



Title	サヴェジ書における殆ど一様な分割(1)定義
Author(s)	園, 信太郎
Citation	経済學研究, 38(2), 76-131
Issue Date	1988-09
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/31802
Type	departmental bulletin paper
File Information	38(2)_P76-131.pdf



<研究ノート>

サヴェジ書における殆ど一様な分割 (1) 定義

園 信太郎

第1節 目的

(1を最初の元とする自然数系列を, N , と表記する。) サヴェジ書 [3] における, 「34頁中の上から第3番目の段落における, 冒頭から第3番目の行まで」, において, 一個の文によって, 「 n 重の 殆ど一様な分割」, なる概念が, 「定義」, されている。この, 「定義」, に対する, 筆者のでき得る限りの範囲内での, 自己完結的接近, を, 提示する事, が, この論述の目的である。

非常に, 一般的且つ効率的, なる構成物, を, 導入する事, を, でき得る限り回避し, 且つ, 各証明を, でき得る限り自己完結的に, 構成する, という事を試みるのである。

以下の論述においては, 任意の自然数と任意の自然数との間に定義される, 最もなじみのある演算, 即ち, 「加法」, は, 導入される事が, 終に, ないのではあるが, が, しかし, 任意の自然数, に対して, 「次の自然数」, を, 指定する操作, 所謂, 「1を加える」事, 及び, 1ではない任意の自然数, に対して, 「直前の自然数」, を, 指定する操作, 所謂, 「1を減じる」事, 及び, それらの操作達に対する素朴なる「経験」, は, 暗黙の内に, 想定されるのである。だが, 「 $1+1$ 」に対する略式の表記法としての「2」, は, 登場する事がないのである。また, 「零」としての「0」, は, 古代的信条に基づいて, 自然数系列の中に含ませる事を, 敢

えて, しなかったのである。

無限集合の概念, を, 「明白な形式」において導入する必要性, などは, 全く, ないのであり, それ故に, 「 N は無限集合である」, なる陳述は現われないのである。しかし, 有限集合の概念, は, 第4節において, 導入されるのである。

さらにまた, 通常の様式における数学的帰納法, を, 敢えて, 利用せずに, 「 N における任意の部分集合は, もしそれが空集合ではないのなら, その部分集合において最小である, 元, が存在する」, と言う, 命題, と, 「相手の展開する論述の矛盾, を, 執拗に探査し, 且つ, もしその様な矛盾が存在するのなら, その矛盾の所在を執拗に提示する」なる立場から見た, 背理法, と, 「いかなる「対象」も, その集合には属さない」と言う所のその集合, 即ち, 空集合, とが, 結合して機能する様子, を, 執拗に観察する事にした。

この論述の自己完結性を少しでも高める為に, ここで, 7個の命題達及び5個の定義達, を提示する事にする。なお, [定義1], は, 公理的集合論の知恵を借用したのである。

[命題1]。「任意の a 及び任意の b 及び任意の a' 及び任意の b' , に対して, 「 $a=a'$, 且つ, $b=b'$ 」, ならば, 「 $\{a, b\}=\{a', b'\}$ 」, が従う。

[証明]. 任意の a 及び任意の b 及び任意の a' 及び任意の b' , の各各を, 固定する。「 $a=a'$, 且つ, $b=b'$ 」, と仮定する。

$x \in \{a, b\}$ なる任意の x を固定する。「 $x=a$, 或いは, $x=b$ 」, が従う。 $x=a$, なる場合を考える。 $a=a'$, より, $x=a'$, が従う。 $x=b$, なる場合を考える。 $b=b'$, より, $x=b'$, が従う。故に, 「 $x=a'$, 或いは, $x=b'$ 」, が従う。故に, $x \in \{a', b'\}$, が従う。故に, 「 $x \in \{a, b\}$ なる任意の x に対して, $x \in \{a', b'\}$ 」, が従う。

$x' \in \{a', b'\}$ なる任意の x' を固定する。「 $x'=a'$, 或いは, $x'=b'$ 」, が従う。 $x'=a'$, なる場合を考える。 $a=a'$, より, $x'=a$, が従う。 $x'=b'$, なる場合を考える。 $b=b'$, より, $x'=b$, が従う。故に, 「 $x'=a$, 或いは, $x'=b$ 」, が従う。故に, $x' \in \{a, b\}$, が従う。故に, 「 $x' \in \{a', b'\}$ なる任意の x' に対して, $x' \in \{a, b\}$ 」, が従う。

命題が従う。

[証明終]。

[命題2]。「任意の a 及び任意の b 及び任意の a' 及び任意の b' , に対して, 「 $\{a, b\} = \{a', b'\}$, 且つ, $a=a'$ 」, ならば, $b=b'$ 」, が従う。

[証明]. 任意の a 及び任意の b 及び任意の a' 及び任意の b' , の各各を, 固定する。「 $\{a, b\} = \{a', b'\}$, 且つ, $a=a'$ 」, と仮定する。

「 $b=b'$, には非ず」, と仮定して矛盾を導く。 $b \in \{a, b\}$. ところが, $\{a, b\} = \{a', b'\}$. 故に, $b \in \{a', b'\}$. 故に, 「 $b=a'$, 或いは, $b=b'$ 」. ところが, $b \neq b'$. 故に, $b=a'$. ところが, $a=a'$. 故に, $b=a$. $b' \in \{a', b'\}$. ところが, $\{a, b\} = \{a', b'\}$. 故に, $b' \in \{a, b\}$. 故に, 「 $b'=a$, 或いは, $b'=b$ 」. ところが, $b \neq b'$. 故に,

$b'=a$. 故に, 「 $b=a$, 且つ, $b'=a$ 」. 故に, $b=b'$. 故に, 「 $b=b'$, 且つ, $b \neq b'$ 」. 故に, 矛盾が生じる。

故に, $b=b'$.

[証明終]。

[命題3]。「任意の x 及び任意の y 及び任意の z , に対して, 「 $\{x, x\} = \{y, z\}$, ならば, 「 $y=x$, 且つ, $z=x$ 」」, が従う。

[証明]. 任意の x 及び任意の y 及び任意の z , の各各を, 固定する。 $\{x, x\} = \{y, z\}$, と仮定する。「 $y \in \{y, z\}$, 且つ, $z \in \{y, z\}$ 」, より, 「 $y \in \{x, x\}$, 且つ, $z \in \{x, x\}$ 」, が従う。故に, 「 $y=x$, 或いは, $y=x$ 」, 且つ, 「 $z=x$, 或いは, $z=x$ 」, が従う。故に, 「 $y=x$, 且つ, $z=x$ 」, が従う。 [証明終]。

[定義1]。「任意の x 及び任意の y , に対して, 「任意の s に対して, 「 $s \in \{\{x, x\}, \{x, y\}\}$, なる場合, 且つ, その場合に限って, $s \in \langle x, y \rangle$ 」」, によって, 各 x 及び各 y , に対して, 集合, $\langle x, y \rangle$, を定義する。即ち, 「任意の x 及び任意の y , に対して, $\langle x, y \rangle = \{\{x, x\}, \{x, y\}\}$ 」, によって, 各 x 及び各 y , に対して, 集合, $\langle x, y \rangle$, を定義する。この $\langle x, y \rangle$ は, x と y との順序対, と呼ばれる。

[命題4]。「任意の x 及び任意の y 及び任意の x' 及び任意の y' , に対して, 「 $x=x'$, 且つ, $y=y'$ 」, なる場合, 且つ, その場合に限って, $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle$ 」, が従う。

[証明]. 任意の x 及び任意の y 及び任意の x' 及び任意の y' , の各各を, 固定する。

「 $x=x'$, 且つ, $y=y'$ 」, と仮定する。 $x=x'$, より, 「 $x=x'$, 且つ, $x=x'$ 」, が従う。故に, [命題1] より, $\{x, x\} = \{x', x'\}$, が従う。

一方、「 $x=x'$ 、且つ、 $y=y'$ 」及び「命題1」より、「 $\{x, y\}=\{x', y'\}$ 」が従う。故に、「 $\{x, x\}=\{x', x'\}$ 、且つ、 $\{x, y\}=\{x', y'\}$ 」が従う。故に、「命題1」より、「 $\{\{x, x\}, \{x, y\}\}=\{\{x', x'\}, \{x', y'\}\}$ 」が従う。故に、「定義1」より、「 $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle$ 」が従う。

$\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle$ 、と仮定する。「定義1」より、「 $\{\{x, x\}, \{x, y\}\}=\{\{x', x'\}, \{x', y'\}\}$ 」が従う。 $\{x, x\} \in \{\{x, x\}, \{x, y\}\}$ より、「 $\{x, x\} \in \{\{x', x'\}, \{x', y'\}\}$ 」が従う。故に、「 $\{x, x\}=\{x', x'\}$ 、或いは、 $\{x, x\}=\{x', y'\}$ 」が従う。 $\{x, x\}=\{x', x'\}$ なる場合を考える。「命題3」より、「 $x'=x$ 、且つ、 $x'=x$ 」が従う。故に、「 $x'=x$ 」が従う。一方、「 $\{\{x, x\}, \{x, y\}\}=\{\{x', x'\}, \{x', y'\}\}$ 」及び「命題2」より、「 $\{x, y\}=\{x', y'\}$ 」が従う。ところが、「 $x=x'$ 」故に、「命題2」より、「 $y=y'$ 」故に、「 $x=x'$ 、且つ、 $y=y'$ 」が従う。 $\{x, x\}=\{x', y'\}$ なる場合を考える。「 $\{x', x'\}, \{x', y'\}\}=\{\{x', y'\}, \{x', x'\}\}$ より、「 $\{\{x, x\}, \{x, y\}\}=\{\{x', y'\}, \{x', x'\}\}$ 」が従う。故に、「命題2」より、「 $\{x, y\}=\{x', x'\}$ 」が従う。故に、「 $\{x', x'\}=\{x, y\}$ 」が従う。故に、「命題3」より、「 $x=x'$ 、且つ、 $y=x'$ 」が従う。一方、「 $\{x, x\}=\{x', y'\}$ 」及び「命題3」より、「 $x'=x$ 、且つ、 $y'=x$ 」が従う。故に、「 $x'=y'$ 」が従う。故に、「 $x=x'$ 、且つ、 $y=x'$ 、且つ、 $x'=y'$ 」が従う。故に、「 $x=x'$ 、且つ、 $y=y'$ 」が従う。

命題が従う。

〔証明終〕。

〔記法〕。 $\{x, x\}$ なる表記の様式を、以下においては、「 $\{x\}$ 」と略記する。即ち、「任意の x に対して、「 $\{x\}=\{x, x\}$ 」によって、各 x に対して、表記法、「 $\{x\}$ 」を定義する。

〔定義2〕。「任意の集合 A 及び任意の集合 B 、に対して、「 $A \times B = \{z \mid \text{或 } x \text{ 及び或 } y, \text{ が存在}$

して、「 $z = \langle x, y \rangle$ 、且つ、 $x \in A$ 、且つ、 $y \in B\}$ 」によって、各集合 A 及び各集合 B 、に対して、集合、「 $A \times B$ 」を定義する。この $A \times B$ は、 A と B との直積、と呼ばれる。

〔定義3〕。「任意の R 及び任意の集合 A 、に対して、「 $R \subseteq A \times A$ 、の場合、且つ、その場合に限って、「 R は A 上の2項関係である」』、と定義する。

〔記法〕。 A を任意の集合とし、且つ、 R を、任意の、 A 上の2項関係、とする。「 $x \in A$ なる任意の x 及び $y \in A$ なる任意の y 、に対して、「 $\langle x, y \rangle \in R$ 、なる場合、且つ、その場合に限って、「 xRy 」』によって、「 $x \in A$ なる各 x 及び $y \in A$ なる各 y 、に対して、表記法、「 xRy 」を定義する。

〔命題5〕。 A を任意の集合とし、且つ、 R を、任意の、 A 上の2項関係、とする。「各々が、任意の、 A の元である、 x 及び y 及び x' 及び y' 、に対して、「 $\{xRy, \text{ 且つ、} x=x', \text{ 且つ、} y=y'\}$ 、ならば、「 $x'Ry'$ 」」が従う。

〔証明〕。各々が、任意の、 A の元である、 x 及び y 及び x' 及び y' 、の各各を、固定する。「 xRy 、且つ、 $x=x'$ 、且つ、 $y=y'$ 」と仮定する。「命題4」より、「 $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle$ 」が従う。故に、「 $\langle x, y \rangle \in R$ 、且つ、「 $\langle x, y \rangle = \langle x', y' \rangle$ 」が従う。ところが、「任意の s 及び任意の t 及び任意の集合 B 、に対して、「 $\{s \in B, \text{ 且つ、} s=t\}$ 、ならば、「 $t \in B$ 」」故に、「 $\langle x', y' \rangle \in R$ 」が従う。故に、「 $x'Ry'$ 」が従う。〔証明終〕。

〔命題6〕。 A を任意の集合とし、且つ、 R を、任意の、 A 上の2項関係、とする。「 $x \in A$ なる任意の x 及び $y \in A$ なる任意の y 、に対して、「 xRy 、或いは、「 yRx 」』と仮定する。「 $x \in A$ なる任意の x 及び $y \in A$ なる任意の y 、に対して、「 $x=y$ 、ならば、「 xRy 」」が従う。

[証明]. $x \in A$ なる任意の x 及び $y \in A$ なる任意の y , の各各を, 固定する. $x=y$, と仮定する. 命題における仮定, より, 「 xRx , 或いは, xRx 」, が従う. 故に, xRx , が従う. 故に, $\langle x, x \rangle \in R$, が従う. ところが, 「 $x=x$, 且つ, $x=y$ 」. 故に, [命題 4], より, $\langle x, x \rangle = \langle x, y \rangle$, が従う. 故に, 「 $\langle x, x \rangle \in R$, 且つ, $\langle x, x \rangle = \langle x, y \rangle$ 」, が従う. ところが, 「任意の s 及び任意の t 及び任意の集合 B , に対して, 「 $s \in B$, 且つ, $s=t$ 」, ならば, $t \in B$ 」. 故に, $\langle x, y \rangle \in R$, が従う. 故に, xRy , が従う.

[証明終].

[定義 4]. 「任意の集合 A 及び任意の集合 B 及び任意の集合 f , に対して, 「 f は, 以下の, 性質 1 及び性質 2 及び性質 3, なる性質達, を, 所有する」, なる場合, 且つ, その場合に限って, $f \in \text{Map}(A, B)$ 」, によって集合, $\text{Map}(A, B)$, を定義する.

性質 1. $f \subseteq A \times B$.

性質 2. 「 $x \in A$ なる任意の x に対して, 「 $y \in B$ なる或 y が存在して, $\langle x, y \rangle \in f$ 」.

性質 3. 「 $x \in A$ なる任意の x 及び $y \in B$ なる任意の y 及び $z \in B$ なる任意の z , に対して, 「 $\langle x, y \rangle \in f$, 且つ, $\langle x, z \rangle \in f$ 」, ならば, $y=z$ 」.

この f は, A から B への写像, と呼ばれる. この定義より, 「任意の集合 B に対して, $\text{Map}(\phi, B) = \{\phi\}$ 」, が従う.

[記法]. [定義 4] における, 性質 2 及び性質 3, より, 「 $x \in A$ なる任意の x に対して, 「 $y \in B$ なる y が一意的に存在して, $\langle x, y \rangle \in f$ 」, が従う. $x \in A$ なる各 x に対して, この一意的に存在する $y \in B$ なる y を固定して,

これを, $f(x)$, と表記する. 即ち, $f \in \text{Map}(A, B)$, なる場合において, 「 $x \in A$ なる任意の x に対して, $\langle x, f(x) \rangle \in f$ 」, によって, 記法, $f(x)$, を定義する.

[定義 5]. f を任意の集合とする.

$\text{dom}(f) = \{x \mid \text{或 } y \text{ が存在して, } \langle x, y \rangle \in f\}$,

によって, 集合, $\text{dom}(f)$, を定義する. この $\text{dcm}(f)$ は f の定義域と呼ばれる.

[命題 7]. f 及び A 及び B , の各各を, 任意の集合とする. 「 $f \in \text{Map}(A, B)$ 」, ならば, $\text{dom}(f) = A$ 」, が従う.

[証明]. $f \in \text{Map}(A, B)$, と仮定する. [定義 4] における性質 2, より, 「 $x \in A$ なる任意の x に対して, 「 $y \in B$ なる或 y が存在して, $\langle x, y \rangle \in f$ 」, が従う. $x \in A$ なる任意の x を固定する. 「 $y \in B$ なる或 y が存在して, $\langle x, y \rangle \in f$ 」, が従う. 故に, 「或 y が存在して, $\langle x, y \rangle \in f$ 」, が従う. [定義 5], より, $x \in \text{dom}(f)$, が従う. 故に, 「 $x \in A$ なる任意の x に対して, $x \in \text{dom}(f)$ 」, が従う. $A \subseteq \text{dom}(f)$, が従う.

$x' \in \text{dom}(f)$ なる任意の x' を固定する. [定義 5], より, 「或 y' が存在して, $\langle x', y' \rangle \in f$ 」, が従う. この y' を固定する. $\langle x', y' \rangle \in f$, が従う. 一方, [定義 4] における性質 1, より, $f \subseteq A \times B$, が従う. 故に, $\langle x', y' \rangle \in A \times B$. 故に, $x' \in A$, が従う. 故に, 「 $x' \in \text{dom}(f)$ なる任意の x' に対して, $x' \in A$ 」, が従う. $\text{dom}(f) \subseteq A$, が従う.

故に, 「 $\text{dom}(f) \subseteq A$, 且つ, $A \subseteq \text{dom}(f)$ 」, が従う. 故に, $\text{dom}(f) = A$, が従う. [証明終].

[注意 1]. [定義 v, w] 及び [命題 x, y],

は、各各、「第 v 節における [定義 w]」及び「第 x 節における [命題 y]」を表わす。但し、同一節内においては、ただ単に、[定義 w] 及び [命題 y]、と表記する。

[注意 2]。「自己完結的」と言う表現を厳格に理解するのならば、この論述は、きわめて非「自己完結的」なのではあるが、しかし、上で指摘した、サヴェジ氏によるただ一個の文、に、対する、簡註、としては、適度に「自己完結的」である、と、筆者は判断するのである。

第 2 節 全単射

ここでは、単射及び全射及び全単射、を導入する。

[定義 1]。「任意の集合 A 及び任意の集合 B 及び任意の集合 f 、に対して、「 $f \in \text{Map}(A, B)$ 、且つ、「 $x \in A$ なる任意の x 及び $y \in A$ なる任意の y 、に対して、「 $x \neq y$ 、ならば、 $f(x) \neq f(y)$ 」』、なる場合、且つ、その場合に限って、「 $f \in \text{Inj}(A, B)$ 」』、によって、集合、 $\text{Inj}(A, B)$ 、を定義する。この f は、 A から B への単射、と呼ばれる。この定義より、「任意の集合 B に対して、 $\text{Inj}(\phi, B) = \{\phi\}$ 」、が従う。

[定義 2]。「任意の集合 A 及び任意の集合 B 及び任意の集合 f 、に対して、「 $f \in \text{Map}(A, B)$ 、且つ、「 $v \in B$ なる任意の y に対して、「 $x \in A$ なる或 x が存在して、 $y = f(x)$ 」』、なる場合、且つ、その場合に限って、「 $f \in \text{Surj}(A, B)$ 」』、によって、集合、 $\text{Surj}(A, B)$ 、を定義する。この f は、 A から B への全射、と呼ばれる。この定義より、「 $\text{Surj}(\phi, \phi) = \{\phi\}$ 、且つ、「任意の集合 B に対して、「 $B \neq \phi$ 、と、 $\text{Surj}(\phi, B) = \phi$ 、とは、同値である」』、が従う。

[定義 3]。「任意の集合 A 及び任意の集合 B

及び任意の集合 f 、に対して、「 $f \in \text{Map}(A, B)$ 、且つ、「 $f \in \text{Inj}(A, B)$ 、且つ、「 $f \in \text{Surj}(A, B)$ 」』、なる場合、且つ、その場合に限って、「 $f \in \text{Bij}(A, B)$ 」』、によって、集合、 $\text{Bij}(A, B)$ 、を定義する。この f は、 A から B への全単射、と呼ばれる。 $\text{Bij}(\phi, \phi) = \{\phi\}$ 、が従う。

[定義 4]。 A を任意の集合とする。「 $x \in A$ なる任意の x に対して、 $\phi(x) = x$ 」、によって定義される A を定義域とする写像、 ϕ 、を、 id_A 、と表記する。この id_A を、 A 上の恒等写像、と呼ぶ。

[命題 1]。 A を任意の集合とする。 A 上の恒等写像は A から A への全単射である、が従う。即ち、「任意の集合 A に対して、 $\text{id}_A \in \text{Bij}(A, A)$ 」』、が従う。

[証明]。 A を任意の集合とする。 $\phi = \text{id}_A$ 、と置く。

$\phi \in \text{Map}(A, A)$ 、を示す。 $x \in A$ なる任意の x を固定する。[定義 4]、より、 $\phi(x) = x$ 、が従う。ところが、 $x \in A$ 。故に、 $\phi(x) \in A$ 、が従う。故に、「 $x \in A$ なる任意の x に対して、 $\phi(x) \in A$ 」』、が従う。故に、 $\phi \in \text{Map}(A, A)$ 、が従う。

$\phi \in \text{Inj}(A, A)$ 、を示す。 $x' \in A$ なる任意の x' 及び $x'' \in A$ なる任意の x'' 、の各各を、固定する。 $x' \neq x''$ 、と仮定する。ところが、[定義 4]、より、「 $\phi(x') = x'$ 、且つ、「 $\phi(x'') = x''$ 」』、が従う。故に、 $\phi(x') \neq \phi(x'')$ 、が従う。故に、「 $x' \in A$ なる任意の x' 及び $x'' \in A$ なる任意の x'' 、に対して、「 $x' \neq x''$ 、ならば、「 $\phi(x') \neq \phi(x'')$ 」』、が従う。ところが、 $\phi \in \text{Map}(A, A)$ 。故に、 $\phi \in \text{Inj}(A, A)$ 、が従う。

$\phi \in \text{Surj}(A, A)$ 、を示す。 $w \in A$ なる任意の w を固定する。[定義 4]、より、 $\phi(w) = w$ 、が従う。故に、 $w = \phi(w)$ 、が従う。ところが、 $w \in A$ 。故に、「 $v \in A$ なる或 v が存在して、

$w = \varphi(v)$ 」, が従う。故に, 「 $w \in A$ なる任意の w に対して, 「 $v \in A$ なる或 v が存在して, $w = \varphi(v)$ 」」, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Map}(A, A)$ 。故に, $\varphi \in \text{Surj}(A, A)$, が従う。

故に, $\varphi \in \text{Bij}(A, A)$, が従う。ところが, $\varphi = \text{id}_A$ 。故に, $\text{id}_A \in \text{Bij}(A, A)$, が従う。故に, 「任意の集合 A に対して, $\text{id}_A \in \text{Bij}(A, A)$ 」, が従う。命題が従う。 [証明終]。

[命題 2]。 v 及び w , の各各を, 任意の対象とする。「 $x \in \{v\}$ なる任意の x に対して, $\varphi(x) = w$ 」, によって, $\{v\}$ を定義域とする写像, φ , を定義する。この場合, $\text{Bij}(\{v\}, \{w\}) = \{\varphi\}$, が従う。

[証明]。 $\phi' \in \text{Bij}(\{v\}, \{w\})$ なる任意の ϕ' を固定する。 $\phi' \in \text{Map}(\{v\}, \{w\})$, が従う。 $x' \in \{v\}$ なる任意の x' を固定する。 $\phi'(x') \in \{w\}$, が従う。故に, $\phi'(x') = w$, が従う。故に, 「 $x' \in \{v\}$ なる任意の x' に対して, $\phi'(x') = w$ 」, が従う。故に, ϕ の定義, より, $\phi' = \varphi$, が従う。ところが, $\varphi \in \{\varphi\}$ 。故に, $\phi' \in \{\varphi\}$, が従う。故に, 「 $\phi' \in \text{Bij}(\{v\}, \{w\})$ なる任意の ϕ' に対して, $\phi' \in \{\varphi\}$ 」, が従う。故に, $\text{Bij}(\{v\}, \{w\}) \subseteq \{\varphi\}$, が従う。

$\phi'' \in \{\varphi\}$ なる任意の ϕ'' を固定する。 $\phi'' = \varphi$, が従う。 $\varphi \in \text{Bij}(\{v\}, \{w\})$, を示す。

$\varphi \in \text{Map}(\{v\}, \{w\})$, を示す。 $x'' \in \{v\}$ なる任意の x'' を固定する。 φ の定義, より, $\varphi(x'') = w$, が従う。ところが, $w \in \{w\}$ 。故に, $\varphi(x'') \in \{w\}$, が従う。故に, 「 $x'' \in \{v\}$ なる任意の x'' に対して, $\varphi(x'') \in \{w\}$ 」, が従う。故に, $\varphi \in \text{Map}(\{v\}, \{w\})$, が従う。

