HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	サヴェジ氏の定量的確率,に対する,従属選択の原理を伴う一個の簡潔なる接近
Author(s)	園, 信太郎
Citation	經濟學研究, 38(1), 36-84
Issue Date	1988-06
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/31794
Type	departmental bulletin paper
File Information	38(1)_P36-84.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

経済学研究 38-1
北海道大学 1988. 6

サヴェジ氏の定量的確率，に対する，従属選択の原理を伴う一個の簡潔なる接近

園　　信太郎

有閑なる読者の存在を空想しつつ，一個の無用無味なる論述が，浮上した。

第1節。目的。

サヴェジ氏は，サヴェジ［3］，第3章第2節，31頁，最後の段落，から，第3章第3節，39頁，冒頭の段落，まで，において，「「サヴェジ［3］，第3章第3節，38頁，下から第2番目の段落，において，提示されている，公準P6′」，を満たす，定性的確率，に対して，強一致する，定量的確率，が，一意的に存在する」，なる事，但し，この陳述に対する，「サヴェジ氏が展開している，その議論，との比較において，より精確なる，定式化，及び，より精確，且つ，より簡潔，なる，証明」，を，提示する事，が，筆者のこの論文の目的なのではあるが，を，示している。

このサヴェジ氏の論述においては，園［5］，59(499) 頁，左側，において注意した様に，サヴェジ［3］，第3章第3節，定理3における第5番目の結論，但し，この定理，及び，この結論，は，同書の37頁に在る，に対する，略式証明，但し，この略式証明は，同書，同章同節，38頁，冒頭の段落，から，冒頭から第3番目の段落，まで，において，提示されているのではあるが，において，可算無限集合上の或種の選択関数，の存在，に，関する，或仮定，が，暗黙の内に利用されているのである。この論文においては，第2節において視る様に，この仮定を，従属選択の原理（principle of depending choice），として，精確に定式化して，導入する。さらにまた，この論文の第6節において視る様に，精密比較の公準，これは，サヴェジ氏の公準 P6′，に対する，この論文における呼称である，を，満たす定性的確率，に対する，一個の基本的命題，を，導く場合において，この従属選択の原理，に対する，利用の様式，を，明確な形式によって，提示する。

なお，サヴェジ氏による論述においては，「n 重のほとんど一様なる分割（n-fold almost uniform partition）」，の概念，この概念は，サヴェジ［3］，第3章第3節，34頁，上から第3番目の段落中の冒頭の文，において導入される，及び，「精密的（fine）」，及び，「緊密的（tight）」，これらの性質達は，各各，サヴェジ［3］，第3章第3節，36頁から37頁にかけての，文，及び，37頁の冒頭の段落における，上から，第4行目から第5行目にかけての，文，において，導入される，及び，「ほとんど同等的（almost equivalent）」，但し，この2項関係は，サヴェジ［3］，第3章第3節，37頁の冒頭の段落における，上から，第1行目から第3行目にかけての，文，において，導入される，が，利用されるのではあるが，この論文における論述が示している様に，「精密比較の公準を満たす定性的確率，に対して，強一致する，定量的確率，の，一意的存在」，即ち，サヴェジ氏の定量的確率，の，一意的存在，を，導く場合においては，これらの，概念，及び，

傾向は本論文中で指摘したとおりであるが，それらの傾向はアメリカ企業が相対的に費用面で比較優位に立つことにより強められる結果となっている。

次に，自主規制後日本とアメリカの社会的厚生がどのように変化したかをみることとする。それらは表A 1にまとめられているが，容易に分かるように，central case と較べて日本の社会的厚生は減少しアメリカの社会的厚生は増加している。しかし，個々の要素を検討してみると，変化しているのは日本とアメリカにおける利業利潤であることが分かるであろう。日本企業の限界費用が高くなることにより，日本企業はアメリカ市場で競争力を失うが，同時に国内での利潤率を下げて国内販売と輸出による利潤を共に減少させるのである。

表A 1.　自主規制後の社会的厚生の変化

	1981	1982	1983
W^J	12. 018	13. 408	13. 377
C^J	6. 745	6. 743	7. 818
$P_1{}^J$	1. 208	1. 164	0. 673
$P_2{}^J$	4. 066	5. 501	4. 887
W^A	35. 531	35. 977	44. 220
C^A	30. 189	29. 966	35. 790
P^A	4. 987	5. 633	8. 017
G^A	0. 355	0. 377	0. 413

最後に，自主規制が行われなかった場合の社会的厚生の変化を見てみよう。これには総推測変動が安定的な場合と $n_2{}^*$ が安定的な場合があるが，ここでは前者の結果をまとめておく。この場合，higher cost に対応する $V_2{}^F$ の値は 845.365×10^{-6} である。

自主規制がなければ，日本企業は輸出面での収益を大幅に低下させることとなる。他方，アメリカの企業は自主規制によって恩恵を受けていることが判る。しかし，これは自主規制による消費者の損失とは較ぶべくも無い。1982年には，自主規制によって消費者余剰は約80億ドル近く減少しているのである。

表A 2.　自主規制のない場合の社会的厚生の変化

	1981	1982	1983
W^J	7. 971	7. 928	8. 510
C^J	6. 745	6. 743	7. 818
$P_1{}^J$	1. 208	1. 164	0. 673
$P_2{}^J$	0. 018	0. 021	0. 020
W^A	40. 593	43. 178	50. 247
C^A	35. 633	37. 769	42. 488
P^A	4. 411	4. 773	7. 113
G^A	0. 549	0. 636	0. 645

この付録の議論は，費用関数に関する正確な情報が我々の分析にとって非常に重要であることを物語っている。

参 考 文 献

(1) Collyns, C. and Dunaway, S. (1987), "The Cost of Trade Restraints : The Case of Japanese Automobile Exports to the United States," *IMF Staff Papers*

(2) Crandall, R. W. (1987), "The Effects of U. S. Trade Protection for Autos and Steel," *Brookings Papers on Economic Activity 1*

(3) Dixit, A. (1987), "Tariffs and Subsidies under oligopoly : The Case of US Automobile Industry," in *Protection and Competition in International Trade : Essays in Honor of W. M. Corden*, edited by H. Kierzkowski

(4) Dixit, A. (1986), "Optimal Trade and Industrial Policies for the US Automobile Industry," *mimeo.*,

(5) Feenstra, R. C. (1985), "Automobile Price and Protection : The U. S.-Japan Trade Restraint," *Journal of Policy Modeling* vol. 7.

(6) Ono, H. (1988), "Welfare Effects of Japanese Voluntary Export Constraint for Automobiles 1981-1983," *mimeo.*,

注) 本論文の作成にあたっては，資料の整理やコンピュータ処理に関して本学大学院生高橋誠一君のご助力を得た。ここで感謝の意を表したい。

性質達，及び，2項関係，の各各は，利用する必要のない者である。さらにまた，これらの，概念，及び，性質達，及び，2項関係，を利用する，サヴェジ氏の議論，を，この論文の論述様式を用いるのならば，

「$\preccurlyeq$を，任意の，「サヴェジ氏式に精密的」な，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とする。

「任意の事象，A，及び，任意の事象，B，に，対して，「「或事象，E，が存在して，「$A \cup E \preccurlyeq B$，且つ，$A \cap E = \phi$，且つ，$\phi \preccurlyeq E$」」，の場合，且つ，その場合に限って，$A \ll \cdot B$」」，

によって，$\mathcal{A}$上の2項関係，$\ll \cdot$，を定義する」，

なる様式によって，導入される，2項関係，$\ll \cdot$，を，利用する事，に，基づいて，精確，且つ，簡潔，に，再構成する事，が，実行できるのである。但し，この再構成の過程を提示する事は，この論文の目的ではない。有閑なる読者は，もし，この再構成を試みるのならば，無用無味を得るかもしれない。

［注意1］。この論文，これは，一個の，頑固なる，学術論文，ではあるのだが，は，必要ならば，日本数学会編集，『岩波数学辞典，第3版』，［2］，を参照する，なる事，を，仮定すれば，初学者，但し，健全なる悟性の所有者でなければならない，が，しかし，この，彼，或いは，彼女，は，中学校の生徒であってもかまわないのである，に，とっても，充分に，読解する事が可能である，なる意味において，ほとんど自己完結的，なる性格，を，所有している，なる事，を，注意する。

［注意2］。通常の数学的論述においては，暗黙の内に利用されている，背理法との連関において空集合，ϕ，が作動する様式，を，この論文では，でき得る限り執拗に，明示する事にした。

［注意3］。この論文においては，［命題 x. y］，なる記法を用いて，この論文の第 x 節，における，［命題 y］，に，言及する事にする。また，［定義 v］，及び，［命題 w］，なる記法達は，同じ節における言及達，に対してのみ，利用される。

［記号1］。A，及び，B，の各各を，任意の集合とする。「その集合の各元が，A から B への写像であり，且つ，任意の，A から B への写像，は，その集合の元である」，なる性質を満たす，その集合，即ち，A から B への写像の全体，を，

$$\mathrm{Map}(A,\ B),$$

と表記する。即ち，集合，$\mathrm{Map}(A,\ B)$，は，「「f は A から B への写像である」，なる場合，且つ，その場合に限って，$f \in \mathrm{Map}(A,\ B)$」，なる陳述，によって，定義される，集合である。

［記号2］。任意の写像，f，に対して，f の定義域を，

$$\mathrm{dom}(f),$$

と表記する。

［注意］。「任意の写像，f，及び，任意の集合，A，及び，任意の集合，B，に，対して，「$f \in \mathrm{Map}(A,\ B)$，ならば，$\mathrm{dom}(f) = A$」」，が従う。

［記号3］。1を最小の元とする自然数系列，即ち，0，を含まない，自然数の全体，を，

$$\boldsymbol{N},$$

と表記する。N に属する元を，自然数，と呼ぶ。

［記号4］。0を最小の元とする自然数系列，即ち，N に対して0を添加する事，によって得られる数系列，を，

$$\omega,$$

と表記する。$\omega=N\cup\{0\}$，である。ω に属する元を，非負の整数，と呼ぶ。

［記号5］。n を任意の整数とする。n 以下の自然数の全体，を，$N[n]$，と表記する。即ち，

$$N[n]=\{k\mid k\epsilon N,\ \text{且つ},\ k\leqq n\},$$

と置く。

［記号6］。Λ を，任意の，ω の部分集合，とし，且つ，X を任意の集合とし，且つ，f を，任意の，Λ から X への写像，とする。この f を，「Λ を添数集合とし，各項が X の元である，列」，と呼び，

$$\langle f(\lambda)\,;\,\lambda\epsilon\Lambda\rangle,$$

と表記する。

［記号7］。$\langle f(n)\,;\,n\epsilon\omega\rangle$，を任意の実数列とし，且つ，$\langle f(n)\,;\,n\epsilon\omega\rangle$ は収束する，と仮定する。この実数列，$\langle f(n)\,;\,n\epsilon\omega\rangle$，の極限を，

$$\lim\langle f(n)\,;\,n\epsilon\omega\rangle,$$

と表記する。

第2節。従属選択の原理。

［註1］。［定義1］において提示されている，有限集合の概念，に対する方法論的基礎づけは，自明な者ではない。この基礎づけについては，デーデキント，著，河野，訳，［1］，における，第二編，「数とは何か，何であるべきか」，を，参照せよ。

［註2］。［命題1］は，有限集合上の選択関数，の存在，に，関する命題である。この命題を，［命題6.2］に対する［証明］，において，利用する。

［註3］。［定義2］における，従属選択の原理に対する，表現の様式は，日本数学会編集，『岩波数学辞典，第3版』，［2］，332頁，左側，に，提示されている様式，を，借用した者である。この論文においては，選択公理それ自体を用いる必要はない，が，この従属選択の原理を，［命題6.1］に対する［証明］，において，利用する。

［註4］。［定義3］において提示される，初期条件付き従属選択の原理，は，［命題6.3］に対する［証明］，において，利用する。初期条件付き従属選択の原理，と，従属選択の原理，との，同値性，は，［命題2］に対する［証明］，により，従う。

［註5］。［命題3］，及び，［命題4］，この命題は，除法定理（division algorithm），に他ならない，及び，［定義4］，は，［定義5］を提示する為に，導入した。この論文の自己完結性を高める為に，証明達を添加した。［定義5］は，［命題6.2］に対する［証明］，において，利用する。

［定義1］．A を任意の集合とする。「A は有限集合である」，なる事を，

「$n\epsilon\omega$，なる或 n，及び，或写像，f，が，存在して，f は $N[n]$ から A への全単射である」，

なる事である，と，定義する。

［注意］。「$N[0]=\phi$，且つ，「任意の集合，A，に対して，$\mathrm{Map}(\phi, A)=\{\phi\}$」」，より，「空集合，$\phi$，は有限集合である」，が従う。

［命題１］。A を任意の有限集合とし，且つ，B を任意の集合とし，且つ，R を，任意の，$A\times B$ 上の性質，とする。

「「$x\in A$，なる任意の x に対して，「$y\in B$，なる或 y が存在して，$R(x, y)$」」，ならば，「$f\in \mathrm{Map}(A, B)$，なる或 f が存在して，「$x\in A$，なる任意の x に対して，$R(x, f(x))$」」」，

が従う。

［証明］。$A=\phi$，の場合は，$f=\phi$，と置けば，結論が従う。「$A\neq\phi$，且つ，「$x\in A$，なる任意の x に対して，「$y\in B$，なる或 y が存在して，$R(x, y)$」」」，と仮定する。「$A\neq\phi$，且つ，A は有限集合」，より，「$n\in N$，なる或 n，及び，$\varphi\in \mathrm{Map}(N[n], A)$，なる或 φ，が，存在して，φ は，$N[n]$ から A への全単射である」，が従う。ここにおける，n，及び，φ，を，固定する。「$n=\max \mathrm{dom}(\varphi)$，且つ，$\mathrm{dom}(\varphi)=N[\max \mathrm{dom}(\varphi)]$」，が従う。

$M=\{m \mid m\in \mathrm{dom}(\varphi)$，且つ，「「$\chi\in \mathrm{Map}(N[m], B)$，なる或 χ が存在して，「$k\in N[m]$，なる任意の k に対して，$R(\varphi(k), \chi(k))$」」，には非ず」$\}$，

と置く。$M\neq\phi$，と仮定して，矛盾を導く。M において最小である，元，が，存在する。この元を $m(*)$ と表記する。即ち，$m(*)=\min M$，と置く。仮定より，「$b\in B$，なる或 b が存在して，$R(\varphi(1), b)$」，が従う。この b を固定する。$\chi_*(1)=b$，によって，$\{1\}$ から B への写像，χ_*，を定義する。この場合，「$k\in N[1]$，なる任意の k に対して，$R(\varphi(k), \chi_*(k))$」，が従う。故に，$1\notin M$。故に，$2\leqq m(*)$。故に，$m(*)-1\in \mathrm{dom}(\varphi)$。何となれば，「$m(*)\in \mathrm{dom}(\varphi)$，且つ，$\mathrm{dom}(\varphi)=N[\max \mathrm{dom}(\varphi)]$」，より，「$m(*)\in N$，且つ，$m(*)\leqq \max \mathrm{dom}(\varphi)$」，が従い，故に，「$m(*)-1\in\omega$，且つ，$m(*)-1\leqq \max \mathrm{dom}(\varphi)$」，が従い，$2\leqq m(*)$，より，$m(*)-1\in N$，が従う。故に，$m(*)$ の最小性，より，

「$\chi'\in \mathrm{Map}(N[m(*)-1], B)$，なる或 χ' が存在して，「$k\in N[m(*)-1]$，なる任意の k に対して，$R(\varphi(k), \chi'(k))$」」，

が従う。この χ' を固定する。一方，仮定より，「$b'\in B$，なる或 b' が存在して，$R(\varphi(m(*)), b')$」，が従う。この b' を固定する。

「$k\in N[m(*)]$，なる任意の k に対して，「「$k\in N[m(*)-1]$，ならば，$\chi''(k)=\chi'(k)$」，且つ，「$k=m(*)$，ならば，$\chi''(k)=b'$」」」，

によって，$N[m(*)]$ から B への写像，χ''，を定義する。$k\in N[m(*)]$，なる任意の k を固定する。$k\in N[m(*)-1]$，の場合を考える。この場合，$R(\varphi(k), \chi''(k))$，と，$R(\varphi(k), \chi'(k))$，とは，同値である。χ'，に対する，固定の様式，より，$R(\varphi(k), \chi'(k))$，が従う。次に，$k=m(*)$，の場合を考える。この場合，$R(\varphi(k), \chi''(k))$，と，$R(\varphi(m(*)), b')$，とは，同値である。b'，に対する，固定の様式，より，$R(\varphi(m(*)), b')$，が従う。故に，「$k\in N[m(*)]$，なる任意の k に対して，$R(\varphi(k), \chi''(k))$」，が従う。故に，$m(*)\notin M$。これは，$m(*)\in M$，に反する。故に，$M=\phi$。

故に，$\max \mathrm{dom}(\varphi)\notin M$。ところが，$\max \mathrm{dom}(\varphi)\in \mathrm{dom}(\varphi)$。故に，$n=\max \mathrm{dom}(\varphi)$，及び，$M$ の定義，より，「$\chi\in \mathrm{Map}(N[n], B)$，なる或 χ が存在して，「$k\in N[n]$，なる任意の k に対して，$R(\varphi(k), \chi(k))$」」，が従う。この χ を固定する。φ の逆写像を ψ とする。即ち，

$\phi \doteqdot \varphi^{-1}$, と置く。また, $f=\chi\circ\phi$, と置く。$x\epsilon A$, なる任意の x を固定する。$R(x, f(x))$, と, $R((\varphi\circ\phi)(x), (\chi\circ\phi)(x))$, とは, 同値である。$R((\varphi\circ\phi)(x), (\chi\circ\phi)(x))$, と, $R(\varphi(\phi(x)), \chi(\phi(x)))$, とは, 同値である。$\chi$, に対する, 固定の様式, 及び, $\phi(x)\epsilon N[n]$, より, $R(\varphi(\phi(x)), \chi(\phi(x)))$, が従う。故に,「$x\epsilon A$, なる任意の x に対して, $R(x, f(x))$」, が従う。

結論が従う。　　[証明終]。

[定義2]。次の陳述を, 従属選択の原理, と呼ぶ。

陳述。「任意の集合, $\mathcal{A}$, 及び, 任意の, $\mathcal{A}$上の2項関係, R, に, 対して,「「$\mathcal{A}\neq\phi$, 且つ,「$x\epsilon\mathcal{A}$, なる任意の x に対して,「$y\epsilon\mathcal{A}$, なる或 y が存在して, $R(x, y)$」」」, ならば,「$f\epsilon$ Map$(\omega, \mathcal{A})$, なる或 f が存在して,「$n\epsilon\omega$, なる任意の n に対して, $R(f(n), f(n+1))$」」」」。

[注意]。「[定義2]の陳述, における, 外側から第2番目の, 一対を構成する鉤括弧達」, の, 内側に在る, 陳述, を, 式で表現すれば, 次の様になる。

$$\mathcal{A}\neq\phi\wedge\forall x\epsilon\mathcal{A}\exists y\epsilon\mathcal{A}R(x, y)\rightarrow$$

$$\exists f\epsilon\mathrm{Map}(\omega, \mathcal{A})\forall n\epsilon\omega R(f(n), f(n+1))。$$

[定義3]。次の陳述を, 初期条件付き従属選択の原理, と呼ぶ。

陳述。「任意の集合, $\mathcal{A}$, 及び, 任意の, $\mathcal{A}$上の2項関係, R, に, 対して,「「$x\epsilon\mathcal{A}$, なる任意の x に対して,「$y\epsilon\mathcal{A}$, なる或 y が存在して, $R(x, y)$」」, ならば,「$z\epsilon\mathcal{A}$, なる任意の z に対して,「$f\epsilon$Map$(\omega, \mathcal{A})$, なる或 f が存在して,「$f(0)=z$, 且つ,「$n\epsilon\omega$, なる任意の n に対して, $R(f(n), f(n+1))$」」」」」」。

[注意]。「[定義3]の陳述, における, 外側から第2番目の, 一対を構成する鉤括弧達」, の, 内側に在る, 陳述, を, 式で表現すれば, 次の様になる。

$$\forall x\epsilon\mathcal{A}\exists y\epsilon\mathcal{A}R(x, y)\rightarrow$$

$$\forall z\epsilon\mathcal{A}\exists f\epsilon\mathrm{Map}(\omega, \mathcal{A})$$
$$(f(0)=z\wedge\forall n\epsilon\omega R(f(n), f(n+1)))。$$

[命題2]。初期条件付き従属選択の原理, と, 従属選択の原理, とは, 同値である。即ち, [定義3], における陳述と, [定義2], における陳述とは, 同値である。

[証明]。初期条件付き従属選択の原理を仮定して, 従属選択の原理を導く。$\mathcal{A}$を任意の集合とし, 且つ, R を, 任意の, $\mathcal{A}$ 上の2項関係, とする。「$\mathcal{A}\neq\phi$, 且つ,「$x\epsilon\mathcal{A}$, なる任意の x に対して,「$y\epsilon\mathcal{A}$, なる或 y が存在して, $R(x, y)$」」」, と仮定する。$\mathcal{A}\neq\phi$, より,「或 z が存在して, $z\epsilon\mathcal{A}$」, が従う。この z を固定する。初期条件付き従属選択の原理より,「$f\epsilon$Map$(\omega, \mathcal{A})$, なる或 f が存在して,「$f(0)=z$, 且つ,「$n\epsilon\omega$, なる任意の n に対して, $R(f(n), f(n+1))$」」」, が従う。この f を固定する。「$n\epsilon\omega$, なる任意の n に対して, $R(f(n), f(n+1))$」, が従う。故に,「$f\epsilon$Map$(\omega, \mathcal{A})$, なる或 f が存在して,「$n\epsilon\omega$, なる任意の n に対して, $R(f(n), f(n+1))$」」, が従う。

従属選択の原理を仮定して, 初期条件付き従属選択の原理を導く。$\mathcal{A}$ を任意の集合とし, 且つ, R を, 任意の, $\mathcal{A}$ 上の2項関係, とする。「$x\epsilon\mathcal{A}$, なる任意の x に対して,「$y\epsilon\mathcal{A}$, なる或 y が存在して, $R(x, y)$」」, と仮定する。$z\epsilon\mathcal{A}$, なる任意の z を固定する。

$\mathcal{B}=\{g|$「$n\in\omega$，なる或 n が存在して，$g\in\mathrm{Map}(N[n]\cup\{0\},\mathcal{A})$」，且つ，$g(0)=z$，且つ，「$j\in\mathrm{dom}(g)$，なる任意の j に対して，「$j\lneqq\max\mathrm{dom}(g)$，ならば，$R(g(j),g(j+1))$」」$\}$，

と置く。この場合，「$g\in\mathcal{B}$，なる任意の g に対して，「$\mathrm{dom}(g)$ において最大である，元，が，存在して，且つ，$\mathrm{dom}(g)=N[\max\mathrm{dom}(g)]\cup\{0\}$」」，が従う。これを示す。$g\in\mathcal{B}$，なる任意の g を固定する。$\mathcal{B}$ の定義，より，「$n'\in\omega$，なる或 n' が存在して，$g\in\mathrm{Map}(N[n']\cup\{0\},\mathcal{A})$」，が従う。この n' を固定する。故に，$\mathrm{dom}(g)=N[n']\cup\{0\}$。故に，「$n'\in\mathrm{dom}(g)$，且つ，「$j\in\mathrm{dom}(g)$，なる任意の j に対して，「「$j\in N$，且つ，$j\leqq n'$」，或いは，$j=0$」」」。ところが，$n'\in\omega$，より，$0\leqq n'$．故に，「$n'\in\mathrm{dom}(g)$，且つ，「$j\in\mathrm{dom}(g)$，なる任意の j に対して，$j\leqq n'$」」，が従う。故に，$n'=\max\mathrm{dom}(g)$。故に，$\mathrm{dom}(g)=N[\max\mathrm{dom}(g)]\cup\{0\}$。

また，

「$g\in\mathcal{B}$，なる任意の g，及び，$g'\in\mathcal{B}$，なる任意の g'，に，対して，「「$\max\mathrm{dom}(g')=\max\mathrm{dom}(g)+1$，且つ，「$j\in\mathrm{dom}(g)$，なる任意の j に対して，$g'(j)=g(j)$」」，の場合，且つ，その場合に限って，$T(g,g')$」」，

によって，$\mathcal{B}$ 上の2項関係，T，を定義する。

式1。$\mathcal{B}\neq\phi$，

を示す。

$g_*(0)=z$，によって，$\{0\}$ から $\mathcal{A}$ への写像，g_*，を定義する。$\{0\}=N[0]\cup\{0\}$，より，$g_*\in\mathrm{Map}(N[0]\cup\{0\},\mathcal{A})$，が従う。また，「$\mathrm{dom}(g_*)=\{0\}$，且つ，「$j\in\{0\}$，なる任意の j に対して，「$j\lneqq\max\{0\}$，ならば，$R(g_*(j),g_*(j+1))$」」」，より，「$j\in\mathrm{dom}(g_*)$，なる任意の j に対して，「$j\lneqq\max\mathrm{dom}(g_*)$，ならば，$R(g_*(j),g_*(j+1))$」」」，が従う。故に，$g_*\in\mathcal{B}$。故に，「或 g が存在して，$g\in\mathcal{B}$」。

