互いに独立であるとする。

このとき、システムが動作している状態、故障している状態をそれぞれ S_0, S_1 で表わせば、時刻 0 でユニットが動作を開始したとして、その状態推移は図 1 のようになる。

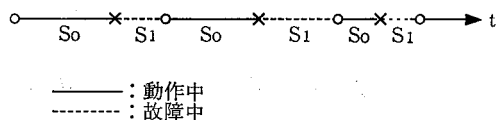


図 1. 単一ユニットシステムの状態推移

ある時刻で状態 S_i ($i=0, 1$) になったとき、その t 時間後に S_0 にある確率を $P_i(t)$ で表わすと、再生理論 [5, Chapter 5] を用いて、 $P_i(t)$ は次の積分方程式の解として与えられる。

$$P_0(t) = 1 - F(t) + \int_0^t P_1(t-x) dF(x), \quad (11)$$

$$P_1(t) = \int_0^t P_0(t-x) dG(x). \quad (12)$$

(11), (12) の両辺の LT をとり、 $P_0^*(s)$ について解くと、

$$P_0^*(s) = \frac{1 - \tilde{F}(s)}{s\{1 - \tilde{F}(s)G(s)\}} \quad (13)$$

を得る。ここで、 $\tilde{F}(s), \tilde{G}(s)$ はそれぞれ $F(t), G(t)$ の Laplace-Stieltjes 変換 (LST) を表わし、

$$\tilde{F}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dF(t),$$

$$\tilde{G}(s) = \int_0^\infty e^{-st} dG(t).$$

で定義される。 $F(t), G(t)$ が密度関数 $f(t), g(t)$ をもつときには、明らかに、 $\tilde{F}(s) = f^*(s), \tilde{G}(s) = g^*(s)$ が成り立つ。すなわち、密度をもつ分布関数の LST は密度の LT に一致す

る。

確率 $P_0(t)$ は、時刻 0 で動作を開始した後、時刻 t において動作可能な状態にある確率を表わし、瞬時アベイラビリティ (pointwise availability) と呼ばれている。もちろん、 t を固定したときに、この値が大きいシステムほど安全性が良く保たれているといえる。瞬時アベイラビリティは、システムの安全性を評価する 1 つの重要な尺度になっている。一般には、(13) から $P_0(t)$ に対する陽な表現を求めることは、 $F(t)$ 、 $G(t)$ が共に指数分布である場合を除いて容易ではなく、数値的 Laplace 逆変換を用いる必要がある。

② M/G/1 待ち行列の待ち時間分布

対象とするシステムは単一窓口待ち行列システムで、客はパラタスのポアソン過程にしたがってシステムに到着する。到着した客は、もし窓口が空であれば直ちにサービスを受け、そうでないときは、行列の最後尾に並ぶものとする (図 2 参照)。サービスは先着順に行なわれ、サービス時間は平均 μ^{-1} をもつ分布関数 $B(t)$ にしたがう *i. i. d.* 確率変数であると仮定する。また、到着過程とサービス過程は互いに独立であるとするとする。

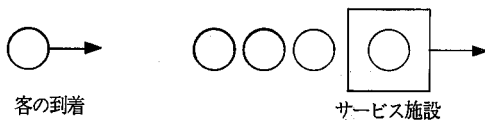


図 2. M/G/1 待ち行列

システムの輻輳の度合いを示す 1 つの尺度として、トラフィック密度 (traffic intensity) を $\rho = \lambda/\mu$ で定義し、 $\rho < 1$ を仮定する。このとき、システムは安定であるといい、定常状態の存在が保証される。ここで、定常状態とは $t \rightarrow \infty$ において待ち時間等の特性量の分布が適切 (proper) である状態をさし、平衡状態とも呼ばれる。