$\varphi \in \text{Inj}(\{v\}, \{w\})$, を示す。 $x' \in \{v\}$ なる任意の x' 及び $x'' \in \{v\}$ なる任意の x'' , の各各を, 固定する。 $\varphi(x') = \varphi(x'')$, と仮定する。ところが, 「 $x' \in \{v\}$, 且つ, $x'' \in \{v\}$ 」, より, 「 $x' = v$, 且つ, $x'' = v$ 」, が従う。故に, $x' = x''$, が従う。故に, 「 $x' \in \{v\}$ なる任意の x' 及び $x'' \in \{v\}$ なる任意の x'' , に対して, 「 $\varphi(x') =$

$\varphi(x'')$, ならば, $x' = x''$ 」, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Map}(\{v\}, \{w\})$ 。故に, $\varphi \in \text{Inj}(\{v\}, \{w\})$, が従う。

$\varphi \in \text{Surj}(\{v\}, \{w\})$, を示す。 $y \in \{w\}$ なる任意の y を固定する。ところが, $v \in \{v\}$ 。故に, φ の定義, より, $\varphi(v) = w$, が従う。ところが, $y \in \{w\}$, より, $y = w$, が従う。故に, $y = \varphi(v)$, が従う。ところが, $v \in \{v\}$ 。故に, 「 $x \in \{v\}$ なる或 x が存在して, $y = \varphi(x)$ 」, が従う。故に, 「 $y \in \{w\}$ なる任意の y に対して, 「 $x \in \{v\}$ なる或 x が存在して, $y = \varphi(x)$ 」」, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Map}(\{v\}, \{w\})$ 。故に, $\varphi \in \text{Surj}(\{v\}, \{w\})$, が従う。

故に, $\varphi \in \text{Bij}(\{v\}, \{w\})$, が従う。ところが, $\phi'' = \varphi$ 。故に, $\phi'' \in \text{Bij}(\{v\}, \{w\})$, が従う。故に, 「 $\phi'' \in \{\varphi\}$ なる任意の ϕ'' に対して, $\phi'' \in \text{Bij}(\{v\}, \{w\})$ 」, が従う。故に, $\{\varphi\} \subseteq \text{Bij}(\{v\}, \{w\})$, が従う。

故に, $\text{Bij}(\{v\}, \{w\}) = \{\varphi\}$, が従う。

[証明終]。

[命題 3]。 A 及び B , の各各を, 任意の集合とする。 a を $a \in A$ なる任意の対象とし, 且つ, b を $b \in B$ なる任意の対象とする。 φ を $\varphi \in \text{Bij}(A, B)$ なる任意の全単射とする。「 $x \in A \cup \{a\}$ なる任意の x に対して, 「 $x \in A$, ならば, $\chi(x) = \varphi(x)$ 」, 且つ, 「 $x \notin A$, ならば, $\chi(x) = b$ 」」」, によって, $A \cup \{a\}$ を定義域とする写像, χ , を定義する。この場合, $\chi \in \text{Bij}(A \cup \{a\}, B \cup \{b\})$, が従う。

[証明]。 $\chi \in \text{Map}(A \cup \{a\}, B \cup \{b\})$, を示す。 $x \in A \cup \{a\}$ なる任意の x を固定する。

$x \in A$, なる場合を考える。 χ の定義, より, $\chi(x) = \varphi(x)$, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Bij}(A, B)$, より, $\varphi \in \text{Map}(A, B)$ 。故に, $\varphi(x) \in B$, が従う。故に, $\chi(x) \in B$, が従う。ところが, $B \subseteq B \cup \{b\}$ 。故に, $\chi(x) \in B \cup \{b\}$, が従う。

$x \notin A$, なる場合を考える。 χ の定義, より, $\chi(x) = b$, が従う。ところが, $b \in \{b\}$ 。故に,

$\chi(x) \in \{b\}$, が従う。ところが, $\{b\} \subseteq B \cup \{b\}$ 。故に, $\chi(x) \in B \cup \{b\}$ 。

故に, 「 $x \in A \cup \{a\}$ 」なる任意の x に対して, $\chi(x) \in B \cup \{b\}$, が従う。故に, $\chi \in \text{Map}(A \cup \{a\}, B \cup \{b\})$, が従う。

$\chi \in \text{Inj}(A \cup \{a\}, B \cup \{b\})$, を示す。 $x' \in A \cup \{a\}$ なる任意の x' 及び $x'' \in A \cup \{a\}$ なる任意の x'' , の各各を, 固定する。 $x' \neq x''$, と仮定する。

「 $x' \in A$, 且つ, $x'' \in A$ 」なる場合を考える。 χ の定義, より, 「 $\chi(x') = \varphi(x')$, 且つ, $\chi(x'') = \varphi(x'')$ 」, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Bij}(A, B)$, より, $\varphi \in \text{Inj}(A, B)$, が従う。ところが, $x' \neq x''$ 。故に, $\varphi(x') \neq \varphi(x'')$ 。故に, $\chi(x') \neq \chi(x'')$, が従う。

「 $x' \in A$, 且つ, $x'' \notin A$ 」なる場合を考える。 χ の定義, より, 「 $\chi(x') = \varphi(x')$, 且つ, $\chi(x'') = b$ 」, が従う。故に, $\chi(x') = \varphi(x')$, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Bij}(A, B)$, より, $\varphi \in \text{Map}(A, B)$, が従う。故に, $\varphi(x') \in B$, が従う。故に, $\chi(x') \in B$, が従う。一方, $b \notin B$ 。ところが, $\chi(x'') = b$ 。故に, $\chi(x'') \notin B$ 。故に, $\chi(x') \neq \chi(x'')$, が従う。

「 $x' \notin A$, 且つ, $x'' \in A$ 」なる場合を考える。 χ の定義, より, 「 $\chi(x') = b$, 且つ, $\chi(x'') = \varphi(x'')$ 」, が従う。故に, $\chi(x') = b$, が従う。ところが, $b \notin B$ 。故に, $\chi(x') \notin B$ 。一方, $\varphi \in \text{Bij}(A, B)$, より, $\varphi \in \text{Map}(A, B)$, が従う。故に, $\varphi(x'') \in B$ 。故に, $\chi(x'') \in B$ 。故に, $\chi(x') \neq \chi(x'')$, が従う。

「 $x' \notin A$, 且つ, $x'' \notin A$ 」なる場合を考える。ところが, 「 $x' \in A \cup \{a\}$, 且つ, $x'' \in A \cup \{a\}$ 」。故に, 「 $x' \in A$, 或いは, $x' \in \{a\}$ 」, 且つ, 「 $x'' \in A$, 或いは, $x'' \in \{a\}$ 」, が従う。故に, 「 $x' \in \{a\}$, 且つ, $x'' \in \{a\}$ 」, が従う。故に, 「 $x' = a$, 且つ, $x'' = a$ 」。故に, $x' = x''$, が従う。ところが, $x' \neq x''$ 。故に, 矛盾が生じる。

故に, 「 $x' \in A \cup \{a\}$ 」なる任意の x' 及び $x'' \in A \cup \{a\}$ なる任意の x'' , に対して, 「 $x' \neq x''$, ならば, $\chi(x') \neq \chi(x'')$ 」, が従う。ところ

が, $\chi \in \text{Map}(A \cup \{a\}, B \cup \{b\})$ 。故に, $\chi \in \text{Inj}(A \cup \{a\}, B \cup \{b\})$, が従う。

$\chi \in \text{Surj}(A \cup \{a\}, B \cup \{b\})$, を示す。 $w \in B \cup \{b\}$ なる任意の w を固定する。「 $w \in B$, 或いは, $w \in \{b\}$ 」, が従う。

$w \in B$, なる場合を考える。 $\varphi \in \text{Bij}(A, B)$, より, $\varphi \in \text{Surj}(A, B)$, が従う。故に, 「 $v' \in A$ なる或 v' が存在して, $w = \varphi(v')$ 」, が従う。この v' を固定する。「 $v' \in A$, 且つ, $w = \varphi(v')$ 」, が従う。故に, $v' \in A$, が従う。故に, χ の定義, より, $\chi(v') = \varphi(v')$, が従う。ところが, $w = \varphi(v')$ 。故に, $w = \chi(v')$, が従う。ところが, $v' \in A$ 。故に, 「 $v' \in A$ なる或 v' が存在して, $w = \chi(v')$ 」, が従う。

$w \in \{b\}$, なる場合を考える。 $w = b$, が従う。一方, $a \in \{a\}$ 及び $\{a\} \subseteq A \cup \{a\}$, より, $a \in A \cup \{a\}$, が従う。ところが, $a \notin A$ 。故に, χ の定義, より, $\chi(a) = b$, が従う。ところが, $w = b$ 。故に, $w = \chi(a)$, が従う。ところが, $a \in A \cup \{a\}$ 。故に, 「 $v'' \in A \cup \{a\}$ なる或 v'' が存在して, $w = \chi(v'')$ 」, が従う。

故に, 「 $v \in A \cup \{a\}$ なる或 v が存在して, $w = \chi(v)$ 」, が従う。故に, 「 $w \in B \cup \{b\}$ なる任意の w に対して, 「 $v \in A \cup \{a\}$ なる或 v が存在して, $w = \chi(v)$ 」」, が従う。ところが, $\chi \in \text{Map}(A \cup \{a\}, B \cup \{b\})$ 。故に, $\chi \in \text{Surj}(A \cup \{a\}, B \cup \{b\})$, が従う。

故に, $\chi \in \text{Bij}(A \cup \{a\}, B \cup \{b\})$, が従う。命題が従う。 [証明終]。

[命題 4]。「任意の集合 A 及び任意の集合 B 及び任意の集合 C 及び $\varphi \in \text{Inj}(A, B)$ なる任意の φ , に対して, 「 $C = \{y \mid y \in B, \text{ 且つ, 「} x \in A \text{ なる或 } x \text{ が存在して, } y = \varphi(x) \text{」}\}$, ならば, $\varphi \in \text{Bij}(A, C)$ 」, が従う。

[証明]。任意の集合 A 及び 任意の集合 B 及び任意の集合 C 及び $\varphi \in \text{Inj}(A, B)$ なる任意の φ , の各各を, 固定する。 $C = \{y \mid y \in B, \text{ 且つ, 「} x \in A \text{ なる或 } x \text{ が存在して, } y = \varphi(x) \text{」}\}$,

と仮定する。

$\varphi \in \text{Map}(A, C)$, を示す。 $x \in A$ なる任意の x を固定する。 $\varphi \in \text{Inj}(A, B)$, より, $\varphi \in \text{Map}(A, B)$, が従う。故に, $\varphi(x) \in B$, が従う。ところが, $\varphi(x) = \varphi(x)$ 。ところが, $x \in A$ 。故に, 「 $x' \in A$ なる或 x' が存在して, $\varphi(x) = \varphi(x')$ 」, が従う。故に, 「 $\varphi(x) \in B$, 且つ, 「 $x' \in A$ なる或 x' が存在して, $\varphi(x) = \varphi(x')$ 」」, が従う。故に, $\varphi(x) \in C$, が従う。故に, 「 $x \in A$ なる任意の x に対して, $\varphi(x) \in C$ 」, が従う。故に, $\varphi \in \text{Map}(A, C)$, が従う。

$\varphi \in \text{Inj}(A, C)$, を示す。 $x' \in A$ なる任意の x' 及び $x'' \in A$ なる任意の x'' , の各各を, 固定する。 $x' \neq x''$, と仮定する。 $\varphi \in \text{Inj}(A, B)$, より, $\varphi(x') \neq \varphi(x'')$, が従う。故に 「 $x' \in A$ なる任意の x' 及び $x'' \in A$ なる任意の x'' , に対して, 「 $x' \neq x''$, ならば, $\varphi(x') \neq \varphi(x'')$ 」」, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Map}(A, C)$ 。故に, $\varphi \in \text{Inj}(A, C)$, が従う。

$\varphi \in \text{Surj}(A, C)$, を示す。 $w \in C$ なる任意の w を固定する。「 $w \in B$, 且つ, 「 $v \in A$ なる或 v が存在して, $w = \varphi(v)$ 」」, が従う。故に, 「 $v \in A$ なる或 v が存在して, $w = \varphi(v)$ 」, が従う。故に, 「 $w \in C$ なる任意の w に対して, 「 $v \in A$ なる或 v が存在して, $w = \varphi(v)$ 」」, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Map}(A, C)$ 。故に, $\varphi \in \text{Surj}(A, C)$, が従う。

故に, $\varphi \in \text{Bij}(A, C)$, が従う。[証明終]。

[命題 5]。 A 及び B , の各各を, 任意の集合とする。 φ を $\varphi \in \text{Inj}(A, B)$ なる任意の単射とする。 D を $D \subseteq A$ なる任意の集合とする。

$C = \{y \mid y \in B, \text{ 且つ, 「} x \in D \text{ なる或 } x \text{ が存在して, } y = \varphi(x) \text{」}\}$,

と置き, 且つ, $\chi = \varphi \upharpoonright D$, と置く。この場合, $\chi \in \text{Bij}(D, C)$, が従う。

[証明]。 $\chi \in \text{Map}(D, C)$, を示す。 $x \in D$ なる

任意の x を固定する。 χ の定義, より, $\chi(x) = \varphi(x)$, が従う。 $y = \varphi(x)$, と置く。 $\varphi \in \text{Inj}(A, B)$, より, $\varphi \in \text{Map}(A, B)$, が従う。故に, $\varphi(x) \in B$, が従う。故に, $y \in B$, が従う。ところが, $x \in D$ 。故に, 「 $x \in D$, 且つ, $y = \varphi(x)$ 」, が従う。故に, 「 $z \in D$ なる或 z が存在して, $y = \varphi(z)$ 」, が従う。故に, 「 $y \in B$, 且つ, 「 $z \in D$ なる或 z が存在して, $y = \varphi(z)$ 」」, が従う。故に, C の定義, より, $y \in C$, が従う。故に, $\varphi(x) \in C$, が従う。ところが, $\chi(x) = \varphi(x)$ 。故に, $\chi(x) \in C$, が従う。故に, 「 $x \in D$ なる任意の x に対して, $\chi(x) \in C$ 」, が従う。故に, $\chi \in \text{Map}(D, C)$, が従う。

$\chi \in \text{Inj}(D, C)$, を示す。 $x' \in D$ なる任意の x' 及び $x'' \in D$ なる任意の x'' , の各各を, 固定する。 $x' \neq x''$, と仮定する。 χ の定義, より, 「 $\chi(x') = \varphi(x')$, 且つ, $\chi(x'') = \varphi(x'')$ 」, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Inj}(A, B)$ 。故に, $x' \neq x''$, より, $\varphi(x') \neq \varphi(x'')$, が従う。故に, $\chi(x') \neq \chi(x'')$, が従う。故に, 「 $x' \in D$ なる任意の x' 及び $x'' \in D$ なる任意の x'' , に対して, 「 $x' \neq x''$, ならば, $\chi(x') \neq \chi(x'')$ 」」, が従う。ところが, $\chi \in \text{Map}(D, C)$ 。故に, $\chi \in \text{Inj}(D, C)$, が従う。

$\chi \in \text{Surj}(D, C)$, を示す。 $w \in C$ なる任意の w を固定する。ところが, C の定義, より, 「 $w \in B$, 且つ, 「 $v \in D$ なる或 v が存在して, $w = \varphi(v)$ 」」, が従う。故に, 「 $v \in D$ なる或 v が存在して, $w = \varphi(v)$ 」, が従う。故に, 「 $w \in C$ なる任意の w に対して, 「 $v \in D$ なる或 v が存在して, $w = \varphi(v)$ 」」, が従う。ところが, $\chi \in \text{Map}(D, C)$ 。故に, $\chi \in \text{Surj}(D, C)$, が従う。

故に, $\chi \in \text{Bij}(D, C)$, が従う。[証明終]。

[注意]。上掲の証明, つまり, [命題 5] に対する [証明], 中において, $D = \emptyset$, なる場合が, 自動的に処理される様子が視られる。

[命題 6]。 A 及び B , の各各を, 任意の集合

とする。 φ を $\varphi \in \text{Bij}(A, B)$ なる任意の全単射とする。 C を $C \subseteq B$ なる任意の集合とする。

$$D = \{x \mid x \in A, \text{ 且つ, } \varphi(x) \in C\},$$

と置き、且つ、 $\chi = \varphi|D$ 、と置く。この場合、 $\chi \in \text{Bij}(D, C)$ 、が従う。

[証明]。 $C' = \{y \mid y \in B, \text{ 且つ, } \exists x \in D \text{ なる或 } x \text{ が存在して, } y = \varphi(x)\}$ 、と置く。 $C' = C$ 、を示す。

$z \in C'$ なる任意の z を固定する。 C' の定義より、「 $z \in B$ 、且つ、「 $x' \in D$ なる或 x' が存在して、 $z = \varphi(x')$ 」」、が従う。故に、「 $x' \in D$ なる或 x' が存在して、 $z = \varphi(x')$ 」、が従う。この x' を固定する。故に、「 $x' \in D$ 、且つ、 $z = \varphi(x')$ 」、が従う。故に、 $x' \in D$ 、が従う。 D の定義より、「 $x' \in A$ 、且つ、 $\varphi(x') \in C$ 」、が従う。故に、 $\varphi(x') \in C$ 、が従う。ところが、 $z = \varphi(x')$ 。故に、 $z \in C$ 、が従う。故に、「 $z \in C'$ なる任意の z に対して、 $z \in C$ 」、が従う。故に、 $C' \subseteq C$ 、が従う。

$w \in C$ なる任意の w を固定する。ところが、 $C \subseteq B$ 。故に、 $w \in B$ 、が従う。一方、 $\varphi \in \text{Bij}(A, B)$ 、より、 $\varphi \in \text{Surj}(A, B)$ 、が従う。故に、「 $v \in A$ なる或 v が存在して、 $w = \varphi(v)$ 」、が従う。この v を固定する。故に、「 $v \in A$ 、且つ、 $w = \varphi(v)$ 」、が従う。故に、 $w = \varphi(v)$ 、が従う。ところが、 $w \in C$ 。故に、 $\varphi(v) \in C$ 、が従う。故に、「 $v \in A$ 、且つ、 $\varphi(v) \in C$ 」、が従う。故に、 D の定義より、 $v \in D$ 、が従う。ところが、 $w = \varphi(v)$ 。故に、「 $v \in D$ なる或 v が存在して、 $w = \varphi(v)$ 」、が従う。ところが、 $w \in B$ 。故に、 C' の定義より、 $w \in C'$ 、が従う。故に、「 $w \in C$ なる任意の w に対して、 $w \in C'$ 」、が従う。故に、 $C \subseteq C'$ 、が従う。

故に、 $C' = C$ 、が従う。

一方、 $\varphi \in \text{Bij}(A, B)$ 、より、 $\varphi \in \text{Inj}(A, B)$ 、が従う。また、 D の定義より、 $D \subseteq A$ 、が従う。故に、[命題 5]、より、 $\varphi|D \in \text{Bij}(D,$

$C')$ 、が従う。ところが、 $C' = C$ 。故に、 $\varphi|D \in \text{Bij}(D, C)$ 、が従う。ところが、 $\chi = \varphi|D$ 。故に、 $\chi \in \text{Bij}(D, C)$ 、が従う。 [証明終]。

[命題 7]。「任意の集合 A 及び任意の集合 B 及び任意の集合 C 及び任意の集合 f 及び任意の集合 g 、に対して、「 $f \in \text{Bij}(A, B)$ 、且つ、 $g \in \text{Bij}(B, C)$ 」、ならば、 $g \circ f \in \text{Bij}(A, C)$ 」、が従う。

[証明]。各々が任意の集合である、 A 及び B 及び C 及び f 及び g 、の各各を、固定する。「 $f \in \text{Bij}(A, B)$ 、且つ、 $g \in \text{Bij}(B, C)$ 」、と仮定する。

$g \circ f \in \text{Map}(A, C)$ 、を示す。 $f \in \text{Bij}(A, B)$ 、より、 $f \in \text{Map}(A, B)$ 、が従う。 $g \in \text{Bij}(B, C)$ 、より、 $g \in \text{Map}(B, C)$ 、が従う。故に、 $g \circ f \in \text{Map}(A, C)$ 、が従う。

$g \circ f \in \text{Inj}(A, C)$ 、を示す。 $x \in A$ なる任意の x 及び $y \in A$ なる任意の y 、の各各を、固定する。 $x \neq y$ 、と仮定する。 $f \in \text{Bij}(A, B)$ 、より、 $f \in \text{Inj}(A, B)$ 、が従う。故に、 $x \neq y$ 、より、 $f(x) \neq f(y)$ 、が従う。一方、 $g \in \text{Bij}(B, C)$ 、より、 $g \in \text{Inj}(B, C)$ 、が従う。ところが、 $f \in \text{Map}(A, B)$ 、より、「 $f(x) \in B$ 、且つ、 $f(y) \in B$ 」、が従う。故に、 $f(x) \neq f(y)$ 、より、 $g(f(x)) \neq g(f(y))$ 、が従う。ところが、「 $g(f(x)) = (g \circ f)(x)$ 、且つ、 $g(f(y)) = (g \circ f)(y)$ 」。故に、 $(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$ 、が従う。故に、「 $x \in A$ なる任意の x 及び $y \in B$ なる任意の y 、に対して、「 $x \neq y$ 、ならば、 $(g \circ f)(x) \neq (g \circ f)(y)$ 」」、が従う。故に、 $g \circ f \in \text{Inj}(A, C)$ 、が従う。

$g \circ f \in \text{Surj}(A, C)$ 、を示す。 $x''' \in C$ なる任意の x''' を固定する。 $g \in \text{Bij}(B, C)$ 、より、 $g \in \text{Surj}(B, C)$ 、が従う。故に、「 $x'' \in B$ なる或 x'' が存在して、 $x''' = g(x'')$ 」、が従う。この x'' を固定する。「 $x'' \in B$ 、且つ、 $x''' = g(x'')$ 」、が従う。 $x'' \in B$ 、が従う。ところが、 $f \in \text{Bij}(A, B)$ 、より、 $f \in \text{Surj}(A, B)$ 、が従

う。故に、「 $x' \in A$ なる或 x' が存在して、 $x'' = f(x')$ 」が従う。この x' を固定する。「 $x' \in A$, 且つ、 $x'' = f(x')$ 」が従う。故に、 $x'' = f(x')$ が従う。ところが、 $x''' = g(x'')$ 。故に、 $x''' = g(f(x'))$ が従う。ところが、 $g(f(x')) = (g \circ f)(x')$ 。故に、 $x''' = (g \circ f)(x')$ が従う。ところが、 $x' \in A$ 。故に、「 $x' \in A$ なる或 x' が存在して、 $x''' = (g \circ f)(x')$ 」が従う。故に、「 $x''' \in C$ なる任意の x''' に対して、「 $x' \in A$ なる或 x' が存在して、 $x''' = (g \circ f)(x')$ 」」が従う。故に、 $g \circ f \in \text{Surj}(A, C)$ が従う。

故に、 $g \circ f \in \text{Bij}(A, C)$ が従う。[証明終]。

[定義5]。「任意の集合 A 及び任意の集合 B 及び $\varphi \in \text{Map}(A, B)$ なる任意の φ 及び $\phi \in \text{Map}(B, A)$ なる任意の ϕ 、に対して、「 $x \in A$ なる任意の x 及び $y \in B$ なる任意の y 、に対して、「 $y = \varphi(x)$, と、 $x = \phi(y)$, とは、同値である」」なる場合、且つ、その場合に限って、「 ϕ は φ に対する逆写像である」」によって、「 ϕ は φ に対する逆写像である」なる陳述を定義する。

[命題8]。「任意の集合 A 及び任意の集合 B 及び $\varphi \in \text{Map}(A, B)$ なる任意の φ 及び $\phi' \in \text{Map}(B, A)$ なる任意の ϕ' 及び $\phi'' \in \text{Map}(B, A)$ なる任意の ϕ'' 、に対して、「 ϕ' は φ に対する逆写像である」且つ、「 ϕ'' は φ に対する逆写像である」ならば、 $\phi' = \phi''$ 」が従う。

[証明]。任意の集合 A 及び任意の集合 B 及び $\varphi \in \text{Map}(A, B)$ なる任意の φ 及び $\phi' \in \text{Map}(B, A)$ なる任意の ϕ' 及び $\phi'' \in \text{Map}(B, A)$ なる任意の ϕ'' 、の各各を、固定する。「 ϕ' は φ に対する逆写像である」且つ、「 ϕ'' は φ に対する逆写像である」、と仮定する。 $y \in B$ なる任意の y を固定する。 $\phi' \in \text{Map}(B, A)$ より、 $\phi'(y) \in A$ が従う。ところが、「 ϕ' は φ に対する逆写像である」。故に、[定義5] 及び

$\phi'(y) = \phi'(y)$, より、 $y = \varphi(\phi'(y))$ が従う。ところが、「 ϕ'' は φ に対する逆写像である」。故に、 $y \in B$ 及び [定義5], より、 $\phi'(y) = \phi''(y)$ が従う。故に、「 $y \in B$ なる任意の y に対して、 $\phi'(y) = \phi''(y)$ 」が従う。故に、 $\phi' = \phi''$ が従う。 [証明終]。