式1，が従う。

陳述1。「$g\in\mathcal{B}$，なる任意の g に対して，「$g'\in\mathcal{B}$，なる或 g' が存在して，$T(g,g')$」」，

を示す。

$g\in\mathcal{B}$，なる任意の g を固定する。$g(\max\mathrm{dom}(g))\in\mathcal{A}$，が従う。故に，仮定より，「$y'\in\mathcal{A}$，なる或 y' が存在して，$R(g(\max\mathrm{dom}(g)),y')$」，が従う。この y' を固定する。

「$j\in N[\max\mathrm{dom}(g)+1]\cup\{0\}$，なる任意の j に対して，「「$j\leqq\max\mathrm{dom}(g)$，ならば，$g'(j)=g(j)$」，且つ，「$j=\max\mathrm{dom}(g)+1$，ならば，$g'(j)=y'$」」」，

によって，$N[\max\mathrm{dom}(g)+1]\cup\{0\}$ から $\mathcal{A}$ への写像，g'，を定義する。$0\leqq\max\mathrm{dom}(g)$，より，$g'(0)=g(0)$。一方，$g\in\mathcal{B}$，より，$g(0)=z$，故に，$g'(0)=z$。次に，「$j\in\mathrm{dom}(g')$，なる任意の j に対して，「$j\lneqq\max\mathrm{dom}(g')$，ならば，$R(g'(j),g'(j+1))$」」，を示す。「$j\in\mathrm{dom}(g')$，且つ，$j\lneqq\max\mathrm{dom}(g')$」，なる任意の j を固定する。$\mathrm{dom}(g')=N[\max\mathrm{dom}(g)+1]\cup\{0\}$，より，$\max\mathrm{dom}(g')=\max\mathrm{dom}(g)+1$，が従う。故に，$j\lneqq\max\mathrm{dom}(g)+1$。故に，$j\leqq\max\mathrm{dom}(g)$。$j=\max\mathrm{dom}(g)$，の場合を考える。$g'(j)=g(j)$，より，$g'(j)=g(\max\mathrm{dom}(g))$。一方，$j+1=\max\mathrm{dom}(g)+1$，より，$g'(j+1)=y'$。故に，$R(g'(j),g'(j+1))$，と，$R(g(\max\mathrm{dom}(g)),y')$，とは，同値である。$R(g(\max\mathrm{dom}(g)),y')$，は，$y'$，に対する，固定の様式，より，従う。次に，$j\lneqq\max\mathrm{dom}(g)$，の場合を考える。$g'(j)=g(j)$，が従う。一方，$j+1\leqq\max\mathrm{dom}(g)$，より，$g'(j+1)=g(j+1)$，が従う。故に，$R(g'$

$(j), g'(j+1))$, と, $R(g(j), g(j+1))$, とは, 同値。一方,「$j \epsilon \mathrm{dom}(g)$, 且つ, $j \leqq \max \mathrm{dom}(g)$」。故に, $g \epsilon \mathcal{B}$, より, $R(g(j), g(j+1))$, が従う。故に, $g' \epsilon \mathcal{B}$, が従う。

$T(g, g')$, を示す。$\mathrm{dom}(g') = N[\max \mathrm{dom}(g)+1] \cup \{0\}$, より, $\max \mathrm{dom}(g') = \max \mathrm{dom}(g)+1$。$j \epsilon \mathrm{dom}(g)$, なる任意の j を固定する。$g \epsilon \mathcal{B}$, より, $\mathrm{dom}(g) = N[\max \mathrm{dom}(g)] \cup \{0\}$, が従う。故に,「$j \epsilon N[\max \mathrm{dom}(g)+1] \cup \{0\}$, 且つ, $j \leqq \max \mathrm{dom}(g)$」。故に, g' の定義, より, $g'(j) = g(j)$。$T(g, g')$, が従う。

陳述 1, が従う。

陳述 2。「$F \epsilon \mathrm{Map}(\omega, \mathcal{B})$, なる或 F が存在して,「$n \epsilon \omega$, なる任意の n に対して, $T(F(n), F(n+1))$」」。

この陳述は, 式 1, 及び, 陳述 1, 及び, 従属選択の原理, より, 従う。陳述 2, における, F, を固定する。

陳述 3。「$k \epsilon \omega$, なる任意の k に対して,「$n \epsilon \omega$, なる或 n が存在して, $k \epsilon \mathrm{dom}(F(n))$」」,

を示す。

$K = \{k \mid k \epsilon \omega$, 且つ,「「$n \epsilon \omega$, なる或 n が存在して, $k \epsilon \mathrm{dom}(F(n))$」, には非ず」$\}$, と置く。$K \neq \phi$, と仮定して, 矛盾を導く。この場合, K において最小である, 元, が, 存在する。この元を $k(*)$ と表記する。即ち, $k(*) = \min K$, と置く。$F(0) \epsilon \mathcal{B}$, より,「$m \epsilon \omega$, なる或 m が存在して, $F(0) \epsilon \mathrm{Map}(N[m] \cup \{0\}, \mathcal{A})$」。この m を固定する。$\mathrm{dom}(F(0)) = N[m] \cup \{0\}$。故に, $0 \epsilon N[m] \cup \{0\}$, より, $0 \epsilon \mathrm{dom}(F(0))$。故に,「$n \epsilon \omega$, なる或 n が存在して, $0 \epsilon \mathrm{dom}(F(n))$」, が従う。故に, $0 \notin K$。故に, $1 \leqq k(*)$。故に, $k(*)-1 \epsilon \omega$。故に, $k(*)$ の最小性, より,「$n \epsilon \omega$, なる或 n が存在して, $k(*)-1 \epsilon \mathrm{dom}(F(n))$」, が従う。この n を固定する。故に, $k(*)-1 \epsilon \mathrm{dom}(F(n))$。故に, $k(*)-1 \leqq \max \mathrm{dom}(F(n))$。故に, $k(*) \leqq \max \mathrm{dom}(F(n))+1$。一方, $T(F(n), F(n+1))$, より, $\max \mathrm{dom}(F(n))+1 = \max \mathrm{dom}(F(n+1))$。故に, $k(*) \leqq \max \mathrm{dom}(F(n+1))$。故に, $k(*) \epsilon \omega$, より, $k(*) \epsilon N[\max \mathrm{dom}(F(n+1))] \cup \{0\}$。ところが, $N[\max \mathrm{dom}(F(n+1))] \cup \{0\} = \mathrm{dom}(F(n+1))$。故に, $k(*) \epsilon \mathrm{dom}(F(n+1))$。故に,「$n' \epsilon \omega$, なる或 n' が存在して, $k(*) \epsilon \mathrm{dom}(F(n'))$」。故に, $k(*) \notin K$。これは, $k(*) \epsilon K$, に反する。故に, $K = \phi$。故に,「$k \epsilon \omega$, なる任意の k に対して, $k \notin K$」。故に,「$k \epsilon \omega$, なる任意の k に対し,「$n \epsilon \omega$, なる或 n が存在して, $k \epsilon \mathrm{dom}(F(n))$」」。

陳述 3, が従う。

「$k \epsilon \omega$, なる任意の k に対して, $N(k) = \{n \mid n \epsilon \omega$, 且つ, $k \epsilon \mathrm{dom}(F(n))\}$」,

によって, $k \epsilon \omega$, なる各 k に対して, 集合, $N(k)$, を定義する。陳述 3, より,「$k \epsilon \omega$, なる任意の k に対して, $N(k) \neq \phi$」, が従う。

「$k \epsilon \omega$, なる任意の k に対して, $\nu(k) = \min N(k)$」,

によって, $k \epsilon \omega$, なる各 k に対して, 非負の整数, $\nu(k)$, を定義する。「$k \epsilon \omega$, なる任意の k に対して, $k \epsilon \mathrm{dom}(F(\nu(k)))$」, が従う。

「$k \epsilon \omega$, なる任意の k に対して, $f(k) = F(\nu(k))(k)$」,

によって, ω から $\mathcal{A}$ への写像, f, を定義する。

陳述 4。「$k \epsilon \omega$, なる任意の k に対して,「$\nu(k+1) = \nu(k)$, 或いは, $\nu(k+1) = \nu(k)+1$」」,

を示す。

$k\epsilon\omega$，なる任意の k を固定する。$k+1\epsilon\mathrm{dom}(F(\nu(k+1)))$，より，$k\epsilon\mathrm{dom}(F(\nu(k+1)))$，が従う。故に，$\nu(k+1)\epsilon N(k)$。故に，$\min N(k)\leqq\nu(k+1)$。故に，$\nu(k)\leqq\nu(k+1)$。$\nu(k)\lneqq\nu(k+1)$，と仮定する。$k\epsilon\mathrm{dom}(F(\nu(k)))$，より，$k\leqq\max\ \mathrm{dom}(F(\nu(k)))$。故に，$k+1\leqq\max\ \mathrm{dom}(F(\nu(k)))+1$。一方，$T(F(\nu(k)),F(\nu(k)+1))$，より，$\max\ \mathrm{dom}(F(\nu(k)))+1=\max\ \mathrm{dom}(F(\nu(k)+1))$。故に，$k+1\leqq\max\ \mathrm{dom}(F(\nu(k)+1))$。故に，$k+1\epsilon\mathrm{dom}(F(\nu(k)+1))$。故に，$\nu(k)+1\epsilon N(k+1)$。故に，$\min N(k+1)\leqq\nu(k)+1$。故に，$\nu(k+1)\leqq\nu(k)+1$。ところが，$\nu(k)\lneqq\nu(k+1)$。故に，$\nu(k+1)\epsilon\omega$，より，$\nu(k+1)=\nu(k)+1$。

陳述4，が従う。

陳述5。「$k\epsilon\omega$，なる任意の k に対して，$R(f(k),f(k+1))$」，

を示す。

$k\epsilon\omega$，なる任意の k を固定する。陳述4，より，「$\nu(k+1)=\nu(k)$，或いは，$\nu(k+1)=\nu(k)+1$」，が従う。

$\nu(k+1)=\nu(k)$，の場合を考える。$n'=\nu(k)$，と置く。「$k\epsilon\mathrm{dom}(F(\nu(k)))$，且つ，$k+1\epsilon\mathrm{dom}(F(\nu(k+1)))$」，より，「$k\epsilon\mathrm{dom}(F(n'))$，且つ，$k+1\epsilon\mathrm{dom}(F(n'))$」，が従う。故に，$F(n')\epsilon\mathcal{B}$，より，$R(F(n')(k),F(n')(k+1))$。故に，「$n'=\nu(k)$，且つ，$n'=\nu(k+1)$」，より，$R(F(\nu(k))(k),F(\nu(k+1))(k+1))$，が従う。故に，「$f(k)=F(\nu(k))(k)$，且つ，$f(k+1)=F(\nu(k+1))(k+1)$」，より，$R(f(k),f(k+1))$，が従う。

$\nu(k+1)=\nu(k)+1$，の場合を考える。$k+1\epsilon\mathrm{dom}(F(\nu(k+1)))$，より，$k\epsilon\mathrm{dom}(F(\nu(k+1)))$，が従う。$F(\nu(k+1))\epsilon\mathcal{B}$，より，$R(F(\nu(k+1))(k),F(\nu(k+1))(k+1))$。一方，$\nu(k+1)=\nu(k)+1$，より，$F(\nu(k+1))(k)=F(\nu(k)+1)(k)$。故に，$R(F(\nu(k)+1)(k),F(\nu(k+1))(k+1))$，が従う。ところが，$T(F(\nu(k)),F(\nu(k)+1))$。故に，「$j\epsilon\mathrm{dom}(F(\nu(k)+1))$，なる任意の j に対して，「$j\lneqq\max\ \mathrm{dom}(F(\nu(k)+1))$，ならば，$F(\nu(k)+1)(j)=F(\nu(k))(j)$」」，が従う。一方，「$k+1\epsilon\mathrm{dom}(F(\nu(k+1)))$，且つ，$\nu(k+1)=\nu(k)+1$」，より，$k+1\epsilon\mathrm{dom}(F(\nu(k)+1))$。故に，$k+1\leqq\max\ \mathrm{dom}(F(\nu(k)+1))$。故に，$k\lneqq k+1$，より，$k\lneqq\max\ \mathrm{dom}(F(\nu(k)+1))$。故に，$F(\nu(k)+1)(k)=F(\nu(k))(k)$。故に，$R(F(\nu(k))(k),F(\nu(k+1))(k+1))$，が従う。故に，「$f(k)=F(\nu(k))(k)$，且つ，$f(k+1)=F(\nu(k+1))(k+1)$」，より，$R(f(k),f(k+1))$，が従う。

陳述5，が従う。

式2。$f(0)=z$，

を示す。

$f(0)=F(\nu(0))(0)$。ところが，$F(\nu(0))\epsilon\mathcal{B}$，より，$F(\nu(0))(0)=z$。故に，$f(0)=z$。

式2，が従う。

陳述5，及び，式2，より，「$f\epsilon\mathrm{Map}(\omega,\mathcal{A})$，なる或 f が存在して，「$f(0)=z$，且つ，「$k\epsilon\omega$，なる任意の k に対して，$R(f(k),f(k+1))$」」」，が従う。

結論が従う。　［証明終］。

［命題3］。z を任意の整数とし，且つ，$M\epsilon N$，なる任意の M を固定する。

「或整数 q が，一意的に，存在して，「$0\leqq z-q\cdot M$，且つ，$z-q\cdot M\leqq M-1$」」。

[証明]。一意性の部分を示す。「q', 及び, q'', の各各は, 整数であり, 且つ, $0\leqq z-q'\cdot M\leqq M-1$, 且つ, $0\leqq z-q''\cdot M\leqq M-1$」, と仮定する。この場合, $-(M-1)\leqq(q''-q')\cdot M\leqq M-1$。左側の不等式より, $1\leqq(q''-q'+1)\cdot M$。右側の不等式より, $1\leqq(1-q''+q')\cdot M$。$M\epsilon N$, 及び, これら2個の不等式達, より, 「$0\leqq q''-q'+1$, 且つ, $0\leqq 1-q''+q'$」。故に, 「$q'-1\leqq q''$, 且つ, $q''-1\leqq q'$」。q', 及び, q'', の各各は, 整数であるので, 「$q'\leqq q''$, 且つ, $q''\leqq q'$」。故に, $q'=q''$。

存在の部分を示す。$K=\{k\mid k$ は整数, 且つ, $z\leqq k\cdot M\}$, と置く。$z\leqq 0$, の場合においては, $M\epsilon N$, より, $1\epsilon K$。$0\leqq z$, の場合においては, $z\leqq z\cdot M\leqq z\cdot M+M=(z+1)\cdot M$, より, $z+1\epsilon K$。故に, $K\neq\phi$。$k(*)=\min K$, と置く, $z\leqq k(*)\cdot M$, である。$k(*)-1$ は整数であるので, $k(*)$ の最小性, より, $(k(*)-1)\cdot M\leqq z$。これら2個の不等式達, より, $0\leqq z-(k(*)-1)\cdot M\leqq k(*)\cdot M-(k(*)-1)\cdot M=M$。故に, $0\leqq z-(k(*)-1)\cdot M\leqq M-1$。$q=k(*)-1$, と置くと, 存在の部分が従う。

結論が従う。　　[証明終]。

[命題4]。z を任意の整数とし, 且つ, $M\epsilon N$, なる任意の M を固定する。

「或整数, q, 及び, 或整数, r, から構成される, 或順序対, $\langle q,r\rangle$, が, 一意的に, 存在して, 「$z=q\cdot M+r$, 且つ, $0\leqq r$, 且つ, $r\leqq M-1$」」。

[証明]。一意性の部分を示す。「$\langle q,r\rangle$, 及び, $\langle q',r'\rangle$, の各各は, 結論における性質を満たす」, と仮定する。この場合, [命題3] における, 一意性の部分, より, $q=q'$。これより, $r=r'$。故に, $\langle q,r\rangle=\langle q',r'\rangle$。

存在の部分を示す。[命題3] における, 存在の部分, より, 「或整数, q, が存在して, 「$0\leqq z-q\cdot M$, 且つ, $z-q\cdot M\leqq M-1$」」。この q を固定する。$r=z-q\cdot M$, と置く。r は整数であり, 且つ, $0\leqq r$, 且つ, $r\leqq M-1$。故に, $\langle q,r\rangle$ は結論における性質を満たす。

結論が従う。　　[証明終]。

[定義4]。「任意の整数, z, 及び, $d\epsilon N$, なる任意の d, に, 対して, 「$z=Q\langle z,d\rangle\cdot d+R\langle z,d\rangle$, 且つ, $0\leqq R\langle z,d\rangle$, 且つ, $R\langle z,d\rangle\leqq d-1$」」, によって, 各整数, z, 及び, 各自然数, d, から構成される, 各順序対, $\langle z,d\rangle$, に, 対して, 整数, $Q\langle z,d\rangle$, 及び, 非負の整数, $R\langle z,d\rangle$, から構成される, 順序付, $\langle Q\langle z,d\rangle, R\langle z,d\rangle\rangle$, を, 定義する。この定義は, [命題4], より, 確定する。

[定義5]。「任意の整数, z, に, 対して, 「$R\langle z\rangle=R\langle z,2\rangle$, 且つ, $I\langle z\rangle=Q\langle z,2\rangle+R\langle z,2\rangle$」」, によって, 各整数, z, に, 対して, 非負の整数, $R\langle z\rangle$, 及び, 整数, $I\langle z\rangle$, を, 定義する。

第3節。定性的確率。

[註1]。[定義1] において提示される, 定性的確率の概念に対する定式化, は, サヴェジ[3], 第3章第2節, 32頁における冒頭の段落, より, 借用した。

[註2]。[命題4], 及び, [命題5], 及び, [命題7], は, 各各, サヴェジ[3], 第3章第2節, 32頁における演習問題達, における, 問題1, 及び, 問題4a, 及び, 問題5a, より, 借用した。

[註3]。この節において提示する, 定性的確率に対する性質達, を, この論文においては, 少数の場合達を除いて, 無断で利用する事にす

る。

[定義1]。$\langle S, \mathcal{A}\rangle$ を任意の可測空間とする。「$\preccurlyeq$は$\mathcal{A}$上の定性的確率である」，なる事を，「$\preccurlyeq$は次の，[性質1]，から，[性質5]，まで，を，満たす」，なる事である，と，定義する。

[性質1]。$\preccurlyeq$は$\mathcal{A}$上の2項関係である。

[性質2]。「$A\in\mathcal{A}$，なる任意の A，及び $B\in\mathcal{A}$ なる任意の B，に，対して，「$A\preccurlyeq B$，或いは，$B\preccurlyeq A$」」。

[性質3]。「$A\in\mathcal{A}$，なる任意の A，及び，$B\in\mathcal{A}$，なる任意の B，及び，$C\in\mathcal{A}$，なる任意の C，に，対して，「「$A\preccurlyeq B$，且つ，$B\preccurlyeq C$」，ならば，$A\preccurlyeq C$」」。

[性質4]。「$A\in\mathcal{A}$，なる任意の A，及び，$B\in\mathcal{A}$，なる任意の B，及び，$C\in\mathcal{A}$，なる任意の C，に，対して，「「$A\cap C=\phi$，且つ，$B\cap C=\phi$」，ならば，「$A\preccurlyeq B$，の場合，且つ，その場合に限って，$A\cup C\preccurlyeq B\cup C$」」」。

[性質5]。「「$S\preccurlyeq\phi$，には非ず」，且つ，「$A\in\mathcal{A}$，なる任意の A に対して，$\phi\preccurlyeq A$」」。

[注意1]。「$\preccurlyeq$は$\mathcal{A}$上の定性的確率である」，と陳述する場合においては，一個の可測空間，$\langle S, \mathcal{A}\rangle$，が固定されているものとする。

[注意2]。「$\preccurlyeq$は$\mathcal{A}$上の定性的確率である」，なる場合において，この完全加法族，$\mathcal{A}$，に属する各元は，事象，と呼ばれる。

[注意3]。式，$A\preccurlyeq B$，は，「事象，A，は，事象，B，よりも，より確からしい，には非ず」，と訓む。

[定義2]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とする。

「任意の事象，A，及び，任意の事象，B，に，対して，「「$B\preccurlyeq A$，には非ず」，の場合，且つ，その場合に限って，$A\not\preccurlyeq B$」，

によって，$\mathcal{A}$上の2項関係，$\not\preccurlyeq$，を定義する。

[注意]。式，$A\not\preccurlyeq B$，は，「事象，A，よりも，事象，B，は，より確からしい」，と訓む。

[定義3]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とする。

「任意の事象，A，及び，任意の事象，B，に，対して，「「$A\preccurlyeq B$，且つ，$B\preccurlyeq A$」，の場合，且つ，その場合に限って，$A\dot{\approx}B$」」，

によって，$\mathcal{A}$上の2項関係，$\dot{\approx}$，を定義する。

[注意]。式，$A\dot{\approx}B$，は，「事象，A，と，事象，B，とは，対等である」，と訓む。

[命題1]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とする。$\mathcal{A}$上の2項関係，$\dot{\approx}$，は，$\mathcal{A}$上の同値関係，である。

[証明]。「$A\in\mathcal{A}$，なる任意の A に対して，$A\dot{\approx}A$」，を示す。$A\in\mathcal{A}$，なる任意の A を固定する。[定義1]における[性質2]，より，「$A\preccurlyeq A$，或いは，$A\preccurlyeq A$」，が従う。これは，$A\preccurlyeq A$，と同値。これは，「$A\preccurlyeq A$，且つ，$A\preccurlyeq A$」，と同値。これは，$A\dot{\approx}A$，と同値。

「$A\in\mathcal{A}$，なる任意の A，及び，$B\in\mathcal{A}$，なる任意の B，に，対して，「$A\dot{\approx}B$，ならば，$B\dot{\approx}A$」」，を示す。$A\in\mathcal{A}$，なる任意の A，及び，$B\in\mathcal{A}$，なる任意の B，を，固定する。$A\dot{\approx}B$，と，「$A\preccurlyeq B$，且つ，$B\preccurlyeq A$」，とは，同値。これは，「$B\preccurlyeq A$，且つ，$A\preccurlyeq B$」，と同値。これは，$B\dot{\approx}$

A, と同値。

「$A\epsilon\mathcal{A}$, なる任意の A, 及び, $B\epsilon\mathcal{A}$, なる任意の B, 及び, $C\epsilon\mathcal{A}$, なる任意の C, に, 対して, 「「$A\dot{\approx}B$, 且つ, $B\dot{\approx}C$」, ならば, $A\dot{\approx}C$」」, を示す。$A\epsilon\mathcal{A}$, なる任意の A, 及び, $B\epsilon\mathcal{A}$, なる任意の B, 及び, $C\epsilon\mathcal{A}$, なる任意の C, を, 固定する。「$A\dot{\approx}B$, 且つ, $B\dot{\approx}C$」, と, 「「$A\preccurlyeq B$, 且つ, $B\preccurlyeq A$」, 且つ, 「$B\preccurlyeq C$, 且つ, $C\preccurlyeq B$」」, とは, 同値。これは, 「$A\preccurlyeq B$, 且つ, $B\preccurlyeq A$, 且つ, $B\preccurlyeq C$, 且つ, $C\preccurlyeq B$」, と同値。これは, 「$A\preccurlyeq B$, 且つ, $B\preccurlyeq C$, 且つ, $C\preccurlyeq B$, 且つ, $B\preccurlyeq A$」, と同値。これは, 「「$A\preccurlyeq B$, 且つ, $B\preccurlyeq C$」, 且つ, 「$C\preccurlyeq B$, 且つ, $B\preccurlyeq A$」」, と同値。この陳述, 及び, [定義1] における [性質3], より, 「$A\preccurlyeq C$, 且つ, $C\preccurlyeq A$」, が従う。故に, $A\dot{\approx}C$, が従う。

結論が従う。　　[証明終]。

[命題2]。$\preccurlyeq$を, 任意の, $\mathcal{A}$上の定性的確率, とする。

「任意の事象, A, 及び, 任意の事象, B, 及び, 任意の事象, C, に, 対して, 「「「$A\preccurlyeq B$, 且つ, $B\dot{\approx}C$」, ならば, $A\preccurlyeq C$」, 且つ, 「「$A\preccurlyeq B$, 且つ, $C\dot{\approx}A$」, ならば, $C\preccurlyeq B$」」」,

が従う。

[注意]。[命題2], は, [定義3], 即ち, $\dot{\approx}$の定義, 及び, [定義1] における [性質3], より, 従う。

[命題3]。$\preccurlyeq$を, 任意の, $\mathcal{A}$上の定性的確率, とし, 且つ, A, 及び, B, 及び, C, の各各を, 任意の事象とする。この場合, 次の, 5個の結論達, が従う。

[結論1]。$A\not\preccurlyeq B$, ならば, $A\succcurlyeq B$。

[結論2]。「$A\preccurlyeq B$, 且つ, $B\not\preccurlyeq C$」, ならば, $A\not\preccurlyeq C$。

[結論3]。「$A\not\preccurlyeq B$, 且つ, $B\preccurlyeq C$」, ならば, $A\not\preccurlyeq C$。

[結論4]。「$A\cap C=\phi$, 且つ, $B\cap C=\phi$」, ならば, 「$A\not\preccurlyeq B$, の場合, 且つ, その場合に限って, $A\cup C\not\preccurlyeq B\cup C$」。