定常状態における客の待ち時間分布を $W(t)$ で表わすと、その LST は次式で与えることが

できる ([5, p. 251] 参照)。

$$W(s) = \frac{1-\rho}{1-\lambda s^{-1}\{1-\tilde{B}(s)\}} \quad (14)$$

ここで、 $\tilde{B}(s)$ はサービス時間分布 $B(t)$ の LST を表わす。サービス時間分布が指数分布にしたがうときには、(14) は容易に逆変換ができて、

$$W(t) = 1 - \rho e^{-\mu(1-\rho)t}, \quad t \geq 0 \quad (15)$$

を得るが、一般には数値的 Laplace 逆変換を用いる必要がある。

4. 数値的 Laplace 逆変換

2. 2 節でも示したように、解析的な逆変換が可能であるのは、実用上、LT が有理関数型の場合に限られる。しかし、この場合でも、分母の零点を見出すためには、高次代数方程式に対する数値解法を必要とすることが多い。この意味で、Laplace 逆変換は、基本的には数値解析の 1 つの手法であるとも考えることもできる。

この節では、LT が一般の関数型にしたがうときの数値的逆変換法を取り上げ、それらの考え方、性能の特徴についてまとめる。

4.1. 分類

逆変換作用素 $\mathcal{L}^{-1}$ は非有界作用素であることが知られており、このことは Laplace 逆変換の特定の方法が、全ての場合に同様に有効に働くことが保証されないことを意味している。したがって、これまでに開発されてきた Laplace 逆変換の数値解法は、いずれも何らかの欠点を含んでおり、また、その欠点を補うために新しい解法が提案されてきたこともあって、非常に多くの種類がある。ここでは、これまでの数値的 Laplace 逆変換の方法を次の 4 つに大別する。

- I. (1) を直接用いる方法
- II. (2) を直接用いる方法
- III. 直交関数法

IV. 抽出法

以下では、これら4つの方法のそれぞれについて代表的な方法を取り上げ、解説する。

4.2. 解説

I. (1)を直接用いる方法

【Bellman-Kalaba-Lockett (1966) の方法】⁽¹⁾

(1)において、 $x=e^{-t}$ と変数変換し、 $g(x) \equiv f(-\ln x)$ とおくと、

$$\int_0^1 x^{s-1} g(x) dx = f^*(s) \quad (16)$$

を得る。さらに、上式左辺の積分を適当な点列 $\{x_n; n=1, \dots, N\}$ における $g(x)$ の値の重み付き一次結合で近似する。i. e.,

$$\sum_{n=1}^N w_n x_n^{s-1} g(x_n) \simeq f^*(s). \quad (17)$$

ここで、 $\{w_n\}$ は適当な重みを表わす数列である。 s が N 個の異なった値、たとえば、 $s=1, \dots, N$ をとると、(17)は N 個の未知数 $g(x_n)$ ($n=1, \dots, N$) に関する N 本の連立一次方程式

$$\sum_{n=1}^N w_n x_n^k g(x_n) = f^*(k+1), \quad k=0, 1, \dots, N-1 \quad (18)$$

に帰着される。この方程式(18)を解いて $\{f(-\ln x_n)\}$ を求める方法が Bellman-Kalaba-Lockett の方法である。

Bellman らは、(17)における近似が、 $g(x)$ が N 次以下の多項式のときには厳密に成り立つように次の工夫を施している。すなわち、まず重み $\{w_n\}$ については、 $P_N(r)$ を N 次の Legendre 多項式、 $r_n (n=1, \dots, N)$ をその n 番目の零点とすると、重みを

$$w_n = \int_{-1}^1 \frac{P_N(r)}{(r-r_n)P_N'(r_n)} dr, \quad n=1, \dots, N \quad (19)$$

で与え、点列 $\{x_n\}$ については、shifted Legendre 多項式 $Q_N(x) \equiv P_N(1-2x)$ の零点で与えることを提案している。