[注意]。 A 及び B 、の各各を、任意の集合とし、且つ、 φ を $\varphi \in \text{Map}(A, B)$ なる任意の写像とする。「 $\phi \in \text{Map}(B, A)$ なる或 ϕ が存在して、「 ϕ は φ に対する逆写像である」」なる場合を考える。[命題8], より、各 φ に対して、この ϕ は一意的に定まる。この ϕ を φ^{-1} と表記する事にする。

[命題9]。「任意の集合 A 及び任意の集合 B 及び $\varphi \in \text{Map}(A, B)$ なる任意の φ 及び $\phi \in \text{Map}(B, A)$ なる任意の ϕ 、に対して、「 ϕ は φ に対する逆写像である」ならば、「 φ は ϕ に対する逆写像である」」が従う。

[証明]。任意の集合 A 及び任意の集合 B 及び $\varphi \in \text{Map}(A, B)$ なる任意の φ 及び $\phi \in \text{Map}(B, A)$ なる任意の ϕ 、の各各を、固定する。「 ϕ は φ に対する逆写像である」、と仮定する。 $x \in A$ なる任意の x 及び $y \in B$ なる任意の y 、の各各を、固定する。[定義5], より、「 $y = \varphi(x)$, と、 $x = \phi(y)$, とは、同値である」が従う。故に、「 $x = \phi(y)$, と、 $y = \varphi(x)$, とは、同値である」が従う。故に、「 $y \in B$ なる任意の y 及び $x \in A$ なる任意の x 、に対して、「 $x = \phi(y)$, と、 $y = \varphi(x)$, とは、同値である」」が従う。一方、「 $\phi \in \text{Map}(B, A)$ 、且つ、 $\varphi \in \text{Map}(A, B)$ 」が従う。故に、[定義5], より、「 φ は ϕ に対する逆写像である」が従う。 [証明終]。

[命題10]。「任意の集合 A 及び任意の集合 B 及び $\varphi \in \text{Map}(A, B)$ なる任意の φ 及び $\phi \in \text{Map}(B, A)$ なる任意の ϕ 、に対して、「 ϕ

は ϕ に対する逆写像である」, ならば, $\phi \in \text{Bij}(A, B)$ 」, が従う。

[証明]。任意の集合 A 及び任意の集合 B 及び $\phi \in \text{Map}(A, B)$ なる任意の ϕ 及び $\phi \in \text{Map}(B, A)$ なる任意の ϕ , の各各を, 固定する。「 ϕ は ϕ に対する逆写像である」, と仮定する。

$\phi \in \text{Inj}(A, B)$, を示す。 $x' \in A$ なる任意の x' 及び $x'' \in A$ なる任意の x'' , の各各を, 固定する。 $\phi(x') = \phi(x'')$, と仮定する。 $\phi \in \text{Map}(A, B)$, より, $\phi(x') \in B$, が従う。故に, [定義5] 及び $\phi(x') = \phi(x')$, より, $x' = \phi(\phi(x'))$, が従う。ところが, $\phi(x') = \phi(x'')$ 。故に, $x' = \phi(\phi(x''))$, が従う。一方, $\phi \in \text{Map}(A, B)$, より, $\phi(x'') \in B$ 。故に, [定義5] 及び $\phi(x'') = \phi(x'')$, より, $x'' = \phi(\phi(x''))$, が従う。故に, 「 $x' = \phi(\phi(x''))$, 且つ, $x'' = \phi(\phi(x''))$ 」, が従う。故に, $x' = x''$, が従う。故に, 「 $x' \in A$ なる任意の x' 及び $x'' \in A$ なる任意の x'' , に対して, 「 $\phi(x') = \phi(x'')$, ならば, $x' = x''$ 」」, が従う。ところが, $\phi \in \text{Map}(A, B)$ 。故に, $\phi \in \text{Inj}(A, B)$, が従う。

$\phi \in \text{Surj}(A, B)$, を示す。 $y \in B$ なる任意の y を固定する。 $\phi \in \text{Map}(B, A)$, より, $\phi(y) \in A$, が従う。ところが, [命題9], より, 「 ϕ は ϕ に対する逆写像である」, が従う。故に, [定義5] 及び $\phi(y) = \phi(y)$, より, $y = \phi(\phi(y))$, が従う。ところが, $\phi(y) \in A$ 。故に, 「 $x \in A$ なる或 x が存在して, $y = \phi(x)$ 」, が従う。故に, 「 $y \in B$ なる任意の y に対して, 「 $x \in A$ なる或 x が存在して, $y = \phi(x)$ 」」, が従う。ところが, $\phi \in \text{Map}(A, B)$ 。故に, $\phi \in \text{Surj}(A, B)$, が従う。

故に, $\phi \in \text{Bij}(A, B)$, が従う。[証明終]。

[命題11]。「任意の集合 A 及び任意の集合 B 及び $\phi \in \text{Bij}(A, B)$ なる任意の ϕ , に対して, 「 $\phi \in \text{Map}(B, A)$ なる或 ϕ が一意的に存在して, 「 ϕ は ϕ に対する逆写像である」」」, が従

う。即ち, 次の, 結論1 及び結論2, が従う。

結論1。「 $\phi' \in \text{Map}(B, A)$ なる任意の ϕ' 及び $\phi'' \in \text{Map}(B, A)$ なる任意の ϕ'' , に対して, 「「 ϕ' は ϕ に対する逆写像である」, 且つ, 「 ϕ'' は ϕ に対する逆写像である」」, ならば, $\phi' = \phi''$ 」」。

結論2。「 $\phi \in \text{Map}(B, A)$ なる或 ϕ が存在して, 「 ϕ は ϕ に対する逆写像である」」。

[証明]。任意の集合 A 及び任意の集合 B 及び $\phi \in \text{Bij}(A, B)$ なる任意の ϕ , の各各を, 固定する。結論1, は, [命題8], より, 従う。結論2, を示す。

陳述1。「 $y \in B$ なる任意の y 及び $x' \in A$ なる任意の x' 及び $x'' \in A$ なる任意の x'' , に対して, 「「 $y = \phi(x')$, 且つ, $y = \phi(x'')$ 」」, ならば, $x' = x''$ 」」,

を示す。 $y \in B$ なる任意の y 及び $x' \in A$ なる任意の x' 及び $x'' \in A$ なる任意の x'' , の各各を, 固定する。「 $y = \phi(x')$, 且つ, $y = \phi(x'')$ 」, と仮定する。 $\phi(x') = \phi(x'')$, が従う。一方, $\phi \in \text{Bij}(A, B)$, より, $\phi \in \text{Inj}(A, B)$, が従う。故に, 「 $x' \in A$, 且つ, $x'' \in A$ 」及び $\phi(x') = \phi(x'')$, より, $x' = x''$, が従う。故に, 「 $y \in B$ なる任意の y 及び $x' \in A$ なる任意の x' 及び $x'' \in A$ なる任意の x'' , に対して, 「「 $y = \phi(x')$, 且つ, $y = \phi(x'')$ 」」, ならば, $x' = x''$ 」」, が従う。陳述1, が従う。

陳述2。「 $w \in B$ なる任意の w に対して, 「 $v \in A$ なる或 v が存在して, $w = \phi(v)$ 」」,

を示す。 $w \in B$ なる任意の w を固定する。 $\phi \in \text{Bij}(A, B)$, より, $\phi \in \text{Surj}(A, B)$, が従う。故に, 「 $v \in A$ なる或 v が存在して, $w = \phi(v)$ 」, が従う。故に, 「 $w \in B$ なる任意の w

に対して, 「 $v \in A$ なる或 v が存在して, $w = \varphi(v)$ 」, が従う。陳述 2, が従う。

陳述 1 及び陳述 2, より,

陳述 3. 「 $w \in B$ なる任意の w に対して, 「 $v \in A$ なる或 v が一意的に存在して, $w = \varphi(v)$ 」,

が従う。 $w \in B$ なる各 w に対して一意的に定まる, この, $v \in A$ なる v , を, $\phi(w)$, と表記する。即ち, 「 $w \in B$ なる任意の w 及び $v \in A$ なる任意の v , に対して, 「 $w = \varphi(v)$, なる場合, 且つ, その場合に限って, $\phi(w) = v$ 」, によって, $\phi \in \text{Map}(B, A)$ なる写像 ϕ を定義する。陳述 3, より, この定義は, 定義の為の根拠を得る。

「 ϕ は φ に対する逆写像である」, を示す。 ϕ の定義, より, 「 $\phi \in \text{Map}(B, A)$, 且つ, 「 $w \in B$ なる任意の w 及び $v \in A$ なる任意の v , に対して, 「 $w = \varphi(v)$, と, $\phi(w) = v$, とは, 同値である」」, が従う。故に, 「 $\phi \in \text{Map}(B, A)$, 且つ, 「 $w \in B$ なる任意の w 及び $v \in A$ なる任意の v , に対して, 「 $w = \varphi(v)$, と, $v = \phi(w)$, とは, 同値である」」, が従う。故に, [定義 5], より, 「 $\phi \in \text{Map}(B, A)$, 且つ, 「 ϕ は φ に対する逆写像である」, が従う。故に, 「 $\phi \in \text{Map}(B, A)$ なる或 ϕ が存在して, 「 ϕ は φ に対する逆写像である」, が従う。結論 2, が従う。

命題が従う。

[証明終]。

第 3 節 自然数系列

ここでは, 自然数系列に関する自明性の高い性質達, を導入する。[命題 15] は, [命題 4.4] に対する [証明], において, 基本的な役割をはたす者である。

[定義 1]. 「 $n \in N$ なる任意の n に対して, 「 $k \in N$, 且つ, $k \leq n$ 」, の場合, 且つ, その

場合に限って, $k \in N[n]$ 」, によって, $n \in N$ なる各 n に対して, 集合, $N[n]$, を定義する。即ち, 「 $n \in N$ なる各 n に対して, $N[n] = \{k | k \in N, \text{ 且つ, } k \leq n\}$ 」, と置く。

[命題 1]. $N[1] = \{1\}$, が従う。

[証明]. $x \in N[1]$ なる任意の x を固定する。

[定義 1], より, 「 $x \in N$, 且つ, $x \leq 1$ 」, が従う。故に, $x \in N$, が従う。故に, $1 \leq x$, が従う。ところが, $x \leq 1$. 故に, $x = 1$, が従う。ところが, 「 $x = 1$, と, $x \in \{1\}$, とは, 同値である」。故に, $x \in \{1\}$, が従う。故に, 「 $x \in N[1]$ なる任意の x に対して, $x \in \{1\}$ 」, が従う。

$y \in \{1\}$ なる任意の y を固定する。ところが, 「 $y \in \{1\}$, と, $y = 1$, とは, 同値である」。故に, $y = 1$, が従う。一方, 「 $1 \in N$, 且つ, $1 \leq 1$ 」及び [定義 1], より, $1 \in N[1]$, が従う。故に, $y \in N[1]$, が従う。故に, 「 $y \in \{1\}$ なる任意の y に対して, $y \in N[1]$ 」, が従う。

故に, $N[1] = \{1\}$, が従う。 [証明終]。

[命題 2]. 「 $n \in N$ なる任意の n に対して, $1 \in N[n]$ 」, が従う。

[証明]. $n \in N$ なる任意の n を固定する。 $1 \leq n$, が従う。ところが, $1 \in N$. 故に, 「 $1 \in N$, 且つ, $1 \leq n$ 」, が従う。故に, [定義 1], より, $1 \in N[n]$, が従う。故に, 「 $n \in N$ なる任意の n に対して, $1 \in N[n]$ 」, が従う。 [証明終]。

[命題 3]. 「 $n \in N$ なる任意の n に対して, $n \in N[n]$ 」, が従う。

[証明]. $n \in N$ なる任意の n を固定する。 $n \in N$, が従う。ところが, $n \leq n$. 故に, 「 $n \in N$, 且つ, $n \leq n$ 」, が従う。故に, [定義 1], より, $n \in N[n]$, が従う。 [証明終]。

[命題 4]. 「 $n \in N$ なる任意の n 及び $m \in N$

なる任意の m , に対して, 「 $n \leq m$, と, $N[n] \subseteq N[m]$, とは, 同値である」], が従う。

[証明]。 $n \in N$ なる任意の n 及び $m \in N$ なる任意の m , の各各を, 固定する。 $n \leq m$, と仮定する。 $x \in N[n]$ なる任意の x を固定する。 [定義1], より, 「 $x \in N$, 且つ, $x \leq n$ 」, が従う。 故に, $x \leq n$, が従う。 ところが, $n \leq m$ 。 故に, $x \leq m$, が従う。 故に, 「 $x \in N$, 且つ, $x \leq m$ 」, が従う。 故に, [定義1], より, $x \in N[m]$, が従う。 故に, 「 $x \in N[n]$ なる任意の x に対して, $x \in N[m]$ 」, が従う。 故に, $N[n] \subseteq N[m]$, が従う。 次に, $N[n] \subseteq N[m]$, と仮定する。 ところが, [命題3], より, $n \in N[n]$, が従う。 故に, $n \in N[m]$, が従う。 故に, [定義1], より, 「 $n \in N$, 且つ, $n \leq m$ 」, が従う。 故に, $n \leq m$, が従う。 [証明終]。

[命題5]。 「 $n \in N$ なる任意の n に対して, 「任意の k に対して, 「 $k \in N[n]$, 且つ, $1 \leq k$ 」, ならば, $k-1 \in N[n]$ 」」], が従う。

[証明]。 $n \in N$ なる任意の n を固定し, 且つ, 「 $k \in N[n]$, 且つ, $1 \leq k$ 」なる任意の k を固定する。 $k \in N[n]$ 及び [定義1], より, 「 $k \in N$, 且つ, $k \leq n$ 」, が従う。 「 $1 \leq k$, 且つ, $k \in N$ 」, より, $k-1 \in N$, が従う。 「 $k-1 \leq k$, 且つ, $k \leq n$ 」, より, $k-1 \leq n$, が従う。 故に, 「 $k-1 \in N$, 且つ, $k-1 \leq n$ 」, が従う。 故に, [定義1], より, $k-1 \in N[n]$, が従う。 命題が従う。 [証明終]。

[命題6]。 「 $n \in N$ なる任意の n に対して, 「 $n \neq 1$, ならば, $N[n] = N[n-1] \cup \{n\}$ 」」], が従う。

[証明]。 $n \in N$ なる任意の n を固定する。 $n \neq 1$, と仮定する。 「 $n \in N$, 且つ, $n \neq 1$ 」, が従う。 故に, 「或 z が存在して, 「 $z \in N$, 且つ, $z+1=n$ 」」, が従う。 この z を固定する。 「 $z \in$

N , 且つ, $z+1=n$ 」, が従う。 故に, 「 $z \in N$, 且つ, $z=n-1$ 」, が従う。 故に, $n-1 \in N$, が従う。 故に, [定義1], より, 「 $N[n-1]$ は定義される」, が従う。

$x \in N[n]$ なる任意の x を固定する。 [定義1], より, 「 $x \in N$, 且つ, $x \leq n$ 」, が従う。 $x \leq n-1$, なる場合を考える。 ところが, $x \in N$ 。 故に, 「 $x \in N$, 且つ, $x \leq n-1$ 」, が従う。 故に, [定義1], より, $x \in N[n-1]$, が従う。 $n-1 \neq x$, なる場合を考える。 ところが, $x \leq n$ 。 故に, 「 $n-1 \neq x$, 且つ, $x \leq n$ 」, が従う。 ところが, 「 $x \in N$, 且つ, $n-1 \in N$ 」。 故に, $x=n$, が従う。 ところが, $n \in \{n\}$ 。 故に, $x \in \{n\}$, が従う。 ところが, 「 $x \leq n-1$, 或いは, $n-1 \neq x$ 」, 故に, 「 $x \in N[n-1]$, 或いは, $x \in \{n\}$ 」, が従う。 故に, $x \in N[n-1] \cup \{n\}$, が従う。 故に, 「 $x \in N[n]$ なる任意の x に対して, $x \in N[n-1] \cup \{n\}$ 」, が従う。

$y \in N[n-1] \cup \{n\}$ なる任意の y を固定する。 $y \in N[n-1] \cup \{n\}$, が従う。 故に, 「 $y \in N[n-1]$, 或いは, $y \in \{n\}$ 」, が従う。 $y \in N[n-1]$, なる場合を考える。 $n-1 \leq n$ 及び [命題4], より, $N[n-1] \subseteq N[n]$, が従う。 故に, $y \in N[n]$, が従う。 $y \in \{n\}$, なる場合を考える。 $y=n$, が従う。 [命題3], より, $n \in N[n]$, が従う。 故に, $y \in N[n]$, が従う。 故に, 各場合において, $y \in N[n]$ 。 故に, 「 $y \in N[n-1] \cup \{n\}$, なる任意の y に対して, $y \in N[n]$ 」, が従う。

命題が従う。 [証明終]。

[命題7]。 「 $n \in N$ なる任意の n に対して, 「 $n \neq 1$, ならば, $n \notin N[n-1]$ 」」], が従う。

[証明]。 $n \in N$ なる任意の n を固定する。 $n \neq 1$, と仮定する。 「 $n \in N$, 且つ, $n \neq 1$ 」, が従う。 故に, 「或 z が存在して, 「 $z \in N$, 且つ,

$z+1=n$], が従う。この z を固定する。「 $z \in N$, 且つ, $z+1=n$], が従う。故に, 「 $z \in N$, 且つ, $z=n-1$], が従う。故に, $n-1 \in N$, が従う。故に, [定義 1], より, 「 $N[n-1]$ は定義される], が従う。 $n \in N[n-1]$, と仮定して矛盾を導く。[定義 1], より, 「 $n \in N$, 且つ, $n \leq n-1$], が従う。故に, $n \leq n-1$, が従う。ところが, $n-1 \leq n$. 故に, $n=n-1$, が従う。ところが, 「 $y \in N$ なる任意の y に対して, 「 $y+1=y$, には非ず」。故に, $n \in N$, より, 「 $n+1=n$, には非ず], が従う。故に, 「 $n=n-1$, には非ず], が従う。故に, 「 $n=n-1$, 且つ, $n \neq n-1$], が従う。故に, 矛盾が生じる。故に, 「 $n \in N[n-1]$, には非ず], が従う。命題が従う。 [証明終]。

[命題 8]。 「 $m \in N$ なる任意の m 及び $n \in N$ なる任意の n , に対して, 「 $m \in N[n]$, ならば, $m+1 \in N[n+1]$], が従う。

[証明]。 $m \in N$ なる任意の m 及び $n \in N$ なる任意の n , の各各を, 固定する。 $m \in N[n]$, と仮定する。「 $m+1 \in N$, 且つ, $n+1 \in N$], が従う。一方, [定義 1], より, 「 $m \in N$, 且つ, $m \leq n$], が従う。故に, $m \leq n$, が従う。故に, $m+1 \leq n+1$, が従う。故に, $m+1 \in N$ 及び [定義 1] 及び $n+1 \in N$, より, $m+1 \in N[n+1]$, が従う。故に, 「 $m \in N$ なる任意の m 及び $n \in N$ なる任意の n , に対して, 「 $m \in N[n]$, ならば, $m+1 \in N[n+1]$], が従う。

[証明終]。

[命題 9]。 「 $m \in N$ なる任意の m 及び $n \in N$ なる任意の n , に対して, 「 $m \neq 1$, 且つ, $n \neq 1$], ならば, 「 $m \in N[n]$, ならば, $m-1 \in N[n-1]$], が従う。

[証明]。 $m \in N$ なる任意の m 及び $n \in N$ なる任意の n , の各各を, 固定する。「 $m \neq 1$, 且つ, $n \neq 1$], と仮定する。

$m \in N[n]$, と仮定する。[定義 1], より, 「 $m \in N$, 且つ, $m \leq n$], が従う。故に, $m \in N$, が従う。ところが, $m \neq 1$. 故に, 「或 x' が存在して, 「 $x' \in N$, 且つ, $x'+1=m$], が従う。この x' を固定する。「 $x' \in N$, 且つ, $x'+1=m$], が従う。故に, $x'+1=m$, が従う。故に, $x'=m-1$, が従う。ところが, $x' \in N$. 故に, $m-1 \in N$, が従う。また, $m-1 \leq m$. 故に, $m \leq n$, より, $m-1 \leq n$, が従う。ところが, $n \neq 1$. 故に, 「或 x'' が存在して, 「 $x'' \in N$, 且つ, $x''+1=n$], が従う。この x'' を固定する。「 $x'' \in N$, 且つ, $x''+1=n$], が従う。故に, $x''+1=n$, が従う。故に, $x''=n-1$, が従う。ところが, $x'' \in N$. 故に, $n-1 \in N$, が従う。故に, $m-1 \leq n$, より, $m-1 \leq n-1$, が従う。故に, 「 $m-1 \in N$, 且つ, $m-1 \leq n-1$], が従う。故に, $n-1 \in N$ 及び [定義 1], より, $m-1 \in N[n-1]$, が従う。故に, 「 $m \in N$ なる任意の m 及び $n \in N$ なる任意の n , に対して, 「 $m \neq 1$, 且つ, $n \neq 1$], ならば, 「 $m \in N[n]$, ならば, $m-1 \in N[n-1]$], が従う。 [証明終]。

[命題 10]。 n を $n \in N$ なる任意の自然数とする。「 $m \in N[n]$ なる任意の m に対して, $\tau(m) = m+1$], によって, $N[n]$ を定義域とする写像, τ , を定義する。

$K = \{k | k \in N[n+1], \text{ 且つ, } k \neq 1\}$,

と置く。 $\tau \in \text{Bij}(N[n], K)$, が従う。

[証明]。 $\tau \in \text{Map}(N[n], K)$, を示す。 $m \in N[n]$ なる任意の m を固定する。[命題 8], より, $m+1 \in N[n+1]$, が従う。一方, $m \in N[n]$, より, $m+1 \neq 1$, が従う。ところが, τ の定義, より, $\tau(m) = m+1$. 故に, 「 $\tau(m) \in N[n+1]$, 且つ, $\tau(m) \neq 1$], が従う。故に, K の定義, より, $\tau(m) \in K$, が従う。故に, 「 $m \in N[n]$ なる任意の m に対して, $\tau(m) \in K$], が

従う。故に、 $\tau \in \text{Map}(N[n], K)$, が従う。

$\tau \in \text{Inj}(N[n], K)$, を示す。 $m' \in N[n]$ なる任意の m' 及び $m'' \in N[n]$ なる任意の m'' , の各各を, 固定する。 $m' \neq m''$, と仮定する。 $m' \neq m''$, より, $m'+1 \neq m''+1$, が従う。ところが, τ の定義, より, 「 $\tau(m') = m'+1$, 且つ, $\tau(m'') = m''+1$ 」, が従う。故に, $\tau(m') \neq \tau(m'')$, が従う。故に, 「 $m' \in N[n]$ なる任意の m' 及び $m'' \in N[n]$ なる任意の m'' , に対して, 「 $m' \neq m''$, ならば, $\tau(m') \neq \tau(m'')$ 」, が従う。ところが, $\tau \in \text{Map}(N[n], K)$ 。故に, $\tau \in \text{Inj}(N[n], K)$, が従う。

$\tau \in \text{Surj}(N[n], K)$, を示す。 $w \in K$ なる任意の w を固定する。 K の定義, より, 「 $w \in N[n+1]$, 且つ, $w \neq 1$ 」, が従う。故に, $w \in N[n+1]$, が従う。故に, [定義1], より, $w \in N$, が従う。また, $w \neq 1$, が従う。一方, $n \in N$, より, $n+1 \neq 1$, が従う。故に, [命題9], より, $w-1 \in N[(n+1)-1]$, が従う。ところが, $(n+1)-1 = n$ 。故に, $w-1 \in N[n]$, が従う。ところが, τ の定義, より, $\tau(w-1) = (w-1)+1$, が従う。故に, $(w-1)+1 = w$, より, $\tau(w-1) = w$, が従う。故に, $w = \tau(w-1)$, が従う。ところが, $w-1 \in N[n]$ 。故に, 「 $v \in N[n]$ なる或 v が存在して, $w = \tau(v)$ 」, が従う。故に, 「 $w \in K$ なる任意の w に対して, 「 $v \in N[n]$ なる或 v が存在して, $w = \tau(v)$ 」, が従う。ところが, $\tau \in \text{Map}(N[n], K)$ 。故に, $\tau \in \text{Surj}(N[n], K)$, が従う。

故に, $\tau \in \text{Bij}(N[n], K)$, が従う。

[証明終]。

[命題11]。 「 $n \in N$ なる任意の n 及び任意の集合 D , に対して, 「 $n \neq 1$, ならば, 「 $n \notin D$, と, $D \cap N[n-1] = D \cap N[n]$, とは, 同値である」」, が従う。

[証明]。 $n \in N$ なる任意の n 及び任意の集合 D , の各各を, 固定する。 $n \neq 1$, と仮定する。 $n \neq 1$ 及び [定義1], より, 「 $N[n-1]$ は定義