[結論5]。$\phi\not\preccurlyeq S$, 且つ, 「$A\not\preccurlyeq\phi$, には非ず」。

[証明]。[結論1], を示す。

「$A\not\preccurlyeq B$, ならば, $A\preccurlyeq B$」。

これは,

「「$A\not\preccurlyeq B$, には非ず」, 或いは, $A\preccurlyeq B$」,

と同値。これは,

「「「$B\preccurlyeq A$, には非ず」, には非ず」, 或いは, $A\preccurlyeq B$」,

と同値。これは,

「$B\preccurlyeq A$, 或いは, $A\preccurlyeq B$」,

と同値。これは,

「$A\preccurlyeq B$, 或いは, $B\preccurlyeq A$」,

と同値。これは, [定義1] における [性質2], より, 従う。

[結論1], が従う。

[結論2], を示す。

「「$A\preccurlyeq B$, 且つ, $B\not\preccurlyeq C$」, ならば, $A\not\preccurlyeq C$」。

これは，

「「「$A \preccurlyeq B$，且つ，$B \not\preccurlyeq C$」，には非ず」，或いは，$A \not\preccurlyeq C$」，

と同値。これは，

「「「$A \preccurlyeq B$，には非ず」，或いは，「$B \not\preccurlyeq C$，には非ず」」，或いは，$A \not\preccurlyeq C$」，

と同値。これは，

「「「$A \preccurlyeq B$，には非ず」，或いは，$C \preccurlyeq B$」，或いは，「$C \preccurlyeq A$，には非ず」」，

と同値。これは，

「「$A \preccurlyeq B$，には非ず」，或いは，$C \preccurlyeq B$，或いは，「$C \preccurlyeq A$，には非ず」」，

と同値。これは，

「「「$A \preccurlyeq B$，には非ず」，或いは，「$C \preccurlyeq A$，には非ず」」，或いは，$C \preccurlyeq B$」，

と同値。これは，

「「「$A \preccurlyeq B$，且つ，$C \preccurlyeq A$」，には非ず」，或いは，$C \preccurlyeq B$」，

と同値。これは，

「「$A \preccurlyeq B$，且つ，$C \preccurlyeq A$」，ならば，$C \preccurlyeq B$」，

と同値。これは，

「「$C \preccurlyeq A$，且つ，$A \preccurlyeq B$」，ならば，$C \preccurlyeq B$」，

と同値。これは，［定義1］における［性質3］，より，従う。

［結論2］，が従う。

［結論3］，を示す。

「$A \not\preccurlyeq B$，且つ，$B \preccurlyeq C$」，と仮定する。「$A \not\preccurlyeq C$，には非ず」，と仮定して，矛盾を導く。$C \preccurlyeq A$，が従う。ところが，$B \preccurlyeq C$。故に，［定義1］における［性質3］，より，$B \preccurlyeq A$。これは，$A \not\preccurlyeq B$，即ち，「$B \preccurlyeq A$，には非ず」，に，反する。

［結論3］，が従う。

［結論4］，を示す。

「$A \cap C = \phi$，且つ，$B \cap C = \phi$」，と仮定する。

「$A \not\preccurlyeq B$，の場合，且つ，その場合に限って，$A \cup C \not\preccurlyeq B \cup C$」。

これは，

「「$A \not\preccurlyeq B$，には非ず」，の場合，且つ，その場合に限って，「$A \cup C \not\preccurlyeq B \cup C$，には非ず」」，

と同値。これは，

「$B \preccurlyeq A$，の場合，且つ，その場合に限って，$B \cup C \preccurlyeq A \cup C$」，

と同値。これは，［定義1］における［性質4］，より従う。

［結論4］，が従う。

［結論5］，を示す。$\phi \not\preccurlyeq S$，は，「$S \preccurlyeq \phi$，には非ず」，と同値。「任意の事象，A，に対して，「$A \not\preccurlyeq \phi$，には非ず」」，は，「任意の事象，A，に対して，$\phi \preccurlyeq A$」，と同値。故に，［定義1］における［性質5］，より，［結論5］，が従う。

結論達，が従う。　　[証明終]。

[注意1]。$\dot{\approx}$ の定義，及び，[命題3]における[結論2]，より，

「任意の事象，A，及び，任意の事象，B，及び，任意の事象，C，に，対して，「「$A\dot{\approx}B$，且つ，$B\not\dot{\approx}C$」，ならば，$A\not\dot{\approx}C$」」，

が従う。

[注意2]。$\dot{\approx}$の定義，及び，[命題3]における[結論3]，より，

「任意の事象，A，及び，任意の事象，B，及び，任意の事象，C，に，対して，「「$A\not\dot{\approx}B$，且つ，$B\dot{\approx}C$」，ならば，$A\not\dot{\approx}C$」」，

が従う。

[命題4]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とする。

「任意の事象，A，及び，任意の事象，B，に，対して，「$A\subseteq B$，ならば，$A\preccurlyeq B$」」，

が従う。

[証明]。$A\in\mathcal{A}$，なる任意のA，及び，$B\in\mathcal{A}$，なる任意のB，を，固定する。$A\subseteq B$，と仮定する。[定義1]における[性質5]，より，$\phi\preccurlyeq B\setminus A$。故に，$\phi\cap A=(B\setminus A)\cap A=\phi$，及び，[定義1]における[性質4]，より，$\phi\cup A\preccurlyeq(B\setminus A)\cup A$。一方，$A\subseteq B$，より，$(B\setminus A)\cup A=B$。また，$A=\phi\cup A$。故に，$A\preccurlyeq B$。

結論が従う。　　[証明終]。

[命題5]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とする。

「任意の事象，A，及び，任意の事象，B，及び，任意の事象，C，に，対して，「「$A\preccurlyeq B$，且つ，$B\cap C=\phi$」，ならば，$A\cup C\preccurlyeq B\cup C$」」，

が従う。

[証明]。$A\in\mathcal{A}$，なる任意のA，及び，$B\in\mathcal{A}$，なる任意のB，及び，$C\in\mathcal{A}$，なる任意のC，を，固定する。「$A\preccurlyeq B$，且つ，$B\cap C=\phi$」，と仮定する。「$C\setminus A\subseteq C$，且つ，$B\cap C=\phi$」，より，$B\cap(C\setminus A)=\phi$，が従う。ところが，$A\cap(C\setminus A)=\phi$。故に，[定義1]における[性質4]，より，$A\cup(C\setminus A)\preccurlyeq B\cup(C\setminus A)$，が従う。一方，$B\cup(C\setminus A)\subseteq B\cup C$，及び，[命題4]，より，$B\cup(C\setminus A)\preccurlyeq B\cup C$。故に，[定義1]における[性質3]，より，$A\cup(C\setminus A)\preccurlyeq B\cup C$，が従う。ところが，$A\cup C=A\cup(C\setminus A)$。故に，$A\cup C\preccurlyeq B\cup C$，が従う。

結論が従う。　　[証明終]。

[命題6]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とする。

「任意の事象，A，及び，任意の事象，B，及び，任意の事象，C，に，対して，「「$A\not\preccurlyeq B$，且つ，$B\cap C=\phi$」，ならば，$A\cup C\not\preccurlyeq B\cup C$」」，

が従う。

[証明]。$A\in\mathcal{A}$，なる任意のA，及び，$B\in\mathcal{A}$，なる任意のB，及び，$C\in\mathcal{A}$，なる任意のC，を，固定する。「$A\not\preccurlyeq B$，且つ，$B\cap C=\phi$」，と仮定する。「$C\setminus A\subseteq C$，且つ，$B\cap C=\phi$」，より，$B\cap(C\setminus A)=\phi$，が従う。一方，$A\cap(C\setminus A)=\phi$。故に，[命題3]における[結論4]，より，$A\cup(C\setminus A)\not\preccurlyeq B\cup(C\setminus A)$，が従う。一方，$B\cup(C\setminus A)\subseteq B\cup C$，及び，[命題4]，より，$B\cup(C\setminus A)\preccurlyeq B\cup C$，が従う。故に，[命題3]における[結論3]，より，$A\cup(C\setminus A)\not\preccurlyeq B\cup$

C, が従う。ところが, $A\cup C=A\cup(C\setminus A)$。故に, $A\cup C\not\preccurlyeq B\cup C$, が従う。

結論が従う。　[証明終]。

[命題7]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{O}$上の定性的確率，とし，且つ，A，及び，B，及び，C，及び，D，の各各を，任意の事象とする。

「「$A\preccurlyeq C$，且つ，$B\preccurlyeq D$，且つ，$C\cap D=\phi$」，ならば，$A\cup B\preccurlyeq C\cup D$」，

が従う。

[証明]。A，及び，B，及び，C，及び，D，の各各を，任意の事象とする。「$A\preccurlyeq C$，且つ，$B\preccurlyeq D$，且つ，$C\cap D=\phi$」，と仮定する。「$A\preccurlyeq C$，且つ，$C\cap(B\setminus C)=\phi$」，及び，[命題5]，より，$A\cup(B\setminus C)\preccurlyeq C\cup(B\setminus C)$，が従う。ところが，$C\cup(B\setminus C)=B\cup(C\setminus B)$。故に，$A\cup(B\setminus C)\preccurlyeq B\cup(C\setminus B)$，が従う。一方，$C\cap D=\phi$，より，$D\cap(C\setminus B)=\phi$。また，$B\preccurlyeq D$。また，$B\cap(C\setminus B)=\phi$。故に，[定義1]における[性質4]，より，$B\cup(C\setminus B)\preccurlyeq D\cup(C\setminus B)$，が従う。故に，[定義1]における[性質3]，より，$A\cup(B\setminus C)\preccurlyeq D\cup(C\setminus B)$，が従う。ところが，「$C\cap D=\phi$，且つ，$(C\setminus B)\cap B=\phi$」，より，$(D\cup(C\setminus B))\cap(B\cap C)=\phi$。故に，[命題5]，より，$(A\cup(B\setminus C))\cup(B\cap C)\preccurlyeq(D\cup(C\setminus B))\cup(B\cap C)$，が従う。ところが，「$A\cup B=(A\cup(B\setminus C))\cup(B\cap C)$，且つ，$(D\cup(C\setminus B))\cup(B\cap C)=C\cup D$」。故に，$A\cup B\preccurlyeq C\cup D$，が従う。

結論が従う。　[証明終]。

[命題8]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{O}$上の定性的確率，とし，且つ，A，及び，B，及び，C，及び，D，の各各を，任意の事象とする。

「「$A\not\preccurlyeq C$，且つ，$B\preccurlyeq D$，且つ，$C\cap D=\phi$」，ならば，$A\cup B\not\preccurlyeq C\cup D$」，

が従う。

[証明]。A，及び，B，及び，C，及び，D，の各各を，任意の事象とする。「$A\not\preccurlyeq C$，且つ，$B\preccurlyeq D$，且つ，$C\cap D=\phi$」，と仮定する。「$A\not\preccurlyeq C$，且つ，$C\cap(B\setminus C)=\phi$」，及び，[命題6]，より，$A\cup(B\setminus C)\not\preccurlyeq C\cup(B\setminus C)$。ところが，$C\cup(B\setminus C)=B\cup(C\setminus B)$。故に，$A\cup(B\setminus C)\not\preccurlyeq B\cup(C\setminus B)$，が従う。一方，$C\cap D=\phi$，より，$D\cap(C\setminus B)=\phi$。また，$B\preccurlyeq D$。また，$B\cap(C\setminus B)=\phi$。故に，[定義1]における[性質4]，より，$B\cup(C\setminus B)\preccurlyeq D\cup(C\setminus B)$，が従う。故に，[命題3]における[結論3]，より，$A\cup(B\setminus C)\not\preccurlyeq D\cup(C\setminus B)$，が従う。ところが，「$C\cap D=\phi$，且つ，$(C\setminus B)\cap B=\phi$」，より，$(D\cup(C\setminus B))\cap(B\cap C)=\phi$。故に，[命題6]，より，$(A\cup(B\setminus C))\cup(B\cap C)\not\preccurlyeq(D\cup(C\setminus B))\cup(B\cap C)$，が従う。ところが，「$A\cup B=(A\cup(B\setminus C))\cup(B\cap C)$，且つ，$(D\cup(C\setminus B)\cup(B\cap C)=C\cup D$」。故に，$A\cup B\not\preccurlyeq C\cup D$，が従う。

結論が従う。　[証明終]。

[命題9]。$\preccurlyeq$は，任意の，$\mathcal{O}$上の定性的確率，とし，且つ，A，及び，B，及び，C，及び，D，の各各を，任意の事象とする。

「「$A\preccurlyeq B$，且つ，$B\cap C=\phi$，且つ，$B\cup C\not\preccurlyeq A\cup D$」，ならば，$C\not\preccurlyeq D$」，

が従う。

[証明]。$D\preccurlyeq C$，と仮定して，矛盾を導く。「$A\preccurlyeq B$，且つ，$B\cap C=\phi$」，より，$A\cup D\preccurlyeq B\cup C$。これは，$B\cup C\not\preccurlyeq A\cup D$，に反する。

結論が従う。　[証明終]。

[命題10]。$\preccurlyeq$は，任意の，α上の定性的確率，とし，且つ，A，及び，B，及び，C，及び，D，の各各を，任意の事象とする。

「「$A \not\sim B$，且つ，$B \cap C = \phi$，且つ，$B \cup C \preccurlyeq A \cup D$」，ならば，$C \not\sim D$」，

が従う。

[証明]。$D \prec C$，と仮定して，矛盾を導く。「$A \not\sim B$，且つ，$B \cap C = \phi$」，より，$A \cup D \not\sim B \cup C$。これは，$B \cup C \preccurlyeq A \cup D$，に反する。

結論が従う。　　[証明終]。

[命題11]。$\preccurlyeq$は，任意の，α上の定性的確率，とし，且つ，A，及び，B，及び，C，の各各を，任意の事象とする。

「「$B \subseteq A$，且つ，$B \preccurlyeq A \setminus B$，且つ，$C \preccurlyeq B$」，ならば，$C \preccurlyeq A \setminus C$」，

が従う。

[証明]。$A \setminus C \not\prec C$，と仮定して矛盾を導く。$C \preccurlyeq B$，より，$A \setminus C \not\prec B$。「$B \preccurlyeq A \setminus B$，且つ，$C \preccurlyeq B$」，より，$C \preccurlyeq A \setminus B$。故に，$(A \setminus C) \cup C \not\prec B \cup (A \setminus B)$。$B \subseteq A$，より，$B \cup (A \setminus B) = A$。故に，$(A \setminus C) \cup C \not\prec A$。一方，$A \subseteq (A \setminus C) \cup C$，より，$A \preccurlyeq (A \setminus C) \cup C$。故に，$A \not\prec A$。ところが，[定義1]における[性質2]，より，$A \preccurlyeq A$。故に，矛盾が生じる。

結論が従う。　　[証明終]。

[命題12]。$\preccurlyeq$は，任意の，α上の定性的確率，とし，且つ，A，及び，B，及び，C，の各各を，任意の事象とする。

「「$B \subseteq A$，且つ，$B \preccurlyeq A \setminus B$，且つ，$C \not\sim B$」，ならば，$C \not\sim A \setminus C$」，

が従う。

[証明]。$A \setminus C \preccurlyeq C$，と仮定して，矛盾を導く。$C \not\sim B$，より，$A \setminus C \not\sim B$。「$B \preccurlyeq A \setminus B$，且つ，$C \not\sim B$」，より，$C \not\sim A \setminus B$。故に，[命題3]における[結果1]，及び，[命題8]，より，$(A \setminus C) \cup C \not\sim B \cup (A \setminus B)$。$B \subseteq A$，より，$B \cup (A \setminus B) = A$。故に，$(A \setminus C) \cup C \not\sim A$。一方，$A \subseteq (A \setminus C) \cup C$，より，$A \preccurlyeq (A \setminus C) \cup C$。故に，$A \not\sim A$。ところが，[定義1]における[性質2]，より，$A \preccurlyeq A$。故に，矛盾が生じる。

結論が従う。　　[証明終]。

[命題13]。$\preccurlyeq$を，任意の，α上の定性的確率，とし，且つ，A，及び，B，の各各を，任意の事象とする。

「$A \not\sim B$，ならば，$\phi \not\sim B \setminus A$」，

が従う。

[証明]。$B \setminus A \preccurlyeq \phi$，と仮定して，矛盾を導く。[定義1]における[性質4]，より，$(B \setminus A) \cup A \preccurlyeq A$。故に，$B \cup A \preccurlyeq A$。$B \subseteq B \cup A$，より，$B \preccurlyeq B \cup A$。故に，$B \preccurlyeq A$。これは，$A \not\sim B$，に反する。

結論が従う。　　[証明終]。

[命題14]。$\preccurlyeq$を，任意の，α上の定性的確率，とし，且つ，A'，及び，A''，及び，B'，及び，B''，の各各を，任意の事象とする。

「$A' \cup A'' \approx B' \cup B''$，且つ，$A' \cap A'' = \phi$，且つ，$B' \cap B'' = \phi$，且つ，$A' \approx A''$，且つ，$B' \approx B''$」，

を仮定する。

「$A' \approx B'$，且つ，$A'' \approx B''$」，

が従う。

[証明]。「$A' \approx B'$，には非ず」，と仮定して，矛盾を導く。$\approx$の定義，より，「「$A' \preccurlyeq B'$，且つ，$B' \preccurlyeq A'$」，には非ず」，が従う。故に，「「$A' \preccurlyeq B'$，には非ず」，或いは，「$B' \preccurlyeq A'$，には非ず」」，が従う。$\not\approx$の定義，より，「$B' \not\approx A'$，或いは，$A' \not\approx B'$」，が従う。

$B' \not\approx A'$，の場合を考える。$B' \approx B''$，より，$B'' \not\approx A'$。$A' \approx A''$，より，$B'' \not\approx A''$。故に，「$B' \not\approx A'$，且つ，$B'' \not\approx A''$」，が従う。$A' \cap A'' = \phi$，より，$B' \cup B'' \not\approx A' \cup A''$。これは，$A' \cup A'' \approx B' \cup B''$，に反する。

$A' \not\approx B'$，の場合を考える。$A' \approx A''$，より，$A'' \not\approx B'$。$B' \approx B''$，より，$A'' \not\approx B''$。故に，「$A' \not\approx B'$，且つ，$A'' \not\approx B''$」，が従う。$B' \cap B'' = \phi$，より，$A' \cup A'' \not\approx B' \cup B''$。これは，$A' \cup A'' \approx B' \cup B''$，に反する。

各場合において，矛盾が生じる。故に，$A' \approx B'$，が従う。$A' \approx A''$，より，$A'' \approx B'$。$B' \approx B''$，より，$A'' \approx B''$。

結論が従う。　[証明終]。

第4節。配列，及び，分割列，及び，等分割列。

この節においては，サヴェジ［3］，第2章第7節，24頁における下から第2番目の段落，に，おいて，導入されている，「分割 (partition)」，の概念，を，精確に定式化する事，を，実行する。この，分割の概念，は，サヴェジ［3］，第3章第3節，34頁における上から第3番目の段落，から，第3章第3節，39頁における上から第1番目の段落，まで，の議論，において，基本的な概念として，用いられて居り，また，特に，第3章第3節，38頁における下から第2番目の段落，において，提示されている，公準 P6′，及び，第3章第3節，39頁から40頁にかけての段落，において，提示されている，公準 P6，に対する，陳述達，において，利用されている概念であるので，この，分割の概念，に対する，精確なる定式化，及び，この定式化に基づく，分割の概念，に関する，基本的性質達の導出，は，サヴェジ氏の定量的確率，の概念を，より明確なる者にする為には，必須である，と，筆者は判断したのである。但し，[命題10]，これは，等分割列に対する基本的性質である，と，判断して提示した者ではあるが，は，この論文においては，利用されない事，を，注意する。

[定義1]。「f は$\mathcal{A}$上の配列である」，なる事を，

「$n \in \boldsymbol{N}$，なる或 n が存在して，「f は $\boldsymbol{N}[n]$ から$\mathcal{A}$への写像である」」，

なる事である，と，定義する。

[注意1]。fを，任意の，$\mathcal{A}$上の配列，とする。この場合，$\mathrm{dom}(f) = \boldsymbol{N}[\max \mathrm{dom}(f)]$，が従う。これを示す。[定義1]，より，「$n \in \boldsymbol{N}$，なる或 n が存在して，$\mathrm{dom}(f) = \boldsymbol{N}[n]$」，が従う。この n を固定する。$\mathrm{dom}(f) = \boldsymbol{N}[n]$，が従う。$j \in \mathrm{dom}(f)$，なる任意の j を固定する。$j \in \boldsymbol{N}[n]$，が従う。$\boldsymbol{N}[n] = \{k \mid k \in \boldsymbol{N}$，且つ，$k \leqq n\}$，より，$j \leqq n$，が従う。一方，$n \in \boldsymbol{N}[n]$，より，$n \in \mathrm{dom}(f)$，が従う。故に，「$n \in \mathrm{dom}(f)$，且つ，「$j \in \mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$j \leqq n$」」，が従う。故に，$n = \max \mathrm{dom}(f)$，が従う。故に，$\mathrm{dom}(f) = \boldsymbol{N}[\max \mathrm{dom}(f)]$，が従う。

[注意2]。fを，任意の，$\mathcal{A}$上の配列，とし，且つ，k'，及び，k''，の各各を，$\mathrm{dom}(f)$ に属する任意の元とする。$k' \leqq k''$，と仮定する。∪

$\{f(l) \mid l \in N$, 且つ, $k' \leqq l \leqq k''\} = \cup\{f(k'+j) \mid j \in N[k''-k']\}$, が従う。これを示す。$x \in \cup\{f(l) \mid l \in N$, 且つ, $k' \leqq l \leqq k''\}$, なる任意の x を固定する。「「$l \in N$, 且つ, $k' \leqq l \leqq k''$」, なる或 l が存在して, $x \in f(l)$」, が従う。この l を固定する。$j = l - k'$, と置く。$k' \leqq l$, より, $1 \leqq j$, が従う。$l \leqq k''$, より, $j \leqq k'' - k'$, が従う。ところが, $l = k' + j$。故に,「$1 \leqq j \leqq k'' - k'$, 且つ, $x \in f(k'+j)$」, が従う。故に,「$j' \in N[k''-k']$, なる或 j' が存在して, $x \in f(k'+j')$」, が従う。故に, $x \in \cup\{f(k'+j) \mid j \in N[k''-k']\}$, が従う。次に, $y \in \cup\{f(k'+j) \mid j \in N[k''-k']\}$, なる任意の y を固定する。「$j \in N[k''-k']$, なる或 j が存在して, $y \in f(k'+j)$」, が従う。この j を固定する。$l = k' + j$, と置く。$l \in N$, が従う。また, $1 \leqq j$, より, $k' \leqq l$, が従う。$j \leqq k'' - k'$, より, $l \leqq k''$, が従う。故に,「「$l \in N$, 且つ, $k' \leqq l \leqq k''$」, 且つ, $y \in f(l)$」, が従う。故に,「「$l' \in N$, 且つ, $k' \leqq l' \leqq k''$」, なる或 l' が存在して, $y \in f(l')$」, が従う。故に, $y \in \cup\{f(l) \mid l \in N$, 且つ, $k' \leqq l \leqq k''\}$, が従う。

[定義2]。f を, 任意の, $\mathscr{A}$ 上の配列, とし, 且つ, k を任意の整数とする。

「「$k \leqq 0$, ならば, $\langle f; k\rangle = \phi$」,

且つ,

「$k \in \mathrm{dom}(f)$, ならば,
$\langle f; k\rangle = \cup\{f(j) \mid j \in \mathrm{dom}(f)$, 且つ, $j \leqq k\}$」,

且つ,

「$k \in N \setminus \mathrm{dom}(f)$, ならば,
$\langle f; k\rangle = \cup\{f(j) \mid j \in \mathrm{dom}(f)\}$」」,

によって, 記法, $\langle f; k\rangle$, を, 定義する。

[定義3]。「f は分割列である」, なる事を,

「f は$\mathscr{A}$上の配列であり, 且つ,「各各が, dom (f) に属する任意の元である, j, 及び, k, に対して,「$j \neq k$, ならば, $f(j) \cap f(k) = \phi$」」」,

なる事である, と, 定義する。

[注意1]。f を任意の分割列とし, 且つ, k', 及び, k'', の各各を, $\mathrm{dom}(f)$ に属する任意の元とする。$k' \leqq k''$, と仮定する。$\cup\{f(l) \mid l \in N$, 且つ, $k' \leqq l \leqq k''\} = \langle f; k''\rangle \setminus \langle f; k'\rangle$, が従う。これを示す。$x \in \cup\{f(l) \mid l \in N$, 且つ, $k' \leqq l \leqq k''\}$, なる任意の x を固定する。「「$l \in N$, 且つ, $k' \leqq l \leqq k''$」, なる或 l が存在して, $x \in f(l)$」, が従う。この l を固定する。「「$l \in N$, 且つ, $l \leqq k''$」, 且つ, $x \in f(l)$」, より,「「$l' \in N[\max \mathrm{dom}(f)]$, 且つ, $l' \leqq k''$」, なる或 l' が存在して, $x \in f(l')$」, が従う。ところが, $N[\max \mathrm{dom}(f)] = \mathrm{dom}(f)$。故に, $x \in \langle f; k''\rangle$, が従う。「$l'' \in N$, 且つ, $l'' \leqq k'$」, なる任意の l'' を固定する。$k' \leqq l$, より, $l'' \leqq l$, が従う。故に, $l'' \neq l$, が従う。「f は分割列である」, なる事, より, $f(l'') \cap f(l) = \phi$, が従う。故に, $x \notin f(l'')$。故に,「「$l'' \in N$, 且つ, $l'' \leqq k'$」, なる任意の l'' に対して, $x \notin f(l'')$」, が従う。故に,「「$l'' \in N[\max \mathrm{dom}(f)]$, 且つ, $l'' \leqq k'$」, なる任意の l'' に対して, $x \notin f(l'')$」, が従う。ところが, $N[\max \mathrm{dom}(f)] = \mathrm{dom}(f)$。故に, $x \notin \langle f; k'\rangle$, が従う。故に, $x \in \langle f; k''\rangle \setminus \langle f; k'\rangle$, が従う。