明らかに、(17)において N の値が大きけれ

ば大きい程、その近似は正確になるが、一方で(18)の連立一次方程式に現れる行列 $(w_n x_n^k)$ のたちの悪さ (ill-conditioning) は、 N が増えるにつれて急速に悪化する。また、 $N \rightarrow \infty$ に対しては、 $Q_N(x)$ の零点 $\{x_n\}$ は区間 $[0, 1]$ 上で漸近的に一様分布することが知られているが、求めようとしている時間領域での点列 $t_n = -\ln x_n$ は、区間 $[0, \infty)$ 上で一様分布するどころか、 $t=0$ の近傍に集中しているために、 t の大きな値に対する $f(t)$ の挙動に関しては、多くの情報を得ることができないという欠点をもっている。動的計画法を用いたこれらの欠点の修正法については、[1]を参照のこと。

II. (2)を直接用いる方法

【Schmittroth (1960) の方法】⁽¹⁰⁾

この方法においては、 $f^*(s)$ が

$$f^*(\bar{s}) = \overline{f^*(s)} \quad (20)$$

を満たすことを仮定する。ここで、 $\bar{x}$ は x の共役複素数を表わすものとする。2.1節の仮定を用いると、(2)、(3)より、 $t > 0$ に対しては

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} f^*(i\omega) e^{i\omega t} d\omega \quad (21)$$

が成り立つ。(20)、(21)より、次の表現が導かれる。

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Re}[f^*(i\omega)] \cos \omega t d\omega,$$

$$\text{または、} = -\frac{2}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im}[f^*(i\omega)] \sin \omega t d\omega. \quad (22)$$

Schmittroth の方法は、(22)の右辺を直接積分することによって $f(t)$ を求める方法である。この積分には、次の3つの計算上の困難さが伴っている。

- ① 積分区間が片側無限区間 $[0, \infty)$ である。
- ② 大きな t に対して、解の振幅が非常に大きくなる。
- ③ $\cos \omega t$ ($\sin \omega t$) の半周期毎に、その正負の符号の反転に応じて積分値が打ち消し合うため、収束が遅い。

これらの難点に対し, Schmittroth は Gauss の求積法を用いた数値積分を行なうことで対処している。

Ⅲ. 直交関数法

直交関数法とは, $f(t)$ を適当な完備直交関数系で展開し, その展開係数を $f^*(s)$ から求める方法で, 比較的古くから多くの研究者によって様々な角度からの接近が試みられている。

【Papoulis (1956) の方法】⁽⁷⁾

C の実軸上の点列 $\{s_n = n\sigma; n \geq 1\}$ ($\sigma > 0$) 上の $f^*(s)$ の値を用いて, $f(t)$ の完備直交関数系 $\{\varphi_n(t)\}$ による展開

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \varphi_n(t), \quad (23)$$

の係数 $\{c_n\}$ を決定する方法である。Papoulis は $\{\varphi_n(t)\}$ として次の 3 つの関数系を選び, それぞれについて解析を行っている。

- ① 三角関数
- ② Legendre 多項式
- ③ Laguerre 多項式

① 三角関数の場合

まず, 変数変換 $e^{-\sigma t} = \cos \theta$ ($\sigma > 0$) を行ない, 変数を t から θ に変換する。このとき,

$$F(\theta) \equiv f\left(-\frac{1}{\sigma} \ln(\cos \theta)\right) \quad (24)$$

とおくと, $F(\theta)$ は開区間 $(0, \frac{1}{2}\pi)$ 上で次のように展開できる。

$$F(\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sin(2n+1)\theta. \quad (25)$$

ここで, 係数 $\{c_n\}$ は連立一次方程式

$$\begin{aligned} & \frac{\sigma}{\pi} 2^{2n+2} f^*((2n+1)\sigma) \\ &= \sum_{k=0}^n \left\{ \binom{2n}{k} - \binom{2n}{k-1} \right\} c_{n-k}, \\ & n=0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (26)$$

の解として与えられる。

② Legendre 多項式の場合

$P_n(\cdot)$ で n 次の Legendre 多項式を表わす

と, $f(t)$ は次のように展開される。

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n P_{2n}(e^{-\sigma t}). \quad (27)$$