される」, が従う。

$n \notin D$, と仮定する。 $x \in D \cap N[n-1]$ なる任意の x を固定する。 $x \in D \cap N[n-1]$, が従う。「 $x \in D$, 且つ, $x \in N[n-1]$ 」, が従う。ところが, [命題4], より, $N[n-1] \subseteq N[n]$, が従う。故に, $x \in N[n-1]$, より, $x \in N[n]$, が従う。故に, 「 $x \in D$, 且つ, $x \in N[n]$ 」, が従う。故に, $x \in D \cap N[n]$, が従う。故に, 「 $x \in D \cap N[n-1]$ なる任意の x に対して, $x \in D \cap N[n]$ 」, が従う。 $y \in D \cap N[n]$ なる任意の y を固定する。 $y \in D \cap N[n]$, が従う。故に, 「 $y \in D$, 且つ, $y \in N[n]$ 」, が従う。故に, $y \in N[n]$, が従う。ところが, [命題6], より, $N[n] = N[n-1] \cup \{n\}$, が従う。故に, $y \in N[n-1] \cup \{n\}$, が従う。故に, 「 $y \in N[n-1]$, 或いは, $y \in \{n\}$ 」, が従う。 $y \in N[n-1]$, なる場合を考える。 $y \in D$, より, 「 $y \in D$, 且つ, $y \in N[n-1]$ 」, が従う。故に, $y \in D \cap N[n-1]$, が従う。 $y \in \{n\}$, なる場合を考える。 $y = n$, が従う。ところが, $y \in D$ 。故に, $n \in D$ 。これは, $n \notin D$, に反する。故に, $y \in D \cap N[n-1]$, が従う。故に, 「 $y \in D \cap N[n]$ なる任意の y に対して, $y \in D \cap N[n-1]$ 」, が従う。故に, $D \cap N[n-1] = D \cap N[n]$, が従う。

$D \cap N[n-1] = D \cap N[n]$, と仮定する。 $n \in D$, と仮定して矛盾を導く。[命題3], より, $n \in N[n]$, が従う。故に, 「 $n \in D$, 且つ, $n \in N[n]$ 」, が従う。故に, $n \in D \cap N[n]$, が従う。ところが, $D \cap N[n-1] = D \cap N[n]$ 。故に, $n \in D \cap N[n-1]$ 。故に, 「 $n \in D$, 且つ, $n \in N[n-1]$ 」, が従う。故に, $n \in N[n-1]$ 。故に, 「 $n \in N$, 且つ, $n \leq n-1$ 」, が従う。故に, $n \leq n-1$ 。ところが, $n-1 \leq n$ 。故に, $n = n-1$ 。これは, $n \neq n-1$, に反する。

命題が従う。

[証明終]。

[命題12]。 「 $n \in N$ なる任意の n 及び $D \subseteq N$

なる任意の D , に対して, 「 $D \cap N[n] \neq \phi$, ならば, 「或 d が存在して, 「 $d = \min D$, 且つ, $d \in D \cap N[n]$ 」」」, が従う。

[証明]。 $n \in N$ なる任意の n 及び $D \subseteq N$ なる任意の D , の各各を, 固定する。 $D \cap N[n] \neq \phi$, と仮定する。故に, 「或 x が存在して, $x \in D \cap N[n]$ 」, が従う。この x を固定して x' とする。 $x' \in D \cap N[n]$, が従う。故に, 「 $x' \in D$, 且つ, $x' \in N[n]$ 」, が従う。故に, $x' \in D$, が従う。故に, 「或 y が存在して, $y \in D$ 」, が従う。故に, $D \neq \phi$, が従う。ところが, $D \subseteq N$ 。故に, D において最小である, 元, が存在する。この元を $d(*)$ とする。即ち, $d(*) = \min D$, と置く。ここで先に固定した x' を用いる。 「 $x' \in D$, 且つ, $x' \in N[n]$ 」, より, $x' \in D$ 。故に, $d(*) \leq x'$ 。ところが, $x' \in N[n]$, より, $x' \leq n$, が従う。故に, $d(*) \leq n$, が従う。ところが, 「 $d(*) \in D$, 且つ, $D \subseteq N$ 」, より, $d(*) \in N$, が従う。故に, 「 $d(*) \in N$, 且つ, $d(*) \leq n$ 」, が従う。ところが, $N[n] = \{k \mid k \in N, \text{ 且つ, } k \leq n\}$ 。故に, $d(*) \in N[n]$, が従う。故に, 「 $d(*) \in D$, 且つ, $d(*) \in N[n]$ 」, が従う。故に, $d(*) \in D \cap N[n]$, が従う。故に, 「或 d が存在して, 「 $d = \min D$, 且つ, $d \in D \cap N[n]$ 」」, が従う。命題が従う。

[証明終]。

[命題13]。 「 $D \subseteq N$ なる任意の D に対して, 「 $D \neq \phi$, ならば, $D \cap N[\min D] = \{\min D\}$ 」」, が従う。

[証明]。 $D \subseteq N$ なる任意の D を固定する。 $D \neq \phi$, と仮定する。 D において最小である, 元, 即ち, $\min D$, が存在する。 $x \in D \cap N[\min D]$ なる任意の x を固定する。 「 $x \in D$, 且つ, $x \in N[\min D]$ 」, が従う。 $x \in D$, より, $\min D \leq x$, が従う。 $x \in N[\min D]$ 及び [定義1], より, 「 $x \in N$, 且つ, $x \leq \min D$ 」, が従う。故

に, $x \leq \min D$, が従う。故に, 「 $\min D \leq x$, 且つ, $x \leq \min D$ 」, が従う。故に, $\min D = x$, が従う。ところが, $\min D \in \{\min D\}$ 。故に, $x \in \{\min D\}$, が従う。故に, 「 $x \in D \cap N[\min D]$ なる任意の x に対して, $x \in \{\min D\}$ 」, が従う。 $y \in \{\min D\}$ なる任意の y を固定する。 $y = \min D$, が従う。ところが, $\min D \in D$ 。一方, 「 $\min D \in D$, 且つ, $D \subseteq N$ 」, より, $\min D \in N$, が従う。ところが, $\min D \leq \min D$ 。故に, [定義1], より, $\min D \in N[\min D]$, が従う。故に, 「 $\min D \in D$, 且つ, $\min D \in N[\min D]$ 」, が従う。故に, $\min D \in D \cap N[\min D]$, が従う。ところが, $\min D = y$ 。故に, $y \in D \cap N[\min D]$, が従う。故に, 「 $y \in \{\min D\}$ なる任意の y に対して, $y \in D \cap N[\min D]$ 」, が従う。故に, $D \cap N[\min D] = \{\min D\}$, が従う。 [証明終]。

[定義2]。 「 $x \in \{1\}$ なる任意の x に対して, $\beta_*(x) = 1$ 」, によって, $\{1\}$ を定義域とする写像, β_* , を定義する。

[命題14]。 $\text{Bij}(\{1\}, \{1\}) = \{\beta_*\}$, が従う。

[証明]。 [命題2.2] 及び [定義2], より, 従う。 [証明終]。

[命題15]。 「 $n \in N$ なる任意の n 及び $l \in N$ なる任意の l , に対して, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[n], N[l])$ なる或 φ が存在する, なる事と, $n = l$, なる事とは, 同値である」」, が従う。

[証明]。 「 $n \in N$ なる任意の n 及び $l \in N$ なる任意の l , に対して, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[n], N[l])$ なる或 φ が存在する」」, ならば, $n = l$ 」, を示す。

$M = \{m \mid m \in N, \text{ 且つ, } k \in N \text{ なる或 } k \text{ が存在して, 「}\varphi \in \text{Bij}(N[m], N[k]) \text{ なる或 } \varphi \text{ が存在する」}, \text{ 且つ, } m \neq k\}$,

と置く。 $M \neq \phi$, と仮定して矛盾を導く。

M の定義, より, $M \subseteq N$, が従う。故に, $M \neq \phi$, より, M において最小である, 元, が存在する。この元を $m(*)$ と表記する。即ち, $m(*) = \min M$, と置く。 $m(*) \in M$ 及び M の定義, より,

陳述 1. 「 $m(*) \in N$, 且つ, 「 $k \in N$ なる或 k が存在して, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[k])$ なる或 φ が存在する」, 且つ, $m(*) \neq k$ 」」,

が従う。

式 1. $1 \leq m(*)$,

を示す。陳述 1, より, $m(*) \in N$, が従う。故に, $1 \leq m(*)$, が従う。 $1 = m(*)$, と仮定して矛盾を導く。ところが, 陳述 1, より, 「 $k \in N$ なる或 k が存在して, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[k])$ なる或 φ が存在する」, 且つ, $m(*) \neq k$ 」, が従う。故に, 「 $k' \in N$ なる或 k' が存在して, 「 $\varphi' \in \text{Bij}(N[1], N[k'])$ なる或 φ' が存在する」, 且つ, $1 \neq k'$ 」, が従う。この k' を固定する。「 $k' \in N$, 且つ, 「 $\varphi' \in \text{Bij}(N[1], N[k'])$ なる或 φ' が存在する」, 且つ, $1 \neq k'$ 」, が従う。この φ' を固定する。「 $k' \in N$, 且つ, $\varphi' \in \text{Bij}(N[1], N[k'])$, 且つ, $1 \neq k'$ 」, が従う。故に, $\varphi' \in \text{Bij}(N[1], N[k'])$, が従う。ところが, [命題 1], より, $N[1] = \{1\}$ 。故に, $\varphi' \in \text{Bij}(\{1\}, N[k'])$, が従う。

$k' \neq \varphi'(1)$, の場合を考える。 $\varphi' \in \text{Surj}(\{1\}, N[k'])$, より, 「 $x' \in \{1\}$ なる或 x' が存在して, $k' = \varphi'(x')$ 」, が従う。この x' を固定する。「 $x' \in \{1\}$, 且つ, $k' = \varphi'(x')$ 」, が従う。ところが, 「 $x' \in \{1\}$, と, $x' = 1$, とは, 同値である」。故に, 「 $x' = 1$, 且つ, $k' = \varphi'(x')$ 」, が従う。故に, $k' = \varphi'(1)$, が従う。ところが,

$k' \neq \varphi'(1)$ 。故に, 矛盾が生じる。

$k' = \varphi'(1)$, の場合を考える。 $k' \in N$, より, $1 \leq k'$, が従う。故に, [定義 1], より, $1 \in N[k']$, が従う。ところが, $\varphi' \in \text{Surj}(\{1\}, N[k'])$ 。故に, 「 $x'' \in \{1\}$ なる或 x'' が存在して, $1 = \varphi'(x'')$ 」, が従う。この x'' を固定する。「 $x'' \in \{1\}$, 且つ, $1 = \varphi'(x'')$ 」, が従う。ところが, 「 $x'' \in \{1\}$, と, $x'' = 1$, とは, 同値である」。故に, 「 $x'' = 1$, 且つ, $1 = \varphi'(x'')$ 」, が従う。故に, $1 = \varphi'(1)$, が従う。ところが, $1 \neq k'$, より, $1 \neq k'$, が従う。故に, $\varphi'(1) \neq k'$, が従う。ところが, $k' = \varphi'(1)$, より, $\varphi'(1) = k'$, が従う。故に, 矛盾が生じる。

故に, $1 \neq m(*)$, が従う。ところが, $1 \leq m(*)$ 。故に, $1 \neq m(*)$, が従う。式 1, が従う。

陳述 2. 「 $m(*) - 1 \in N$, 且つ, 「 $k'' \in N$ なる任意の k'' に対して, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[m(*) - 1], N[k''])$ なる或 φ が存在する」, ならば, $m(*) - 1 = k''$ 」」,

を示す。陳述 1, より, $m(*) \in N$, が従う。式 1, より, $m(*) \neq 1$, が従う。故に, 「或 y' が存在して, 「 $y' \in N$, 且つ, $y' + 1 = m(*)$ 」」, が従う。この y' を固定する。「 $y' \in N$, 且つ, $y' + 1 = m(*)$ 」, が従う。故に, 「 $y' \in N$, 且つ, $y' = m(*) - 1$ 」, が従う。故に, $m(*) - 1 \in N$, が従う。一方, $m(*) - 1 \neq m(*)$ 。故に, $m(*)$ の最小性, より, $m(*) - 1 \notin M$, が従う。ところが, $m(*) - 1 \in N$ 。故に, M の定義, より, 「 $k'' \in N$ なる或 k'' が存在して, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[m(*) - 1], N[k''])$ なる或 φ が存在する」, 且つ, $m(*) - 1 \neq k''$ 」, には非ず」, が従う。故に, 「 $k'' \in N$ なる任意の k'' に対して, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[m(*) - 1], N[k''])$ なる或 φ が存在する」, には非ず」, 或いは, 「 $m(*) - 1 \neq k''$, には非ず」」, が従う。故に, 「 $k'' \in N$ なる任意の k'' に対して, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[m(*) - 1], N[k''])$ なる或 φ が存在する」, ならば, $m(*) - 1 = k''$ 」, が従う。陳述 2, が従う。

陳述 1, より, 「 $k \in N$ なる或 k が存在して, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[k])$ なる或 φ が存在する」, 且つ, $m(*) \neq k$ 」, が従う。この k を固定する。「 $k \in N$, 且つ, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[k])$ なる或 φ が存在する」, 且つ, $m(*) \neq k$ 」, が従う。この φ を固定する。

陳述 3. 「 $k \in N$, 且つ, $\varphi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[k])$, 且つ, $m(*) \neq k$,

が従う。

式 2. $1 \leq k$,

を示す。陳述 3, より, $k \in N$, が従う。故に, $1 \leq k$, が従う。 $1 = k$, と仮定して矛盾を導く。陳述 3, より, $\varphi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[k])$, が従う。ところが, $k = 1$. 故に, $\varphi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[1])$, が従う。ところが, [命題 1], より, $N[1] = \{1\}$, が従う。故に, $\varphi \in \text{Bij}(N[m(*)], \{1\})$, が従う。ところが, [命題 3], より, $m(*) \in N[m(*)]$, が従う。故に, $\varphi(m(*)) \in \{1\}$, が従う。一方, 陳述 2, より, $m(*) - 1 \in N$, が従う。 $m(*) - 1 \leq m(*)$ 及び [定義 1], より, $m(*) - 1 \in N[m(*)]$, が従う。故に, $\varphi(m(*) - 1) \in \{1\}$, が従う。故に, 「 $\varphi(m(*)) \in \{1\}$, 且つ, $\varphi(m(*) - 1) \in \{1\}$ 」, が従う。ところが, 「任意の z に対して, 「 $z \in \{1\}$, と, $z = 1$, とは, 同値である」」。故に, 「 $\varphi(m(*)) = 1$, 且つ, $\varphi(m(*) - 1) = 1$ 」, が従う。故に, $\varphi(m(*) - 1) = \varphi(m(*))$, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Inj}(N[m(*)], N[k])$. 故に, 「 $m(*) - 1 \in N[m(*)]$, 且つ, $m(*) \in N[m(*)]$, 且つ, $m(*) - 1 \neq m(*)$ 」, より, $\varphi(m(*) - 1) \neq \varphi(m(*))$, が従う。故に, 矛盾が生じる。故に, $1 \neq k$, が従う。ところが, $1 \leq k$. 故に, $1 \leq k$, が従う。式 2, が従う。

$k = \varphi(m(*))$, と仮定して矛盾を導く。

箇所 1. 陳述 2, より, $m(*) - 1 \in N$, が従う。また, $m(*) - 1 \leq m(*)$. 故に, [命題 4], より, $N[m(*) - 1] \subseteq N[m(*)]$, が従う。故に, 写像 φ の定義域 $N[m(*)]$ を $N[m(*) - 1]$ へと制限する事, によって得られる写像, 即ち, 写像 φ の $N[m(*) - 1]$ への制限, $\varphi|_{N[m(*) - 1]}$, が定義可能となる。

$$\varphi_* = \varphi|_{N[m(*) - 1]},$$

と置く。

式 3. $\varphi_* \in \text{Bij}(N[m(*) - 1], N[k - 1])$,

を示す。

$\varphi_* \in \text{Map}(N[m(*) - 1], N[k - 1])$, を示す。 $l' \in N[m(*) - 1]$ なる任意の l' を固定する。陳述 3, より, $k \in N$, が従う。式 2, より, $k \neq 1$, が従う。故に, [命題 6], より, $N[k] = N[k - 1] \cup \{k\}$, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Map}(N[m(*)], N[k])$, より, $\varphi(l') \in N[k]$, が従う。故に, $\varphi(l') \in N[k - 1] \cup \{k\}$, が従う。故に, 「 $\varphi(l') \in N[k - 1]$, 或いは, $\varphi(l') \in \{k\}$ 」, が従う。 $\varphi(l') \in \{k\}$, と仮定して矛盾を導く。「 $\varphi(l') \in \{k\}$, と, $\varphi(l') = k$, とは, 同値である」, より, $\varphi(l') = k$, が従う。ところが, $k = \varphi(m(*))$. 故に, $\varphi(l') = \varphi(m(*))$, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Inj}(N[m(*)], N[k])$. 故に, $l' = m(*)$, が従う。一方, 陳述 1, より, $m(*) \in N$, が従う。また, 式 1, より, $m(*) \neq 1$, が従う。故に, [命題 7], より, $m(*) \notin N[m(*) - 1]$, が従う。ところが, $l' = m(*)$. 故に, $l' \notin N[m(*) - 1]$, が従う。ところが, $l' \in N[m(*) - 1]$. 故に, 矛盾が生じる。故に, $\varphi(l') \in N[k - 1]$, が従う。ところが, $l' \in N[k - 1]$ 及び φ_* の定義, より, $\varphi(l') = \varphi_*(l')$, が従う。故に, $\varphi_*(l') \in N[k - 1]$, が従う。故に, 「 $l' \in N[m(*) - 1]$ なる任意の l' に対して, $\varphi_*(l') \in N[k - 1]$ 」, が従う。

故に, $\varphi_* \in \text{Map}(N[m(*)-1], N[k-1])$, が従う。

$\varphi_* \in \text{Inj}(N[m(*)-1], N[k-1])$, を示す。
 $l'' \in N[m(*)-1]$ なる任意の l'' 及び $l''' \in N[m(*)-1]$ なる任意の l''' , の各各を, 固定する。 $l'' \neq l'''$, と仮定する。 $N[m(*)-1] \subseteq N[m(*)]$, より, 「 $l'' \in N[m(*)]$, 且つ, $l''' \in N[m(*)]$ 」, が従う。ところが, $l'' \neq l'''$. 故に, $\varphi \in \text{Inj}(N[m(*)], N[k])$, より, $\varphi(l'') \neq \varphi(l''')$, が従う。ところが, 「 $l'' \in N[m(*)-1]$, 且つ, $l''' \in N[m(*)-1]$ 」及び φ_* の定義, より, 「 $\varphi(l'') = \varphi_*(l'')$, 且つ, $\varphi(l''') = \varphi_*(l''')$ 」, が従う。故に, $\varphi_*(l'') \neq \varphi_*(l''')$, が従う。故に, 「 $l'' \in N[m(*)-1]$ なる任意の l'' 及び $l''' \in N[m(*)-1]$ なる任意の l''' , に対して, 「 $l'' \neq l'''$, ならば, $\varphi_*(l'') \neq \varphi_*(l''')$ 」, が従う。故に, $\varphi_* \in \text{Map}(N[m(*)-1], N[k-1])$, より, $\varphi_* \in \text{Inj}(N[m(*)-1], N[k-1])$, が従う。

$\varphi_* \in \text{Surj}(N[m(*)-1], N[k-1])$, を示す。 $y' \in N[k-1]$ なる任意の y' を固定する。陳述3, より, $k \in N$, が従う。式2, より, $k \neq 1$, が従う。故に, $k-1 \in N$, が従う。ところが, $k-1 \leq k$. 故に, 「命題4」, より, $N[k-1] \subseteq N[k]$, が従う。故に, $y' \in N[k]$, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Surj}(N[m(*)], N[k])$. 故に, 「 $x' \in N[m(*)]$ 」なる或 x' が存在して, $y' = \varphi(x')$, が従う。この x' を固定する。「 $x' \in N[m(*)]$, 且つ, $y' = \varphi(x')$ 」, が従う。 $x' \in N[m(*)]$, が従う。陳述1, より, $m(*) \in N$, が従う。また, 式1, より, $m(*) \neq 1$, が従う。故に, 「命題6」, より, $N[m(*)] = N[m(*)-1] \cup \{m(*)\}$, が従う。故に, $x' \in N[m(*)-1] \cup \{m(*)\}$, が従う。故に, 「 $x' \in N[m(*)-1]$, 或いは, $x' \in \{m(*)\}$ 」, が従う。 $x' \in \{m(*)\}$, と仮定して矛盾を導く。「 $x' \in \{m(*)\}$, と, $x' = m(*)$, とは, 同値である」, より, $x' = m(*)$, が従う。故に, $\varphi(x') = \varphi(m(*))$, が従う。ところが, $k = \varphi(m(*))$. 故に, $\varphi(x') = k$, が従う。ところが, $y' = \varphi(x')$.

故に, $y' = k$, が従う。ところが, $y' \in N[k-1]$. 故に, $k \in N[k-1]$, が従う。一方, 陳述3, より, $k \in N$. また, 式2, より, $k \neq 1$. 故に, 「命題7」, より, $k \in N[k-1]$, が従う。故に, 矛盾が生じる。故に, $x' \in N[m(*)-1]$, が従う。故に, 「 $x' \in N[m(*)-1]$, 且つ, $y' = \varphi(x')$ 」, が従う。一方, φ_* の定義, より, $\varphi(x') = \varphi_*(x')$, が従う。故に, 「 $x' \in N[m(*)-1]$, 且つ, $y' = \varphi_*(x')$ 」, が従う。故に, 「 $x' \in N[m(*)-1]$ なる或 x' が存在して, $y' = \varphi_*(x')$ 」, が従う。故に, 「 $y' \in N[k-1]$ なる任意の y' に対して, 「 $x' \in N[m(*)-1]$ なる或 x' が存在して, $y' = \varphi_*(x')$ 」, が従う。故に, $\varphi_* \in \text{Map}(N[m(*)-1], N[k-1])$, より, $\varphi_* \in \text{Surj}(N[m(*)-1], N[k-1])$, が従う。

故に, $\varphi_* \in \text{Bij}(N[m(*)-1], N[k-1])$, が従う。故に, 式3, が従う。

陳述3, より, $k \in N$, が従う。式2, より, $k \neq 1$, が従う。故に, $k-1 \in N$, が従う。ところが, 陳述2, より, 「 $k'' \in N$ なる任意の k'' に対して, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[m(*)-1], N[k''])$ 」なる或 φ が存在する」, ならば, $m(*)-1 = k''$ 」, が従う。故に, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[m(*)-1], N[k-1])$ 」なる或 φ が存在する」, ならば, $m(*)-1 = k-1$, が従う。ところが, 式3, より, $\varphi_* \in \text{Bij}(N[m(*)-1], N[k-1])$, が従う。故に, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[m(*)-1], N[k-1])$ 」なる或 φ が存在する」, が従う。故に, $m(*)-1 = k-1$, が従う。故に, $(m(*)-1)+1 = (k-1)+1$, が従う。故に, $m(*) = k$, が従う。ところが, 陳述3, より, $m(*) \neq k$, が従う。故に, 矛盾が生じる。 箇所2。

$k \neq \varphi(m(*))$, と仮定して矛盾を導く。

「 $n' \in N[k]$ なる任意の n' に対して, 「 $n' = \varphi(m(*))$, ならば, $\chi(n') = k$ 」, 且つ, 「 $n' = k$, ならば, $\chi(n') = \varphi(m(*))$ 」, 且つ, 「 $n' \neq \varphi(m(*))$, 且つ, $n' \neq k$, ならば, $\chi(n') = n'$ 」」,

によって, $N[k]$ を定義域とする写像, χ , を定義する。

式 4. $\chi \in \text{Bij}(N[k], N[k])$,

を示す。

$\chi \in \text{Map}(N[k], N[k])$, を示す。 $n' \in N[k]$ なる任意の n' を固定する。 $n' = \varphi(m(*))$, なる場合を考える。 χ の定義, より, $\chi(n') = k$, が従う。ところが, 陳述 3, より, $k \in N$, が従う。故に, $\chi(n') \in N[k]$, が従う。 $n' = k$, なる場合を考える。 χ の定義, より, $\chi(n') = \varphi(m(*))$, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Map}(N[m(*)], N[k])$ 。また, 陳述 1, より, $m(*) \in N$ 。故に, $[\text{命題 3}],$ より, $m(*) \in N[m(*)]$, が従う。故に, $\varphi(m(*)) \in N[k]$, が従う。ところが, $\chi(n') = \varphi(m(*))$ 。故に, $\chi(n') \in N[k]$, が従う。「 $n' \neq \varphi(m(*))$, 且つ, $n' \neq k$ 」, なる場合を考える。 χ の定義, より, $\chi(n') = n'$, が従う。ところが, $n' \in N[k]$ 。故に, $\chi(n') \in N[k]$, が従う。故に, 「 $n' \in N[k]$ なる任意の n' に対して, $\chi(n') \in N[k]$ 」, が従う。故に, $\chi \in \text{Map}(N[k], N[k])$, が従う。

$\chi \in \text{Inj}(N[k], N[k])$, を示す。 $j' \in N[k]$ なる任意の j' 及び $j'' \in N[k]$ なる任意の j'' , の各各を, 固定する。 $j' \neq j''$, と仮定する。