次に, $y \in \langle f; k''\rangle \setminus \langle f; k'\rangle$, なる任意の y を固定する。「$y \in \langle f; k''\rangle$, 且つ, $y \notin \langle f; k'\rangle$」, が従う。$y \in \langle f; k''\rangle$, より,「$j \in N[k'']$, なる或 j が存在して, $y \in f(j)$」, が従う。この j を固定する。$j \in N[k']$, と仮定する。この場合, $f(j) \subseteqq \langle f; k'\rangle$, が従う。ところが, $y \in f(j)$。故に, $y \in \langle f; k'\rangle$。これは, $y \notin \langle f; k'\rangle$, に反する。故に, $j \notin N[k']$, が従う。$j \in N[k'']$, より, $k' \leqq j \leqq k''$, が従う。故に,「「$j' \in N$, 且つ, $k' \leqq j' \leqq k''$」, なる或 j' が存在して, $y \in f(j')$」,

が従う。故に，$y\in\cup\{f(l)\mid l\in N,$ 且つ，$k'\leqq l\leqq k''\}$，が従う。

[注意2]。上述の，[注意1]，における，後半の議論，より，「任意の，α 上の配列，f，及び，「$k'\in\mathrm{dom}(f)$，且つ，$k''\in\mathrm{dom}(f)$，且つ，$k'\leqq k''$」，なる，任意の k'，及び，任意の k''，に，対して，$\langle f;k''\rangle\setminus\langle f;k'\rangle\subseteqq\cup\{f(l)\mid l\in N,$ 且つ，$k'\leqq l\leqq k''\}$」，が従う。

[定義4]。A を任意の事象とする。「f は A に対する分割列である」，なる事を，

「f は分割列であり，且つ，

$$A=\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)\}$$

」，

なる事である，と，定義する。

[定義5]。$\preccurlyeq$ を，任意の，α 上の定性的確率，とする。「f は等分割列である」，なる事を，

「f は分割列であり，且つ，「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j，及び，$k\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の k，に，対して，「$f(j)\preccurlyeq f(k)$，且つ，$f(k)\preccurlyeq f(j)$」」」，

なる事である，と，定義する。

[定義6]。$\preccurlyeq$ を，任意の，α 上の定性的確率，とし，且つ，A を任意の事象とする。「f は A に対する等分割列である」，なる事を，

「f は A に対する分割列であり，且つ，f は等分割列である」，

なる事である，と，定義する。

[命題1]。f を，任意の，α 上の配列，とする。

「$k\in\omega$，なる任意の k，及び，$l\in\omega$，なる任意の l，に，対して，「$k\leqq l$，ならば，$\langle f;k\rangle\subseteqq\langle f;l\rangle$」」，

が従う。

[証明]。$k\in\omega$，なる任意の k，及び，$l\in\omega$，なる任意の l，及び，$x\in\langle f;k\rangle$，なる任意の x，を，固定する。$k\leqq l$，を仮定する。$x\in\cup\{f(j)\mid j\in N[k]\}$，より，「$j\in N[k]$，なる或 j が存在して，$x\in f(j)$」，が従う。この j を固定する。「$j\leqq k$，且つ，$j\in N$，且つ，$x\in f(j)$」，が従う。ところが，$k\leqq l$。故に，「$j\leqq l$，且つ，$j\in N$，且つ，$x\in f(j)$」。故に，「$j\in N[l]$，且つ，$x\in f(j)$」。故に，「$j'\in N[l]$，なる或 j' が存在して，$x\in f(j')$」。故に，$x\in\cup\{f(j')\mid j'\in N[l]\}$。故に，$x\in\langle f;l\rangle$。

結論が従う。　[証明終]。

[命題2]。f を，任意の，α 上の配列，とする。

「$k\in\omega$，なる任意の k，及び，$l\in\omega$，なる任意の l，に，対して，「$\langle f;k\rangle\subseteqq\langle f;l\rangle$，或いは，$\langle f;l\rangle\subsetneqq\langle f;k\rangle$」」，

が従う。

[証明]。$k\in\omega$，なる任意の k，及び，$l\in\omega$，なる任意の l，を，固定する。「$\langle f;k\rangle\subseteqq\langle f;l\rangle$，には非ず」，と仮定する。[命題1]，より，「$k\leqq l$，には非ず」，が従う。故に，$l\leqq k$。故に，$l\leqq k$。故に，[命題1]，より，$\langle f;l\rangle\subseteqq\langle f;k\rangle$。ところが，「$\langle f;k\rangle\subseteqq\langle f;l\rangle$，には非ず」，より，「$\langle f;k\rangle=\langle f;l\rangle$，には非ず」，が従う。故に，$\langle f;l\rangle\subsetneqq\langle f;k\rangle$。

結論が従う。　　［証明終］。

［命題 3］。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，f，及び，g，の各各を，任意の，$\mathcal{A}$上の配列，とし，且つ，φを，任意の，$\mathrm{dom}(f)$ から $\mathrm{dom}(g)$ への全射，とする。

「「$j\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$g(\varphi(j))\preccurlyeq f(j)$」，

且つ，

f は分割列」，

を仮定する。

「$k\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる任意の k に対して，$\langle g\circ\varphi\,;\,k\rangle\preccurlyeq\langle f\,;\,k\rangle$」，

が従う。

［証明］。$K=\{k\mid k\epsilon\mathrm{dom}(f)$，且つ，「$\langle g\circ\varphi\,;\,k\rangle\preccurlyeq\langle f\,;\,k\rangle$，には非ず」$\}$，と置く。

「$K=\phi$，には非ず」，と仮定して，矛盾を導く。この場合，K において最小である，元，が，存在する。この元を $k(*)$ と表記する。即ち，

$k(*)=\min K$,

と置く。

「$\langle g\circ\varphi\,;\,1\rangle=g(\varphi(1))$，且つ，$\langle f\,;\,1\rangle=f(1)$，且つ，$g(\varphi(1))\preccurlyeq f(1)$」，より，$1\notin K$。故に，$2\leqq k(*)$。故に，$k(*)-1\epsilon\mathrm{dom}(f)$。故に，$k(*)$ の最小性，より。

$\langle g\circ\varphi\,;\,k(*)-1\rangle\preccurlyeq\langle f\,;\,k(*)-1\rangle$。

一方，

$g(\varphi(k(*)))\preccurlyeq f(k(*))$。

また，「f は分割列である」，なる事より，

$\langle f\,;\,k(*)-1\rangle\cap f(k(*))=\phi$。

故に，

$\langle g\circ\varphi\,;\,k(*)-1\rangle\cup(g\circ\varphi)(k(*))\preccurlyeq\langle f\,;\,k(*)-1\rangle\cup f(k(*))$。

故に，

$\langle g\circ\varphi\,;\,k(*)\rangle\preccurlyeq\langle f\,;\,k(*)\rangle$。

ところが，$k(*)\epsilon K$ より，

「$\langle g\circ\varphi\,;\,k(*)\rangle\preccurlyeq\langle f\,;\,k(*)\rangle$，には非ず」。

故に，矛盾が生じる。

故に，

$K=\phi$。

故に，

「$k\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる任意の k に対して，「$k\epsilon K$，には非ず」」。

故に，

「$k\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる任意の k に対して，$\langle g\circ\varphi\,;\,k\rangle\preccurlyeq\langle f\,;\,k\rangle$」。

結論が従う。　　［証明終］。

[命題4]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathfrak{A}$上の定性的確率，とし，且つ，f，及び，g，の各各を，任意の，$\mathfrak{A}$上の配列，とし，且つ，φ を，任意の，$\mathrm{dom}(f)$ から $\mathrm{dom}(g)$ への全射，とする。

「「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$g(\varphi(j))\preccurlyeq f(j)$」，

且つ，

f は分割列，

且つ，

「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる或 j が存在して，$g(\varphi(j))\not\preccurlyeq f(j)$」」，

を仮定する。

$\langle g\circ\varphi;\ \max\ \mathrm{dom}(f)\rangle\not\preccurlyeq\langle f;\ \max\ \mathrm{dom}(f)\rangle$，

が従う。

[証明]。$K=\{k|\ k\in\mathrm{dom}(f)$，且つ，「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる或 j が存在して，「$j\leqq k$，且つ，$g(\varphi(j))\not\preccurlyeq f(j)$」」$\}$，と置く。

$M=\{m|\ m\in K$，且つ，「$\langle g\circ\varphi;\ m\rangle\not\preccurlyeq\langle f;\ m\rangle$，には非ず」$\}$，

と置く。

$M\neq\phi$，と仮定して，矛盾を導く。

$m(*)=\min M$，

と置く。

$1\in M$，の場合を考える。この場合，$1\in K$。故に，K の定義，より，$g(\varphi(1))\not\preccurlyeq f(1)$。ところが，$M$ の定義，より，「$g(\varphi(1))\not\preccurlyeq f(1)$，には非ず」。故に，矛盾が生じる。故に，

$1\notin M$。

故に，$2\leqq m(*)$。故に，$m(*)-1\in\mathrm{dom}(f)$。

$m(*)-1\in K$，の場合を考える。$m(*)$ の最小性，より，$m(*)-1\notin M$。故に，

$\langle g\circ\varphi;\ m(*)-1\rangle\not\preccurlyeq\langle f;\ m(*)-1\rangle$。

ところが，「$g(\varphi(m(*)))\preccurlyeq f(m(*))$，且つ，$\langle f;\ m(*)-1\rangle\cap f(m(*))=\phi$」。故に，

$\langle g\circ\varphi;\ m(*)-1\rangle\cup(g\circ\varphi)(m(*))\not\preccurlyeq\langle f;\ m(*)-1\rangle\cup f(m(*))$。

故に，

$\langle g\circ\varphi;\ m(*)\rangle\not\preccurlyeq\langle f;\ m(*)\rangle$。

故に，

$m(*)\notin M$。これは，$m(*)\in M$，に反する。

$m(*)-1\notin K$，の場合を考える。$m(*)\in K$，及び，K の定義，より，

「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，「$j\leqq m(*)-1$，ならば，「$g(\varphi(j))\not\preccurlyeq f(j)$，には非ず」」」，

及び，

「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる或 j が存在して，「$j\leqq m(*)$，且つ，$g(\varphi(j))\not\preccurlyeq f(j)$」」，

が従う。故に，

$g(\varphi(m(*)))\not\preccurlyeq f(m(*))$。

一方，［命題3］，より，

$\langle g\circ\varphi;\ m(*)-1\rangle\preccurlyeq\langle f;\ m(*)-1\rangle$。ところが，

$\langle f;\ m(*)-1\rangle\cap f(m(*))=\phi$。故に，

$\langle g\circ\varphi;\ m(*)-1\rangle\cup(g\circ\varphi)(m(*))\not\preccurlyeq\langle f;\ m(*)-1\rangle\cup f(m(*))$。

故に，

$\langle g\circ\varphi;\ m(*)\rangle\not\preccurlyeq\langle f;\ m(*)\rangle$。

故に，

$m(*)\notin M$。これは，$m(*)\in M$，に反する。

故に，$M=\phi$，が従う。故に，

$\max\ \mathrm{dom}(f)\notin M$。ところが，仮定より，

$\max\ \mathrm{dom}(f)\in K$。故に，$M$ の定義，より，

$\langle g\circ\varphi;\ \max\ \mathrm{dom}(f)\rangle\not\preccurlyeq\langle f;\ \max\ \mathrm{dom}(f)\rangle$。

結論が従う。　　［証明終］。

［命題5］。f を，任意の，$\mathcal{A}$上の配列，とし，且つ，$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とする。

「任意の事象，A，に対して，「「$A\subseteq\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)\}$，且つ，$\phi\not\preccurlyeq A$」，ならば，「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる或 j が存在して，$\phi\not\preccurlyeq A\cap f(j)$」」」，

が従う。

［証明］。任意の事象，A，を固定する。「$A\subseteq\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)\}$，且つ，$\phi\not\preccurlyeq A$」，と仮定する。「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$A\cap f(j)\preccurlyeq\phi$」，と仮定して，矛盾を導く。「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$g(j)=A\cap f(j)$」，及び，「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$h(j)=\phi$」，によって，$\mathcal{A}$上の配列，g，及び，$\mathcal{A}$上の配列，h，を，定義する。「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$g(j)\preccurlyeq h(j)$」，が従う。故に，［命題3］，より，$\cup\{g(j)\mid j\in\mathrm{dom}(g)\}\preccurlyeq\cup\{h(j)\mid j\in\mathrm{dom}(h)\}$，が従う。ところが，「$A=A\cap\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)\}$。且つ，$A\cap\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)\}=\cup\{g(j)\mid j\in\mathrm{dom}(g)\}$」。故に，$A=\cup\{g(j)\mid j\in\mathrm{dom}(g)\}$。一方，$\cup\{h(j)\mid j\in\mathrm{dom}(h)\}=\phi$。故に，$A\preccurlyeq\phi$。これは，$\phi\not\preccurlyeq A$，に反する。故に，「「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$A\cap f(j)\preccurlyeq\phi$」，には非ず」，が従う。

結論が従う。　　［証明終］。

［命題6］。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，f を任意の等分割列とする。

「任意の事象，A，に対して，「「$A\subseteq\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)\}$，且つ，$\phi\not\preccurlyeq A$」，ならば，「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$\phi\not\preccurlyeq f(j)$」」」，

が従う。

［証明］。任意の事象，A，を固定する。「$A\subseteq\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)\}$，且つ，$\phi\not\preccurlyeq A$」，と仮定する。［命題5］，より，「$j'\in\mathrm{dom}(f)$，なる或 j' が存在して，$\phi\not\preccurlyeq A\cap f(j')$」，が従う。この j' を固定する。$A\cap f(j')\subseteq f(j')$，より，$A\cap f(j')\preccurlyeq f(j')$。故に，$\phi\not\preccurlyeq f(j')$。一方，「$f$ は等分割列である」，なる事より，「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$f(j')\approx f(j)$」。$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j を固定する。$\phi\not\preccurlyeq f(j)$，が従う。

結論が従う。　　［証明終］。

[命題7]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，f を任意の等分割列とする。

「任意の事象，A，に対して，「「$A\subseteqq\cup\{f(j)\mid j\epsilon\mathrm{dom}(f)\}$，且つ，$\phi\not\sim A$」，ならば，「$k\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる任意の k，及び，$l\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる任意の l，に，対して，「$k\leqq l$，の場合，且つ，その場合に限って，$\langle f;k\rangle\preccurlyeq\langle f;l\rangle$」」」，

が従う。

[証明]。「$A\subseteqq\cup\{f(j)\mid j\epsilon\mathrm{dom}(f)\}$，且つ，$\phi\not\sim A$」，なる，任意の事象，$A$，及び，$k\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる任意の k，及び，$l\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる任意の l，を，固定する。

$k\leqq l$，と仮定する。[命題1]，より，$\langle f;k\rangle\subseteqq\langle f;l\rangle$。故に，$\langle f;k\rangle\preccurlyeq\langle f;l\rangle$。

「$k\leqq l$，には非ず」，即ち，$l\lneqq k$，と，仮定する。$k\leqq\max\mathrm{dom}(f)$，より，$l\lneqq\max\mathrm{dom}(f)$。故に，$l+1\leqq\max\mathrm{dom}(f)$。故に，$l+1\epsilon\mathrm{dom}(f)$。[命題6]，より，$\phi\not\sim f(l+1)$，が従う。故に，$\langle f;l\rangle\cap f(l+1)=\phi$，より，$\langle f;l\rangle\not\sim\langle f;l\rangle\cup f(l+1)$。ところが，$\langle f;l\rangle\cup f(l+1)=\langle f;l+1\rangle$。故に，$\langle f;l\rangle\not\sim\langle f;l+1\rangle$。一方，$l\lneqq k$，より，$l+1\leqq k$。故に，[命題1]，より，$\langle f;l+1\rangle\subseteqq\langle f;k\rangle$。故に，$\langle f;l+1\rangle\preccurlyeq\langle f;k\rangle$。故に$\langle f;l\rangle\not\sim\langle f;k\rangle$。

結論が従う。　[証明終]。

[命題8]。f，及び，g，の各各を，任意の等分割列，とし，且つ，$n\epsilon N$，なる任意の n を固定する。

「$N[n]=\mathrm{dom}(f)$，且つ，$N[n]=\mathrm{dom}(g)$，且つ，「$j\epsilon N[n]$，なる任意の j に対して，「$f(j)\doteqdot g(j)$」」，

を仮定する。

「$k\epsilon N[n]$，なる任意の k に対して，「$\langle f;k\rangle\doteqdot\langle g;k\rangle$」」，

が従う。

[証明]。[命題3]，より，

「「$k\epsilon N[n]$，なる任意の k に対して，$\langle g;k\rangle\preccurlyeq\langle f;k\rangle$」，且つ，「$k\epsilon N[n]$，なる任意の k に対して，$\langle f;k\rangle\preccurlyeq\langle g;k\rangle$」」，

が従う。故に，

「$k\epsilon N[n]$，なる任意の k に対して，$\langle f;k\rangle\doteqdot\langle g;k\rangle$」。

結論が従う。　[証明終]。

[命題9]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，f を任意の等分割列とする。

「$k'\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる任意の k'，及び，$k''\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる任意の k''，に，対して，「$k'\lneqq k''$，ならば，「$k''-k'\epsilon\mathrm{dom}(f)$，且つ，$\langle f;k''-k'\rangle\doteqdot\langle f;k''\rangle\diagdown\langle f;k'\rangle$」」」，

が従う。

[証明]。$k'\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる任意の k'，及び，$k''\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる任意の k''，を，固定する。$k'\lneqq k''$，と仮定する。「$k''-k'\epsilon N$，且つ，$k''-k'\lneqq\max\mathrm{dom}(f)$」，が従う。故に，$k''-k'\epsilon N[\max\mathrm{dom}(f)]$。ところが，$N[\max\mathrm{dom}(f)]=\mathrm{dom}(f)$。故に，$k''-k'\epsilon\mathrm{dom}(f)$，が従う。

「$j\epsilon N[k''-k']$，なる任意の j に対して，「$g(j)=f(j)$，且つ，$h(j)=f(k'+j)$」」，

によって，$\mathcal{A}$ 上の配列，g，及び，$\mathcal{A}$ 上の配列，h，を，定義する。

陳述1。「g, 及び, h, の各各は, 分割列である」,

を示す。

$j'\epsilon N[k''-k']$, なる任意の j', 及び, $j''\epsilon N[k''-k']$, なる任意の j'', を, 固定する。$j'\neq j''$, と仮定する。$k'+j'\neq k'+j''$, が従う。「f は分割列である」, なる事, より,「$f(j')\cap f(j'')=\phi$, 且つ, $f(k'+j')\cap f(k'+j'')=\phi$」, が従う。$g$ の定義, 及び, h の定義, より,「$g(j')\cap g(j'')=\phi$, 且つ, $h(j')\cap h(j'')=\phi$」, が従う。故に, g, 及び, h, の各各は, 分割列である。

陳述1, が従う。

陳述2。「g, 及び, h, の各各は, 等分割列である」,

を示す。

$j'\epsilon N[k''-k']$, なる任意の j', 及び, $j''\epsilon N[k''-k']$, なる任意の j'', を, 固定する。「f は等分割列である」, なる事, より,「$f(j')\doteqdot f(j'')$, 且つ, $f(k'+j')\doteqdot f(k'+j'')$」, が従う。$g$ の定義, 及び, hの定義, より,「$g(j')\doteqdot g(j'')$, 且つ, $h(j')\doteqdot h(j'')$」, が従う。一方, 陳述1, より, g, 及び, h, の各各は, 分割列である。故に, g, 及び, h, の各各は, 等分割列である。

陳述2, が従う。

陳述3。「$j\epsilon N[k''-k']$, なる任意の j に対して, $g(j)\doteqdot h(j)$」,

を示す。

$j\epsilon N[k''-k']$, なる任意の j を固定する。「f は等分割列である」, なる事, より, $f(j)\doteqdot f(k'+j)$, が従う。g の定義, 及び, h の定義, より, $g(j)\doteqdot h(j)$, が従う。

陳述3, が従う。

陳述2, 及び, 陳述3, 及び, [命題8], より,「$j\epsilon N[k''-k']$, なる任意の j に対して, $\langle g;j\rangle\doteqdot\langle h;j\rangle$」, が従う。故に, $\langle g;k''-k'\rangle\doteqdot\langle h;k''-k'\rangle$, が従う。ところが, $\langle h;k''-k'\rangle=\cup\{h(j)\mid j\epsilon N[k''-k']\}=\cup\{f(k'+j)\mid j\epsilon N[k''-k']\}=\langle f;k''\rangle\diagdown\langle f;k'\rangle$。また, $\langle g;k''-k'\rangle=\langle f;k''-k'\rangle$。故に, $\langle f;k''-k'\rangle\doteqdot\langle f;k''\rangle\diagdown\langle f;k'\rangle$, が従う。

結論が従う。　　[証明終]。

[命題10]。A, 及び, B, の各各を, 任意の事象とし, 且つ, f を, 任意の, A に対する等分割列, とし, 且つ, g を, 任意の, B に対する等分割列, とし, 且つ, $n\epsilon N$, なる任意の n を固定する。

「$A\doteqdot B$, 且つ, $N[n]=\mathrm{dom}(f)$, 且つ, $N[n]=\mathrm{dom}(g)$」,

を仮定する。

「$j\epsilon N[n]$, なる任意の j に対して,「$f(j)\doteqdot g(j)$」」,

が従う。

[証明]。$K=\{k\mid k\epsilon N[n]$, 且つ,「$\langle f;k\rangle\doteqdot\langle g;k\rangle$, には非ず」$\}$, と置く。

$K\neq\phi$, と仮定して, 矛盾を導く。「$k\epsilon K$, なる任意の k に対して, $k\leqq n$」, であるので, この場合, K において最大である, 元, が, 存在する。この元を $k(**)$ と表記する。即ち,

$k(**)=\max K$,

と置く。

「$n\epsilon N[n]$，且つ，$A=\langle f;n\rangle$，且つ，$B=\langle g;n\rangle$，且つ，$A\approx B$」，より，「$n\epsilon N[n]$，且つ，$\langle f;n\rangle\approx\langle g;n\rangle$」，が従う。故に，$n\notin K$。故に，$k(**)\leqq n-1$。故に，

$k(**)+1\epsilon N[n]$。

故に，$k(**)$ の最大性，より，

式1。$\langle f;k(**)+1\rangle\approx\langle g;k(**)+1\rangle$，

が従う。

$\langle f;k(**)\rangle\not\approx\langle g;k(**)\rangle$，の場合を考える。

箇所1。$\langle g;k(**)\rangle\cap g(k(**)+1)=\phi$，及び，式1，より，

式2。$g(k(**)+1)\not\approx f(k(**)+1)$。

「f，及び，g，の各各は，等分割列である」，なる事，より，

「$k\epsilon N[n]$，なる任意の k に対して，「$g(k)\approx g(k(**)+1)$，且つ，$f(k)\approx f(k(**)+1)$」」。

「$k\epsilon N[n]$，なる任意の k に対して，「$g(k)\not\approx f(k)$」」。

故に，［命題4］より，

箇所2。$\langle g;k(**)\rangle\not\approx\langle f;k(**)\rangle$。

これは，式2，に反する。

$\langle g;k(**)\rangle\not\approx\langle f;k(**)\rangle$，の場合を考える。

この場合，「箇所1，から，箇所2，まで，の議論，における，各記号，f，及び，各記号，g，を，各各，g，及び，f，に，置き換える事，より，得られる議論」，より，矛盾が生じる。

故に，$K=\phi$。故に，

「$k\epsilon N[n]$，なる任意の k に対して，$\langle f;k\rangle\approx\langle g;k\rangle$」。

$k\epsilon N[n]$，なる任意の k を固定する。

「$\langle f;k-1\rangle\cup f(k)\approx\langle g;k-1\rangle\cup g(k)$，且つ，$\langle f;k-1\rangle\approx\langle g;k-1\rangle$，且つ，$\langle f;k-1\rangle\cap f(k)=\phi$，且つ，$\langle g;k-1\rangle\cap g(k)=\phi$」，（但し，ここで，「$\langle f;0\rangle=\phi$，且つ，$\langle g;0\rangle=\phi$」，なる事，を，注意する），に，より，