ここで, 係数 $\{c_n\}$ は連立一次方程式

$$\begin{aligned} & \sigma f^*((2n+1)\sigma) = \frac{c_0}{2n+1} \\ & + \frac{2n}{(2n+1)(2n+3)} c_1 \\ & + \dots + \frac{2n(2n-2)\dots 2}{(2n+1)(2n+3)\dots(4n+1)} c_n, \\ & n=0, 1, \dots, \end{aligned} \quad (28)$$

の解として与えられる。

③ Laguerre 多項式の場合

$L_n(t)$ で n 次の Laguerre 多項式を表わすことにする。すなわち,

$$L_n(t) = e^t \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{t^n}{n!} e^{-t} \right). \quad (29)$$

このとき, $f(t)$ は次のように展開される。

$$f(t) = e^{-t} \sum_{n=0}^{\infty} c_n L_n(t). \quad (30)$$

ここで,

$$c_n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} a_{n-k} \quad (31)$$

であり, $\{a_n; n \geq 0\}$ は $f^*(s)$ の原点 $s=0$ のまわりでの Taylor 級数展開の係数を表わす。

【Shirtcliffe-Stephenson (1961) の方法】⁽¹¹⁾

この方法は, Salzer [9] の方法を計算機向けに改良した方法である。Salzer の方法は, $f^*(s)$ に s^{-1} の巾乗項をもつ Lagrange 多項式を適合させ, その各項を逆変換することで $f(t)$ を求める方法であり, $f^*(s)$ の s^{-1} に関する高階導関数の陽な表現を必要とした。Shirtcliffe-Stephenson の方法は, この高階導関数を使わないですむように改良されており, m 次の Lagrange 多項式を用いる場合,

$$f(t) \simeq \sum_{n=1}^m \left(\sum_{k=0}^{m-1} b_{nk} t^k \right) f^*(n) \quad (32)$$

で表わされる。ここで、

$$b_{nk} = \frac{n^{m+1}}{m!} \frac{a_{m-k}}{k!} \quad (33)$$

であり、 $\{a_n; n=1, \dots, m\}$ は m 次 Lagrange 多項式の係数を表わしている。

この方法の致命的な欠陥は、あらゆる関数を原点のみに極をもつ多項式で近似しようという点にあり、このため、 m の値を大きくしても必ずしも近似精度は良くなる。次数 m の最適値が $f^*(s)$ の極の位置に依存することが、実験的に確かめられている。

【Weeks (1966) の方法】^[14]

Laplace 逆変換を行ないたい t の範囲の上限値を t_{max} で表わし、 $T=t_{max}/N$ とおく。ここで、 N の十分大きな整数を表わす（実用上は 50 程度と考えてよい）。また、 n 次の Laguerre 多項式を $L_n(t)$ で表わし、 $A_n(t) = e^{-\frac{t}{T}} L_n(t)$ と定義する。

このとき、Weeks の方法は、

$$f(t) \simeq e^{-\frac{t}{T}} \sum_{n=0}^N a_n A_n\left(\frac{t}{T}\right) \quad (34)$$

と表わすことができる。ここで、

$$a_0 = \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^N h(\theta_k), \quad (35)$$

$$a_n = \frac{2}{N+1} \sum_{k=0}^N h(\theta_k) \cos n\theta_k, \quad n \geq 1, \quad (36)$$

$$\theta_k = \frac{2k+1}{N+1} \frac{\pi}{2}, \quad k=0, 1, \dots, N, \quad (37)$$

$$h(\theta) = \frac{1}{2T} \operatorname{Re}[f^*(1 + \frac{i}{2T} \cot \frac{\theta}{2})] - \frac{1}{2T} \cot \frac{\theta}{2} \operatorname{Im}[f^*(1 + \frac{i}{2T} \cot \frac{\theta}{2})] \quad (38)$$