「 $j' = \varphi(m(*))$, 且つ, $j'' = k$ 」, なる場合を考える。 χ の定義, より, 「 $\chi(j') = k$, 且つ, $\chi(j'') = \varphi(m(*))$ 」, が従う。ところが, $k \neq \varphi(m(*))$ 。故に, $\chi(j') \neq \chi(j'')$, が従う。

「 $j' = \varphi(m(*))$, 且つ, $j'' \neq k$ 」, なる場合を考える。「 $j'' = \varphi(m(*))$, 或いは, $j'' \neq \varphi(m(*))$ 」, が従う。 $j'' = \varphi(m(*))$, なる場合を考える。ところが, $j' = \varphi(m(*))$ 。故に, $j' = j''$, が従う。ところが, $j' \neq j''$ 。故に, 矛盾が生じる。故に, $j'' \neq \varphi(m(*))$, が従う。ところが, $j' \neq k$ 。故に, χ の定義, より, $\chi(j'') = j''$, が

従う。一方, $j' = \varphi(m(*))$ 及び χ の定義, より, $\chi(j') = k$, が従う。ところが, $j'' \neq k$ 。故に, $\chi(j'') \neq \chi(j')$ 。故に, $\chi(j') \neq \chi(j'')$, が従う。

「 $j' \neq \varphi(m(*))$, 且つ, $j'' = k$ 」, なる場合を考える。「 $j' = k$, 或いは, $j' \neq k$ 」, が従う。 $j' = k$, なる場合を考える。ところが, $j'' = k$ 。故に, $j' = j''$, が従う。ところが, $j' \neq j''$ 。故に, 矛盾が生じる。故に, $j' \neq k$, が従う。ところが, $j' \neq \varphi(m(*))$ 。故に, χ の定義, より, $\chi(j') = j'$, が従う。一方, $j'' = k$ 及び χ の定義, より, $\chi(j'') = \varphi(m(*))$, が従う。ところが, $j' \neq \varphi(m(*))$ 。故に, $\chi(j') \neq \chi(j'')$, が従う。

「 $j' \neq \varphi(m(*))$, 且つ, $j'' \neq k$ 」, なる場合を考える。

「 $j' = k$, 且つ, $j'' = \varphi(m(*))$ 」, なる場合を考える。 χ の定義, より, 「 $\chi(j') = \varphi(m(*))$, 且つ, $\chi(j'') = k$ 」, が従う。ところが, $k \neq \varphi(m(*))$ 。故に, $\chi(j'') \neq \chi(j')$, が従う。故に, $\chi(j') \neq \chi(j'')$, が従う。

「 $j' = k$, 且つ, $j'' \neq \varphi(m(*))$ 」, なる場合を考える。 $j'' \neq \varphi(m(*))$, が従う。ところが, $j'' \neq k$ 。故に, χ の定義, より, $\chi(j'') = j''$, が従う。一方, $j' = k$ 。故に, χ の定義, より, $\chi(j') = \varphi(m(*))$, が従う。ところが, $j'' \neq \varphi(m(*))$ 。故に, $\chi(j'') \neq \chi(j')$, が従う。故に, $\chi(j') \neq \chi(j'')$, が従う。

「 $j' \neq k$, 且つ, $j'' = \varphi(m(*))$ 」, なる場合を考える。 $j' \neq k$, が従う。ところが, $j' \neq \varphi(m(*))$ 。故に, χ の定義, より, $\chi(j') = j'$, が従う。一方, $j'' = \varphi(m(*))$ 及び χ の定義, より, $\chi(j'') = k$, が従う。ところが, $j' \neq k$ 。故に, $\chi(j') \neq \chi(j'')$, が従う。

「 $j' \neq k$, 且つ, $j'' \neq \varphi(m(*))$ 」, なる場合を考える。 $j' \neq k$, が従う。ところが, $j' \neq \varphi(m(*))$ 。故に, χ の定義, より, $\chi(j') = j'$, が従う。一方, $j'' \neq \varphi(m(*))$, が従う。ところが, $j'' \neq k$ 。故に, χ の定義, より, $\chi(j'') = j''$, が従う。ところが, $j' \neq j''$ 。故に, $\chi(j') \neq \chi(j'')$, が従

う。

故に、「 $j' \in N[k]$ なる任意の j' 及び $j'' \in N[k]$ なる任意の j'' 」に対して、「 $j' \neq j''$ 」ならば、「 $\chi(j') \neq \chi(j'')$ 」が従う。故に、「 $\chi \in \text{Inj}(N[k], N[k])$ 」が従う。

$\chi \in \text{Surj}(N[k], N[k])$ を示す。 $y'' \in N[k]$ なる任意の y'' を固定する。 $y'' = k$ なる場合を考える。陳述 1, より、「 $m(*) \in N$ 」が従う。故に、「 $m(*) \in N[m(*)]$ 」が従う。ところが、「 $\varphi \in \text{Map}(N[m(*)], N[k])$ 」が従う。故に、「 $\varphi(m(*)) \in N[k]$ 」が従う。ところが、「 $\varphi(m(*)) = \varphi(m(*))$ 」が従う。故に、「 χ の定義, より, $\chi(\varphi(m(*))) = k$ 」が従う。ところが、「 $y'' = k$ 」が従う。故に、「 $\chi(\varphi(m(*))) = y''$ 」が従う。ところが、「 $\varphi(m(*)) \in N[k]$ 」が従う。故に、「 $x'' \in N[k]$ なる或 x'' が存在して, $\chi(x'') = y''$ 」が従う。 $y'' = \varphi(m(*))$ なる場合を考える。陳述 3, より、「 $k \in N$ 」が従う。故に、「 $k \in N[k]$ 」が従う。ところが、「 $k = k$ 」が従う。故に、「 χ の定義, より, $\chi(k) = \varphi(m(*))$ 」が従う。ところが、「 $y'' = \varphi(m(*))$ 」が従う。故に、「 $\chi(k) = y''$ 」が従う。ところが、「 $k \in N[k]$ 」が従う。故に、「 $x'' \in N[k]$ なる或 x'' が存在して, $\chi(x'') = y''$ 」が従う。「 $y'' \neq k$ 且つ, $y'' \neq \varphi(m(*))$ 」なる場合を考える。 $y'' \in N[k]$ 及び χ の定義, より、「 $\chi(y'') = y''$ 」が従う。故に、「 $x'' \in N[k]$ なる或 x'' が存在して, $\chi(x'') = y''$ 」が従う。

故に、「 $y'' \in N[k]$ なる任意の y'' に対して, $x'' \in N[k]$ なる或 x'' が存在して, $\chi(x'') = y''$ 」が従う。故に、「 $\chi \in \text{Surj}(N[k], N[k])$ 」が従う。

故に、「 $\chi \in \text{Bij}(N[k], N[k])$ 」が従う。式 4, が従う。

陳述 3, より、「 $\varphi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[k])$ 」が従う。故に、「式 4 及び [命題 2.7], より, $\chi \circ \varphi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[k])$ 」が従う。ところが、「 $(\chi \circ \varphi)(m(*)) = \chi(\varphi(m(*)))$ 」が従う。一方、「 χ の定義, より, $\chi(\varphi(m(*))) = k$ 」が従う。故に、「 $(\chi \circ \varphi)(m(*)) = k$ 」が従う。一方、陳述 3, より、「 $k \in N$ 且つ, $m(*) \neq k$ 」が従う。故に、

陳述 4. 「 $k \in N$ 且つ, $\chi \circ \varphi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[k])$ 且つ, $m(*) \neq k$ 」

が従い、且つ、「 $k = (\chi \circ \varphi)(m(*))$ 」が従う。故に、「箇所 1, から, 箇所 2, まで, における, 各記号「 φ 」及び各記号列「式 3」及び各記号列「陳述 3」を, 各各, 記号列「 $\chi \circ \varphi$ 」及び記号列「式 5」及び記号列「陳述 4」, によって置き換える事」, によって得られる議論により, 矛盾が生じる。

故に、「 $M = \phi$ 」が従う。 $m \in N$ なる任意の m を固定する。 $m \notin \phi$ が従う。ところが、「 $M = \phi$ 」が従う。故に、「 $m \notin M$ 」が従う。ところが、「 $m \in N$ 」が従う。故に、「 M の定義, より, 「 $k \in N$ なる或 k が存在して, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[m], N[k])$ なる或 φ が存在する」且つ, $m \neq k$ 」には非ず」が従う。故に、「 $k \in N$ なる任意の k に対して, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[m], N[k])$ なる或 φ が存在する」には非ず, 或いは, 「 $m \neq k$ には非ず」」が従う。故に、「 $k \in N$ なる任意の k に対して, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[m], N[k])$ なる或 φ が存在する」ならば, $m = k$ 」が従う。故に、「 $m \in N$ なる任意の m 及び $k \in N$ なる任意の k に対して, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[m], N[k])$ なる或 φ が存在する」ならば, $m = k$ 」が従う。

$n \in N$ なる任意の n 及び $l \in N$ なる任意の l , の各各を, 固定する。 $n = l$, と仮定する。「 $v \in N[n]$ なる任意の v に対して, $\phi(v) = v$ 」, によって, $N[n]$ を定義域とする写像, ϕ , を定義する。 $\phi \in \text{Bij}(N[n], N[l])$, を示す。

$\phi \in \text{Map}(N[n], N[l])$, を示す。 $v' \in N[n]$ なる任意の v' を固定する。 ϕ の定義, より, 「 $\phi(v') = v'$ 」が従う。ところが、「 $v' \in N[n]$ 」が従う。故に、「 $\phi(v') \in N[n]$ 」が従う。ところが、「 $n = l$ 」が従う。故に、「 $\phi(v') \in N[l]$ 」が従う。故に、「 $v' \in N[n]$ 」

なる任意の v' に対して, $\phi(v') \in N[I]$, が従う。故に, $\phi \in \text{Map}(N[n], N[I])$, が従う。

$\phi \in \text{Inj}(N[n], N[I])$, を示す。 $v'' \in N[n]$ なる任意の v'' 及び $v''' \in N[n]$ なる任意の v''' , の各各を, 固定する。 $v'' \neq v'''$, と仮定する。 ϕ の定義, より, 「 $\phi(v'') = v'''$, 且つ, $\phi(v''') = v'''$ 」, が従う。ところが, $v'' \neq v'''$ 。故に, $\phi(v'') \neq \phi(v''')$, が従う。故に, 「 $v'' \in N[n]$ なる任意の v'' 及び $v''' \in N[n]$ なる任意の v''' , に対して, 「 $v'' \neq v'''$, ならば, $\phi(v'') \neq \phi(v''')$ 」, が従う。一方, $\phi \in \text{Map}(N[n], N[I])$ 。故に, $\phi \in \text{Inj}(N[n], N[I])$, が従う。

$\phi \in \text{Surj}(N[n], N[I])$, を示す。 $w \in N[I]$ なる任意の w を固定する。 $n=l$, より, $w \in N[n]$, が従う。 ϕ の定義, より, $\phi(w) = w$, が従う。故に, 「 $w \in N[n]$, 且つ, $w = \phi(w)$ 」, が従う。故に, 「 $v \in N[n]$ なる或 v が存在して, $w = \phi(v)$ 」, が従う。故に, 「 $w \in N[I]$ なる任意の w に対して, 「 $v \in N[n]$ なる或 v が存在して, $w = \phi(v)$ 」, が従う。故に, $\phi \in \text{Surj}(N[n], N[I])$, が従う。

故に, $\phi \in \text{Bij}(N[n], N[I])$, が従う。故に, 「 $\phi \in \text{Bij}(N[n], N[I])$, なる或 ϕ が存在する」, が従う。

命題が従う。

〔証明終〕。

〔命題16〕。「 $n \in N$ なる任意の n に対して, 「或 ϕ が一意的に存在して, 「 $\phi \in \text{Bij}(N[n], N[n])$, 且つ, 「 $k \in N[n]$ なる任意の k 及び $l \in N[n]$ なる任意の l , に対して, 「 $k \leq l$, ならば, $\phi(l) \leq \phi(k)$ 」」」」, が従う。

〔証明〕。「 $\phi \in \text{Bij}(N[n], N[n])$, 且つ, 「 $k \in N[n]$ なる任意の k 及び $l \in N[n]$ なる任意の l , に対して, 「 $k \leq l$, ならば, $\phi(l) \leq \phi(k)$ 」」」, なる, $\langle \phi, n \rangle$ に対する性質, を, $\mathcal{A}(\phi; n)$, と表記する。

$M = \{m \mid m \in N, \text{ 且つ, 「或 } \phi \text{ が一意的に存在して, } \mathcal{A}(\phi; m)\text{」, には非ず}\}$,

と置く。 $M \neq \phi$, と仮定して矛盾を導く。

$M \neq \phi$, より, M において最小である, 元, が存在する。この元を $m(*)$ と表記する。即ち, $m(*) = \min M$, と置く。 $m(*) \in M$ 及び M の定義, より,

陳述1。「 $m(*) \in N$, 且つ, 「或 ϕ が一意的に存在して, $\mathcal{A}(\phi; m(*))$ 」, には非ず」, が従う。

式1。 $1 \leq m(*)$,

を示す。陳述1, より, $m(*) \in N$, が従う。故に, $1 \leq m(*)$, が従う。 $1 = m(*)$, と仮定して矛盾を導く。 $N[m(*)] = N[1]$, が従う。ところが, [命題1], より, $N[1] = \{1\}$, が従う。故に, $N[m(*)] = \{1\}$, が従う。故に, $\text{Bij}(N[m(*)], N[m(*)]) = \text{Bij}(\{1\}, \{1\})$, が従う。ところが, [命題14], より, $\text{Bij}(\{1\}, \{1\}) = \{\beta_*\}$, が従う。故に, $\text{Bij}(N[m(*)], N[m(*)]) = \{\beta_*\}$, が従う。ところが, $\beta_* \in \{\beta_*\}$ 。故に, $\beta_* \in \text{Bij}(N[m(*)], N[m(*)])$, が従う。

$k \in N[m(*)]$ なる任意の k 及び $l \in N[m(*)]$ なる任意の l , の各各を, 固定する。 $k \leq l$, と仮定する。 $N[m(*)] = \{1\}$, より, 「 $k \in \{1\}$, 且つ, $l \in \{1\}$ 」, が従う。故に, 「 $k=1$, 且つ, $l=1$ 」, が従う。故に, 「 $\beta_*(k)=1$, 且つ, $\beta_*(l)=1$ 」, が従う。ところが, $1 \leq 1$ 。故に, $\beta_*(l) \leq \beta_*(k)$, が従う。故に, 「 $k \in N[m(*)]$ なる任意の k 及び $l \in N[m(*)]$ なる任意の l , に対して, 「 $k \leq l$, ならば, $\beta_*(l) \leq \beta_*(k)$ 」, が従う。

故に, $\mathcal{A}(\beta_*; m(*))$, が従う。故に, 「或 β

が存在して、 $\mathcal{A}(\beta; m(*))$ 」, が従う。 $\mathcal{A}(\beta'; m(*))$ なる任意の β' 及び $\mathcal{A}(\beta''; m(*))$ なる任意の β'' , の各各を, 固定する。「 $\beta' \in \text{Bij}(N[m(*)], N[m(*)])$ 」, 且つ, $\beta'' \in \text{Bij}(N[m(*)], N[m(*)])$ 」, が従う。ところが, $\text{Bij}(N[m(*)], N[m(*)]) = \{\beta_*\}$ 。故に, 「 $\beta' \in \{\beta_*\}$ 」, 且つ, $\beta'' \in \{\beta_*\}$ 」, が従う。故に, 「 $\beta' = \beta_*$ 」, 且つ, $\beta'' = \beta_*$ 」, が従う。故に, $\beta' = \beta''$ 」, が従う。故に, 「任意の β' 及び任意の β'' 」, に対して, 「 $\mathcal{A}(\beta'; m(*))$ 」, 且つ, $\mathcal{A}(\beta''; m(*))$ 」, ならば, $\beta' = \beta''$ 」, が従う。

故に, 「或 β が一意的存在して, $\mathcal{A}(\beta; m(*))$ 」, が従う。故に, M の定義, より, $m(*) \in M$ 」, が従う。ところが, $m(*) \in M$ 。故に矛盾が生じる。故に, $1 \neq m(*)$ 。故に, $1 \leq m(*)$ 。式1, が従う。

陳述2。「 $m(*) - 1 \in N$ 」, 且つ, 「或 φ が一意的存在して, $\mathcal{A}(\varphi; m(*) - 1)$ 」,

を示す。陳述1, より, $m(*) \in N$ 」, が従う。ところが, 式1, より, $1 \leq m(*)$ 。故に, 「或 x が存在して, 「 $x \in N$ 」, 且つ, $x + 1 = m(*)$ 」」, が従う。この x を固定する。「 $x \in N$ 」, 且つ, $x + 1 = m(*)$ 」, が従う。故に, 「 $x \in N$ 」, 且つ, $x = m(*) - 1$ 」, が従う。故に, $m(*) - 1 \in N$ 」, が従う。 $m(*) - 1 \leq m(*)$ 及び $m(*)$ の最小性, より, $m(*) - 1 \in M$ 」, が従う。ところが, $m(*) - 1 \in N$ 。故に, M の定義, より, 「或 φ が一意的存在して, $\mathcal{A}(\varphi; m(*) - 1)$ 」, が従う。陳述2, が従う。

「陳述2, において, 一意的に定まる φ 」, を, φ_* と表記する。

陳述3。「 $n \in N[m(*)]$ 」なる任意の n に対して, 「 $n \neq 1$ 」, ならば, $\varphi_*(n-1) \in N[m(*) - 1]$ 」,

を示す。 $n \in N[m(*)]$ なる任意の n を固定する。 $n \neq 1$ 」, と仮定する。式1, より, $m(*) \neq 1$,

が従う。故に, [命題9], より, $n-1 \in N[m(*) - 1]$ 」, が従う。ところが, $\varphi_* \in \text{Bij}(N[m(*) - 1], N[m(*) - 1])$ 。故に, $\varphi_* \in \text{Map}(N[m(*) - 1], N[m(*) - 1])$ 」, が従う。故に, $\varphi_*(n-1) \in N[m(*) - 1]$ 」, が従う。故に, 「 $n \in N[m(*)]$ 」なる任意の n に対して, 「 $n \neq 1$ 」, ならば, $\varphi_*(n-1) \in N[m(*) - 1]$ 」」, が従う。陳述3, が従う。

「 $n \in N[m(*)]$ 」なる任意の n に対して, 「 $n = 1$ 」, ならば, $\chi(n) = m(*)$ 」, 且つ, 「 $n \neq 1$ 」, ならば, $\chi(n) = \varphi_*(n-1)$ 」」, によって, $N[m(*)]$ を定義域とする写像, χ 」, を定義する。

式2。 $\chi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[m(*)])$,

を示す。 $\chi \in \text{Map}(N[m(*)], N[m(*)])$ 」, を示す。 $n \in N[m(*)]$ なる任意の n を固定する。 $n = 1$ 」, なる場合を考える。 χ の定義, より, $\chi(n) = m(*)$ 」, が従う。ところが, [命題3], より, $m(*) \in N[m(*)]$ 。故に, $\chi(n) \in N[m(*)]$ 」, が従う。 $n \neq 1$ 」, なる場合を考える。 χ の定義, より, $\chi(n) = \varphi_*(n-1)$ 」, が従う。ところが, 陳述3, より, $\varphi_*(n-1) \in N[m(*) - 1]$ 。一方, 陳述2, より, $m(*) - 1 \in N$ 。また, 陳述1, より, $m(*) \in N$ 。故に, $m(*) - 1 \leq m(*)$ 及び [命題4], より, $N[m(*) - 1] \subseteq N[m(*)]$ 」, が従う。故に, $\varphi_*(n-1) \in N[m(*)]$ 」, が従う。ところが, $\chi(n) = \varphi_*(n-1)$ 。故に, $\chi(n) \in N[m(*)]$ 」, が従う。故に, 「 $n \in N[m(*)]$ 」なる任意の n に対して, $\chi(n) \in N[m(*)]$ 」, が従う。故に, $\chi \in \text{Map}(N[m(*)], N[m(*)])$ 」, が従う。

$\chi \in \text{Inj}(N[m(*)], N[m(*)])$ 」, を示す。 $k \in N[m(*)]$ なる任意の k 及び $l \in N[m(*)]$ なる任意の l , の各各を, 固定する。 $k \neq l$ 」, と仮定する。 $k = 1$ 」, なる場合を考える。 $k \neq l$ 」, より, $1 \neq l$ 」, が従う。故に, $l \neq 1$ 」, が従う。故に, χ の定義, より, $\chi(l) = \varphi_*(l-1)$ 」, が従う。ところが, 陳述3, より, $\varphi_*(l-1) \in N[m(*) - 1]$,

が従う。故に, $\chi(l) \in N[m(*)-1]$, が従う。ところが, 式 1, より, $m(*) \neq 1$ 。故に, [命題 7], より, $m(*) \in N[m(*)-1]$, が従う。ところが, χ の定義, より, $\chi(k) = m(*)$ 。故に, $\chi(k) \in N[m(*)-1]$, が従う。故に, $\chi(k) \neq \chi(l)$, が従う。 $k \neq l$, なる場合を考える。「 $l=1$, 或いは, $l \neq 1$ 」。 $l=1$, なる場合を考える。 $k \neq l$, より, $k \neq 1$, が従う。故に, χ の定義, より, $\chi(k) = \varphi_*(k-1)$, が従う。ところが, 「 $k \in N[m(*)]$, 且つ, $k \neq 1$ 」及び陳述 3, より, $\varphi_*(k-1) \in N[m(*)-1]$, が従う。故に, $\chi(k) \in N[m(*)-1]$, が従う。一方, 式 1, より, $m(*) \neq 1$ 。故に, [命題 7], より, $m(*) \in N[m(*)-1]$, が従う。ところが, $l=1$ 及び χ の定義, より, $\chi(l) = m(*)$, が従う。故に, $\chi(l) \in N[m(*)-1]$, が従う。故に, $\chi(k) \neq \chi(l)$, が従う。 $l \neq 1$, なる場合を考える。「 $k \neq 1$, 且つ, $l \neq 1$ 」, が従う。ところが, 「 $k \in N[m(*)]$, 且つ, $l \in N[m(*)]$ 」。 $k \neq l$, より, $k-1 \neq l-1$, が従う。また, $\varphi_* \in \text{Bij}(N[m(*)-1], N[m(*)-1])$, より, $\varphi_* \in \text{Inj}(N[m(*)-1], N[m(*)-1])$, が従う。故に, $\varphi_*(k-1) \neq \varphi_*(l-1)$, が従う。ところが, χ の定義, より, 「 $\chi(k) = \varphi_*(k-1)$, 且つ, $\chi(l) = \varphi_*(l-1)$ 」, が従う。故に, $\chi(k) \neq \chi(l)$, が従う。故に, 「 $k \in N[m(*)]$ なる任意の k 及び $l \in N[m(*)]$ なる任意の l , に対して, 「 $k \neq l$, ならば, $\chi(k) \neq \chi(l)$ 」, が従う。故に, $\chi \in \text{Inj}(N[m(*)], N[m(*)])$, が従う。

$\chi \in \text{Surj}(N[m(*)], N[m(*)])$, を示す。 $w \in N[m(*)]$ なる任意の w を固定する。式 1, より, $m(*) \neq 1$ 。故に, [命題 6], より, $N[m(*)] = N[m(*)-1] \cup \{m(*)\}$, が従う。故に, $w \in N[m(*)-1] \cup \{m(*)\}$, が従う。故に, 「 $w \in N[m(*)-1]$, 或いは, $w \in \{m(*)\}$ 」, が従う。 $w \in N[m(*)-1]$, なる場合を考える。 $\varphi_* \in \text{Bij}(N[m(*)-1], N[m(*)-1])$, より,

$\varphi_* \in \text{Surj}(N[m(*)-1], N[m(*)-1])$, が従う。故に, 「 $v \in N[m(*)-1]$ なる或 v が存在して, $w = \varphi_*(v)$ 」, が従う。この v を固定する。「 $v \in N[m(*)-1]$, 且つ, $w = \varphi_*(v)$ 」, が従う。故に, $v \in N[m(*)-1]$, が従う。ところが, 陳述 2, より, $m(*)-1 \in N$, が従う。故に, $(m(*)-1)+1 = m(*)$ 及び [命題 8], より, $v+1 \in N[m(*)]$, が従う。一方, 陳述 2, より, $m(*)-1 \in N$ 。故に, [定義 1], より, $v \in N$ 。故に, $v+1 \neq 1$, が従う。故に, $(v+1)-1 = v$ 及び χ の定義, より, $\chi(v+1) = \varphi_*(v)$, が従う。ところが, $w = \varphi_*(v)$ 。故に, $w = \chi(v+1)$, が従う。ところが, $v+1 \in N[m(*)]$ 。故に, 「 $v' \in N[m(*)]$ なる或 v' が存在して, $w = \chi(v')$ 」, が従う。 $w \in \{m(*)\}$, なる場合を考える。 $w = m(*)$, が従う。一方, $1=1$ 及び χ の定義, より, $\chi(1) = m(*)$, が従う。ところが, [命題 2], より, $1 \in N[m(*)]$, が従う。故に, 「 $v'' \in N[m(*)]$ なる或 v'' が存在して, $\chi(v'') = m(*)$ 」, が従う。故に, 「 $w \in N[m(*)]$ なる任意の w に対して, 「 $v \in N[m(*)]$ なる或 v が存在して, $w = \chi(v)$ 」, が従う。故に, $\chi \in \text{Surj}(N[m(*)], N[m(*)])$, が従う。