$f(k)\approx g(k)$。

結論が従う。　［証明終］。

第5節。精密比較の公準。

［註1］。精密比較の公準，但し，この呼称は筆者の案にすぎない，なる者は，サヴェジ［3］，第3章第3節，38頁における下から第2番目の段落，において，公準 P6′，として，提示されている者である。但し，サヴェジ氏が提示している陳述は，［命題1］における陳述，であり，［定義1］における陳述，ではない。［定義1］における陳述，の方が，［命題1］における陳述，よりも，より基本的な表現形式を所有している，と，判断して，この，［定義1］における陳述，を，「公準」，として，提示する事にしたのである。但し，この論文において，「精密比較の公準，より」，なる様式，によって，言及される陳述，は，［命題1］における陳述，である事，を，注意する。

[註2]。[命題5]に対する[証明]，は，サヴェジ[3]，第3章第3節，37頁，定理3，に対する，同書，同章同節，37頁から38頁まで，において，展開されている，証明，中の，最後から第2番目の段落，この段落は同書の38頁に在る，における議論，に，基づく者である。但し，サヴェジ氏の，論述の様式，と，筆者の，論述の様式，とは，同一ではない。

[註3]。[命題5]を，[命題6.1]に対する[証明]，において，利用する。

[定義1]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とする。「$\preccurlyeq$は精密比較の公準を満たす」，なる事を，「$\preccurlyeq$は次の陳述を満たす」，なる事である，と，定義する。

陳述。「$A\in\mathcal{A}$，なる任意の A，及び，$B\in\mathcal{A}$，なる任意の B，に，対して，「$A\not\preccurlyeq B$，ならば，「或写像，f，及び，$n\in N$，なる或 n，が，存在して，「$\mathrm{dom}(f)=\{k\mid k\in N$，且つ，$k\leqq n\}$，且つ，「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$f(j)\in\mathcal{A}$」，且つ，$S=\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)\}$，且つ，「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$A\cup f(j)\not\preccurlyeq B$」」」」」。

[注意]。この陳述を，精密比較の公準，と呼ぶ。この陳述は，「任意の事象，A，及び，任意の事象，B，に，対して，「$A\not\preccurlyeq B$，ならば，「或，$\mathcal{A}$上の配列，f，が存在して，「$S=\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)\}$，且つ，「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$A\cup f(j)\not\preccurlyeq B$」」」」」，と表現される。

[命題1]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とする。「$\preccurlyeq$は精密比較の公準を満たす」，なる事と，「$\preccurlyeq$は次の陳述を満たす」，なる事とは，同値である。

陳述。「任意の事象，A，及び，任意の事象，B，に，対して，「$A\not\preccurlyeq B$，ならば，「或，S に対する分割列，f，が存在して，「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$A\cup f(j)\not\preccurlyeq B$」」」」。

[証明]。[命題1]，における，陳述，から，精密比較の公準，が従う，なる事，は，「S に対する分割列」，及び，「$\mathcal{A}$上の配列」，の，定義達，より従う。

任意の事象，A，及び，任意の事象，B，を，固定する。$A\not\preccurlyeq B$，と仮定する。精密比較の公準，より，「或，$\mathcal{A}$上の配列，f，が存在して，「$S=\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)\}$，且つ，「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$A\cup f(j)\not\preccurlyeq B$」」」，が従う。この f を固定する。「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$g(j)=f(j)\setminus\cup\{f(j')\mid j'\in\mathrm{dom}(f)$，且つ，$j'\leqq j\}$」，によって，$\mathrm{dom}(f)$ から $\mathcal{A}$ への写像，g，を定義する。

式1。$S=\cup\{g(j)\mid j\in\mathrm{dom}(g)\}$，

を示す。

$x\in S$，なる任意の x を固定する。$S=\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)\}$，より，「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる或 j が存在して，$x\in f(j)$」，が従う。故に，$\{j\mid j\in\mathrm{dom}(f)$，且つ，$x\in f(j)\}\neq\phi$。故に，$\{j\mid j\in\mathrm{dom}(f)$，且つ，$x\in f(j)\}$ において最小である，元，が，存在する。この元を $j(*)$ と表記する。即ち，$j(*)=\min\{j\mid j\in\mathrm{dom}(f)$，且つ，$x\in f(j)\}$，と置く。$j(*)=1$，の場合においては，「$x\in f(1)$，且つ，$f(1)=g(1)$」，より，$x\in g(j(*))$，が従う。$2\leqq j(*)$，の場合を考える。$j(*)$ の最小性，より，「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，「$j\leqq j(*)$，ならば，$x\notin f(j)$」」，が従う。故に，$x\notin\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)$，且つ，$j\leqq j(*)\}$。故に，$x\in f(j(*))$，より，$x\in f(j(*))\setminus\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)$，且つ，$j\leqq j(*)\}$。故に，$x\in g(j(*))$。故に，「$j(*)\in\mathrm{dom}(f)$，且つ，$\mathrm{dom}(f)=\mathrm{dom}(g)$」，よ

り，「$j\epsilon\mathrm{dom}(g)$，なる或 j が存在して，$x\epsilon g(j)$」。故に，$x\epsilon\cup\{g(j)\mid j\epsilon\mathrm{dom}(g)\}$。

$x\epsilon\cup\{g(j)\mid j\epsilon\mathrm{dom}(g)\}$，なる任意の x を固定する。「$j\epsilon\mathrm{dom}(g)$，なる或 j が存在して，$x\epsilon g(j)$」，が従う。この j を固定する。g の定義，より，「$x\epsilon f(j)$，且つ，$x\notin\cup\{f(j')\mid j'\epsilon\mathrm{dom}(f)$，且つ，$j'\lneqq j\}$」，が従う。故に，$x\epsilon f(j)$。「$j\epsilon\mathrm{dom}(g)$，且つ，$\mathrm{dom}(g)=\mathrm{dom}(f)$」，より，「$j\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる或 j が存在して，$x\epsilon f(j)$」。故に，$x\epsilon\cup\{f(j)\mid j\epsilon\mathrm{dom}(f)\}$。ところが，$\cup\{f(j)\mid j\epsilon\mathrm{dom}(f)\}=S$。故に，$x\epsilon S$。

式1，が従う。

陳述1。「$k\epsilon\mathrm{dom}(g)$，なる任意の k，及び，$l\epsilon\mathrm{dom}(g)$，なる任意の l，に，対して，「$k\neqq l$，ならば，$g(k)\cap g(l)=\phi$」」，

を示す。

$k\epsilon\mathrm{dom}(g)$，なる任意の k，及び，$l\epsilon\mathrm{dom}(g)$，なる任意の l，を，固定する。$k\neqq l$，と仮定する。$k\lneqq l$，の場合を考える。

$$
\begin{aligned}
&g(k)\cap g(l)\\
&=g(k)\cap(f(l)\setminus\cup\{f(l')\mid l'\epsilon\mathrm{dom}(f),\ \text{且つ},\\
&\quad l'\lneqq l\})\\
&\subseteqq g(k)\cap(f(l)\setminus f(k))\\
&=(f(k)\setminus\cup\{f(k')\mid k'\epsilon\mathrm{dom}(f),\ \text{且つ},\ k'\neq k\})\\
&\quad\cap(f(l)\setminus f(k))\\
&\subseteqq f(k)\cap(f(l)\setminus f(k))\\
&=\phi,
\end{aligned}
$$

より，$g(k)\cap g(l)=\phi$，が従う。次に，$l\lneqq k$，の場合を考える。

$$
\begin{aligned}
&g(k)\cap g(l)\\
&=(f(k)\setminus\cup\{f(k')\mid k'\epsilon\mathrm{dom}(f),\ \text{且つ},\ k'\lneqq k\})\\
&\quad\cap g(l)\\
&\subseteqq(f(k)\setminus f(l))\cap g(l)\\
&=(f(k)\setminus f(l))\cap(f(l)\setminus\cup\{f(l')\mid l'\epsilon\mathrm{dom}(f),\\
&\quad\text{且つ},\ l'\lneqq l\})\\
&\subseteqq(f(k)\setminus f(l))\cap f(l)\\
&=\phi,
\end{aligned}
$$

より，$g(k)\cap g(l)=\phi$，が従う。

陳述1，が従う。

陳述2。「$j\epsilon\mathrm{dom}(g)$，なる任意の j に対して，$A\cup g(j)\not\preccurlyeq B$」，

を示す。

$j\epsilon\mathrm{dom}(g)$，なる任意の j を固定する。$\mathrm{dom}(g)=\mathrm{dom}(f)$，より，$j\epsilon\mathrm{dom}(f)$。故に，$A\cup f(j)\not\preccurlyeq B$。$A\cup g(j)\subseteqq A\cup f(j)$，より，$A\cup g(j)\preccurlyeq A\cup f(j)$，が従う。故に，$A\cup g(j)\not\preccurlyeq B$。

陳述2，が従う。

g の定義，及び，式1，及び，陳述1，及び，陳述2，より，「或，S に対する分割列，f'，が存在して，「$j\epsilon\mathrm{dom}(f')$，なる任意の j に対して，$A\cup f'(j)\not\preccurlyeq B$」」，が従う。

結論が従う。　　[証明終]。

[命題2]。$\preccurlyeq$を，任意の，精密比較の公準を満たす，$\mathcal{O}$上の定性的確率，とし，且つ，E を，$\phi\not\preccurlyeq E$，なる任意の事象とする。

「或事象，E'，及び，或事象，E''，が，存在して，「$E=E'\cup E''$，且つ，$E'\cap E''=\phi$，且つ，$\phi\not\preccurlyeq E''$，且つ，$E''\preccurlyeq E'$」」，

が従う。

[証明]。精密比較の公準，より，「或，S に対する分割列，f，が存在して，「$j\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$f(j)\not\preccurlyeq E$」」，が従う。この f を固定する。ところが，「$E\subseteqq S$，且つ，$S=\cup\{f(j)\mid j\epsilon\mathrm{dom}(f)\}$」。故に，[命題4.5]，

より，「$j'\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる或$j'$が存在して，$\phi\not\preccurlyeq E\cap f(j')$」。この$j'$を固定する。$E\cap f(j')\subseteqq f(j')$，より，$E\cap f(j')\preccurlyeq f(j')$。ところが，$f(j')\not\preccurlyeq E$。故に，$E\cap f(j')\not\preccurlyeq E$。［命題3.13］，より，$\phi\not\preccurlyeq E\diagdown(E\cap f(j'))$。「$E^*=E\cap f(j')$，且つ，$E^{**}=E\diagdown(E\cap f(j'))$」，と置く。「「$E^{**}\preccurlyeq E^*$，ならば，「$E'=E^*$，且つ，$E''=E^{**}$」」，且つ，「$E^*\not\preccurlyeq E^{**}$，ならば，「$E'=E^{**}$，且つ，$E''=E^*$」」」，によって，$E'$，及び，$E''$，を，定める。「$E^*\not\preccurlyeq E^{**}$，ならば，$E^*\preccurlyeq E^{**}$」，より，$E''\preccurlyeq E'$，が従う。$E'$，及び，$E''$，は，結論における性質を満たす。

結論が従う。　　［証明終］。

［命題3］。$\preccurlyeq$を，任意の，精密比較の公準を満たす，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，A，及び，B，の各各を，任意の事象とする。$A\not\preccurlyeq B$，を仮定する。

「或事象，E，が存在して，「$A\cup E\not\preccurlyeq B$，且つ，$A\cap E=\phi$，且つ，$\phi\not\preccurlyeq E$」」，

が従う。

［証明］。精密比較の公準，より，「或，Sに対する分割列，f，が存在して，「$j\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる任意のjに対して，$A\cup f(j)\not\preccurlyeq B$」」，が従う。この$f$を固定する。$A\not\preccurlyeq B$，及び，［命題3.13］，より，$\phi\not\preccurlyeq B\diagdown A$。故に，［命題4.5］，より，「$j'\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる或$j'$が存在して，$\phi\not\preccurlyeq(B\diagdown A)\cap f(j')$」。この$j'$を固定する。$E=(B\diagdown A)\cap f(j')$，と置く。$A\cup E\subseteqq A\cup f(j')$，より，$A\cup E\preccurlyeq A\cup f(j')$。ところが，$A\cup f(j')\not\preccurlyeq B$。故に，$A\cup E\not\preccurlyeq B$。一方，$A\cap E\subseteqq A\cap(B\diagdown A)=\phi$，より，$A\cap E=\phi$。また，$j'$，に対する，固定の様式，より，$\phi\not\preccurlyeq E$。

結論が従う。　　［証明終］。

［命題4］。$\preccurlyeq$を，任意の，精密比較の公準を満たす，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，A，及び，B，の各各を，任意の事象とする。$A\not\preccurlyeq B$，と仮定する。

「或事象，E'，及び，或事象，E''，が，存在して，「$A\cup E'\cup E''\not\preccurlyeq B$，且つ，$A\cap(E'\cup E'')=\phi$，且つ，$E'\cap E''=\phi$，且つ，$\phi\not\preccurlyeq E''$，且つ，$E''\preccurlyeq E'$」」，

が従う。

［証明］。［命題3］，より，「或事象，E，が存在して，「$A\cup E\not\preccurlyeq B$，且つ，$A\cap E=\phi$，且つ，$\phi\not\preccurlyeq E$」」，が従う。この$E$を固定する。［命題2］，より，「或事象，$E'$，及び，或事象，$E''$，が，存在して，「$E=E'\cup E''$，且つ，$E'\cap E''=\phi$，且つ，$\phi\not\preccurlyeq E''$，且つ，$E''\preccurlyeq E'$」」，が従う。ここにおける，$E'$，及び，$E''$，を，固定する。「$A\cup E'\cup E''\not\preccurlyeq B$，且つ，$A\cap(E'\cup E'')=\phi$，且つ，$E'\cap E''=\phi$，且つ，$\phi\not\preccurlyeq E''$，且つ，$E''\preccurlyeq E'$」，が従う。

結論が従う。　　［証明終］。

［命題5］。$\preccurlyeq$を，任意の，精密比較の公準を満たす，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，Gを，任意の，Nから$\mathcal{A}$への写像，とする。

「$n\epsilon N$，なる任意のnに対して，「$G(n+1)\subseteqq G(n)$，且つ，$G(n+1)\preccurlyeq G(n)\diagdown G(n+1)$」」，

を仮定する。

「$\phi\not\preccurlyeq H$，なる任意の事象，H，に対して，「$n'\epsilon N$，なる或n'が存在して，$G(n')\not\preccurlyeq H$」」，

が従う。

［証明］。背理法による。

「或事象，H，が存在して，「$\phi\not\preccurlyeq H$，且つ，

「$n\epsilon N$，なる任意の n に対して，$H\preccurlyeq G(n)$」」，

を仮定する。この H を固定する。

精密比較の公準，より，

「或，S に対する分割列，f，が存在して，「$k\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる任意の k に対して，$f(k)\not\sim H$」」，

が従う。この f を固定する。$k(**)=\max \mathrm{dom}(f)$，と置く。

$K=\{k\mid k\epsilon\mathrm{dom}(f)$，且つ，「$\langle f;k\rangle\not\sim G(k(**)-k+1)$，には非ず」$\}$，

と置く。$K\neq\phi$，と仮定して，矛盾を導く。

$k(*)=\min K$，

と置く。「$\langle f;1\rangle=f(1)$，且つ，$f(1)\not\sim H$，且つ，$H\preccurlyeq G(k(**))$」，より，$\langle f;1\rangle\not\sim G(k(**))$。故に，$1\notin K$。故に，$2\leqq k(*)$。故に，$k(*)-1\epsilon\mathrm{dom}(f)$。故に，$k(*)$ の最小性，より，

式1。$\langle f;k(*)-1\rangle\not\sim G(k(**)-k(*)+2)$，

が従う。一方，「$G(k(**)-k(*)+2)\preccurlyeq G(k(**)-k(*)+1)\diagdown G(k(**)-k(*)+2)$，且つ，$H\preccurlyeq G(k(**)-k(*)+2)$，且つ，$f(k(*))\not\sim H$」，より，

式2。$f(k(*))\not\sim G(k(**)-k(*)+1)\diagdown G(k(**)-k(*)+2)$，

が従う。式1，及び，式2，より，$\langle f;k(*)-1\rangle\cup f(k(*))\not\sim G(k(**)-k(*)+2)\cup(G(k(**)-k(*)+1)\diagdown G(k(**)-k(*)+2))$。故に，「$\langle f;k(*)\rangle=\langle f;k(*)-1\rangle\cup f(k(*))$，且つ，$G(k(**)-k(*)+2)\subseteqq G(k(**)-k(*)+1)$」，より，

$\langle f;k(*)\rangle\not\sim G(k(**)-k(*)+1)$，

が従う。故に，$k(*)\notin K$。これは，$k(*)\epsilon K$，に反する。

故に，$K=\phi$。故に，$k(**)\notin K$。$k(**)\epsilon\mathrm{dom}(f)$，及び，$K$ の定義，より，

$\langle f;k(**)\rangle\not\sim G(1)$。

「$S=\langle f;k(**)\rangle$，且つ，$G(1)\preccurlyeq S$」，より，

$S\not\sim S$。これは $S\preccurlyeq S$ に反する。

結論が従う。　［証明終］。

第6節。2進分割系。

［註1］。［命題1］に対する［証明］，における，議論，は，サヴェジ［3］，第3章第3節，定理3，における，第5番目の結論，この結論は同書の37頁に在る，に対する，略式証明，この略式証明は，同書，同章同節，38頁，上から第1番目の段落から，上から第3番目の段落まで，において展開されているのではあるが，に基づく者である。但し，サヴェジ氏の，論述の様式，と，筆者の，論述の様式，とは，同一ではない。

［註2］。［命題1］に対する［証明］，及び，［命題2］に対する［証明］，及び，［命題3］に対する［証明］，において，各各，従属選択の原理，及び，有限集合上の選択関数，の存在，に，関する，［命題2.1］，及び，初期条件付き従属選択の原理，が，利用されている事，を，注意する。なお，［命題1］，が，この節の中心的命題である。

[註3]。[定義3]において導入される，2進分割系の概念，は，[命題7.5]，及び，その[証明]，及び，[命題7.6]に対する[証明]，及び，[命題7.7]に対する[証明]，において，利用される。

[命題1]。$\preccurlyeq$を，任意の，精密比較の公準を満たす，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とする。

「任意の事象，A，に対して，「或事象，A'，及び，或事象，A''，が，存在して，「$A=A'\cup A''$，且つ，$A'\cap A''=\phi$，且つ，$A'\approx A''$」」」。

[証明]。任意の事象，A，を固定する。背理法による。

「任意の事象，A'，及び，任意の事象，A''，に，対して，「「$A=A'\cup A''$，且つ，$A'\cap A''=\phi$」，ならば，「$A'\not\preccurlyeq A''$，或いは，$A''\not\preccurlyeq A'$」」」，

と仮定する。

「$A=B\cup C\cup D$，且つ，$B\cap C=B\cap D=C\cap D=\phi$，且つ，$C\not\preccurlyeq B\cup D$，且つ，$B\not\preccurlyeq C\cup D$」，なる事象達，$B$，及び，$C$，及び，$D$，から，構成される順序対，$\langle B, C, D\rangle$，の全体を，$\mathcal{A}$，と表記する。即ち，

$\mathcal{A}=\{x|$「或事象，B，及び，或事象，C，及び，或事象，D，が，存在して，「$x=\langle B, C, D\rangle$，且つ，$A=B\cup C\cup D$，且つ，$B\cap C=B\cap D=C\cap D=\phi$，且つ，$C\not\preccurlyeq B\cup D$，且つ，$B\not\preccurlyeq C\cup D$」」$\}$，

と置く。

背理法の為の仮定，より，$\langle\phi, \phi, A\rangle\in\mathcal{A}$。故に，

式1。$\mathcal{A}\neq\phi$，

が従う。

「$\langle B, C, D\rangle\in\mathcal{A}$，なる任意の$\langle B, C, D\rangle$，及び，$\langle B', C', D'\rangle\in\mathcal{A}$，なる任意の$\langle B', C', D'\rangle$，に，対して，「「$B\subseteq B'$，且つ，$C\subseteq C'$，且つ，$D'\not\preccurlyeq D\setminus D'$」，なる場合，且つ，その場合に限って，$R(\langle B, C, D\rangle, \langle B', C', D'\rangle)$」」，

によって，$\mathcal{A}$上の2項関係，

$R(\langle B, C, D\rangle, \langle B', C', D'\rangle)$，

を定義する。

陳述1。「$\langle B, C, D\rangle\in\mathcal{A}$，なる任意の$\langle B, C, D\rangle$に対して，「$\langle B', C', D'\rangle\in\mathcal{A}$，なる或$\langle B', C', D'\rangle$が存在して，$R(\langle B, C, D\rangle, \langle B', C', D'\rangle)$」」，

を示す。

$\langle B, C, D\rangle\in\mathcal{A}$，なる任意の$\langle B, C, D\rangle$，を，固定する。

[命題5.2]，より，「$D=D^*\cup D^{**}$，且つ，$D^*\cap D^{**}=\phi$，且つ，$\phi\not\preccurlyeq D^{**}$，且つ，$D^{**}\preccurlyeq D^*$」，なる或事象達，$D^*$，及び，$D^{**}$，が，存在する。この場合における，$D^*$，及び，$D^{**}$，を，固定する。

精密比較の公準，より，「或，D に対する分割列，f，が，存在して，「$j\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，「$f(j)\not\preccurlyeq D^{**}$」」」，が従う。この f を固定する。

$M=\{m|\ m\in\mathrm{dom}(f)$，且つ，
$C\cup(D\setminus\langle f; m\rangle)\not\preccurlyeq B\cup\langle f; m\rangle\}$，

と置く。「$D=\langle f; \max\mathrm{dom}(f)\rangle$，且つ，$C\not\preccurlyeq B\cup D$」，より，$\max\mathrm{dom}(f)\in M$。故に，$M\neq$

ϕ。

$m(*)=\min M$,

と置く。

「$B'=B\cup\langle f;\ m(*)-1\rangle$，且つ，$C'=C\cup(D\setminus\langle f;\ m(*)\rangle)$，且つ，$D'=f(m(*))$」,

と置く。

式2。$A=B'\cup C'\cup D'$,

を示す。

$$
\begin{aligned}
&B'\cup C'\cup D'\\
&=(B\cup\langle f;\ m(*)-1\rangle)\cup(C\cup(D\setminus\langle f;\\
&\quad m(*)\rangle))\cup f(m(*))\\
&=B\cup C\cup(\langle f;\ m(*)-1\rangle\cup f(m(*))\cup(D\setminus\\
&\quad\langle f;\ m(*)\rangle))\\
&=B\cup C\cup D\\
&=A。
\end{aligned}
$$

式2，が従う。

式3。$B'\cap C'=B'\cap D'=C'\cap D'=\phi$,

を示す。

$$
\begin{aligned}
&B'\cap C'\\
&=(B\cup\langle f;\ m(*)-1\rangle)\cap(C\cup(D\setminus\langle f;m(*)\rangle))\\
&=(B\cap C)\cup(B\cap(D\setminus\langle f;m(*)\rangle))\cup(\langle f;m(*)\\
&\quad-1\rangle\cap C)\cup(\langle f;m(*)-1\rangle\cap(D\setminus\langle f;\ m(*)\rangle))\\
&\subseteq(B\cap C)\cup(B\cap D)\cup(D\cap C)\cup(\langle f;\ m(*)\\
&\quad-1\rangle\cap(D\setminus\langle f;\ m(*)\rangle))\\
&=\phi,
\end{aligned}
$$

且つ，

$$
\begin{aligned}
&B'\cap D'\\
&=(B\cup\langle f;\ m(*)-1\rangle)\cap f(m(*))\\
&=(B\cap f(m(*)))\cup(\langle f;\ m(*)-1\rangle\cap f(m(*)))\\
&\subseteq(B\cap D)\cup(\langle f;\ m(*)-1\rangle\cap f(m(*)))\\
&=\phi,
\end{aligned}
$$

且つ，

$$
\begin{aligned}
&C'\cap D'\\
&=(C\cup(D\setminus\langle f;\ m(*)\rangle))\cap f(m(*))\\
&=(C\cap f(m(*)))\cup((D\setminus\langle f;\ m(*)\rangle)\cap\\
&\quad f(m(*)))\\
&\subseteq(C\cap D)\cup((D\setminus\langle f;\ m(*)\rangle)\cap f(m(*)))\\
&=\phi。
\end{aligned}
$$

式3，が従う。

式4。$C'\not\preccurlyeq B'\cup D'$,

を示す。

$m(*)$の定義，より，$C\cup(D\setminus\langle f;\ m(*)\rangle)\not\preccurlyeq B\cup\langle f;\ m(*)\rangle$。ところが，$B\cup\langle f;\ m(*)\rangle=B\cup(\langle f;m(*)-1\rangle\cup f(m(*)))=(B\cup\langle f;m(*)-1\rangle)\cup f(m(*))=B'\cup D'$。一方，$C'=C\cup(D\setminus\langle f;\ m(*)\rangle)$。

式4，が従う。

式5。$B'\not\preccurlyeq C'\cup D'$,

を示す。

$m(*)$の最小性，及び，$B\not\preccurlyeq C\cup D$，より，$B\cup\langle f;\ m(*)-1\rangle\preccurlyeq C\cup(D\setminus\langle f;\ m(*)-1\rangle)$。ところが，$f(m(*))\subseteq D\setminus\langle f;m(*)-1\rangle$，より，$C\cup(D\setminus\langle f;m(*)-1\rangle)=C\cup((D\setminus\langle f;m(*)\rangle)\cup f(m(*)))$。故に，$B'\preccurlyeq C'\cup D'$。式2，より，$A=B'\cup(C'\cup D')$。式3，より，$B'\cap(C'\cup D')=\phi$。故に，背理法の為の仮定，より，$B'\not\preccurlyeq C'\cup D'$。