【Dubner-Abate (1968) の方法】^[3]

t_{max} を Weeks の方法と同じ t の上限値とし、 $T=2t_{max}$ とおく。このとき、Dubner-Abate の方法は、

$$f(t) = \frac{2e^{at}}{T} \left\{ \frac{1}{2} \operatorname{Re}[f^*(a)] + \sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{Re}[f^*(a + i\frac{n\pi}{T})] \cos\left(\frac{n\pi}{T}t\right) \right\} + e(a, T) \quad (39)$$

と表わせる。ここで、 $e(a, T)$ は誤差項を表わし、

$$e(a, T) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-2anT} \{f(2nT+t) + e^{at} f(2nT-t)\} \quad (40)$$

で定義される。また、 a はこの方法のパラメータを表わし、一意に定める方法はないが、 $f(t)$ が次の性質をもつときには、誤差項 $e(a, T)$ を評価することで適当に定めることができる。すなわち、ある定数 M が存在して、任意の $t > 0$ に対して、

(i) $f(t) \leq M$ のとき、

$$e(a, T) \leq M e^{-a(T-0)} \cosh aT, \quad (41)$$

(ii) $f(t) \leq Mt^m (m \geq 1)$ のとき、

$$e(a, T) \simeq M \left(\frac{3}{2}\right)^m e^{-aT} \quad (42)$$

が成り立つので、誤差項を要求する精度に適合するように、 m の値を定めてやればよい。Dubner-Abate の方法の改良については、[8]、[13] を参照のこと。

V. 抽出法

Dirac のデルタ関数 $\delta(\cdot)$ に収束する密度関数をもつ確率変数列 $\{T_n; n \geq 1\}$ を考える。すなわち、 T_n の密度関数 $p_n(t)$ は次の性質をもつと仮定する：ある $\tau > 0$ に対して、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} p_n(t) = \delta(t-\tau), \quad (43)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{\infty} p_n(t) f(t) dt = f(\tau). \quad (44)$$

$p_n(t)$ を適当に選ぶことで、(44)の左辺の積分を $f^*(s)$ を用いて表わすことができれば、 n を十分大きくとることで $t=\tau$ における $f(t)$ の値

を得ることができる。抽出法とは、性質(44)を用いて $f^*(s)$ から $f(\tau)$ を文字通り『抽出する』方法をさし、以下に述べる Gaver の方法 [4] とその改良 [12] が知られている。

【Gaver (1966) の方法】⁽⁴⁾

Gaver は(43), (44)を満たす密度関数として、次の 3-パラメータ関数を提案している。

$$p_{nm}^a(t) = \frac{(n+m)!}{n!(m-1)!} (1-e^{-at})^n a e^{-mat},$$

$$a > 0, m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, \dots \quad (45)$$

この密度関数に対しては、 m と n の比を一定 (*i. e.*, $n/m \equiv c$) にして、 $m \leftarrow \infty, n \leftarrow \infty$ の極限をとると、

$$\lim_{\substack{n \rightarrow \infty \\ m \rightarrow \infty}} p_{nm}^a(t) = \delta(t - \frac{1}{a} \ln(1+c)) \quad (46)$$

となることが証明できる。(43), (46)より、

$$a = \frac{1}{\tau} \ln(1+c) \quad (47)$$

を得る。また、

$$\phi_{nm}^a = \int_0^\infty p_{nm}^a(t) f(t) dt \quad (48)$$

とおくと、(45)を用いて、 $\{\phi_{nm}^a\}$ に関する再帰関係式

$$\begin{cases} \phi_{0m}^a = m a f^*(ma), \\ \phi_{nm}^a = (1 + \frac{1}{c}) \phi_{n-1,m}^a - \frac{1}{c} \phi_{n-1,m+1}^a, \end{cases}$$

$$n \geq 1 \quad (49)$$

が得られる。したがって、 m を固定したときの ϕ_{nm}^a の値は、(49)を用いて再帰的に計算することができる。簡単のため、 $c=1$, *i. e.*, $m=n$ とおくと、 $n=16$ 程度でも ϕ_{nn}^a が $f(\frac{1}{a} \ln 2)$ の十分良い近似になっていることが数値的に確かめられる。