故に, $\chi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[m(*)])$, が従う。式 2, が従う。

陳述 4. 「 $k \in N[m(*)]$ なる任意の k 及び $l \in N[m(*)]$ なる任意の l , に対して, 「 $k \leq l$, ならば, $\chi(l) \leq \chi(k)$ 」,

を示す。 $k \in N[m(*)]$ なる任意の k 及び $l \in N[m(*)]$ なる任意の l , の各各を, 固定する。 $k \leq l$, と仮定する。「 $k=1$, 且つ, $l=1$ 」, なる場合を考える。 χ の定義, より, 「 $\chi(l) = m(*)$, 且つ, $\chi(k) = m(*)$ 」, が従う。ところが, $m(*) \leq m(*)$ 。故に, $\chi(l) \leq \chi(k)$, が従う。「 $k=1$, 且つ, $l \neq 1$ 」, なる場合を考える。 χ の定義, より, $\chi(l) = \varphi_*(l-1)$, が従う。ところが, 陳述 3, より, $\varphi_*(l-1) \in N[m(*)-1]$, が従う。故に, $\chi(l) \in N[m(*)-1]$, が従う。ところが, $k=1$, 故に, $\chi(k) = m(*)$ 。故に, $\chi(l) \leq \chi(k)$, が従う。

1], が従う。故に, $\chi(l) \in N[m(*)-1]$, が従う。[定義 1], より, $\chi(l) \leq m(*)-1$, が従う。ところが, $m(*)-1 \leq m(*)$ 。故に, $\chi(l) \leq m(*)$, が従う。一方, χ の定義, より, $\chi(k) = m(*)$, が従う。故に, $\chi(l) \leq \chi(k)$, が従う。 $k \neq 1$, なる場合を考える。 $k \in N[m(*)]$ 及び [定義 1], より, $k \in N$, が従う。故に, $1 \leq k$, が従う。ところが, $k \leq l$ 。故に, $1 \leq l$, が従う。故に, $1 \neq l$, が従う。故に, $l \neq 1$, が従う。故に, χ の定義, より, 「 $\chi(l) = \varphi_*(l-1)$, 且つ, $\chi(k) = \varphi_*(k-1)$ 」, が従う。一方, 式 1, より, $m(*) \neq 1$ 。また, 「 $k \in N[m(*)]$, 且つ, $l \in N[m(*)]$, 且つ, $k \neq 1$, 且つ, $l \neq 1$ 」。故に, [命題 9], より, 「 $k-1 \in N[m(*)-1]$, 且つ, $l-1 \in N[m(*)-1]$ 」, が従う。ところが, $k \leq l$ 。故に, $k-1 \leq l-1$ 。故に, 陳述 2 及び φ_* の定義, より, $\varphi_*(l-1) \leq \varphi_*(k-1)$, が従う。故に, $\chi(l) \leq \chi(k)$, が従う。故に, 「 $k \in N[m(*)]$ なる任意の k 及び $l \in N[m(*)]$ なる任意の l , に対して, 「 $k \leq l$, ならば, $\chi(l) \leq \chi(k)$ 」, が従う。陳述 4, が従う。

$\mathcal{A}(\phi; m(*))$ なる任意の ϕ を固定する。

式 3。 $\phi(1) = m(*)$,

を示す。 $\phi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[m(*)])$, より, $\phi \in \text{Map}(N[m(*)], N[m(*)])$, が従う。ところが, [命題 2], より, $1 \in N[m(*)]$, が従う。故に, $\phi(1) \in N[m(*)]$, が従う。故に, [定義 1], より, $\phi(1) \leq m(*)$, が従う。一方, $\phi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[m(*)])$, より, $\phi \in \text{Surj}(N[m(*)], N[m(*)])$, が従う。ところが, [命題 3], より, $m(*) \in N[m(*)]$, が従う。故に, 「 $x' \in N[m(*)]$ なる或 x' が存在して, $m(*) = \phi(x')$ 」, が従う。この x' を固定する。「 $x' \in N[m(*)]$, 且つ, $m(*) = \phi(x')$ 」, が従う。故に, $x' \in N[m(*)]$, が従う。故に, [定義 1], より, $x' \in N$, が従う。故に, $1 \leq x'$, が従う。ところが, $1 \in N$ 。故に, $\phi(x') \leq \phi(1)$,

が従う。ところが, $m(*) = \phi(x')$ 。故に, $m(*) \leq \phi(1)$, が従う。ところが, $\phi(1) \leq m(*)$ 。故に, $\phi(1) = m(*)$, が従う。式 3, が従う。

$K = \{n \mid n \in N[m(*)], \text{ 且つ, } n \neq 1\}$,

と置く。「 $n \in K$ なる任意の n に対して, $\eta(n) = \phi(n)$ 」, によって, K を定義域とする写像, η , を定義する。即ち, $\eta = \phi \upharpoonright K$, と置く。

式 4。 $\eta \in \text{Bij}(K, N[m(*)-1])$,

を示す。 $\eta \in \text{Map}(K, N[m(*)-1])$, を示す。 $n \in K$ なる任意の n を固定する。 η の定義, より, $\eta(n) = \phi(n)$, が従う。一方, $\phi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[m(*)])$, より, $\phi \in \text{Map}(N[m(*)], N[m(*)])$, が従う。故に, $\phi(n) \in N[m(*)]$, が従う。ところが, K の定義, より, 「 $n \in N[m(*)]$, 且つ, $n \neq 1$ 」, が従う。また, $\phi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[m(*)])$, より, $\phi \in \text{Inj}(N[m(*)], N[m(*)])$, が従う。ところが, [命題 2], より, $1 \in N[m(*)]$, が従う。故に, $\phi(n) \neq \phi(1)$, が従う。ところが, 式 3, より, $\phi(1) = m(*)$ 。故に, $\phi(n) \neq m(*)$, が従う。一方, 式 1, より, $m(*) \neq 1$ 。故に, [命題 6], より, $N[m(*)] = N[m(*)-1] \cup \{m(*)\}$, が従う。ところが, $\phi(n) \in N[m(*)]$ 。故に, $\phi(n) \in N[m(*)-1] \cup \{m(*)\}$, が従う。故に, 「 $\phi(n) \in N[m(*)-1]$, 或いは, $\phi(n) \in \{m(*)\}$ 」, が従う。ところが, $\phi(n) \neq m(*)$ 。故に, $\phi(n) \notin \{m(*)\}$, が従う。故に, $\phi(n) \in N[m(*)-1]$, が従う。ところが, $\eta(n) = \phi(n)$ 。故に, $\eta(n) \in N[m(*)-1]$, が従う。故に, 「 $n \in K$ なる任意の n に対して, $\eta(n) \in N[m(*)-1]$ 」, が従う。故に, $\eta \in \text{Map}(K, N[m(*)-1])$, が従う。

$\eta \in \text{Inj}(K, N[m(*)-1])$, を示す。 $n' \in K$ なる任意の n' 及び $n'' \in K$ なる任意の n'' , の各各を, 固定する。 $n' \neq n''$, と仮定する。 η の定義, より, 「 $\eta(n') = \phi(n')$, 且つ, $\eta(n'') = \phi$

$(n'')]$, が従う。一方, K の定義, より, 「 $n' \in N[m(*)]$, 且つ, $n'' \in N[m(*)]$ 」, が従う。ところが, $\phi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[m(*)])$, より, $\phi \in \text{Inj}(N[m(*)], N[m(*)])$, が従う。故に, $n' \approx n''$, より, $\phi(n') \approx \phi(n'')$, が従う。故に, $\eta(n') \approx \eta(n'')$, が従う。故に, 「 $n' \in K$ なる任意の n' 及び $n'' \in K$ なる任意の n'' , に対して, 「 $n' \approx n''$, ならば, $\eta(n') \approx \eta(n'')$ 」, が従う。ところが, $\eta \in \text{Map}(K, N[m(*)-1])$ 。故に, $\eta \in \text{Inj}(K, N[m(*)-1])$, が従う。

$\eta \in \text{Surj}(K, N[m(*)-1])$, を示す。 $z' \in N[m(*)-1]$ なる任意の z' を固定する。陳述2, より, $m(*)-1 \in N$, が従う。故に, $m(*)-1 \leq m(*)$ 及び [命題4], より, $N[m(*)-1] \subseteq N[m(*)]$, が従う。故に, $z' \in N[m(*)]$, が従う。一方, $\phi \in \text{Bij}(N[m(*)], N[m(*)])$, より, $\phi \in \text{Surj}(N[m(*)], N[m(*)])$, が従う。故に, 「 $y' \in N[m(*)]$ なる或 y' が存在して, $z' = \phi(y')$ 」, が従う。この y' を固定する。「 $y' \in N[m(*)]$, 且つ, $z' = \phi(y')$ 」, が従う。故に, $z' = \phi(y')$, が従う。ところが, $z' \in N[m(*)-1]$ 。また, 式1, より, $m(*) \approx 1$ 。故に, [命題7], より, $m(*) \in N[m(*)-1]$ 。故に, $z' \approx m(*)$ 。故に, $\phi(y') \approx m(*)$ 。一方, 「 $y' = 1$, 或いは, $y' \approx 1$ 」。 $y' = 1$, なる場合を考える。 $\phi(y') \approx m(*)$, より, $\phi(1) \approx m(*)$, が従う。ところが, 式3, より, $\phi(1) = m(*)$ 。故に, 矛盾が生じる。故に, $y' \approx 1$, が従う。ところが, $y' \in N[m(*)]$ 。故に, K の定義, より, $y' \in K$, が従う。故に, 「 $y' \in K$, 且つ, $z' = \phi(y')$ 」, が従う。故に, 「 $y' \in K$ なる或 y' が存在して, $z' = \phi(y')$ 」, が従う。故に, 「 $z' \in N[m(*)-1]$ なる任意の z' に対して, 「 $y' \in K$ なる或 y' が存在して, $z' = \phi(y')$ 」, が従う。ところが, $\phi \in \text{Map}(K, N[m(*)-1])$ 。故に, $\phi \in \text{Surj}(K, N[m(*)-1])$, が従う。

故に, $\eta \in \text{Bij}(K, N[m(*)-1])$, が従う。式4, が従う。

「 $j \in N[m(*)-1]$ なる任意の j に対して, τ

$(j) = j+1]$, によって, $N[m(*)-1]$ を定義域とする写像, τ , を定義する。陳述2, より, $m(*)-1 \in N$, が従う。故に, $(m(*)-1)+1 = m(*)$ 及び [命題10], より,

式5. $\tau \in \text{Bij}(N[m(*)-1], K)$,

が従う。式4 及び式5 及び [命題2.7], より,

式6. $\eta \circ \tau \in \text{Bij}(N[m(*)-1], N[m(*)-1])$,

が従う。

陳述5. 「 $k \in N[m(*)-1]$ なる任意の k 及び $l \in N[m(*)-1]$ なる任意の l , に対して, 「 $k \leq l$, ならば, $(\eta \circ \tau)(l) \leq (\eta \circ \tau)(k)$ 」,

を示す。 $k \in N[m(*)-1]$ なる任意の k 及び $l \in N[m(*)-1]$ なる任意の l , の各各を, 固定する。 $k \leq l$, と仮定する。 $k+1 \leq l+1$, が従う。陳述2, より, $m(*)-1 \in N$, が従う。故に, [定義1], より, 「 $k \in N$, 且つ, $l \in N$ 」, が従う。故に, $(m(*)-1)+1 = m(*)$ 及び [命題8], より, 「 $k+1 \in N[m(*)]$, 且つ, $l+1 \in N[m(*)]$ 」, が従う。ところが, $\mathcal{A}(\phi; m(*))$ 。故に, 「 $k' \in N[m(*)]$ なる任意の k' 及び $l' \in N[m(*)]$ なる任意の l' , に対して, 「 $k' \leq l'$, ならば, $\phi(l') \leq \phi(k')$ 」, が従う。故に, $\phi(l+1) \leq \phi(k+1)$, が従う。ところが, 「 $k \in N$, 且つ, $l \in N$ 」, より, 「 $k+1 \approx 1$, 且つ, $l+1 \approx 1$ 」。ところが, 「 $k+1 \in N[m(*)]$, 且つ, $l+1 \in N[m(*)]$ 」。故に, K の定義, より, 「 $k+1 \in K$, 且つ, $l+1 \in K$ 」, が従う。故に, η の定義, より, 「 $\eta(l+1) = \phi(l+1)$, 且つ, $\eta(k+1) = \phi(k+1)$ 」, が従う。故に, $\eta(l+1) \leq \eta(k+1)$, が従う。ところが, τ の定義, より, 「 $\tau(l) = l+1$, 且つ, $\tau(k) = k+1$ 」, が従う。故に, $\eta(\tau(l)) \leq \eta(\tau(k))$, が従う。ところが, 「 $(\eta \circ \tau)(l) = \eta(\tau(l))$, 且つ, $(\eta \circ \tau)(k) = \eta(\tau(k))$ 」。故に, $(\eta \circ \tau)(l) \leq (\eta \circ \tau)(k)$, が従う。故に, 「 $k \in$

$N[m(*)-1]$ なる任意の k 及び $l \in N[m(*)-1]$ なる任意の l , に対して, 「 $k \leq l$, ならば, $(\eta \circ \tau)(l) \leq (\eta \circ \tau)(k)$ 」, が従う。陳述 5, が従う。

式 6 及び陳述 5, より, $\mathcal{A}(\eta \circ \tau; m(*)-1)$, が従う。故に, 陳述 2, に基づく, φ_* に対する一意性, より,

式 7. $\varphi_* = \eta \circ \tau$,

が従う。

陳述 6. 「 $l \in N[m(*)]$ なる任意の l に対して, $\chi(l) = \phi(l)$ 」,

を示す。 $l \in N[m(*)]$ なる任意の l を固定する。「 $l=1$, 或いは, $l \neq 1$ 」, が従う。 $l=1$, なる場合を考える。[命題 2], より, $1 \in N[m(*)]$, が従う。故に, $l \in N[m(*)]$, が従う。ところが, $l=1$ 。故に, χ の定義, より, $\chi(l) = m(*)$, が従う。一方, 式 3, より, $\phi(1) = m(*)$, が従う。故に, $l=1$, より, $\phi(l) = m(*)$, が従う。故に, $\chi(l) = \phi(l)$, が従う。 $l \neq 1$, なる場合を考える。[定義 1], より, $l \in N$ 。一方, 式 1, より, $m(*) \neq 1$ 。また, 陳述 1, より, $m(*) \in N$ 。故に, [命題 9], より, $l-1 \in N[m(*)-1]$, が従う。故に, 式 7, より, $\varphi_*(l-1) = (\eta \circ \tau)(l-1)$, が従う。ところが, χ の定義, より, $\chi(l) = \varphi_*(l-1)$ 。故に, $\chi(l) = (\eta \circ \tau)(l-1)$, が従う。一方, 「 $(\eta \circ \tau)(l-1) = \eta(\tau(l-1))$, 且つ, $\tau(l-1) = (l-1) + 1$, 且つ, $(l-1) + 1 = l$ 」, より, $(\eta \circ \tau)(l-1) = \eta(l)$, が従う。故に, $\chi(l) = \eta(l)$, が従う。ところが, η の定義, より, $\eta(l) = \phi(l)$, が従う。故に, $\chi(l) = \phi(l)$, が従う。故に, 「 $l \in N[m(*)]$ なる任意の l に対して, $\chi(l) = \phi(l)$ 」, が従う。陳述 6, が従う。

陳述 6, より, $\chi = \phi$, が従う。故に,

陳述 7. 「任意の ϕ に対して, 「 $\mathcal{A}(\phi; m(*)$ 」, ならば, $\chi = \phi$ 」,

が従う。 $\mathcal{A}(\phi'; m(*)$ 」なる任意の ϕ' 及び $\mathcal{A}(\phi''; m(*)$ 」なる任意の ϕ'' , の各各を, 固定する。陳述 7, より, 「 $\chi = \phi'$, 且つ, $\chi = \phi''$ 」, が従う。故に, $\phi' = \phi''$, が従う。故に,

陳述 8. 「任意の ϕ' 及び任意の ϕ'' , に対して, 「 $\mathcal{A}(\phi'; m(*)$ 」, 且つ, $\mathcal{A}(\phi''; m(*)$ 」, ならば, $\phi' = \phi''$ 」,

が従う。ところが, 式 2 及び陳述 4, より, $\mathcal{A}(\chi; m(*)$ 」。故に,

陳述 9. 「或 χ' が存在して, $\mathcal{A}(\chi'; m(*)$ 」,

が従う。陳述 9 及び陳述 8, より,

陳述 10. 「或 χ' が一意的に存在して, $\mathcal{A}(\chi'; m(*)$ 」,

が従う。一方, 陳述 1, より,

陳述 11. 「「或 φ' が一意的に存在して, $\mathcal{A}(\varphi'; m(*)$ 」, には非ず」,

が従う。陳述 10 及び陳述 11, より, 矛盾が生じる。

故に, $M = \phi$, が従う。 $n \in N$ なる任意の n を固定する。 $n \notin \phi$, が従う。ところが, $M = \phi$ 。故に, $n \notin M$, が従う。ところが, $n \in N$ 。故に, M の定義, より, 「「或 φ が一意的に存在して, $\mathcal{A}(\varphi; n)$ 」, には非ず」, には非ず」, が従う。故に, 「或 φ が一意的に存在して, $\mathcal{A}(\varphi; n)$ 」, が従う。故に, 「 $n \in N$ なる任意の n に対して, 「或 φ が一意的に存在して,

$\mathcal{A}(\varphi; n)]$, が従う。

命題が従う。

[証明終]。

第4節 有限集合の概念

ここでは、有限集合の概念及び「有限集合に対する基数」の概念、を導入する。但し、有限集合に対するより深い考察については、デーデキント [1] における第二篇、を参照する事、を勧める。

[定義1]。「任意の集合 A に対して、 $\llbracket A = \phi$, 或いは, $\llbracket n \in N$ なる或 n が存在して, $\text{Bij}(N[n], A) \neq \phi$ 」, なる場合、且つ、その場合に限って、 $\llbracket A$ は有限集合である」, によって、 $\llbracket A$ は有限集合である」, なる陳述を定義する。

[定義2]。「任意の集合 A 及び $n \in N \cup \{0\}$ なる任意の n , に対して、 $\llbracket \llbracket n = 0$, 且つ, $A = \phi$, 或いは, $\llbracket n \in N$, 且つ, $\text{Bij}(N[n], A) \neq \phi$ 」, なる場合、且つ、その場合に限って、 $\llbracket n$ は A に対する有限基数である」, によって、 $\llbracket n$ は A に対する有限基数である」, なる陳述を定義する。

[命題1]。「任意の集合 A 及び $n \in N \cup \{0\}$ なる任意の n , に対して、 $\llbracket \llbracket n$ は A に対する有限基数である」, ならば、 $\llbracket A$ は有限集合である」, が従う。

[証明]。任意の集合 A 及び $n \in N \cup \{0\}$ なる任意の n , の各各を、固定する。 $\llbracket n$ は A に対する有限基数である」, と仮定する。[定義2], より、 $\llbracket \llbracket n = 0$, 且つ, $A = \phi$, 或いは, $\llbracket n \in N$, 且つ, $\text{Bij}(N[n], A) \neq \phi$ 」, が従う。 $\llbracket n = 0$, 且つ, $A = \phi$, なる場合を考える。 $A = \phi$, が従う。故に、[定義1], より、 $\llbracket A$ は有限集合である」, が従う。 $\llbracket n \in N$, 且つ, $\text{Bij}(N[n], A) \neq \phi$, なる場合を考える。 $\llbracket n' \in N$ なる或 n' が存在して, $\text{Bij}(N[n'], A) \neq \phi$,

が従う。故に、[定義1], より、 $\llbracket A$ は有限集合である」, が従う。故に、命題が従う。

[証明終]。

[命題2]。「任意の集合 A 及び $n \in N \cup \{0\}$ なる任意の n , に対して、 $\llbracket \llbracket n$ は A に対する有限基数である」, ならば、 $\llbracket n = 0$, と, $A = \phi$, とは、同値である」, が従う。

[証明]。任意の集合 A 及び $n \in N \cup \{0\}$ なる任意の n , の各各を、固定する。 $\llbracket n$ は A に対する有限基数である」, と仮定する。

$n = 0$, と仮定する。 $0 \notin N$, より、 $n \notin N$, が従う。故に、[定義2], より、 $\llbracket n = 0$, 且つ, $A = \phi$, が従う。故に、 $A = \phi$, が従う。

$A = \phi$, と仮定する。 $n \neq 0$, と仮定して矛盾を導く。ところが、 $n \in N \cup \{0\}$, より、 $n \in N$, が従う。故に、[定義2] 及び $n \neq 0$, より、 $\llbracket n \in N$, 且つ, $\text{Bij}(N[n], A) \neq \phi$, が従う。故に、 $\text{Bij}(N[n], A) \neq \phi$, が従う。故に、 $\llbracket \varphi \in \text{Bij}(N[n], A)$ なる或 φ が存在する」, が従う。この φ を固定する。 $\varphi \in \text{Bij}(N[n], A)$, が従う。ところが、 $n \in N$ 及び [命題3.2], より、 $1 \in N[n]$, が従う。一方、 $\varphi \in \text{Bij}(N[n], A)$, より、 $\varphi \in \text{Map}(N[n], A)$, が従う。故に、 $\varphi(1) \in A$, が従う。故に、 $\llbracket \llbracket$ 或 z が存在して, $z \in A$ 」, が従う。ところが、 $A = \phi$. 故に、 $\llbracket \llbracket$ 或 z が存在して, $z \in \phi$ 」, が従う。ところが、 $\llbracket$ 任意の z' に対して, $z' \notin \phi$ 」. 故に、 $\llbracket \llbracket$ 或 z' が存在して, $z' \in \phi$ 」, には非ず」, が従う。故に、 $\llbracket \llbracket$ 或 z が存在して, $z \in \phi$ 」, 且つ, $\llbracket \llbracket$ 或 z' が存在して, $z' \in \phi$ 」, には非ず」, が従う。故に、矛盾が生じる。

命題が従う。

[証明終]。

[命題3]。「任意の集合 A 及び $n' \in N \cup \{0\}$ なる任意の n' 及び $n'' \in N \cup \{0\}$ なる任意の n'' , に対して、 $\llbracket \llbracket \llbracket n'$ は A に対する有限基数である」, 且つ, $\llbracket n''$ は A に対する有限基数である」, ならば、 $n' = n''$ 」, が従う。

[証明]。任意の集合 A 及び $n' \in N \cup \{0\}$ なる任意の n' 及び $n'' \in N \cup \{0\}$ なる任意の n'' , の各各を, 固定する。「 n' は A に対する有限基数である」, 且つ, 「 n'' は A に対する有限基数である」, と仮定する。

$A = \phi$, なる場合を考える。[命題 2], より, 「 $n' = 0$, 且つ, $n'' = 0$ 」, が従う。故に, $n' = n''$, が従う。

$A \neq \phi$, なる場合を考える。[命題 2], より, 「 $n' \neq 0$, 且つ, $n'' \neq 0$ 」, が従う。ところが, 「 $n' \in N \cup \{0\}$, 且つ, $n'' \in N \cup \{0\}$ 」, 故に, 「 $n' \in N$, 且つ, $n'' \in N$ 」, が従う。故に, [定義 2] 及び 「 $n' \neq 0$, 且つ, $n'' \neq 0$ 」, より, 「 $\text{Bij}(N[n'], A) \neq \phi$, 且つ, $\text{Bij}(N[n''], A) \neq \phi$ 」, が従う。故に, 「 $\varphi \in \text{Bij}(N[n'], A)$ なる或 φ が存在する」, 且つ, 「 $\chi \in \text{Bij}(N[n''], A)$ なる或 χ が存在する」, が従う。ここにおける φ 及び χ , の各各を, 固定する。「 $\varphi \in \text{Bij}(N[n'], A)$, 且つ, $\chi \in \text{Bij}(N[n''], A)$ 」, が従う。故に, $\chi \in \text{Bij}(N[n''], A)$, が従う。故に, [命題 2.11], より, 「 χ に対する逆写像が一意的に存在する」, が従う。この逆写像を ϕ と表記する。即ち, $\phi = \chi^{-1}$, と置く。故に, $\phi \in \text{Bij}(A, N[n''])$, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Bij}(N[n'], A)$ 。故に, [命題 2.7], より, $\phi \circ \varphi \in \text{Bij}(N[n'], N[n''])$, が従う。故に, 「 $\varphi' \in \text{Bij}(N[n'], N[n''])$ なる或 φ' が存在する」, が従う。ところが, 「 $n' \in N$, 且つ, $n'' \in N$ 」, 故に, [命題 3.15], より, $n' = n''$, が従う。