式5，が従う。

式6。$\langle B', C', D'\rangle \epsilon \mathcal{A}$。

これは，式2，及び，式3，及び，式4，及び，式5，より，従う。

式7。$B \subseteqq B'$。

これは，$B \subseteqq B \cup \langle f; m(*)-1\rangle$，より，従う。

式8。$C \subseteqq C'$。

これは，$C \subseteqq C \cup (D \diagdown \langle f; m(*)\rangle)$，より，従う。

式9。$D' \not\prec D \diagdown D'$，

を示す。

f の定義，より，$f(m(*)) \not\prec D^{**}$。ところが，「$D^{**} \prec D^{*}$，且つ，$D^{*} = D \diagdown D^{**}$，且つ，$D^{**} \subseteqq D$」。故に，［命題3.12］，より，$f(m(*)) \not\prec D \diagdown f(m(*))$。ところが，$D' = f(m(*))$。

式9，が従う。

式6，及び，式7，及び，式8，及び，式9，より，

「$\langle B'', C'', D''\rangle \epsilon \mathcal{A}$，なる或 $\langle B'', C'', D''\rangle$ が存在して，$R(\langle B, C, D\rangle, \langle B'', C'', D''\rangle)$」，

が従う。

陳述1，が従う。

陳述1，及び，従属選択の原理，より，

「或，ω から $\mathcal{A}$ への写像，F，が存在して，「$n \epsilon \omega$，なる任意の n に対して，$R(F(n), F(n+1))$」」，

が従う。

この F を固定し，且つ，$n \epsilon N$，なる各 n に対して，

$\langle B(n), C(n), D(n)\rangle = F(n)$，

と置く。

$B(*) = \cup\{B(n) | n \epsilon N\}$，

且つ，

$C(*) = \cup\{C(n) | n \epsilon N\}$，

且つ，

$D(*) = \cap\{D(n) | n \epsilon N\}$，

と置く。

式10。$A = B(*) \cup C(*) \cup D(*)$，

を示す。

$x \epsilon A$，なる任意の x を固定する。「「$x \epsilon B(*)$，には非ず」，且つ，「$x \epsilon C(*)$，には非ず」」，と仮定する。「$n \epsilon N$，なる任意の n に対して，「「$x \epsilon B(n)$，には非ず」，且つ，「$x \epsilon C(n)$，には非ず」」」，が従う。ところが，「$n \epsilon N$，なる任意の n に対して，$A = B(n) \cup C(n) \cup D(n)$」。故に，「$n \epsilon N$，なる任意の n に対して，$x \epsilon D(n)$」。故に，$x \epsilon D(*)$。故に，

$A \subseteqq B(*) \cup C(*) \cup D(*)$。

$x \epsilon B(*) \cup C(*) \cup D(*)$，なる任意の x を固定する。$x \epsilon B(*)$，なる場合を考える。「$n' \epsilon N$，なる

或 n' が存在して，$x\epsilon B(n')$」。この n' を固定する。$B(n')\subseteqq A$，より，$x\epsilon A$，が従う。$x\epsilon C(*)$，なる場合を考える。「$n''\epsilon N$，なる或 n'' が存在して，$x\epsilon C(n'')$」。この n'' を固定する。$C(n'')\subseteqq A$，より，$x\epsilon A$，が従う。$x\epsilon D(*)$，なる場合を考える。$x\epsilon D(1)$，が従う。$D(1)\subseteqq A$，より，$x\epsilon A$，が従う。故に，

$B(*)\cup C(*)\cup D(*)\subseteqq A$。

式10，が従う。

陳述2。「$m\epsilon N$，なる任意の m，及び，$m'\epsilon N$，なる任意の m'，に，対して，「$m\leqq m'$，ならば，「$B(m)\subseteqq B(m')$，且つ，$C(m)\subseteqq C(m')$」」」，

を示す。

$m\epsilon N$，なる任意の m を固定する。

$K=\{k|k\epsilon\omega$，且つ，「「$B(m)\subseteqq B(m+k)$，且つ，$C(m)\subseteqq C(m+k)$」，には非ず」$\}$，

と置く。$K\neq\phi$，と仮定して，矛盾を導く。

$k(*)=\min K$，

と置く。「$B(m)\subseteqq B(m)$，且つ，$C(m)\subseteqq C(m)$」，より，$0\notin K$。故に，$1\leqq k(*)$。故に，$k(*)-1\epsilon\omega$。$k(*)$ の最小性，より，「$B(m)\subseteqq B(m+k(*)-1)$，且つ，$C(m)\subseteqq C(m+k(*)-1)$」，が従う。ところが，

$R(\langle B(m+k(*)-1),\ C(m+k(*)-1),\ D(m+k(*)-1)\rangle,\ \langle B(m+k(*)),\ C(m+k(*)),\ D(m+k(*))\rangle)$。

故に，「$B(m+k(*)-1)\subseteqq B(m+k(*))$，且つ，$C(m+k(*)-1)\subseteqq C(m+k(*))$」。故に，

「$B(m)\subseteqq B(m+k(*))$，且つ，$C(m)\subseteqq C(m+k(*))$」，

が従う。故に，$k(*)\notin K$。これは，$k(*)\epsilon K$，に反する。故に，

$K=\phi$。

$m'\epsilon N$，なる任意の m' を固定する。$m\leqq m'$，と仮定する。$K=\phi$，より，$m'-m\notin K$。ところが，$m'-m\epsilon\omega$。故に，K の定義，より，

「$B(m)\subseteqq B(m+(m'-m))$，且つ，$C(m)\subseteqq C(m+(m'-m))$」。

故に，「$B(m)\subseteqq B(m')$，且つ，$C(m)\subseteqq C(m')$」。

陳述2，が従う。

式11。$B(*)\cap C(*)=\phi$，

を示す。

「$x\epsilon B(*)\cap C(*)$，なる或 x が存在する」，と仮定して，矛盾を導く。この x を固定する。「$x\epsilon B(*)$，且つ，$x\epsilon C(*)$」，が従う。故に，「「$n'\epsilon N$，なる或 n' が存在して，$x\epsilon B(n')$」，且つ，「$n''\epsilon N$，なる或 n'' が存在して，$x\epsilon C(n'')$」」，が従う。ここにおける，n'，及び，n''，を，固定する。陳述2，より，「$B(n')\subseteqq B(\max\{n', n''\})$，且つ，$C(n'')\subseteqq C(\max\{n', n''\})$」。故に，「$x\epsilon B(\max\{n', n''\})$，且つ，$x\epsilon C(\max\{n', n''\})$」。故に，

$x\epsilon B(\max\{n', n''\})\cap C(\max\{n', n''\})$。

故に，$B(\max\{n', n''\})\cap C(\max\{n', n''\})\neq\phi$。これは，$B(\max\{n', n''\})\cap C(\max\{n', n''\})=\phi$，に反する。

式11, が従う。

式12。$B(*)\cap D(*)=\phi$,

を示す。

「$x\epsilon B(*)\cap D(*)$, なる或 x が存在する」, と仮定して, 矛盾を導く。この x を固定する。「$x\epsilon B(*)$, 且つ, $x\epsilon D(*)$」, が従う。故に,「「$n'\epsilon N$, なる或 n' が存在して, $x\epsilon B(n')$」, 且つ,「$n\epsilon N$, なる任意の n に対して, $x\epsilon D(n)$」」。この n' を固定する。「$x\epsilon B(n')$, 且つ, $x\epsilon D(n')$」, が従う。故に, $x\epsilon B(n')\cap D(n')$。故に, $B(n')\cap D(n')\neq\phi$。これは, $B(n')\cap D(n')=\phi$, に反する。

式12, が従う。

陳述3。「$n\epsilon N$, なる任意の n に対して,「$B(*)\subseteqq B(n)\cup D(n)$, 且つ, $C(*)\subseteqq C(n)\cup D(n)$」」,

を示す。

$n\epsilon N$, なる任意の n を固定する。

箇所1。$x\epsilon B(*)$, なる任意の x を固定する。

$x\epsilon B(n)$, の場合を考える。$x\epsilon B(n)\cup D(n)$, が従う。$x\notin B(n)$, の場合を考える。$x\epsilon B(*)$, より,「$n'\epsilon N$, なる或 n' が存在して, $x\epsilon B(n')$」, が従う。この n' を固定する。陳述2, より,「$n'\leqq n$, ならば, $B(n')\subseteqq B(n)$」。故に,「$n'\leqq n$, ならば, $x\epsilon B(n)$」。ところが, $x\notin B(n)$。故に, $n\leqq n'$。故に, 陳述2, より, $C(n)\subseteqq C(n')$。$B(n')\cap C(n')=\phi$, より, $x\notin C(n')$。故に, $x\notin C(n)$。一方, $B(n')\subseteqq A$, より, $x\epsilon A$。故に,「$x\notin B(n)$, 且つ, $x\notin C(n)$, 且つ, $x\epsilon A$」。故に, $A=B(n)\cup C(n)\cup D(n)$, より, $x\epsilon D(n)$。故に, $x\epsilon B(n)\cup D(n)$。故に, 各場合において,

箇所2。$x\epsilon B(n)\cup D(n)$, が従う。

「箇所1, から, 箇所2, まで, における, 各記号, B, 及び, 各記号, C, を, 各各, 記号, C, 及び, 記号, B, に, 置き換える」, なる事, より, 得られる議論, に, より,

「$x\epsilon C(*)$, なる任意の x に対して, $x\epsilon C(n)\cup D(n)$」,

が従う。

陳述3, が従う。

式13。$D(*)\preccurlyeq\phi$,

を示す。

$\phi\not\preccurlyeq D(*)$, と仮定して, 矛盾を導く。[命題5.5], より,

「$n'\epsilon N$, なる或 n' が存在して, $D(n')\not\preccurlyeq D(*)$」,

が従う。この n' を固定する。$D(*)\subseteqq D(n')$, より, $D(*)\preccurlyeq D(n')$。これは, $D(n')\not\preccurlyeq D(*)$, に反する。

式13, が従う。

陳述4。「$B(*)\not\preccurlyeq C(*)$, 或いは, $C(*)\not\preccurlyeq B(*)$」,

を示す。

式10, より, $A=B(*)\cup(C(*)\cup D(*))$。式11, 及び, 式12, より, $B(*)\cap(C(*)\cup D(*))=\phi$。故に, 背理法の為の仮定, より,

「$B(*)\not\preccurlyeq C(*)\cup D(*)$, 或いは, $C(*)\cup D(*)\not\preccurlyeq B(*)$」,

が従う。$B(*) \not\preccurlyeq C(*) \cup D(*)$，の場合を考える。式13，より，$D(*) \preccurlyeq \phi$。故に，$C(*) \cup D(*) \preccurlyeq C(*)$。故に，$B(*) \not\preccurlyeq C(*)$。$C(*) \cup D(*) \not\preccurlyeq B(*)$，の場合を考える。$C(*) \subseteqq C(*) \cup D(*)$，より，$C(*) \preccurlyeq C(*) \cup D(*)$。故に，$C(*) \not\preccurlyeq B(*)$。

陳述4，が従う。

$B(*) \not\preccurlyeq C(*)$，の場合を考える。

箇所3。[命題5.4]，より，「$B(*) \cup E' \cup E'' \not\preccurlyeq C(*)$，且つ，$B(*) \cap (E' \cup E'') = \phi$，且つ，$E' \cap E'' = \phi$，且つ，$\phi \not\preccurlyeq E''$，且つ，$E'' \preccurlyeq E'$」，なる，或事象達，$E'$，及び，$E''$，が，存在する。ここにおける，$E'$，及び，$E''$，を固定する。[命題5.5]，より，「$n' \epsilon N$，なる或 n' が存在して，$D(n') \not\preccurlyeq E''$」。この n' を固定する。陳述3，より，$C(*) \subseteqq C(n') \cup D(n')$。故に，$C(*) \preccurlyeq C(n') \cup D(n')$。故に，$B(*) \cup E' \cup E'' \not\preccurlyeq C(n') \cup D(n')$。故に，$B(*) \cup E' \not\preccurlyeq C(n')$。一方，$B(n') \subseteqq B(*)$，より，$B(n') \preccurlyeq B(*)$。故に，$B(n') \cup E' \preccurlyeq B(*) \cup E'$。$E'' \preccurlyeq E'$，より，$D(n') \preccurlyeq E'$。故に，$B(n') \cup D(n') \preccurlyeq B(n') \cup E'$。故に，$B(n') \cup D(n') \preccurlyeq B(*) \cup E'$。故に，$B(n') \cup D(n') \not\preccurlyeq C(n')$。これは，$C(n') \not\preccurlyeq B(n') \cup D(n')$，に反する。故に，

箇所4。「$B(*) \not\preccurlyeq C(*)$，の場合において，矛盾が生じる」。

$C(*) \not\preccurlyeq B(*)$，の場合を考える。この場合，「箇所3，から，箇所4，まで，における，各，記号，B，及び，各，記号，C，を，各各，記号，C，及び，記号，B，に，置き換える」，なる事，より，得られる議論，に，よって，矛盾が生じる。

陳述4，より，「背理法の為の仮定，の下で，矛盾が生じる」，なる事，が，従う。

結論が従う。　[証明終]。

[定義1]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，と，する。S に対する等分割列，の全体，を，Eq，と，表記する。即ち，

$\mathrm{Eq} = \{f \mid f$ は $\mathcal{A}$ 上の配列であり，且つ，$S = \cup \{f(k) \mid k \epsilon \mathrm{dom}(f)\}$，且つ，「$k \epsilon \mathrm{dom}(f)$，なる任意の k，及び，$l \epsilon \mathrm{dom}(f)$，なる任意の l，に，対して，「「$k \neq l$，ならば，$f(k) \cap f(l) = \phi$」，且つ，$f(k) \approx f(l)$」」$\}$，

と置く。

[定義2]。f，及び，f'，の各各を，任意の分割列とする。「f' は f に対する2進的細分である」，なる事を，

「$\max \mathrm{dom}(f') = 2 \cdot \max \mathrm{dom}(f)$，且つ，「$j \epsilon \mathrm{dom}(f)$，なる任意の j に対して，$f(j) = f'(2 \cdot j - 1) \cup f'(2 \cdot j)$」」，

なる事である，と，定義する。

[命題2]。$\preccurlyeq$を，任意の，精密比較の公準を満たす，$\mathcal{A}$上の定性的確率，と，する。

「$\mathrm{Eq} \neq \phi$，且つ，「$f \epsilon \mathrm{Eq}$，なる任意の f に対して，「$f' \epsilon \mathrm{Eq}$，なる或 f' が存在して，「f' は f に対する2進的細分である」」」」，

が従う。

[証明]。$f_*(1) = S$，によって，$\{1\}$ から$\mathcal{A}$への写像，f_*，を，定義する。$f_* \epsilon \mathrm{Eq}$，である。故に，$\mathrm{Eq} \neq \phi$。

$f \epsilon \mathrm{Eq}$，なる任意の f を固定する。

陳述1。「$k \epsilon \mathrm{dom}(f)$，なる任意の k に対して，

「$g\epsilon \mathrm{Map}(\{1, 2\}, \mathcal{A})$, なる或 g が存在して, 「$f(k)=g(1)\cup g(2)$, 且つ, $g(1)\cap g(2)=\phi$, 且つ, $g(1)\dot{\approx}g(2)$」」,

を示す。$k\epsilon\mathrm{dom}(f)$, なる任意の k を固定する。[命題1], より, 「或事象, A', 及び, 或事象, A'', が, 存在して, 「$f(k)=A'\cup A''$, 且つ, $A'\cap A''=\phi$, 且つ, $A'\dot{\approx}A''$」」, が従う。ここにおける, A', 及び, A'', を, 固定する。「$g(1)=A'$, 且つ, $g(2)=A''$」, によって, $\{1, 2\}$ から$\mathcal{A}$への写像, g, を, 定義する。この g は, 陳述1, における, g, の, 性質, を, 満たす。

陳述1, が従う。

陳述1, 及び, [命題2.1], より,

「$F\epsilon\mathrm{Map}(\mathrm{dom}(f), \mathrm{Map}(\{1, 2\}, \mathcal{A}))$, なる或 F が存在して, 「$k\epsilon\mathrm{dom}(f)$, なる任意の k に対して, 「$f(k)=F(k)(1)\cup F(k)(2)$, 且つ, $F(k)(1)\cap F(k)(2)=\phi$, 且つ, $F(k)(1)\dot{\approx}F(k)(2)$」」,

が従う。この F を固定する。

$K'=\{k\mid k\epsilon N$, 且つ, $k\leqq 2\cdot\max\ \mathrm{dom}(f)\}$, と置き, 且つ,

「$k\epsilon K'$, なる任意の k に対して, $f'(k)=F(I\langle k\rangle)(2-R\langle k\rangle)$」,

によって, K' から$\mathcal{A}$への写像, f', を, 定義する。

式1。$S=\cup\{f'(k)\mid k\epsilon K'\}$,

を示す。

$x\epsilon S$, なる任意の x を固定する。$S=\cup\{f(j)\mid j\epsilon\mathrm{dom}(f)\}$, より, 「$j\epsilon\mathrm{dom}(f)$, なる或 j が存在して, $x\epsilon f(j)$」。この j を固定する。「$f(j)=F(j)(1)\cup F(j)(2)$, 且つ, $j=I\langle 2\cdot j\rangle$, 且つ, $j=I\langle 2\cdot j-1\rangle$, 且つ, $0=R\langle 2\cdot j\rangle$, 且つ, $1=R\langle 2\cdot j-1\rangle$」, より,

$f(j)=F(I\langle 2\cdot j-1\rangle)(2-R\langle 2\cdot j-1\rangle)\cup F(I\langle 2\cdot j\rangle)(2-R\langle 2\cdot j\rangle)$。

故に,

「$x\epsilon F(I\langle 2\cdot j-1\rangle)(2-R\langle 2\cdot j-1\rangle)$, 或いは, $x\epsilon F(I\langle 2\cdot j\rangle)(2-R\langle 2\cdot j\rangle)$」。

故に,

「$k\epsilon\{2\cdot j-1, 2\cdot j\}$, なる或 k が存在して, $x\epsilon F(I\langle k\rangle)(2-R\langle k\rangle)$」。

$1\leqq j\leqq\max\mathrm{dom}(f)$, より, $1\leqq 2\cdot j-1\leqq 2\cdot j\leqq 2\cdot\max\ \mathrm{dom}(f)$, が従う。故に, $\{2\cdot j-1, 2\cdot j\}\subseteqq K'$。故に,

「$k\epsilon K'$, なる或 k が存在して, $x\epsilon F(I\langle k\rangle)(2-R\langle k\rangle)$」。

故に,

$x\epsilon\cup\{f'(k)\mid k\epsilon K'\}$。

故に,

$S\subseteqq\cup\{f'(k)\mid k\epsilon K'\}$。

一方, 「$k\epsilon K'$, なる任意の k に対して, $f'(k)\subseteqq S$」, より,

$\cup\{f'(k)\mid k\epsilon K'\}\subseteqq S$,

が従う。

式1，が従う。

陳述2。「$k\epsilon K'$，なる任意の k，及び，$l\epsilon K'$，なる任意の l，に，対して，「$k\neq l$，ならば，$f'(k)\cap f'(l)=\phi$」」，

を示す。

$k\epsilon K'$，なる任意の k，及び，$l\epsilon K'$，なる任意の l，を，固定し，且つ，$k\neq l$，とする。$I\langle k\rangle \neq I\langle l\rangle$，なる場合を考える。

「$m\epsilon\{k, l\}$，なる任意の m に対して，「$R\langle m\rangle \epsilon\{0, 1\}$，且つ，$f'(m)=F(I\langle m\rangle)(2-R\langle m\rangle)$，且つ，$f(I\langle m\rangle)=F(I\langle m\rangle)(1)\cup F(I\langle m\rangle)(2)$」」，

より，

「$f'(k)\subseteq f(I\langle k\rangle)$，且つ，$f'(l)\subseteq f(I\langle l\rangle)$」，

が従う。$I\langle k\rangle\neq I\langle l\rangle$，より，$f(I\langle k\rangle)\cap f(I\langle l\rangle)=\phi$。故に，$f'(k)\cap f'(l)=\phi$。

$I\langle k\rangle=I\langle l\rangle$，なる場合を考える。$j=I\langle k\rangle$，と置く。「$k\neq l$，且つ，$k=2\cdot j-R\langle k\rangle$，且つ，$l=2\cdot j-R\langle l\rangle$」，より，$R\langle k\rangle\neq R\langle l\rangle$，が従う。故に，「$f'(k)=F(j)(2-R\langle k\rangle)$，且つ，$f'(l)=F(j)(2-R\langle l\rangle)$，且つ，$2-R\langle k\rangle\neq 2-R\langle l\rangle$」。ところが，「$m'\epsilon\{0, 1\}$，なる任意の m'，及び，$m''\epsilon\{0, 1\}$，なる任意の m''，に，対して，「$m'\neq m''$，ならば，$F(j)(m')\cap F(j)(m'')=\phi$」」。故に，$F(j)(2-R\langle k\rangle)\cap F(j)(2-R\langle l\rangle)=\phi$。故に，$f'(k)\cap f'(l)=\phi$。

陳述2，が従う。

陳述3。「$k\epsilon K'$，なる任意の k，及び，$l\epsilon K'$，なる任意の l，に，対して，$f'(k)\approx f'(l)$」，

を示す。

$k\epsilon K'$，なる任意の k，及び，$l\epsilon K'$，なる任意の l，を，固定する。「$f'(k)\epsilon\{F(I\langle k\rangle)(1), F(I\langle k\rangle)(2)\}$，且つ，$f'(l)\epsilon\{F(I\langle l\rangle)(1), F(I\langle l\rangle)(2)\}$」，が従う。「$f(I\langle k\rangle)=F(I\langle k\rangle)(1)\cup F(I\langle k\rangle)(2)$，且つ，$f(I\langle l\rangle)=F(I\langle l\rangle)(1)\cup F(I\langle l\rangle)(2)$，且つ，$F(I\langle k\rangle)(1)\cap F(I\langle k\rangle)(2)=F(I\langle l\rangle)(1)\cap F(I\langle l\rangle)(2)=\phi$，且つ，$F(I\langle k\rangle)(1)\approx F(I\langle k\rangle)(2)$，且つ，$F(I\langle l\rangle)(1)\approx F(I\langle l\rangle)(2)$，且つ，$f(I\langle k\rangle)\approx f(I\langle l\rangle)$」，及び，［命題3. 14］，より，$f'(k)\approx f'(l)$，が従う。

陳述3，が従う。

式2。$f'\epsilon \mathrm{Eq}$。

この式は，式1，及び，陳述2，及び，陳述3，より，従う。

陳述4。「f' は f に対する2進的細分である」，

を示す。

f' の定義域，K'，の，定義より，$\max \mathrm{dom}(f')=2\cdot\max \mathrm{dom}(f)$，が従う。$j\epsilon\mathrm{dom}(f)$，なる任意の j を固定する。「$f'(2\cdot j-1)=F(I\langle 2\cdot j-1\rangle)(2-R\langle 2\cdot j-1\rangle)=F(j)(1)$，且つ，$f'(2\cdot j)=F(I\langle 2\cdot j\rangle)(2-R\langle 2\cdot j\rangle)=F(j)(2)$」。一方，$f(j)=F(j)(1)\cup F(j)(2)$。故に，$f(j)=f'(2\cdot j-1)\cup f'(2\cdot j)$。

陳述4，が従う。

$\mathrm{Eq}\neq\phi$，及び，式2，及び，陳述4，より，結論が従う。　［証明終］。

［命題3］。$\prec$を，任意の，精密比較の公準を満たす，$\mathcal{O}$ 上の定性的確率，と，する。

「或，ω から Eq への写像，Ψ，が，存在して，「$\mathrm{dom}(\Psi(0))=\{1\}$，且つ，$\Psi(0)(1)=S$，

且つ，「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，$\Psi(n+1)$ は $\Psi(n)$ に対する2進的細分である」」，

が従う。

[証明]。[命題2]，及び，初期条件付き従属選択の原理，より，結論が従う。　　[証明終]。

[定義3]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，と，する。「Ψは$\preccurlyeq$に対する2進分割系である」，なる事を，

「Ψは ω から Eq への写像であり，且つ，$\mathrm{dom}(\Psi(0))=\{1\}$，且つ，$\Psi(0)(1)=S$，且つ，「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，$\Psi(n+1)$ は $\Psi(n)$ に対する2進的細分である」」，

なる事である，と，定義する。

[注意]。[命題3]，より，$\mathcal{A}$上の定性的確率，$\preccurlyeq$，が，精密比較の公準を満たす場合には，$\preccurlyeq$に対する2進分割系，Ψ，が存在する。

[命題4]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，Ψを，任意の，$\preccurlyeq$に対する2進分割系，とする。

「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，$\mathrm{dom}(\Psi(n))=N[2^n]$」，