また、 $n=2^k$ ($k=0, 1, \dots$) に対する $\{\phi_{nn}^a\}$ を、外挿公式

$$\begin{cases} \tilde{\phi}_0(n) = \phi_{nn}^a \\ \tilde{\phi}_k(n) = 2\phi_{k-1}(2n) - \tilde{\phi}_{k-1}(n), k \geq 1 \end{cases} \quad (50)$$

に適用すると、 ϕ_{nn}^a の誤差項が逐次的に消去され、 $k \geq 1$ に対し、

$$|\tilde{\phi}_k(n) - f(\frac{1}{a} \ln 2)| \leq |\phi_{nn}^a - f(\frac{1}{a} \ln 2)| \quad (51)$$

が成り立つことから、 $\phi_k(n)$ を $f(\frac{1}{a} \ln 2) = f(\tau)$ の近似とすることで、誤差の減少をさらにはかることができる。

4.3. 評価

4.2 節で解説した数値的 Laplace 逆変換法について、それぞれの長所・短所を簡潔にまとめておく。

【Bellman-Kalaba-Lockett の方法】

長所: $f(t)$ が指数関数の一次結合で表わされるときに、近似精度が高い。

短所: 1) 任意の $t > 0$ に対する $f(t)$ の値が直接計算できないために補間を行なう必要がある。

2) 入力として、 $\{w_n\}$, $\{x_n\}$ に関するデータを必要とする。

3) 連立一次方程式を解く必要がある。

【Schmittroth の方法】

長所: $f(t)$ が三角関数族のときに近似精度が高い。

短所: 1) $f^*(i\omega)$ の実部、虚部に対する陽な表現が必要である。

2) 数値積分を含む。

【Papoulis の方法】

長所: 展開係数 $\{c_n\}$ を一度求めておけば、任意の $t > 0$ に対する $f(t)$ が直ちに計算できる。

短所: 1) パラメータ σ の最適値を決定する方法が未知である。

2) 特殊関数の計算を含む。

3) 大規模連立一次方程式を解く必要がある。

【Shirtliffe-Stephenson の方法】

長所： 計算時間が短い。

短所： 1) 入力として，Lagrange 多項式の係数を必要とする。

2) t の大きな値に対しては近似精度が低い。

【Weeks の方法】

長所： 展開係数 $\{c_n\}$ の導出が容易である。

短所： 1) 特殊関数の計算を含む。

2) 近似精度が低い。

【Dubner-Abate の方法】

長所： 計算時間が短い。

短所： t の小さな値に対して，解に振動を生じやすい。

【Gaver の方法】

長所： 1) 計算時間が短い。

2) $f(t)$ が分布関数を表わすときに近似精度が高い。

短所： $f(t)$ が周期関数のときには，近似精度が低い。

以上のように，これまでに開発された逆変換法はそれぞれに固有な長所・短所を合わせもっているが，Laplace 逆変換を研究する立場ではなく利用する立場からは，高い近似精度をもっていることに加えて，次の3つの性質を満たすアルゴリズムが使い易い良いアルゴリズムと考えられる。

① 入力データとしては $f^*(s)$ だけを用いること：

$f^*(s)$ の実部・虚部の表現，高階導関数，極等を計算する必要がない。

② 任意の $t > 0$ に対する $f(t)$ の値が直接計算できること：

補間等の二次的近似を含まない。

③ アルゴリズムが単純で，計算時間が短いこと：

特殊関数，数値積分，大規模連立一次方程式等の計算を含まない。

これらの性質を考慮すると，4.2節で取り上

げた逆変換法の中で，Gaver の方法が特に注目に値する。とりわけ，オペレーションズ・リサーチにおいては，3節でも示したように，分布関数等のように $t \rightarrow \infty$ のとき， $f(t)$ がある直線に漸近してゆく場合を対象とすることがほとんどであり，この限りでは，Gaver の方法の短所である周期関数に対する近似精度の低さも，それ程問題にはならないことがわかる。