故に, 命題が従う。

[証明終]。

[命題 4]。「任意の有限集合 A に対して, 「 $n \in N \cup \{0\}$ なる或 n が一意的に存在して, 「 n は A に対する有限基数である」」, が従う。即ち, A を任意の有限集合とする, なる場合において, 以下の結論達, 結論 1 及び結論 2, が従う。

結論 1。「 $n' \in N \cup \{0\}$ なる任意の n' 及び $n'' \in N \cup \{0\}$ なる任意の n'' 」, に対して, 「「 n' は A に対する有限基数である」, 且つ, 「 n'' は A に対する有限基数である」, ならば, $n' = n''$ 」。

結論 2。「 $n''' \in N \cup \{0\}$ なる或 n''' が存在して, 「 n''' は A に対する有限基数である」」。

[証明]。任意の有限集合 A , を固定する。[命題 3], より, 結論 1, が従う。結論 2, を示す。[定義 1], より, 「 $A = \phi$, 或いは, 「 $n \in N$ なる或 n が存在して, $\text{Bij}(N[n], A) \neq \phi$ 」, が従う。

$A = \phi$, なる場合を考える。ところが, $0 = 0$ 。故に, 「 $0 = 0$, 且つ, $A = \phi$ 」, が従う。一方, $0 \in \{0\}$, より, $0 \in N \cup \{0\}$, が従う。故に, [定義 2], より, 「 0 は A に対する有限基数である」, が従う。故に, $0 \in N \cup \{0\}$, より, 「 $n''' \in N \cup \{0\}$ なる或 n''' が存在して, 「 n''' は A に対する有限基数である」」, が従う。

「 $n \in N$ なる或 n が存在して, $\text{Bij}(N[n], A) \neq \phi$ 」, なる場合を考える。この n を固定する。「 $n \in N$, 且つ, $\text{Bij}(N[n], A) \neq \phi$ 」, が従う。故に, $n \in N$, が従う。故に, $n \in N \cup \{0\}$, が従う。故に, [定義 2], より, 「 $n''' \in N \cup \{0\}$ なる或 n''' が存在して, 「 n''' は A に対する有限基数である」」, が従う。

命題が従う。

[証明終]。

[定義 3]。[命題 4], より, 各有限集合 A に対して, 「 $n \in N \cup \{0\}$, 且つ, 「 n は A に対する有限基数である」」, なる n が, 一意的に存在する。各有限集合 A に対して一意的に定まるこの n を, $\#(A)$, と表記する。即ち, 「任意の有限集合 A に対して, 「 n は A に対する有限基数である」, なる場合, 且つ, その場合に限って, $\#(A) = n$ 」, によって, 記法 $\#(A)$ を定義する。この記法は, [命題 4], より, 定義の為の根拠を得る。

[注意]。 X を任意の集合とする。 $\mathcal{X} = \{Y \mid Y \subseteq X, \text{ 且つ, 「} Y \text{ は有限集合である」}\}$, と置く。
 $\text{「} Y \in \mathcal{X} \text{ なる任意の } Y \text{ 及び } n \in N \cup \{0\} \text{ なる任意の } n, \text{ に対して, 「} n \text{ は } Y \text{ に対する有限基数である」, なる場合, 且つ, その場合に限って, } \langle \# \rangle(Y) = n \text{」}$, によって, $\langle \# \rangle \in \text{Map}(\mathcal{X}, N \cup \{0\})$ なる写像 $\langle \# \rangle$ を定義する。この定義は, [命題 4], により, 定義の為の根拠を得る。[定義 3] 及び [命題 4], より, $\text{「} Y \in \mathcal{X} \text{ なる任意の } Y \text{ に対して, } \langle \# \rangle(Y) = \#(Y) \text{」}$, が従う。従って, 「有限集合」として言及される各集合は, X の部分集合である, なる場合においては, [定義 3], によって導入される, $\#$, を, $\mathcal{X}$ を定義域とする写像, $\langle \# \rangle$, によって, 置き換える事ができるのである。

[命題 5]。 「任意の有限集合 A に対して, 「 $\#(A) = 0$, と, $A = \phi$, とは, 同値である」, が従う。

[証明]。 任意の有限集合 A , を固定する。 [定義 3], より, 「 $\#(A) \in N \cup \{0\}$, 且つ, 「 $\#(A)$ は A に対する有限基数である」, が従う。故に, [命題 2], より, 「 $\#(A) = 0$, と, $A = \phi$, とは, 同値である」。故に, 「任意の有限集合 A に対して, 「 $\#(A) = 0$, と, $A = \phi$, とは, 同値である」, が従う。 [証明終]。

[命題 6]。 $\#(\phi) = 0$, が従う。

[証明]。 [定義 1], より, 「 ϕ は有限集合である」, が従う。故に, [命題 5], より, 「 $\#(\phi) = 0$, と, $\phi = \phi$, とは, 同値である」, が従う。ところが, $\phi = \phi$. 故に, $\#(\phi) = 0$, が従う。 [証明終]。

[命題 7]。 「任意の対象 a に対して, 「 $\{a\}$ は有限集合である」, 且つ, $\#(\{a\}) = 1$ 」, が従

う。

[証明]。 任意の対象 a を固定する。 「 $x \in \{1\}$ なる任意の x に対して, $\varphi(x) = a$ 」, によって, $\{1\}$ を定義域とする写像, φ , を定義する。 [命題 2. 2], より, $\varphi \in \text{Bij}(\{1\}, \{a\})$, が従う。ところが, [命題 3. 1], より, $N[1] = \{1\}$, が従う。故に, $\varphi \in \text{Bij}(N[1], \{a\})$, が従う。ところが, $1 \in N$. 故に, [定義 2], より, 「 1 は $\{a\}$ に対する有限基数である」, が従う。故に, [命題 1], より, 「 $\{a\}$ は有限集合である」, が従う。故に, [定義 3], より, $\#(\{a\}) = 1$, が従う。故に, 「任意の対象 a に対して, 「 $\{a\}$ は有限集合である」, 且つ, $\#(\{a\}) = 1$ 」, が従う。 [証明終]。

[命題 8]。 「 $n \in N$ なる任意の n に対して, 「 $N[n]$ は有限集合である」, 且つ, $\#(N[n]) = n$ 」, が従う。

[証明]。 $n \in N$ なる任意の n を固定する。 [命題 2. 1], より,

$$\text{id}_{N[n]} \in \text{Bij}(N[n], N[n]),$$

が従う。故に, 「或 φ が存在して, $\varphi \in \text{Bij}(N[n], N[n])$ 」, が従う。故に, $\text{Bij}(N[n], N[n]) \ni \varphi$, が従う。故に, [定義 2], より, 「 n は $N[n]$ に対する有限基数である」。故に, [命題 1], より, 「 $N[n]$ は有限集合である」。故に, [定義 3], より, $\#(N[n]) = n$, が従う。故に, 「 $n \in N$ なる任意の n に対して, 「 $N[n]$ は有限集合である」, 且つ, $\#(N[n]) = n$ 」, が従う。 [証明終]。

[命題 9]。 「任意の有限集合 A 及び任意の集合 B 及び任意の集合 C 及び $\varphi \in \text{Inj}(A, B)$ なる任意の φ , に対して, 「 $C = \{y \mid y \in B, \text{ 且つ, 「} x \in A \text{ なる或 } x \text{ が存在して, } y = \varphi(x) \text{」}$, ならば, 「 C は有限集合である」, 且つ, $\#(A)$

$=\#(C)]]$, が従う。

[証明]。任意の有限集合 A 及び任意の集合 B 及び任意の集合 C 及び $\varphi \in \text{Inj}(A, B)$ なる任意の φ , の各各を, 固定する。 $C = \{y | y \in B, \text{且つ}, [x \in A \text{ なる或 } x \text{ が存在して}, y = \varphi(x)]\}$, と仮定する。[定義1], より, $A = \phi$, 或いは, $[n \in N \text{ なる或 } n \text{ が存在して}, \text{Bij}(N[n], A) \neq \phi]$, が従う。

$A = \phi$, なる場合を考える。 $C = \phi$, を示す。 $C \neq \phi$, と仮定して矛盾を導く。「或 y' が存在して, $y' \in C$ 」, が従う。この y' を固定する。「 $y' \in B$, 且つ, $[x' \in A \text{ なる或 } x' \text{ が存在して}, y' = \varphi(x')]$ 」, が従う。故に, $[x' \in A \text{ なる或 } x' \text{ が存在して}, y' = \varphi(x')]$, が従う。この x' を固定する。「 $x' \in A$, 且つ, $y' = \varphi(x')$ 」, が従う。故に, $x' \in A$, が従う。故に, 「或 x'' が存在して, $x'' \in A$ 」, が従う。故に, $A \neq \phi$, が従う。ところが, $A = \phi$ 。故に, 矛盾が生じる。故に, $C = \phi$, が従う。[定義1], より, 「 C は有限集合である」。一方, [命題5], より, $\#(C) = 0$ 。ところが, $A = \phi$ 及び [命題5], より, $\#(A) = 0$, が従う。故に, $[\#(A) = 0, \text{且つ}, \#(C) = 0]$, が従う。故に, $\#(A) = \#(C)$, が従う。

$[n \in N \text{ なる或 } n \text{ が存在して}, \text{Bij}(N[n], A) \neq \phi]$, なる場合を考える。この n を固定する。「 $n \in N$, 且つ, $\text{Bij}(N[n], A) \neq \phi$ 」, が従う。故に, $\text{Bij}(N[n], A) \neq \phi$, が従う。故に, 「或 ϕ が存在して, $\phi \in \text{Bij}(N[n], A)$ 」, が従う。この ϕ を固定する。 $\phi \in \text{Bij}(N[n], A)$, が従う。一方, $\varphi \in \text{Inj}(A, B)$ 及び [命題2.4], より, $\varphi \in \text{Bij}(A, C)$, が従う。故に, [命題2.7], より, $\varphi \circ \phi \in \text{Bij}(N[n], C)$, が従う。故に, 「或 f が存在して, $f \in \text{Bij}(N[n], C)$ 」, が従う。故に, $\text{Bij}(N[n], C) \neq \phi$, が従う。ところが, $n \in N$ 。故に, [定義2], より, 「 n は C に対する有限基数である」, が従う。故に, [命題1], より, 「 C は有限集合である」, が従う。故に, [定義3], より, $\#(C) = n$, が

従う。ところが, $[n \in N, \text{且つ}, \text{Bij}(N[n], A) \neq \phi]$ 。故に, [定義2], より, 「 n は A に対する有限基数である」, が従う。ところが, 「 A は有限集合である」。故に, [定義3], より, $\#(A) = n$, が従う。故に, $\#(A) = \#(C)$, が従う。故に, 「 C は有限集合である」, 且つ, $\#(A) = \#(C)$, が従う。

命題が従う。

[証明終]。

[命題10]。「任意の集合 A 及び任意の対象 a に対して, 「 A は有限集合である」, ならば, 「 $A \cup \{a\}$ は有限集合である」, 且つ, 「 $a \notin A$, ならば, $\#(A \cup \{a\}) = \#(A) + 1$ 」」, が従う。

[証明]。任意の集合 A 及び任意の対象 a , の各各を, 固定する。「 A は有限集合である」, と仮定する。

$a \in A$, なる場合を考える。 $\{a\} \subseteq A$, が従う。故に, $A \cup \{a\} = A$, が従う。ところが, 「 A は有限集合である」。故に, 「 $A \cup \{a\}$ は有限集合である」, が従う。

$a \notin A$, なる場合を考える。「 A は有限集合である」及び [定義1], より, 「 $n \in N$ なる或 n が存在して, $\text{Bij}(N[n], A) \neq \phi$ 」, が従う。この n を固定する。「 $n \in N$, 且つ, $\text{Bij}(N[n], A) \neq \phi$ 」, が従う。故に, $\text{Bij}(N[n], A) \neq \phi$, が従う。故に, 「或 φ が存在して, $\varphi \in \text{Bij}(N[n], A)$ 」, が従う。この φ を固定する。 $\varphi \in \text{Bij}(N[n], A)$, が従う。

$[k \in N[n+1]]$ なる任意の k に対して, 「 $[k \in N[n], \text{ならば}, \chi(k) = \varphi(k)]$, 且つ, $[k \notin N[n], \text{ならば}, \chi(k) = a]$ 」,

によって, $N[n+1]$ を定義域とする写像 χ を定義する。

$n \in N$, より, $n+1 \neq 1$, が従う。故に, [命題3.7] 及び $(n+1) - 1 = n$, より, $n+1 \in N[n]$, が従う。一方, $a \notin A$ 。故に, [命題2.3], より, $\chi \in \text{Bij}(N[n+1], A \cup \{a\})$, が従う。

故に、「或 ϕ が存在して、 $\phi \in \text{Bij}(N[n+1], A \cup \{a\})$ 」が従う。故に、 $\text{Bij}(N[n+1], A \cup \{a\}) \neq \phi$ が従う。ところが、 $n \in N$ より、 $n+1 \in N$ が従う。故に、[定義 2] より、「 $n+1$ は $A \cup \{a\}$ に対する有限基数である」が従う。故に、[命題 1] より、「 $A \cup \{a\}$ は有限集合である」が従う。一方、[定義 3] より、 $\#(A \cup \{a\}) = n+1$ が従う。ところが、「 $n \in N$ 、且つ、 $\text{Bij}(N[n], A) \neq \phi$ 」及び [定義 3] 及び「 A は有限集合である」より、 $\#(A) = n$ が従う。故に、 $\#(A \cup \{a\}) = \#(A) + 1$ が従う。

故に、「 $A \cup \{a\}$ は有限集合である」、且つ、「 $a \notin A$ 、ならば、 $\#(A \cup \{a\}) = \#(A) + 1$ 」が従う。 [証明終]。

[命題 11]。「 $n \in N$ なる任意の n 及び $D \subseteq N[n]$ なる任意の D 、に対して、「 D は有限集合である」が従う。

[証明]。 $M = \{m \mid m \in N, \text{且つ}, [D \subseteq N[m]] \text{ なる任意の } D \text{ に対して, 「} D \text{ は有限集合である」, には非ず}\}$ と置く。 $M \neq \phi$ と仮定して、矛盾を導く。

M の定義 より、 $M \subseteq N$ が従う。ところが、 $M \neq \phi$ 。故に、 M において最小である、元、が存在する。この元を $m(*)$ と表記する。即ち、 $m(*) = \min M$ と置く。 $m(*) \in M$ 及び M の定義 より、

陳述 1。「 $m(*) \in N$ 、且つ、「 $D \subseteq N[m(*)]$ なる任意の D に対して、「 D は有限集合である」, には非ず」,

が従う。

式 1。 $1 \leq m(*)$,

を示す。陳述 1 より、 $m(*) \in N$ が従う。故に、 $1 \leq m(*)$ が従う。 $1 = m(*)$ と仮定して矛盾を導く。

$D \subseteq N[m(*)]$ なる任意の D を固定する。ところが、 $1 = m(*)$ 。故に、 $N[m(*)] = N[1]$ 。故に、 $D \subseteq N[1]$ 。ところが、[命題 3.1] より、 $N[1] = \{1\}$ 。故に、 $D \subseteq \{1\}$ 。一方、「 $D = \phi$ 、或いは、 $D \neq \phi$ 」。

$D = \phi$ なる場合を考える。[定義 1] より、「 D は有限集合である」が従う。

$D \neq \phi$ なる場合を考える。「或 d が存在して、 $d \in D$ 」が従う。この d を固定する。 $d \in D$ が従う。ところが、 $D \subseteq \{1\}$ 。故に、 $d \in \{1\}$ が従う。故に、 $d = 1$ 。ところが、 $d \in D$ 。故に、 $1 \in D$ が従う。 $d' \in \{1\}$ なる任意の d' を固定する。 $d' \in \{1\}$ より、 $d' = 1$ が従う。ところが、 $1 \in D$ 。故に、 $d' \in D$ が従う。故に、「 $d' \in \{1\}$ なる任意の d' に対して、 $d' \in D$ 」が従う。故に、 $\{1\} \subseteq D$ が従う。ところが、 $D \subseteq \{1\}$ 。故に、 $D = \{1\}$ が従う。ところが、[命題 7] より、「 $\{1\}$ は有限集合である」。ところが、 $D = \{1\}$ 。故に、「 D は有限集合である」。

故に、「 $D \subseteq N[m(*)]$ なる任意の D に対して、「 D は有限集合である」が従う。故に、 M の定義 より、 $m(*) \in M$ が従う。ところが、 $m(*) \in M$ 。故に、矛盾が生じる。

故に、 $1 \neq m(*)$ 。ところが、 $1 \leq m(*)$ 。故に、 $1 \leq m(*)$ 。式 1 が従う。

陳述 2。「 $m(*) - 1 \in N$ 、且つ、「 $D \subseteq N[m(*) - 1]$ なる任意の D に対して、「 D は有限集合である」」,

を示す。陳述 1 より、 $m(*) \in N$ が従う。式 1 より、 $1 \leq m(*)$ が従う。故に、「或 x が存在して、「 $x \in N$ 、且つ、 $x+1 = m(*)$ 」」が従う。この x を固定する。「 $x \in N$ 、且つ、 $x+1 = m(*)$ 」が従う。故に、 $x+1 = m(*)$ が従う。故に、 $x = m(*) - 1$ が従う。ところ

が, $x \in N$. 故に, $m(*) - 1 \in N$, が従う。一方, $m(*) - 1 \not\subseteq m(*)$. 故に, $m(*)$ の最小性, より, $m(*) - 1 \in M$, が従う。ところが, $m(*) - 1 \in N$. 故に, M の定義, より, 「 $D \subseteq N[m(*) - 1]$ 」なる任意の D に対して, 「 D は有限集合である」, が従う。陳述 2, が従う。

$D \subseteq N[m(*)]$ なる任意の D を固定する。一方, 「 $m(*) \in D$, 或いは, $m(*) \notin D$ 」。

$m(*) \in D$, なる場合を考える。 $k \in D \setminus \{m(*)\}$, なる任意の k を固定する。「 $k \in D$, 且つ, $k \notin \{m(*)\}$ 」, が従う。 $k \in D$, が従う。故に, $D \subseteq N[m(*)]$, より, $k \in N[m(*)]$, が従う。ところが, 式 1, より, $m(*) \neq 1$. 故に, [命題 3.6], より, $N[m(*)] = N[m(*) - 1] \cup \{m(*)\}$, が従う。故に, $k \in N[m(*) - 1] \cup \{m(*)\}$, が従う。故に, 「 $k \in N[m(*) - 1]$, 或いは, $k \in \{m(*)\}$ 」, が従う。ところが, $k \notin \{m(*)\}$. 故に, $k \in N[m(*) - 1]$, が従う。故に, 「 $k \in D \setminus \{m(*)\}$ 」なる任意の k に対して, $k \in N[m(*) - 1]$, が従う。故に, $D \setminus \{m(*)\} \subseteq N[m(*) - 1]$, が従う。故に, 陳述 2, より, 「 $D \setminus \{m(*)\}$ は有限集合である」, が従う。故に, [命題 10], より, 「 $(D \setminus \{m(*)\}) \cup \{m(*)\}$ は有限集合である」, が従う。ところが, $m(*) \in D$, より, $(D \setminus \{m(*)\}) \cup \{m(*)\} = D$, が従う。故に, 「 D は有限集合である」, が従う。

$m(*) \notin D$, なる場合を考える。 $k' \in D$ なる任意の k' を固定する。式 1, より, $m(*) \neq 1$, が従う。故に, [命題 3.6], より, $N[m(*)] = N[m(*) - 1] \cup \{m(*)\}$, が従う。ところが, $D \subseteq N[m(*)]$. 故に, $D \subseteq N[m(*) - 1] \cup \{m(*)\}$, が従う。故に, 「 $k' \in N[m(*) - 1]$, 或いは, $k' \in \{m(*)\}$ 」, が従う。 $k' \in \{m(*)\}$, なる場合を考える。 $k' = m(*)$, が従う。ところが, $k' \in D$. 故に, $m(*) \in D$, が従う。ところが, $m(*) \notin D$. 故に, 矛盾が生じる。故に, $k' \in N[m(*) - 1]$, が従う。故に, 「 $k' \in D$ なる任意の k' に対して, $k' \in N[m(*) - 1]$ 」, が従う。故に, $D \subseteq N[m(*) - 1]$, が従う。故に, 陳述 2, より, 「 D は有限集合である」, が従う。

故に, $D \subseteq N[m(*)]$ なる任意の D に対して, 「 D は有限集合である」, が従う。故に, 陳述 2, より, 「 D は有限集合である」, が従う。

故に,

陳述 3. 「 $D \subseteq N[m(*)]$ 」なる任意の D に対して, 「 D は有限集合である」,

が従う。ところが, 陳述 1, より,

陳述 4. 「 $D \subseteq N[m(*)]$ 」なる任意の D に対して, 「 D は有限集合である」, には非ず,

が従う。陳述 3 及び陳述 4, より, 矛盾が生じる。

故に, $M = \phi$, が従う。 $n \in N$ なる任意の n を固定する。 $n \notin \phi$, が従う。ところが, $M = \phi$. 故に, $n \notin M$, が従う。ところが, $n \in N$. 故に, M の定義, より, 「 $D \subseteq N[n]$ 」なる任意の D に対して, 「 D は有限集合である」, には非ず, には非ず, が従う。故に, 「 $D \subseteq N[n]$ 」なる任意の D に対して, 「 D は有限集合である」, が従う。故に, 「 $n \in N$ なる任意の n に対して, 「 $D \subseteq N[n]$ 」なる任意の D に対して, 「 D は有限集合である」」, が従う。

命題が従う。

[証明終]。

[命題 12]. 「任意の有限集合 A 及び $D \subseteq A$ なる任意の集合 D , に対して, 「 D は有限集合である」, が従う。

[証明]. 任意の有限集合 A 及び $D \subseteq A$ なる任意の集合 D , の各各を, 固定する。[定義 1], より, 「 $A = \phi$, 或いは, 「 $n \in N$ なる或 n が存在して, $\text{Bij}(N[n], A) \neq \phi$ 」」, が従う。

$A = \phi$, なる場合を考える。 $D \subseteq A$, より, $D \subseteq \phi$, が従う。ところが, $\phi \subseteq D$. 故に, $D = \phi$, が従う。故に, [定義 1], より, 「 D は有

限集合である」, が従う。

「 $n \in N$ なる或 n が存在して, $\text{Bij}(N[n], A) \neq \phi$ 」, なる場合を考える。この n を固定する。 $\text{Bij}(N[n], A)$, が従う。故に, 「或 ϕ が存在して, $\phi \in \text{Bij}(N[n], A)$ 」, が従う。この ϕ を固定する。 $\phi \in \text{Bij}(N[n], A)$, が従う。

$$B = \{r \mid r \in N[n], \text{ 且つ, } \phi(r) \in D\},$$

と置き, 且つ, $\chi = \phi \upharpoonright B$, と置く。[命題2.6], より, $\chi \in \text{Bij}(B, D)$, が従う。ところが, B の定義, より, $B \subseteq N[n]$, が従う。故に, [命題11], より, 「 B は有限集合である」, が従う。故に, [定義1], より, 「 $B = \phi$, 或いは, 「 $m \in N$ なる或 m が存在して, $\text{Bij}(N[m], B) \neq \phi$ 」, が従う。

$B = \phi$, なる場合を考える。 $D \neq \phi$, と仮定して矛盾を導く。「或 d が存在して, $d \in D$ 」, が従う。この d を固定する。 $d \in D$, が従う。ところが, $\phi \in \text{Bij}(N[n], A)$, より, $\phi \in \text{Surj}(N[n], A)$, が従う。また, $D \subseteq A$, より, $d \in A$, が従う。故に, 「或 $r' \in N[n]$ が存在して, $d = \phi(r')$ 」, が従う。この r' を固定する。「 $r' \in N[n]$, 且つ, $d = \phi(r')$ 」, が従う。故に, $d = \phi(r')$, が従う。ところが, $d \in D$. 故に, $\phi(r') \in D$, が従う。一方, $r' \in N[n]$. 故に, B の定義, より, $r' \in B$, が従う。故に, 「或 r' が存在して, $r' \in B$ 」, が従う。故に, $B \neq \phi$, が従う。ところが, $B = \phi$. 故に, 矛盾が生じる。故に, $D = \phi$. 故に, [定義1], より, 「 D は有限集合である」, が従う。

「 $m \in N$ なる或 m が存在して, $\text{Bij}(N[m], B) \neq \phi$ 」, なる場合を考える。この m を固定する。「 $m \in N$, 且つ, $\text{Bij}(N[m], B) \neq \phi$ 」, が従う。故に, $\text{Bij}(N[m], B) \neq \phi$, が従う。故に, 「或 ϕ が存在して, $\phi \in \text{Bij}(N[m], B)$ 」, が従う。この ϕ を固定する。 $\phi \in \text{Bij}(N[m], B)$, が従う。ところが, $\chi \in \text{Bij}(B, D)$. 故に, [命題2.7], より, $\chi \circ \phi \in \text{Bij}(N[m], D)$, が従う。故に, 「或 ϕ' が存在して, $\phi' \in \text{Bij}(N[m],$