が従う。

[証明]。$M=\{m \mid m\epsilon\omega$，且つ，「$\mathrm{dom}(\Psi(m))=N[2^m]$，には非ず」$\}$，と置く。$M\neq\phi$，と仮定して，矛盾を導く。$m(*)=\min M$，と置く。「$\mathrm{dom}(\Psi(0))=\{1\}$，且つ，$N[1]=\{1\}$，且つ，$2^0=1$」，より，$0\notin M$。故に，$1\leqq m(*)$。故に，$m(*)-1\epsilon\omega$。$m(*)$ の最小性，より，$\mathrm{dom}(\Psi(m(*)-1))=N[2^{m(*)-1}]$。ところが，$\max\mathrm{dom}(\Psi(m(*)))=2\cdot\max\mathrm{dom}(\Psi(m(*)-1))$。故に，$\max N[2^{m(*)-1}]=2^{m(*)-1}$，より，$\max\mathrm{dom}(\Psi(m(*)))=2^{m(*)}$。故に，$\mathrm{dom}(\Psi(m(*)))=N[2^{m(*)}]$。故に，$m(*)\notin M$。これは，$m(*)\epsilon M$，に反する。故に，$M=\phi$。故に，「$m\epsilon\omega$，なる任意の m に対して，$m\notin M$」。故に，「$m\epsilon\omega$，なる任意の m に対して，$\mathrm{dom}(\Psi(m))=N[2^m]$」。

結論が従う。　　[証明終]。

[命題5]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，Ψを，任意の，$\preccurlyeq$に対する2進分割系，とする。

「$n\epsilon\omega$，なる任意の n，及び，$k\epsilon\omega$，なる任意の k，及び，$j\epsilon\omega$，なる任意の j，に，対して，「$j\epsilon\mathrm{dom}(\Psi(n))\cup\{0\}$，ならば，$\langle\Psi(n);j\rangle=\langle\Psi(n+k);j\cdot 2^k\rangle$」」，

が従う。

[証明]。

陳述1。「$n\epsilon\omega$，なる任意の n，及び，$j\epsilon\omega$，なる任意の j，に，対して，「$j\epsilon\mathrm{dom}(\Psi(n))\cup\{0\}$，ならば，$\langle\Psi(n);j\rangle=\langle\Psi(n+1);j\cdot 2\rangle$」」，

を示す。

$n\epsilon\omega$，なる任意の n を固定する。

$J=\{j \mid j\epsilon\mathrm{dom}(\Psi(n))\cup\{0\}$，且つ，「$\langle\Psi(n);j\rangle=\langle\Psi(n+1);j\cdot 2\rangle$，には非ず」$\}$，

と置く。$J\neq\phi$，と仮定して，矛盾を導く。

$j(*)=\min J$，

と置く。「$\langle\Psi(n);0\rangle=\phi$，且つ，$\langle\Psi(n+1);0\cdot 2\rangle=\phi$」，より，$0\notin J$。故に，$1\leqq j(*)$。故に，$j(*)-1\epsilon\mathrm{dom}(\Psi(n))\cup\{0\}$。故に，$j(*)$ の最

小性，より，

$\langle \Psi(n)\,;\, j(*)-1\rangle = \langle \Psi(n+1)\,;\, (j(*)-1)\cdot 2\rangle$。

ところが，$\Psi(n)(j(*)) = \Psi(n+1)(2\cdot j(*)-1) \cup \Psi(n+1)(2\cdot j(*))$。故に，

$$\begin{aligned}&\langle \Psi(n)\,;\, j(*)\rangle\\ &= \langle \Psi(n)\,;\, j(*)-1\rangle \cup \Psi(n)(j(*))\\ &= \langle \Psi(n+1)\,;\, (j(*)-1)\cdot 2\rangle \cup (\Psi(n+1)(j(*)\cdot 2-1) \cup \Psi(n+1)(j(*)\cdot 2))\\ &= \langle \Psi(n+1)\,;\, j(*)\cdot 2\rangle。\end{aligned}$$

故に，$\langle \Psi(n)\,;\, j(*)\rangle = \langle \Psi(n+1)\,;\, j(*)\cdot 2\rangle$，が従う。故に，$j(*) \notin J$。これは，$j(*) \in J$，に反する。

故に，$J=\phi$。故に，「$j \in \mathrm{dom}(\Psi(n)) \cup \{0\}$，なる任意の j に対して，$j \notin J$」。故に，「$j \in \mathrm{dom}(\Psi(n)) \cup \{0\}$，なる任意の j に対して，$\langle \Psi(n)\,;\, j\rangle = \langle \Psi(n+1)\,;\, j\cdot 2\rangle$」。

陳述1，が従う。

$n \in \omega$，なる任意の n を固定する。

$K = \{k \mid k \in \omega$，且つ，「「$j \in \mathrm{dom}(\Psi(n)) \cup \{0\}$，なる任意の j に対して，$\langle \Psi(n)\,;\, j\rangle = \langle \Psi(n+k)\,;\, j\cdot 2^k\rangle$」，には非ず」$\}$，

と置く。$K \neq \phi$，と仮定して，矛盾を導く。

$k(*) = \min K$，

と置く。「$j \in \mathrm{dom}(\Psi(n)) \cup \{0\}$，なる任意の j に対して，$\langle \Psi(n)\,;\, j\rangle = \langle \Psi(n)\,;\, j\rangle$」，より，$0 \notin K$，が従う。故に，$1 \leqq k(*)$。故に，$k(*)-1 \in \mathrm{dom}(\Psi(n)) \cup \{0\}$。故に，$k(*)$ の最小性，より，

「$j \in \mathrm{dom}(\Psi(n)) \cup \{0\}$，なる任意の j に対して，$\langle \Psi(n)\,;\, j\rangle = \langle \Psi(n+(k(*)-1))\,;\, j\cdot 2^{k(*)-1}\rangle$」，

が従う。ところが，陳述1，より，

「$j \in \mathrm{dom}(\Psi(n)) \cup \{0\}$，なる任意の j に対して，$\langle \Psi(n+(k(*)-1))\,;\, j\cdot 2^{k(*)-1}\rangle = \langle \Psi(n+k(*))\,;\, j\cdot 2^{k(*)}\rangle$」。

故に，

「$j \in \mathrm{dom}(\Psi(n)) \cup \{0\}$，なる任意の j に対して，$\langle \Psi(n)\,;\, j\rangle = \langle \Psi(n+k(*))\,;\, j\cdot 2^{k(*)}\rangle$」，

が従う。故に，$k(*) \notin K$。これは，$k(*) \in K$，に反する。故に，

$K=\phi$。

故に，「$k \in \omega$，なる任意の k に対して，$k \notin K$」。故に，「$k \in \omega$，なる任意の k，及び，$j \in \omega$，なる任意の j，に，対して，「$j \in \mathrm{dom}(\Psi(n)) \cup \{0\}$，ならば，$\langle \Psi(n)\,;\, j\rangle = \langle \Psi(n+k)\,;\, j\cdot 2^k\rangle$」」，が従う。

結論が従う。　［証明終］。

第7節。サヴェジ氏の定量的確率，の，一意的存在，即ち，結論。

［註1］。［定義1］，における，定量的確率の概念，は，サヴェジ［3］，第3章第3節，33頁，下から第2番目の段落，から，下から第1番目の段落，まで，における議論，より，借用した。

［註2］。［定義2］，における，「P は $\preccurlyeq$ に対して概一致する（P almost agrees with $\preccurlyeq$）」，なる性質，は，サヴェジ［3］，第3章第3節，34頁，冒頭の段落中の最初から第2番目の文，より，借用した。

[註3]。[定義3]，における，「P は$\preccurlyeq$に対して強一致する（P strictly agrees with $\preccurlyeq$）」，なる性質，は，サヴェジ[3]，第3章第3節，34頁，冒頭の段落中の最初の文，より，借用した。

[註4]。[定義4]，において導入される，関数，$k(\cdot;\cdot)$，は，サヴェジ[3]，第3章第3節，35頁，定理2に対する略式証明中の，第3段落の部分，において，導入されている，関数，$k(\cdot,\cdot)$，の，類似物である。但し，この論文における，$k(\cdot;\cdot)$，の方が，より簡単である。

[註5]。[定義5]，における，「P は定量的に精密である」，なる性質，は，サヴェジ[3]，第3章第3節，定理2における，34頁から35頁にかけての一個の文，より，借用した。但し，この表現様式は，筆者の案である。

[註6]。[命題6]に対する[証明]，及び，[命題7]に対す[証明]，は，サヴェジ[3]，第3章第3節，定理2に対する略式証明，この略式証明は，同書の，35頁の上から第2番目の段落から，36頁の下から第2番目の段落まで，において展開されているのではあるが，の，類似物である。但し，この論文における論述の方が，より精確，且つ，より簡潔，である。

[註7]。この節における中心的命題である，[命題7]，を，利用する事，によって，サヴェジ[3]，第3章第3節，37頁，定理3における第7番目の結論，を，導く事ができる。しかし，この事は，この論文の目的ではない。

[定義1]。$\langle S, \mathcal{A}\rangle$ を任意の可測空間とする。「P は $\mathcal{A}$ 上の定量的確率である」，なる事を，「Pは次の，[性質1]，から，[性質4]，まで，を，満たす」，なる事である，と，定義する。

[性質1]。P は，$\mathcal{A}$ を定義域とする，実数値を取る関数，である。

[性質2]。「$A\in\mathcal{A}$，なる任意の A に対して，$0\leqq P(A)$」。

[性質3]。「$B\in\mathcal{A}$，なる任意の B，及び，$C\in\mathcal{A}$，なる任意の C，に，対して，「$B\cap C=\phi$，ならば，$P(B\cup C)=P(B)+P(C)$」」。

[性質4]。$P(S)=1$。

[定義2]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，P を，任意の，$\mathcal{A}$ 上の定量的確率，とする。「P は$\preccurlyeq$に対して概一致する」，なる事を，

「任意の事象，A，及び，任意の事象，B，に，対して「$A\preccurlyeq B$，ならば，$P(A)\leqq P(B)$」」，

なる事である，と，定義する。

[定義3]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，P を任意の，$\mathcal{A}$上の定量的確率，とする。「P は$\preccurlyeq$に対して強一致する」，なる事を，
「任意の事象，A，及び，任意の事象，B，に，対して，「$A\preccurlyeq B$，の場合，且つ，その場合に限って，$P(A)\leqq P(B)$」」，

なる事である，と，定義する。

[命題1]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，P を，任意の，$\mathcal{A}$上の定量的確率，とする。

「「P は$\preccurlyeq$に対して強一致する」，ならば，「P は$\preccurlyeq$に対して概一致する」」，

が従う。

[注意]。[命題1]，は，[定義2]，及び，[定義3]，より，従う。

[命題2]。$\preccurlyeq$を，任意の，精密比較の公準を満たす，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，Pを，任意の，$\preccurlyeq$に対して概一致する，$\mathcal{A}$上の定量的確率，とする。

「任意の事象，E，に対して，「$\phi \not\preccurlyeq E$，の場合，且つ，その場合に限って，$0 \lneqq P(E)$」」，

が従う。

[証明]。任意の事象，E，を固定する。

$\phi \not\preccurlyeq E$，と仮定する。精密比較の公準，より，

「或，Sに対する分割列，f，が，存在して，「$j \in \mathrm{dom}(f)$，なる任意のjに対して，$f(j) \not\preccurlyeq E$」」，

が従う。$P(E)=0$，と仮定して矛盾を導く。「Pは$\preccurlyeq$に対して概一致する」，なる事より，「$j \in \mathrm{dom}(f)$，なる任意のjに対して，$P(f(j)) \leqq P(E)$」，が従う。故に，「$j \in \mathrm{dom}(f)$，なる任意のjに対して，$P(f(j))=0$」。故に，

$$P(\cup\{f(j) \mid j \in \mathrm{dom}(f)\}) = \sum_{j \in \mathrm{dom}(f)} P(f(j)) = 0。$$

ところが，

$$S = \cup\{f(j) \mid j \in \mathrm{dom}(f)\}。$$

故に，

$$P(S) = 0。$$

これは，$P(S)=1$，に反する。故に，$0 \lneqq P(E)$，が従う。

$0 \lneqq P(E)$，と仮定する。$E \preccurlyeq \phi$，と仮定して矛盾を導く。「Pは$\preccurlyeq$に対して概一致する」，なる事より，$P(E) \leqq P(\phi)$，が従う。ところが，$P(\phi)=0$。故に，$P(E) \leqq 0$。これは，$0 \lneqq P(E)$，に反する。故に，$\phi \not\preccurlyeq E$，が従う。

結論が従う。　[証明終]。

[命題3]。$\preccurlyeq$を，任意の，精密比較の公準を満たす，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，Pを，任意の，$\mathcal{A}$上の定量的確率，とする。

「「Pは$\preccurlyeq$に対して概一致する」，ならば，「Pは$\preccurlyeq$に対して強一致する」」，

が従う。

[証明]。「Pは$\preccurlyeq$に対して概一致する」，なる事，を，仮定する。「任意の事象，A，及び，任意の事象，B，に，対して，「$P(A) \leqq P(B)$，ならば，$A \preccurlyeq B$」」，を，示せば，結論が従う。故に，「任意の事象，A，及び，任意の事象，B，に，対して，「$B \not\preccurlyeq A$，ならば，$P(B) \lneqq P(A)$」」，を，示せば，結論が従う。

任意の事象，A，及び，任意の事象，B，を，固定する。$B \not\preccurlyeq A$，と仮定する。[命題5.3]，より，「$B \cup E \not\preccurlyeq A$，且つ，$B \cap E = \phi$，且つ，$\phi \not\preccurlyeq E$」，なる或事象，$E$，が存在する。この$E$を固定する。「$P$は$\preccurlyeq$に対して概一致する」，なる事，より，$P(B \cup E) \leqq P(A)$。ところが，$P(B \cup E) = P(B) + P(E)$。故に，$P(B) + P(E) \leqq P(A)$。一方，[命題2]，より，$0 \lneqq P(E)$。故に，$P(B) \lneqq P(B) + P(E)$。故に，$P(B) \lneqq P(A)$。

結論が従う。　[証明終]。

[定義4]。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，fを，任意の，Sに対する分割

列，とする。

「任意の事象，B，に対して，$k(B;f)=\max\{k|\ k\in\mathrm{dom}(f)\cup\{0\}$，且つ，$\langle f;k\rangle\preccurlyeq B\}$」，

によって，各事象，B，に対して，記法，$k(B;f)$，を，定義する。「$\langle f;0\rangle=\phi$，且つ，$\phi\preccurlyeq B$，且つ，「$n\in N$，なる或 n が存在して，「$k\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の k に対して，$k\leqq n$」」」，より，この定義は確定する。

［命題 4］。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，Pを，任意の，$\preccurlyeq$に対して概一致する，定量的確率，とする。

「任意の，S に対する分割列，f，及び，任意の事象，B，に，対して，

$$P(\langle f;k(B;f)\rangle)\leqq P(B)\leqq P(\langle f;k(B;f)\rangle)+\max\{P(f(k))|\ k\in\mathrm{dom}(f)\}$$

」，

が従う。

［証明］。任意の，S に対する分割列，f，及び，任意の事象，B，を，固定する。$k(B;f)$ の定義，より，$\langle f;k(B;f)\rangle\preccurlyeq B$。「$P$ は$\preccurlyeq$に対して概一致する」，なる事より，

$P(\langle f;k(B;f)\rangle)\leqq P(B)$。

$k(B;f)$ の最大性，より，

「$k(B;f)\lneqq\max\mathrm{dom}(f)$，ならば，$B\not\preccurlyeq\langle f;k(B;f)+1\rangle$」，

が従う。一方，「$S=\langle f;\max\mathrm{dom}(f)\rangle$，且つ，$B\preccurlyeq S$」，より，

「$k(B;f)=\max\mathrm{dom}(f)$，ならば，$B\preccurlyeq\langle f;k(B;f)\rangle$」，

が従う。故に，「P は$\preccurlyeq$に対して概一致する」，なる事より，

「「$k(B;f)\lneqq\max\mathrm{dom}(f)$，ならば，$P(B)\leqq P(\langle f;k(B;f)+1\rangle)=P(\langle f;k(B;f)\rangle)+P(f(k(B;f)+1))$」，且つ，「$k(B;f)=\max\mathrm{dom}(f)$，ならば，$P(B)\leqq P(\langle f;k(B;f)\rangle)$」」，

が従う。故に，「$l\in\mathrm{dom}(f)$，なる任意の l に対して，$P(f(l))\leqq\max\{P(f(k))|\ k\in\mathrm{dom}(f)\}$」，及び，「任意の事象，$A$，に対して，$0\leqq P(A)$」，より，

$P(B)\leqq P(\langle f;k(B;f)\rangle)+\max\{P(f(k))|\ k\in\mathrm{dom}(f)\}$，

が従う。

結論が従う。　　［証明終］。

［命題 5］。$\preccurlyeq$を，任意の，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，Ψを，任意の，$\preccurlyeq$に対する 2 進分割系，とし，且つ，Pを，任意の，$\preccurlyeq$に対して概一致する，定量的確率，とする。

「$n\in\omega$，なる任意の n，及び，$k\in\omega$，なる任意の k，に，対して，「$k\in\mathrm{dom}(\Psi(n))$，ならば，$P(\Psi(n)(k))=1/2^n$」，

が従う。

［証明］。$M=\{m|\ m\in\omega$，且つ，「「$k\in\mathrm{dom}(\Psi(m))$，なる任意の k に対して，$P(\Psi(m)(k))=1/2^m$」，には非ず」$\}$，と置く。$M\neq\phi$，と仮定して，矛盾を導く。$m(*)=\min M$，と置く。

「$\mathrm{dom}(\Psi(0))=\{1\}$，且つ，$\Psi(0)(1)=S$，且

つ，$P(S)=1$，且つ，$2^0=1$」，より，$0\notin M$。故に，$1\leqq m(*)$。故に，$m(*)-1\in\omega$。$m(*)$ の最小性，及び，M の定義，より，

「$k\in\mathrm{dom}(\Psi(m(*)-1))$，なる任意の k に対して，$P(\Psi(m(*)-1)(k))=1/2^{m(*)-1}$」，

が従う。一方，「$\Psi(m(*))$ は $\Psi(m(*)-1)$ に対する2進的細分である」，なる事より，

「$k\in\mathrm{dom}(\Psi(m(*)-1))$，なる任意の k に対して，$P(\Psi(m(*)-1)(k))=P(\Psi(m(*))(2\cdot k-1))+P(\Psi(m(*))(2\cdot k))$」，

が従う。ところが，「$\Psi(m(*))\in\mathrm{Eq}$，且つ，P は$\preccurlyeq$に対して概一致する」，より，

「$k\in\mathrm{dom}(\Psi(m(*)-1))$，なる任意の k に対して，$P(\Psi(m(*))(2\cdot k-1))=P(\Psi(m(*))(2\cdot k))$」，

が従う。故に，

「$k\in\mathrm{dom}(\Psi(m(*)-1))$，なる任意の k に対して，$P(\Psi(m(*)-1)(k))=2\cdot P(\Psi(m(*))(2\cdot k-1))=2\cdot P(\Psi(m(*))(2\cdot k))$」，

が従う。故に，

「$k\in\mathrm{dom}(\Psi(m(*)-1))$，なる任意の k に対して，$P(\Psi(m(*))(2\cdot k-1))=P(\Psi(m(*))(2\cdot k))=1/2^{m(*)}$」，

が従う。一方，「$\max\mathrm{dom}(\Psi(m(*)))=2\cdot\max\mathrm{dom}(\Psi(m(*)-1))$」，なる事より，

「$k'\in\mathrm{dom}(\Psi(m(*)))$，なる任意の k' に対して，「$I\langle k'\rangle\in\mathrm{dom}(\Psi(m(*)-1))$，且つ，$k'=2\cdot I\langle k'\rangle-R\langle k'\rangle$」」，

が従う。故に，

「$k'\in\mathrm{dom}(\Psi(m(*)))$，なる任意の k' に対して，$P(\Psi(m(*))(k'))=1/2^{m(*)}$」，

が従う。故に，

$m(*)\notin M$。

これは，$m(*)\in M$，に反する。故に，

$M=\phi$。

$n\in\omega$，なる任意の n を固定する。$n\notin M$，が従う。M の定義，より，

「$k\in\mathrm{dom}(\Psi(n))$，なる任意の k に対して，$P(\Psi(n)(k))=1/2^n$」。

結論が従う。　［証明終］。

［命題6］。$\preccurlyeq$を，任意の，精密比較の公準を満たす，$\mathcal{A}$上の定性的確率，とし，且つ，P，及び，P'，の各各を，任意の，$\preccurlyeq$に対して概一致する，定量的確率，とする。

「任意の事象，A，に対して，$P(A)=P'(A)$」。

［証明］。［命題6.3］，より，「或，ω から Eq への写像，Ψ，が存在して，Ψ は$\preccurlyeq$に対する2進分割系である」，が従う。この Ψ を固定する。また，任意の事象，B，を固定する。［命題4］，より，

「$n\in\omega$，なる任意の n に対して，「

$P(\langle\Psi(n);k(B;\Psi(n))\rangle)\leqq P(B)\leqq P(\langle\Psi(n);k(B;\Psi(n))\rangle)+\max\{P(\Psi(n)(k))\mid k\in\mathrm{dom}(\Psi(n))\}$，

且つ,

$P'(\langle\Psi(n);k(B;\Psi(n))\rangle)\leqq P'(B)\leqq P'(\langle\Psi(n);k(B;\Psi(n))\rangle)+\max\{P'(\Psi(n)(k))|k\epsilon\mathrm{dom}(\Psi(n))\}$

」」。

一方,［命題5］, より,「$n\epsilon\omega$, なる任意の n, 及び, $k\epsilon\omega$, なる任意の k, に, 対して,「$k\epsilon\mathrm{dom}(\Psi(n))$, ならば, $P(\Psi(n)(k))=P'(\Psi(n)(k))=1/2^n$」」, が従う。故に,

「$n\epsilon\omega$, なる任意の n に対して,「

$P(\langle\Psi(n);k(B;\Psi(n))\rangle)\leqq P(B)\leqq P(\langle\Psi(n);k(B;\Psi(n))\rangle)+(1/2^n)$,

且つ,

$P'(\langle\Psi(n);k(B;\Psi(n))\rangle)\leqq P'(B)\leqq P'(\langle\Psi(n);k(B;\Psi(n))\rangle)+(1/2^n)$

」」。

故に,

「$n\epsilon\omega$, なる任意の n に対して,

$(-1)/2^n\leqq P(B)-P'(B)\leqq 1/2^n$

」。

ところが,「$\lim\langle(-1)/2^n;n\epsilon\omega\rangle=0$, 且つ, $\lim\langle 1/2^n;n\epsilon\omega\rangle=0$」。故に,

$P(B)=P'(B)$。

結論が従う。　　［証明終］。

［定義5］。P を, 任意の, $\mathcal{A}$ 上の定量的確率, とする。「P は定量的に精密である」, なる事を,

「任意の事象, B, 及び, $0\leqq\rho\leqq 1$, なる任意の実数, ρ, に, 対して,「或事象, C, が存在して,「$C\subseteqq B$, 且つ, $P(C)=\rho\cdot P(B)$」」」,

なる事である, と, 定義する。

［命題7］。$\preccurlyeq$ を, 任意の, 精密比較の公準を満たす, $\mathcal{A}$ 上の定性的確率, とする。次の,［結論1］, 及び,［結論2］, 及び,［結論3］, が, 従う。

［結論1］。「任意の, $\preccurlyeq$ に対して強一致する, $\mathcal{A}$ 上の定量的確率, P, 及び, 任意の, $\preccurlyeq$ に対して概一致する, $\mathcal{A}$ 上の定量的確率, Q, に, 対して, $Q=P$」。

［結論2］。「或, $\mathcal{A}$ 上の定量的確率, P, が存在して, P は $\preccurlyeq$ に対して強一致する」。

［結論3］。「任意の, $\preccurlyeq$ に対して概一致する, $\mathcal{A}$ 上の定量的確率, P, に, 対して, P は定量的に精密である」。

［証明］。「任意の, $\mathcal{A}$ 上の定量的確率, Q, に対して,「「Q は $\preccurlyeq$ に対して強一致する」, ならば,「Q は $\preccurlyeq$ に対して概一致する」」」, なる事, 及び,［命題6］, より,［結論1］, が従う。

［結論2］, を示す。［命題3］, より,「或, $\mathcal{A}$ 上の定量的確率, P, が存在して, P は $\preccurlyeq$ に対して概一致する」, を示せば,［結論2］, が従う。この, P, の存在を示す。

［命題6.3］, により,「或, ω から Eq への写像, Ψ, が存在して, Ψ は $\preccurlyeq$ に対する2進分割系である」, が従う。この, Ψ, を固定する。

［定義4］，における記法を利用する。

「任意の事象，B，及び，$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，$k(B,n)=k(B;\ \Psi(n))$」，

によって，各事象，B，及び，$n\epsilon\omega$，なる各 n，から構成される，各順序対，$\langle B,n\rangle$，に，対して，非負の整数，$k(B,n)$，を定義する。