表1は， $f(t)$ が平均1の指数分布，i.e.，

$$f(t) = 1 - e^{-t}, \quad t \geq 0$$

のときの，Gaver の方法による数値解と厳密解を比較したものである。外挿公式(50)を用いて得られた近似解 $\tilde{\phi}_4(1)$ とその相対誤差(%)を与えている。計算には，NEC PC-9801 VM2を使用し，また言語は Microsoft FORTRAN (Ver. 3.3) を用いた。そのソース・プログラム(主プログラムおよび副プログラム)については付録を参照のこと。

表1. Gaver の方法の近似精度評価
($f(t) = 1 - \exp(-t)$).

t	$f(t)$		誤差(%)
	厳密解	近似解	
.20	.18127D+00	.18126D+00	.00
.40	.32668D+00	.32972D+00	.01
.60	.45119D+00	.45135D+00	.04
.80	.55067D+00	.55094D+00	.05
1.00	.63212D+00	.63233D+00	.05
1.20	.69881D+00	.69905D+00	.04
1.40	.75340D+00	.75350D+00	.01
1.60	.79810D+00	.79800D+00	-.01
1.80	.83470D+00	.83438D+00	-.04
2.00	.86466D+00	.86413D+00	-.06
2.20	.88920D+00	.88848D+00	-.08
2.40	.90928D+00	.90843D+00	-.09
2.60	.92573D+00	.92479D+00	-.10
2.80	.93919D+00	.93822D+00	-.10
3.00	.95021D+00	.94925D+00	-.10
3.20	.95924D+00	.95832D+00	-.10
3.40	.96663D+00	.96578D+00	-.09
3.60	.97268D+00	.97193D+00	-.08
3.80	.97763D+00	.97700D+00	-.06
4.00	.98168D+00	.98118D+00	-.05

表1より, Gaver の方法が実用に十分耐え得る近似精度をもっていることが読みとれる。また, 付録のプログラム中では, 組み込み関数がほとんど参照されていないことから予想されるように, 計算時間は全く問題にならない程短い。

Gaver の方法以外の逆変換法の精度評価については, たとえば[2]を参照のこと。

5. 結 び

数値的 Laplace 逆変換が真に必要なのは, 解析解が未知である場合である。解析解が既知である場合に対するある逆変換アルゴリズムの近似精度の高さは, 必ずしも未知の解に対する近似精度を保証してくれるわけではない。4.1節でも述べたように, Laplace 逆変換作用素が非有界であることを考慮すると, 特定のアルゴリズムの性能をあまりに過信することは, かって危険であるといえる。したがって, 実際に数値的 Laplace 逆変換を行なうにあたっては, できれば2種類以上の異なったアルゴリズムによる数値解の相互チェックが必要であると考えられる。

参 考 文 献

- [1] Bellman, R. E., R. E. Kalaba and J. A. Lockett, *Numerical Inversion of the Laplace Transform*, American Elsevier, New York, 1966.
- [2] Davies, B. and B. Martin, "Numerical Inversion of the Laplace Transform," *J. Comp. Phys.*, 33, 1-32 (1979).
- [3] Dubner, H. and J. Abate, "Numerical Inversion of Laplace Transforms by Relating Them to the Finite Fourier Cosine Transform," *J. ACM*, 15, 115-123 (1968).
- [4] Gaver, D. P., Jr., "Observing Stochastic

Processes and Approximate Transform Inversion," *Opns. Res.*, 14, 444-459 (1966).