陳述1。「任意の事象，B，及び，$n\epsilon\omega$，なる任意の n，に，対して，$2\cdot k(B,n)\leqq k(B,n+1)$」，

を示す。

任意の事象，B，及び，$n\epsilon\omega$，なる任意の n，を，固定する。［命題6.5］，より，「$k\epsilon\mathrm{dom}(\Psi(n))$，なる任意の k に対して，$\langle\Psi(n);\ k\rangle=\langle\Psi(n+1);\ 2\cdot k\rangle$」，が従う。故に，「$k\epsilon\mathrm{dom}(\Psi(n))$，なる任意の k に対して，「$\langle\Psi(n);\ k\rangle\preccurlyeq B$，ならば，$\langle\Psi(n+1);\ 2\cdot k\rangle\preccurlyeq B$」」。故に，$\langle\Psi(n+1);\ 2\cdot k(B,n)\rangle\preccurlyeq B$。ところが，「$l\epsilon\mathrm{dom}(\Psi(n+1))$，なる任意の l に対して，「$\langle\Psi(n+1);\ l\rangle\preccurlyeq B$，ならば，$l\leqq k(B,n+1)$」」。故に，$2\cdot k(B,n)\leqq k(B,n+1)$。

陳述1，が従う。

陳述2。「任意の事象，B，及び，任意の事象，C，及び，$n\epsilon\omega$，なる任意の n，に，対して，$k(B\cup C,n)\leqq k(B,n)+k(C,n)+1$」，

を示す。

任意の事象，B，及び，任意の事象，C，及び，$n\epsilon\omega$，なる任意の n，を，固定する。「$k^*=k(B\cup C,n)$，且つ，$k'=k(B,n)$」，と置く。$k^*\leqq k'+1$，の場合を考える。$0\leqq k(C,n)$，より，$1\leqq k(C,n)+1$，が従う。故に，$k'+1\leqq k'+(k(C,n)+1)$。故に，$k^*\leqq k'+k(C,n)+1$。$k'+1\lneqq k^*$，の場合を考える。この場合，$k^*\leqq\max\mathrm{dom}(\Psi(n))$，より，$k'+1\lneqq\max\mathrm{dom}(\Psi(n))$。故に，$k'+1\epsilon\mathrm{dom}(\Psi(n))$。$k'$ の最大性より，$B\not\preccurlyeq\langle\Psi(n);\ k'+1\rangle$。一方，「$\langle\Psi(n);\ k^*\rangle\preccurlyeq B\cup C$，且つ，$\langle\Psi(n);\ k^*\rangle=\langle\Psi(n);\ k'+1\rangle\cup(\langle\Psi(n);\ k^*\rangle\setminus\langle\Psi(n);\ k'+1\rangle)$」，より，$\langle\Psi(n);\ k'+1\rangle\cup(\langle\Psi(n);\ k^*\rangle\setminus\langle\Psi(n);\ k'+1\rangle)\preccurlyeq B\cup C$。故に，$\langle\Psi(n);\ k^*\rangle\setminus\langle\Psi(n);\ k'+1\rangle\not\preccurlyeq C$。ところが，［命題4.9］，より，$\langle\Psi(n);\ k^*-(k'+1)\rangle\approx\langle\Psi(n);\ k^*\rangle\setminus\langle\Psi(n);\ k'+1\rangle$。故に，$\langle\Psi(n);\ k^*-(k'+1)\rangle\not\preccurlyeq C$。故に，$k^*-(k'+1)\leqq k(C,n)$。故に，$k^*\leqq k(C,n)+(k'+1)$。故に，$k^*\leqq k'+k(C,n)+1$。

陳述2，が従う。

陳述3。「任意の事象，B，及び，任意の事象，C，及び，$n\epsilon\omega$，なる任意の n，に，対して，「$B\cap C=\phi$，ならば，$k(B,n)+k(C,n)\leqq k(B\cup C,n)$」」，

を示す。

任意の事象，B，及び，任意の事象，C，及び，$n\epsilon\omega$，なる任意の n，を，固定する。また，$B\cap C=\phi$，と仮定する。「$k^*=k(B\cup C,n)$，且つ，$k'=k(B,n)$」，と置く。$C\not\preccurlyeq\langle\Psi(n);\ k^*\rangle\setminus\langle\Psi(n);\ k'\rangle$，の場合を考える。$\langle\Psi(n);\ k(C,n)\rangle\preccurlyeq\langle\Psi(n);\ k^*\rangle\setminus\langle\Psi(n);\ k'\rangle$，が従う。一方，［命題4.9］，より，$\langle\Psi(n);\ k^*\rangle\setminus\langle\Psi(n);\ k'\rangle\approx\langle\Psi(n);\ k^*-k'\rangle$。故に，$\langle\Psi(n);\ k(C,n)\rangle\preccurlyeq\langle\Psi(n);\ k^*-k'\rangle$。一方，［命題4.6］，より，「$j\epsilon\mathrm{dom}(\Psi(n))$，なる任意の j に対して，$\phi\not\preccurlyeq\Psi(n)(j)$」。故に，［命題4.7］，より，$k(C,n)\leqq k^*-k'$。故に，$k'+k(C,n)\leqq k^*$。次に，$\langle\Psi(n);\ k^*\rangle\setminus\langle\Psi(n);\ k'\rangle\not\preccurlyeq C$，の場合を考える。「$\langle\Psi(n);\ k'\rangle\preccurlyeq B$，且つ，$B\cap C=\phi$」，より，$\langle\Psi(n);\ k'\rangle\cup(\langle\Psi(n);\ k^*\rangle\setminus\langle\Psi(n);\ k'\rangle)\not\preccurlyeq B\cup C$，が従う。ところが，$\langle\Psi(n);\ k^*\rangle=\langle\Psi(n);\ k'\rangle\cup(\langle\Psi(n);\ k^*\rangle\setminus\langle\Psi(n);\ k'\rangle)$。故に，$\langle\Psi(n);\ k^*\rangle\not\preccurlyeq B\cup C$。故に，「$\langle\Psi(n);\ \max$

$\mathrm{dom}(\Psi(n))\rangle = S$, 且つ, $B \cup C \preccurlyeq S$」, より, $k^* \leqq \max \mathrm{dom}(\Psi(n))$。故に, $k^*+1 \leqq \max \mathrm{dom}(\Psi(n))$。故に, $k^*+1 \in \mathrm{dom}(\Psi(n))$。$k^*$ の最大性より, $B \cup C \not\preccurlyeq \langle \Psi(n) ; k^*+1\rangle$。ところが, 「$\langle \Psi(n) ; k'\rangle \preccurlyeq B$, 且つ, $B \cap C = \phi$」。故に, $C \not\preccurlyeq \langle \Psi(n) ; k^*+1\rangle \setminus \langle \Psi(n) ; k'\rangle$。[命題4. 9], より, $\langle \Psi(n) ; k^*+1\rangle \setminus \langle \Psi(n) ; k'\rangle \approx \langle \Psi(n) ; (k^*+1)-k'\rangle$。故に, $C \not\preccurlyeq \langle \Psi(n) ; (k^*+1)-k'\rangle$。一方, 「$\langle \Psi(n) ; k^*-k'\rangle \approx \langle \Psi(n) ; k^*\rangle \setminus \langle \Psi(n) ; k'\rangle$, 且つ, $\langle \Psi(n) ; k^*\rangle \setminus \langle \Psi(n) ; k'\rangle \not\preccurlyeq C$」, より, $\langle \Psi(n) ; k^*-k'\rangle \not\preccurlyeq C$。故に, 「$\langle \Psi(n) ; k^*-k'\rangle \not\preccurlyeq C$, 且つ, $C \not\preccurlyeq \langle \Psi(n) ; (k^*-k')+1\rangle$」, が従う。故に, [命題4. 1], 及び, [命題3. 4], より, $k(C, n) = k^*-k'$。故に, $k'+k(C, n) = k^*$。

陳述 3, が従う。

陳述 4。「任意の事象, B, に対して, 「ω を添数集合とし, 各項が, 非負の有理数, である, 数列, $\langle k(B, n)/2^n ; n \in \omega\rangle$, は, 上に有界なる非減少の数列である」」,

を示す。

任意の事象, B, 及び, $n \in \omega$, なる任意の n, を, 固定する。$k(B, n) = \max\{k \mid k \in \mathrm{dom}(\Psi(n)) \cup \{0\}$, 且つ, $\langle \Psi(n) ; k\rangle \preccurlyeq B\}$, より, $k(B, n) \leqq \max \mathrm{dom}(\Psi(n))$。ところが, [命題6. 4], より, $\max \mathrm{dom}(\Psi(n)) = 2^n$。故に, $k(B, n) \leqq 2^n$。故に, $k(B, n)/2^n \leqq 1$。一方, 陳述 1, より, $2 \cdot k(B, n) \leqq k(B, n+1)$。故に, $2^n \cdot 2 \cdot k(B, n) \leqq 2^n \cdot k(B, n+1)$。故に, $(1/2^n) \cdot k(B, n) \cdot 2^{n+1} \leqq k(B, n+1)$。故に, $(1/2^n) \cdot k(B, n) \leqq k(B, n+1) \cdot (1/2^{n+1})$。故に, $k(B, n)/2^n \leqq k(B, n+1)/2^{n+1}$。

陳述 4, が従う。

陳述 5。「任意の事象, B, に対して, 実数列, $\langle k(B, n)/2^n ; n \in \omega\rangle$, は収束する」。

これは, 陳述 4, より従う。

「任意の事象, B, に対して,

$$P(B) = \lim \langle k(B, n)/2^n ; n \in \omega\rangle$$

」,

によって, 各事象, B, に対して, 実数, $P(B)$, を定義する。この定義は, 陳述 5, により確定する。

陳述 6。「任意の事象, B, に対して, $0 \leqq P(B)$」。

これは, 「任意の事象, B, 及び, $n \in \omega$, なる任意の n, に, 対して, $k(B, n)/2^n$ は非負の有理数である」, なる事, より, 従う。

陳述 7。「任意の事象, B, 及び, 任意の事象, C, に, 対して, 「$B \cap C = \phi$, ならば, $P(B \cup C) = P(B) + P(C)$」」,

を示す。

任意の事象, B, 及び, 任意の事象, C, を, 固定する。$B \cap C = \phi$, と仮定する。陳述 2, 及び, 陳述 3, より,

「$n \in \omega$, なる任意の n に対して, $(k(B, n)/2^n) + (k(C, n)/2^n) \leqq k(B \cup C, n)/2^n \leqq (k(B, n)/2^n) + (k(C, n)/2^n) + (1/2^n)$」,

が従う。故に,

「$n \in \omega$, なる任意の n に対して, $0 \leqq (k(B \cup C, n)/2^n) - ((k(B, n)/2^n) + (k(C, n)/2^n)) \leqq 1/2^n$」。

$\lim\langle 1/2^n ; n\epsilon\omega\rangle=0$, より,

$\lim\langle (k(B\cup C, n)/2^n)-((k(B, n)/2^n)+(k(C, n)/2^n)) ; n\epsilon\omega\rangle=0$,

が従う。陳述5，より,

$P(B\cup C)-(P(B)+P(C))=0$,

が従う。

陳述7，が従う。

陳述8。$P(S)=1$。

これは，$k(S, n)=2^n$，より従う。

陳述9。「「各事象，B，に対する値，は，$P(B)$，である」，によって定義される，$\mathcal{A}$から実数体への写像，P，は，$\mathcal{A}$上の定量的確率である」。

これは，陳述6，及び，陳述7，及び，陳述8，より，従う。

陳述10。「任意の事象，A，及び，任意の事象，B，に，対して，「$A\preccurlyeq B$，ならば，$P(A)\leqq P(B)$」」,

を示す。

任意の事象，A，及び，任意の事象，B，を，固定する。$A\preccurlyeq B$，と仮定する。「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，$\langle\Psi(n) ; k(A, n)\rangle\preccurlyeq A$」，より，「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，$\langle\Psi(n) ; k(A, n)\rangle\preccurlyeq B$」。故に，「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，$k(A, n)\leqq k(B, n)$」。故に，「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，$k(A, n)/2^n\leqq k(B, n)/2^n$」。故に，「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，$0\leqq(k(B, n)/2^n)-(k(A, n)/2^n)$」。故に，陳述4，より，$0\leqq P(B)-P(A)$。

陳述10，が従う。

陳述11。「P は，$\preccurlyeq$に対して概一致する，$\mathcal{A}$上の定量的確率である」。

陳述11，は，陳述9，及び，陳述10，より，従う。

［結論2］，が従う。

［結論3］，を示す。任意の，$\preccurlyeq$に対して概一致する，$\mathcal{A}$上の定量的確率，P，を，固定する。［結論1］，及び，［結論2］，を，前提とするのならば，この様な，P，は，一意的に存在し，且つ，$\preccurlyeq$に対して強一致する，なる事が従う。しかし，この，［結論3］に対する証明，において，［結論1］，及び，［結論2］，を，前提とする必要はない。

任意の事象，B，及び，$0\leqq\rho\leqq 1$，なる任意の実数，ρ，を，固定する。任意の，$\preccurlyeq$に対する2進分割系，Ψ，を固定する。［命題6.3］，より，この様な，Ψ，は存在する。

「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，

$\nu(B, n)=\max\{k\mid k\epsilon\mathrm{dom}(\Psi(n))\cup\{0\}$，且つ，$P(B\cap\langle\Psi(n) ; k\rangle)\leqq\rho\cdot P(B)\}$

」,

によって，$n\epsilon\omega$，なる各 n に対して，非負の整数，$\nu(B, n)$，を定義する。「$\langle\Psi(n) ; 0\rangle=\phi$，且つ，$P(\phi)=0$，且つ，$0\leqq\rho\cdot P(B)$，且つ，「$n\epsilon\omega$，なる任意の n，及び，$k\epsilon\omega$，なる任意の k，に，対して，「$k\epsilon\mathrm{dom}(\Psi(n))$，ならば，$k\leqq 2^n$」」」，より，この定義は確定する。

背理法による。「「或事象，C，が存在して，「$C\subseteqq B$，且つ，$P(C)=\rho\cdot P(B)$」」，には非ず」，

と仮定して矛盾を導く。

背理法の為の仮定，より，

陳述12。「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，$P(B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)\rangle)\subsetneqq\rho\cdot P(B)$」，

が従う。故に，「「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，$\langle\Psi(n);\max\mathrm{dom}(\Psi(n))\rangle=S$」，且つ，$\rho\cdot P(B)\leqq P(B)$」，より，「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，$\nu(B,n)\subsetneqq\max\mathrm{dom}(\Psi(n))$」。故に，「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，$\nu(B,n)+1\epsilon\mathrm{dom}(\Psi(n))$」。故に，$n\epsilon\omega$，なる各 n に対する，$\nu(B,n)$ の最大性，より，

陳述13。「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，$\rho\cdot P(B)\subsetneqq P(B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)+1\rangle)$」，

が従う。

陳述14。「$n\epsilon\omega$，なる任意の n，及び，$k\epsilon\omega$，なる任意の k，に，対して，$B\cap\langle\Psi(n+k);\nu(B,n+k)\rangle\subsetneqq B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)+1\rangle$」，

を示す。

$n\epsilon\omega$，なる任意の n，及び，$k\epsilon\omega$，なる任意の k，を，固定する。[命題6.5]，より，

$\langle\Psi(n);\nu(B,n)+1\rangle=\langle\Psi(n+k);(\nu(B,n)+1)\cdot 2^k\rangle$，

が従う。故に，陳述13，より，

$\rho\cdot P(B)\subsetneqq P(B\cap\langle\Psi(n+k);(\nu(B,n)+1)\cdot 2^k\rangle)$。

一方，陳述12，より，

$P(B\cap\langle\Psi(n+k);\nu(B,n+k)\rangle)\subsetneqq\rho\cdot P(B)$。

ところが，[命題4.2]，より，「$\langle\Psi(n+k);(\nu(B,n)+1)\cdot 2^k\rangle\subseteqq\langle\Psi(n+k);\nu(B,n+k)\rangle$，或いは，$\langle\Psi(n+k);\nu(B,n+k)\rangle\subsetneqq\langle\Psi(n+k);(\nu(B,n)+1)\cdot 2^k\rangle$」，が従う。故に，$\rho\cdot P(B)=\rho\cdot P(B)$，より，

$B\cap\langle\Psi(n+k);\nu(B,n+k)\rangle\subsetneqq B\cap\langle\Psi(n+k);(\nu(B,n)+1)\cdot 2^k\rangle$。

陳述14，が従う。

$C=\{x\mid x\epsilon B$，且つ，「$n\epsilon\omega$，なる或 n が存在して，$x\epsilon\langle\Psi(n);\nu(B,n)\rangle$」$\}$，

と置く。

陳述15。「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，$B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)\rangle\subseteqq C$」。

これは，C の定義，より，従う。

陳述16。「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，$C\subseteqq B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)+1\rangle$」，

を示す。

$n\epsilon\omega$，なる任意の n，及び，$x\epsilon C$，なる任意の x，を，固定する。C の定義，より，「$n'\epsilon\omega$，なる或 n' が存在して，$x\epsilon B\cap\langle\Psi(n');\nu(B,n')\rangle$」，が従う。この n' を固定する。$n'\leqq n$，の場合を考える。[命題6.5]，より，$\langle\Psi(n');\nu(B,n')\rangle=\langle\Psi(n);\nu(B,n')\cdot 2^{n-n'}\rangle$。故に，陳述12，及び，$\nu(B,n)$ の最大性，より，$\nu(B,n')\cdot 2^{n-n'}\leqq\nu(B,n)$。故に，[命題4.1]，より，$\langle\Psi(n);\nu(B,n')\cdot 2^{n-n'}\rangle\subseteqq\langle\Psi(n);\nu(B,n)\rangle$。故に，$\langle\Psi(n');\nu(B,n')\rangle\subseteqq\langle\Psi(n);\nu(B,n)\rangle$。故に，$B\cap\langle\Psi(n');\nu(B,n')\rangle\subseteqq B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)\rangle$。故に，$x\epsilon B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)\rangle$。ところが，陳述14，より，$B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)\rangle\subsetneqq B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)+1\rangle$。故に，$x\epsilon B\cap\langle\Psi(n);$

$\nu(B,n)+1\rangle$。次に，$n\lneqq n'$，の場合を考える。陳述14，より，$B\cap\langle\Psi(n');\nu(B,n')\rangle\subsetneqq B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)+1\rangle$。故に，$x\epsilon B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)+1\rangle$。故に，「$x\epsilon C$，なる任意の x に対して，$x\epsilon B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)+1\rangle$」，が従う。

陳述16，が従う。

陳述17。「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，$P(B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)\rangle)\leqq P(C)\leqq P(B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)+1\rangle)$」。

これは，「$C\epsilon\mathcal{A}$，且つ，P は$\mathcal{A}$上の定量的確率である」，なる事，及び，陳述15，及び，陳述16，より，従う。

陳述18。「$n\epsilon\omega$，なる任意の n に対して，
$(-1)/2^n\lneqq P(C)-\rho\cdot P(B)\lneqq 1/2^n$」，

を示す。

$n\epsilon\omega$，なる任意の n を固定する。陳述12，及び，陳述13，より，

$P(B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)\rangle)\lneqq\rho\cdot P(B)\lneqq P(B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)+1\rangle)$。

一方，$\langle\Psi(n);\nu(B,n)\rangle\cap\Psi(n)(\nu(B,n)+1)=\phi$，より，$P(B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)+1\rangle)=P(B\cap\langle\Psi(n);\nu(B,n)\rangle)+P(B\cap\Psi(n)(\nu(B,n)+1))$，が従う。故に，陳述17，より，

$-P(B\cap\Psi(n)(\nu(B,n)+1))\lneqq P(C)-\rho\cdot P(B)\lneqq P(B\cap\Psi(n)(\nu(B,n)+1))$，

が従う。一方，「P は，$\preccurlyeq$ に対して概一致する，$\mathcal{A}$上の定量的確率，である」，なる事，及び，［命題5］，より，

「$P(B\cap\Psi(n)(\nu(B,n)+1))\leqq P(\Psi(n)(\nu(B,n)+1))$，且つ，$P(\Psi(n)(\nu(B,n)+1))=1/2^n$」。

故に，

$(-1)/2^n\lneqq P(C)-\rho\cdot P(B)\lneqq 1/2^n$。

陳述18，が従う。

陳述19。「$C\epsilon\mathcal{A}$，且つ，$C\subseteqq B$，且つ，$P(C)=\rho\cdot P(B)$」。

これは，C の定義，及び，陳述18，及び，「$\lim\langle 1/2^n;n\epsilon\omega\rangle=0$，且つ，$\lim\langle(-1)/2^n;n\epsilon\omega\rangle=0$」，より，従う。

陳述19，は，背理法の為の仮定，に反する。

［結論3］，が従う。

結論達が従う。　［証明終］。

参考文献達。

［1］ デーデキント，ユリウス ヴィルヘルム リヒャルト (Dedekind, Julius Wilhelm Richard)，著，河野伊三郎，訳，(1961)，『数について――連続性と数の本質――』，岩波文庫 (33-924-1)，岩波書店，東京。

この訳書には，「第一篇　連続性と無理数」，及び，「第二篇　数とは何か，何であるべきか」，の，2個の論文達，が収められている。また，141頁から163頁まで，において，訳者による解説が，付加されている。第一篇は，

Dedekind, R., (1872), Stetigkeit und irrationale Zahlen, von Friedr. Vieweg & Sohn, Verlag, Braunschweig.

からの邦訳であり，また，第二篇は，

Dedekind, R., (1887), Was sind und was sollen die Zahlen? von Friedr. Vieweg & Sohn, Verlag, Braunschweig,

からの邦訳である。第二篇に対する第一版序文，

(この序文は，ハルツブルク (Harzburg) において，1887年，10月5日，に書かれた)，の，冒頭の2個の文達，において，デーデキントは次の様に述べている。

[河野氏訳]。証明できることは，科学においては証明なしに信頼すべきではない。この要請がこんなにも明白であるように思われるのに，私の信ずるところでは，最も単純な科学，すなわち数の理論を取り扱う論理学の部分，の基礎を研究するに当ってさえも，最近の叙述*) によってさえも決して満たされているとは見なせないのである。
[訳文引用終]。

元の訳文は縦書きであり，「述*)」，の部分は，元の訳文においては，「述*」，となっている。この星印は，この箇所に対応する，原文における箇所，に，対する，デーデキントによる，脚註，の，存在，を，示す。また，この脚註に対応する，河野氏による，訳，は，[1]，における，42頁から43頁にかけて，存在している。また，この，原註に対する，訳，において，河野氏は，「訳者註」，と断わった上で，補促的註を添加している。なお，原文は次の様である。

[原文]。Was beweisbar ist, soll in der Wissenschaft nicht ohne Beweis geglaubt werden. So einleuchtend diese Forderung erscheint, so ist sie doch, wie ich glaube, selbst bei der Begründung der einfachsten Wissenschaft, nämlich desjenigen Teiles der Logik, welcher die Lehre von den Zahlen behandelt, auch nach den neuesten Darstellungen*) noch keineswegs als erfüllt anzusehen.
[原文引用終]。

この第二篇に対する，第二版序文，(この序文は，ハルツブルクにおいて，1893年，8月24日，に書かれた)，において，デーデキントは，「無限の定義」に対する彼の強い関心が，彼がこの論述を展開する事，への，動機，を，与えるに至った事，を，述べている。しかし，筆者は，この論文を，有限集合の概念，に対する，方法論的基礎づけを確立した，一個の論述である，と，視るのである。つまり，「「「自然数系列の概念が，既に確定している」，なる前提の下に，有限集合の概念，を，この自然数系列の属性達によって，規定する」，なる立場，ではなく，「「その集合は有限集合である」，なる陳述を，その問題となっている，任意の，しかしながら固定された，集合，が，所有する，一個の属性，に，基づいて，規定する」，なる立場，に，立脚する」，と，言う意味において，自己完結的である，一個の有限論，を，確立した，一個の論述である，と，視るのである。

[2] 日本数学会編集，(1985)，『岩波数学辞典，第3版』，岩波書店，東京。

この辞典の，839頁，左側，に，参考文献達が在るのだが，そこに在る，サヴェジ氏の主著，(筆者のこの論文における文献 [3])，の表題において，「foundation」，となっているのは，「foundations」，としなければならない。

[3] Savage, Leonard Jimmie, (1972), *The Foundations of Statistics, Second Revised Edition*, Dover Publications, New York, 但し，この著書に対する第1版は，1954年に，John Wiley & Sons, New York, より出版されている。

[4] 園信太郎，(1987年3月)，「Savage の行為の或抽象化，Dedekind の数，個人的確率，及び，von Neumann-Morgenstern 効用，について」，経済学研究(北海道大学)，第36巻第4号，1(457)-16(472)。

[5] 園信太郎，(1988年3月)，「サヴェジ氏の哲学に対する簡潔なる序説」，経済学研究 (北海道大学)，第37巻第4号，48(488)-61(501)。

この論文 [5] の論体に対して，吉野悦雄経済学博士 (ワルシャワ中央計画統計大学)，より，激甚的批判を受けた事，を，付記しておく。しかしながら，そしてまた，当然の事ながら，今回のこの論文も亦，この論体を，増強的に継承する事，と，なったのである。

謝辞。

近代経済研究会 (1988年，1月30日，土，北海道大学経済学部)，において，貴重なる時間を割いて，筆者の脳髄に生産的なる刺激を与えて下さった，小林好宏先生 (北海道大学経済学部)，そして，今泉佳久先生 (北海道大学経済学部，当時)，さらにまた，発表の場所を設定して下さった，増田辰良助手 (北海道大学経済学部)，への謝辞，を，ここに記す。

(1988年，3月，了)