- [5] Heyman, D. P. and M. J. Sobel, *Stochastic Models in Operations Research, Vol. I*, McGraw-Hill, New York, 1982.
- [6] Oberhettinger, F. and L. Badii, *Tables of Laplace Transforms*, Springer, Berlin, 1973.
- [7] Papoulis, A., "A New Method of Inversion of the Laplace Transform," *Quart. Appl. Math.*, 14, 405-414 (1956).
- [8] Piessens, R. and R. Huysmans, "Algorithm 619. Automatic Numerical Inversion of the Laplace Transform," *ACM Trans. Math. Softw.*, 10, 348-353 (1984).
- [9] Salzer, H. E., "Tables for the Numerical Calculation of Inverse Laplace Transform," *J. Math. Phys.*, 37, 89-108 (1958).
- [10] Schmittroth, L. A., "Numerical Inversion of Laplace Transforms," *Comm. ACM*, 3, 171-173 (1960).
- [11] Shirliffe, C. J. and D. G. Stephenson, "A Computer Oriented Adaption of Salzer's Method for Inverting Laplace Transforms," *J. Math. Phys.*, 40, 135-141 (1961).
- [12] Stehfest, H., "Algorithm 368. Numerical Inversion of Laplace Transforms," *Comm. ACM*, 13, 47-49 (1970) [erratum 13, 624].
- [13] Veillon, F., "Algorithm 486. Numerical Inversion of Laplace Transforms," *Comm. ACM*, 17, 587-589 (1974).
- [14] Weeks, W. T., "Numerical Inversion of Laplace Transforms Using Laguerre Functions," *J. ACM*, 15, 115-123 (1968).

付 録

表2~3に, 4.3節の数値例(表1)を計算する際に用いたプログラムのリストを与える。表2は, 主プログラムおよび $f(t)$, $f^*(s)$ に対する関数副プログラムを, また表3は, Gaver の方法による数値 Laplace 逆変換のサブチンを表わしている。このプログラムの中では, $f^*(s)$ が $ff(s)$ と表わされている点に注意すること。

表2 テスト プログラム

```

c      test of ltinv for  $f(t) = 1 - \exp(-t)$ 
c
$NOFLOATCALLS
$STORAGE:2
c
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      external ff,f
c
      write(*,100)
100 format(1h ,3x,'t',12x,'厳密解',12x,
&          '近似解',7x,'誤差 (%)' '/')
      do 10 i=1,20
         t=0.2*float(i)
         call ltinv(ff,t,sol)
         exa=f(t)
         err=(sol-exa)*100.d0/exa
         write(*,200) t,exa,sol,err
200 format(1h ,f4.2,2(6x,d12.5),10x,f5.2)
      10 continue
      stop
      end
c
c
      real*8 function ff(s)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      lamda=1.d0
      ff=lamda/(s*(s+lamda))
      return
      end
c
      real*8 function f(t)
      implicit real*8 (a-h,o-z)
      lamda=1.d0
      f=1.d0-dexp(-lamda*t)
      return
      end

```

表3 Laplace 逆変換サブルーチン

```

subroutine ltinv(ff,t,s)
c
  implicit real*8 (a-h,o-z)
  external ff
  dimension p(9,16),q(4,4)
c
  a=dlog(2.d0)/t
  do 10 i=1,16
    ai=a*float(i)
    p(1,i)=ai*ff(ai)
10 continue
  do 20 i=1,4
    il=2*(i-1)
    iu=2*il
    il1=il+1
    do 30 j=1,il
      j1=j+1
      ku=iu-j
      rj=float(j)
      do 40 k=il,ku
        k1=k+1
        p(j1,k)=((j+k)*p(j,k)-k*p(j,k1))/rj
40      continue
30      continue
    q(i,1)=p(il1,il)
20 continue
c
  do 50 j=1,3
    ju=4-j
    j1=j+1
    n1=2*j
    n2=n1-1
    rn2=float(n2)
    do 60 i=1,ju
      il=i+1
      q(i,j1)=(n1*q(il,j)-q(i,j))/rn2
60    continue
50 continue
c
  s=q(1,4)
  return
end

```