$D)$ 」, が従う。故に, $\text{Bij}(N[m], D) \neq \phi$, が従う。ところが, $m \in N$. 故に, 「 $m \in N$ なる或 m が存在して, $\text{Bij}(N[m], D) \neq \phi$ 」, が従う。故に, [定義1], より, 「 D は有限集合である」, が従う。

故に, 「 $D \subseteq A$ なる任意の集合 D に対して, 「 D は有限集合である」」, が従う。故に, 「任意の有限集合 A 及び $D \subseteq A$ なる任意の集合 D , に対して, 「 D は有限集合である」」, が従う。 [証明終]。

第5節 定性的確率

この概念は, サヴェジ [3], 32頁, 冒頭の段落, による。

[定義1]. $\langle S, \mathcal{A} \rangle$ を任意の可測空間とし, 且つ, $\llcorner$ を任意の集合とする。「 $\llcorner$ は $\mathcal{A}$ 上の定性的確率である」, なる事は, 「 $\llcorner$ は以下の, 性質1から性質5までの, 性質達を所有する」, なる事である」, と定義する。

性質1. $\llcorner$ は $\mathcal{A}$ 上の2項関係である。

性質2. $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B , に対して, 「 $A \llcorner B$, 或いは, $B \llcorner A$ 」。

性質3. $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B 及び $C \in \mathcal{A}$ なる任意の C , に対して, 「 $A \llcorner B$, 且つ, $B \llcorner C$ 」, ならば, $A \llcorner C$ 。

性質4. $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B 及び $C \in \mathcal{A}$ なる任意の C , に対して, 「 $A \cap C = \phi$, 且つ, $B \cap C = \phi$ 」, ならば, 「 $A \llcorner B$, と, $A \cup C \llcorner B \cup C$, とは, 同値である」。

性質5. $S \llcorner \phi$, には非ず, 且つ, $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A に対して, $\phi \llcorner A$ 。

[命題1]。≪を、任意の、 $\mathcal{A}$ 上の定性的確率、とする。「 $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B 、に対して、「 $A \subseteq B$ 、ならば、 $A \ll B$ 」, が従う。

[証明]。 $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B 、の各各を、固定する。 $A \subseteq B$ 、と仮定する。[定義1]における性質5、より、 $\phi \ll B \setminus A$ 、が従う。ところが、「 $\phi \cap A = \phi$ 、且つ、 $(B \setminus A) \cap A = \phi$ 」。故に、[定義1]における性質4、より、 $\phi \cup A \ll (B \setminus A) \cup A$ 、が従う。ところが、「 $\phi \cup A = A$ 、且つ、 $(B \setminus A) \cup A = B \cup A$ 」。故に、 $A \ll B \cup A$ 、が従う。ところが、 $A \subseteq B$ 、より、 $B \cup A = B$ 、が従う。故に、 $A \ll B$ 、が従う。 [証明終]。

[命題2]。≪を、任意の、 $\mathcal{A}$ 上の定性的確率、とする。「 $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B 及び $C \in \mathcal{A}$ なる任意の C 、に対して、「 $A \ll B$ 、且つ、 $B \cap C = \phi$ 」、ならば、 $A \cup C \ll B \cup C$ 」, が従う。

[証明]。 $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B 及び $C \in \mathcal{A}$ なる任意の C 、の各各を、固定する。「 $A \ll B$ 、且つ、 $B \cap C = \phi$ 」、と仮定する。 $B \cap C = \phi$ 、より、 $B \cap (C \setminus A) = \phi$ 、が従う。一方、 $A \cap (C \setminus A) = \phi$ 。故に、[定義1]における性質4、より、 $A \cup (C \setminus A) \ll B \cup (C \setminus A)$ 、が従う。ところが、 $A \cup C = A \cup (C \setminus A)$ 。故に、 $A \cup C \ll B \cup (C \setminus A)$ 、が従う。ところが、 $B \cup (C \setminus A) \subseteq B \cup C$ 。故に、[命題1]、より、 $B \cup (C \setminus A) \ll B \cup C$ 、が従う。故に、[定義1]における性質3、より、 $A \cup C \ll B \cup C$ 、が従う。 [証明終]。

[命題3]。≪を、任意の、 $\mathcal{A}$ 上の定性的確率、とする。「各各が、任意の、 $\mathcal{A}$ の元である、 A 及び B 及び C 及び D 、に対して、「 $A \ll C$ 、且つ、 $B \ll D$ 、且つ、 $C \cap D = \phi$ 」、ならば、 $A \cup$

$B \ll C \cup D$ 」, が従う。

[証明]。各各が、任意の、 $\mathcal{A}$ の元である、 A 及び B 及び C 及び D 、の各各を、固定する。「 $A \ll C$ 、且つ、 $B \ll D$ 、且つ、 $C \cap D = \phi$ 」、と仮定する。 $C \cap (B \setminus C) = \phi$ 及び [命題2]、より、 $A \cup (B \setminus C) \ll C \cup (B \setminus C)$ 、が従う。ところが、 $C \cup (B \setminus C) = B \cup (C \setminus B)$ 。故に、 $A \cup (B \setminus C) \ll B \cup (C \setminus B)$ 、が従う。ところが、「 $B \ll D$ 、且つ、 $B \cap (C \setminus B) = \phi$ 」。また、 $C \cap D = \phi$ 、より、 $D \cap (C \setminus B) = \phi$ 。故に、[定義1]における性質4、より、 $B \cup (C \setminus B) \ll D \cup (C \setminus B)$ 、が従う。故に、[定義1]における性質3、より、 $A \cup (B \setminus C) \ll D \cup (C \setminus B)$ 、が従う。ところが、「 $C \cap D = \phi$ 、且つ、 $(C \setminus B) \cap B = \phi$ 」、より、 $(D \cup (C \setminus B)) \cap (B \cap C) = \phi$ 、が従う。故に、[命題2]、より、 $(A \cup (B \setminus C)) \cup (B \cap C) \ll (D \cup (C \setminus B)) \cup (B \cap C)$ 、が従う。ところが、「 $(A \cup (B \setminus C)) \cup (B \cap C) = A \cup B$ 、且つ、 $(D \cup (C \setminus B)) \cup (B \cap C) = C \cup D$ 」。故に、 $A \cup B \ll C \cup D$ 、が従う。 [証明終]。

[定義2]。≪を、任意の、 $\mathcal{A}$ 上の定性的確率、とする。「 $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B 、に対して、「 $B \ll A$ 、には非ず」、なる場合、且つ、その場合に限って、 $A \not\ll B$ 」, によって、 $\mathcal{A}$ 上の2項関係、 $\neq$ 、を定義する。

[命題4]。≪を、任意の、 $\mathcal{A}$ 上の定性的確率、とする。「 $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B 、に対して、「 $A \not\ll B$ 、ならば、 $A \ll B$ 」, が従う。

[証明]。 $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B 、の各各を、固定する。 $A \not\ll B$ 、と仮定する。[定義2]、より、「 $B \ll A$ 、には非ず」、が従う。ところが、[定義1]における性質2、より、「 $A \ll B$ 、或いは、 $B \ll A$ 」、が従う。故に、 $A \ll B$ 、が従う。 [証明終]。

[命題5]。≪を、任意の、 $\mathcal{A}$ 上の定性的確率、とする。「 $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B 及び $C \in \mathcal{A}$ なる任意の C 、に対して、「 $A \ll B$, 且つ、 $B \not\ll C$ 」, ならば、 $A \not\ll C$ 」, が従う。

[証明]。 $A \in \mathcal{A}$ なる A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる B 及び $C \in \mathcal{A}$ なる C , の各各を、固定する。「 $A \ll B$, 且つ、 $B \not\ll C$ 」, と仮定する。「 $A \not\ll C$, には非ず」, と仮定して矛盾を導く。[定義2], より、「 $C \ll A$, には非ず」, には非ず」, が従う。故に、 $C \ll A$, が従う。ところが、 $A \ll B$. 故に、[定義1]における性質3, より、 $C \ll B$, が従う。ところが、 $B \not\ll C$. 故に、[定義2], より、「 $C \ll B$, には非ず」, が従う。故に、「 $C \ll B$, 且つ、「 $C \ll B$, には非ず」」, が従う。故に、矛盾が生じる。故に、 $A \not\ll C$, が従う。

[証明終]。

[命題6]。≪を、任意の、 $\mathcal{A}$ 上の定性的確率、とする。「 $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B 及び $C \in \mathcal{A}$ なる任意の C 、に対して、「 $A \not\ll B$, 且つ、 $B \ll C$ 」, ならば、 $A \not\ll C$ 」, が従う。

[証明]。 $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B 及び $C \in \mathcal{A}$ なる任意の C , の各各を、固定する。「 $A \not\ll B$, 且つ、 $B \ll C$ 」, と仮定する。「 $A \not\ll C$, には非ず」, と仮定して矛盾を導く。[定義2], より、「 $C \ll A$, には非ず」, には非ず」, が従う。故に、 $C \ll A$, が従う。故に、「 $B \ll C$, 且つ、 $C \ll A$ 」, が従う。故に、[定義1]における性質3, より、 $B \ll A$, が従う。ところが、 $A \not\ll B$. 故に、[定義2], より、「 $B \ll A$, には非ず」, が従う。故に、「 $B \ll A$, 且つ、「 $B \ll A$, には非ず」」, が従う。故に、矛盾が生じる。故に、 $A \not\ll C$, が従う。命題が従う。

[証明終]。

[命題7]。≪を、任意の、 $\mathcal{A}$ 上の定性的確率、

とする。「 $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B 及び $C \in \mathcal{A}$ なる任意の C 、に対して、「 $A \cap C = \phi$, 且つ、 $B \cap C = \phi$ 」, ならば、「 $A \not\ll B$, と、 $A \cup C \not\ll B \cup C$, とは、同値である」」, が従う。

[証明]。 $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B 及び $C \in \mathcal{A}$ なる任意の C , の各各を、固定する。「 $A \cap C = \phi$, 且つ、 $B \cap C = \phi$ 」, と仮定する。[定義1]における性質4, より、「 $B \ll A$, と、 $B \cup C \ll A \cup C$, とは、同値である」, が従う。故に、「 $B \ll A$, には非ず」, と、「 $B \cup C \ll A \cup C$, には非ず」, とは、同値である」, が従う。故に、[定義2], より、「 $A \not\ll B$, と、 $A \cup C \not\ll B \cup C$, とは、同値である」, が従う。

[証明終]。

[命題8]。≪を、任意の、 $\mathcal{A}$ 上の定性的確率、とする。「 $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B 及び $C \in \mathcal{A}$ なる任意の C 、に対して、「 $A \not\ll B$, 且つ、 $B \cap C = \phi$ 」, ならば、 $A \cup C \not\ll B \cup C$ 」, が従う。

[証明]。 $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B 及び $C \in \mathcal{A}$ なる任意の C , の各各を、固定する。「 $A \not\ll B$, 且つ、 $B \cap C = \phi$ 」, と仮定する。 $B \cap C = \phi$, より、 $B \cap (C \setminus A) = \phi$, が従う。ところが、 $A \cap (C \setminus A) = \phi$. 故に、 $A \not\ll B$ 及び [命題7], より、 $A \cup (C \setminus A) \not\ll B \cup (C \setminus A)$, が従う。一方、 $B \cup (C \setminus A) \subseteq B \cup C$ 及び [命題1], より、 $B \cup (C \setminus A) \ll B \cup C$, が従う。故に、[命題6], より、 $A \cup (C \setminus A) \not\ll B \cup C$, が従う。ところが、 $A \cup (C \setminus A) = A \cup C$. 故に、 $A \cup C \not\ll B \cup C$, が従う。命題が従う。

[証明終]。

[命題9]。≪を、任意の、 $\mathcal{A}$ 上の定性的確率、とする。「各各が、任意の、 $\mathcal{A}$ の元である、 A 及び B 及び C 及び D 、に対して、「 $A \not\ll C$, 且つ、 $B \ll D$, 且つ、 $C \cap D = \phi$ 」, ならば、 $A \cup$

$B \nless C \cup D$], が従う。

[証明]。各々が、任意の、 $\mathcal{A}$ の元である、 A 及び B 及び C 及び D , の各各を、固定する。
「 $A \nless C$, 且つ, $B \less D$, 且つ, $C \cap D = \phi$ 」, と仮定する。「 $A \nless C$, 且つ, $C \cap (B \setminus C) = \phi$ 」及び [命題 8], より, $A \cup (B \setminus C) \nless C \cup (B \setminus C)$, が従う。ところが, $C \cup (B \setminus C) = B \cup (C \setminus B)$ 。故に, $A \cup (B \setminus C) \nless B \cup (C \setminus B)$, が従う。一方, $B \less D$ 。ところが, $B \cap (C \setminus B) = \phi$ 。また, $C \cap D = \phi$, より, $D \cap (C \setminus B) = \phi$, が従う。故に, [定義 1]における性質 4, より, $B \cup (C \setminus B) \less D \cup (C \setminus B)$, が従う。故に, [命題 6], より, $A \cup (B \setminus C) \nless D \cup (C \setminus B)$, が従う。ところが, 「 $C \cap D = \phi$, 且つ, $(C \setminus B) \cap B = \phi$ 」, より, $(D \cup (C \setminus B)) \cap (B \cap C) = \phi$, が従う。故に, [命題 8], より, $(A \cup (B \setminus C)) \cup (B \cap C) \nless (D \cup (C \setminus B)) \cup (B \cap C)$, が従う。ところが, 「 $(A \cup (B \setminus C)) \cup (B \cap C) = A \cup B$, 且つ, $(D \cup (C \setminus B)) \cup (B \cap C) = C \cup D$ 」。故に, $A \cup B \nless C \cup D$, が従う。命題が従う。

[証明終]。

[命題 10]。 $\less$ を、任意の、 $\mathcal{A}$ 上の定性的確率、とする。「各々が、任意の、 $\mathcal{A}$ の元である、 A 及び B 及び C 及び D , に対して, 「 $A \nless C$, 且つ, $B \nless D$, 且つ, $C \cap D = \phi$ 」, ならば, $A \cup B \nless C \cup D$], が従う。

[証明]。各々が、任意の、 $\mathcal{A}$ の元である、 A 及び B 及び C 及び D , の各各を、固定する。
「 $A \nless C$, 且つ, $B \nless D$, 且つ, $C \cap D = \phi$ 」, と仮定する。 $B \nless D$, が従う。故に, [命題 4], より, $B \less D$, が従う。故に, 「 $A \nless C$, 且つ, $B \less D$, 且つ, $C \cap D = \phi$ 」, が従う。故に, [命題 9], より, $A \cup B \nless C \cup D$, が従う。命題が従う。

[証明終]。

[命題 11]。 $\less$ を、任意の、 $\mathcal{A}$ 上の定性的確率、とする。「各々が、任意の、 $\mathcal{A}$ の元である、 A

及び B 及び C 及び D , に対して, 「 $A \cap B = \phi$, 且つ, $C \less A$, 且つ, $A \cup B \nless C \cup D$ 」, ならば, $B \nless D$ 」, が従う。

[証明]。各々が、任意の、 $\mathcal{A}$ の元である、 A 及び B 及び C 及び D , の各各を、固定する。
「 $A \cap B = \phi$, 且つ, $C \less A$, 且つ, $A \cup B \nless C \cup D$ 」, と仮定する。「 $B \nless D$, には非ず」, と仮定して矛盾を導く。[定義 2], より, 「 $D \less B$, には非ず」, には非ず」, が従う。故に, $D \less B$, が従う。ところが, 「 $A \cap B = \phi$, 且つ, $C \less A$ 」。故に, [命題 3], より, $C \cup D \less A \cup B$, が従う。ところが, $A \cup B \nless C \cup D$ 。故に, [定義 2], より, 「 $C \cup D \less A \cup B$, には非ず」, が従う。故に, 「 $C \cup D \less A \cup B$, 且つ, 「 $C \cup D \less A \cup B$, には非ず」」, が従う。故に, 矛盾が生じる。故に, $B \nless D$, が従う。 [証明終]。

[命題 12]。 $\less$ を、任意の、 $\mathcal{A}$ 上の定性的確率、とする。「各々が、任意の、 $\mathcal{A}$ の元である、 A 及び B 及び C 及び D , に対して, 「 $A \cap B = \phi$, 且つ, $C \nless A$, 且つ, $A \cup B \less C \cup D$ 」, ならば, $B \nless D$ 」, が従う。

[証明]。各々が、任意の、 $\mathcal{A}$ の元である、 A 及び B 及び C 及び D , の各各を、固定する。
「 $A \cap B = \phi$, 且つ, $C \nless A$, 且つ, $A \cup B \less C \cup D$ 」, と仮定する。「 $B \nless D$, には非ず」, と仮定して矛盾を導く。[定義 2], より, 「 $D \less B$, には非ず」, には非ず」, が従う。故に, $D \less B$, が従う。ところが, 「 $A \cap B = \phi$, 且つ, $C \nless A$ 」。故に, [命題 9], より, $C \cup D \nless A \cup B$, が従う。故に, [定義 2], より, 「 $A \cup B \less C \cup D$, には非ず」, が従う。ところが, $A \cup B \less C \cup D$ 。故に, 「 $A \cup B \less C \cup D$, には非ず」, 且つ, $A \cup B \less C \cup D$ 」, が従う。故に, 矛盾が生じる。故に, $B \nless D$, が従う。 [証明終]。

[命題 13]。 $\less$ を、任意の、 $\mathcal{A}$ 上の定性的確率、とする。「各々が、任意の、 $\mathcal{A}$ の元である、 A

及び B 及び C 及び D , に対して, 「 $A \cap B = \phi$, 且つ, $C \prec A$, 且つ, $A \cup B \prec C \cup D$ 」, ならば, $B \prec D$ 」, が従う。

[証明]。各々が, 任意の, $\mathcal{A}$ の元である, A 及び B 及び C 及び D , の各各を, 固定する。
「 $A \cap B = \phi$, 且つ, $C \prec A$, 且つ, $A \cup B \prec C \cup D$ 」, と仮定する。「 $B \prec D$, には非ず」, と仮定して矛盾を導く。[定義 2], より, $D \not\prec B$, が従う。ところが, 「 $A \cap B = \phi$, 且つ, $C \prec A$ 」, 故に, [命題 9], より, $D \cup C \not\prec B \cup A$, が従う。故に, [定義 2], より, 「 $B \cup A \prec D \cup C$, には非ず」, が従う。故に, 「 $A \cup B \prec C \cup D$, には非ず」, が従う。ところが, $A \cup B \prec C \cup D$ 。故に, 「 $A \cup B \prec C \cup D$, には非ず」, 且つ, $A \cup B \prec C \cup D$, が従う。故に, 矛盾が生じる。故に, $B \prec D$, が従う。 [証明終]。

[命題 14]。 $\prec$ を, 任意の, $\mathcal{A}$ 上の定性的確率, とする。「各々が, 任意の, $\mathcal{A}$ の元である, A 及び B 及び C 及び D , に対して, 「 $A \cap B = \phi$, 且つ, $C \not\prec A$, 且つ, $A \cup B \not\prec C \cup D$ 」, ならば, $B \not\prec D$ 」, が従う。

[証明]。各々が, 任意の, $\mathcal{A}$ の元である, A 及び B 及び C 及び D , の各各を, 固定する。
「 $A \cap B = \phi$, 且つ, $C \not\prec A$, 且つ, $A \cup B \not\prec C \cup D$ 」, と仮定する。 $C \not\prec A$ 及び [命題 4], より, $C \prec A$, が従う。故に, 「 $A \cap B = \phi$, 且つ, $C \prec A$, 且つ, $A \cup B \not\prec C \cup D$ 」, が従う。故に, [命題 11], より, $B \not\prec D$, が従う。

[証明終]。

[定義 3]。 $\prec$ を, 任意の, $\mathcal{A}$ 上の定性的確率, とする。「 $A \in \mathcal{A}$ なる任意の A 及び $B \in \mathcal{A}$ なる任意の B , に対して, 「 $A \prec B$, 且つ, $B \prec A$ 」, なる場合, 且つ, その場合に限って, $A \approx B$ 」, によって, $\mathcal{A}$ 上の 2 項関係, $\approx$, を定義する。

第 6 節 列及び分割列

これらの概念達はサヴェジ [3] におけるきわめて基本的な概念達である, と, 筆者は考えるのである。なお, [命題 12] は, サヴェジ [3], 35 頁, 最後の段階, における, 補題 5a, に対応する者である。

[定義 1]。 f を任意の集合とする。「 f は $\mathcal{A}$ 上の列である」, なる事は, 「 $n \in N$ なる或 n が存在して, $f \in \text{Map}(N[n], \mathcal{A})$ 」, なる事である」, と定義する。

[命題 1]。 f を, 任意の, $\mathcal{A}$ 上の列, とする。「 $\text{dom}(f) \subseteq N$, 且つ, $\text{dom}(f)$ において最大である, 元, $\max \text{dom}(f)$, が存在し, 且つ, $\text{dom}(f) = N[\max \text{dom}(f)]$ 」, が従う。

[証明]。[定義 1], より, 「 $n \in N$ なる或 n が存在して, $f \in \text{Map}(N[n], \mathcal{A})$ 」, が従う。この n を固定する。 $f \in \text{Map}(N[n], \mathcal{A})$, が従う。故に, [命題 1. 7], より, $\text{dom}(f) = N[n]$, が従う。ところが, $N[n] \subseteq N$ 。故に, $\text{dom}(f) \subseteq N$, が従う。 $j \in \text{dom}(f)$ なる任意の j を固定する。 $\text{dom}(f) = N[n]$, より, $i \in N[n]$, が従う。故に, $j \leq n$, が従う。故に, 「 $j \in \text{dom}(f)$ なる任意の j に対して, $j \leq n$ 」, が従う。一方, 「 $n \in N[n]$, 且つ, $\text{dom}(f) = N[n]$ 」, 故に, $n \in \text{dom}(f)$ 。故に, 「 $n \in \text{dom}(f)$, 且つ, $j \in \text{dom}(f)$ なる任意の j に対して, $j \leq n$ 」, が従う。故に, 「 $\text{dom}(f)$ において最大である, 元, が存在して, 且つ, $n = \max \text{dom}(f)$ 」, が従う。ところが, $\text{dom}(f) = N[n]$ 。故に, $\text{dom}(f) = N[\max \text{dom}(f)]$, が従う。

[証明終]。

[定義 2]。 f を任意の集合とする。「 f は $\mathcal{A}$ 上の分割列である」, なる事は, 「 f は $\mathcal{A}$ 上の列であり, 且つ, $j' \in \text{dom}(f)$ なる任意の j' 及び $j'' \in \text{dom}(f)$ なる任意の j'' , に対して,

「 $j' \neq j''$ 」ならば、 $f(j') \cap f(j'') = \phi$ 」, なる事である」, と定義する。

[定義3]。 f を、任意の、 α 上の列、とし、且つ、 A を任意の集合とする。

$\langle f; A \rangle = \{x \mid j \in A \cap \text{dom}(f) \text{ なる或 } j \text{ が存在して, } x \in f(j)\}$,

によって、集合、 $\langle f; A \rangle$, を定義する。即ち、 $\langle f; A \rangle = \bigcup \{f(j) \mid j \in A \cap \text{dom}(f)\}$, と置く。

[命題2]。 f を、任意の、 α 上の列、とする。「任意の d に対して、「 $d \in \text{dom}(f)$ 」ならば、 $\langle f; \{d\} \rangle = f(d)$ 」, が従う。

[証明]。 $d \in \text{dom}(f)$ なる任意の d を固定する。[定義3], より、 $\langle f; \{d\} \rangle = \bigcup \{f(j) \mid j \in \{d\} \cap \text{dom}(f)\}$, が従う。ところが、 $d \in \text{dom}(f)$, より、 $\{d\} \subseteq \text{dom}(f)$, が従う。故に、 $\{d\} \cap \text{dom}(f) = \{d\}$ 。故に、 $\langle f; \{d\} \rangle = \bigcup \{f(j) \mid j \in \{d\}\}$, が従う。 $\bigcup \{f(j) \mid j \in \{d\}\} = f(d)$, を示す。 $s \in \bigcup \{f(j) \mid j \in \{d\}\}$ なる任意の s を固定する。「 $j \in \{d\}$ なる或 j が存在して、 $s \in f(j)$ 」, が従う。この j を固定する。「 $j \in \{d\}$, 且つ、 $s \in f(j)$ 」, が従う。ところが、「 $j \in \{d\}$, と、 $j = d$, とは、同値である」。故に、「 $j = d$, 且つ、 $s \in f(j)$ 」, が従う。故に、 $s \in f(d)$, が従う。故に、「 $s \in \bigcup \{f(j) \mid j \in \{d\}\}$ なる任意の s に対して、 $s \in f(d)$ 」, が従う。 $t \in f(d)$ なる任意の t を固定する。ところが、 $d = d$, より、 $d \in \{d\}$, が従う。故に、「 $d \in \{d\}$, 且つ、 $t \in f(d)$ 」, が従う。故に、「或 k が存在して、「 $k \in \{d\}$, 且つ、 $t \in f(k)$ 」」, が従う。故に、「 $k \in \{d\}$ なる或 k が存在して、 $t \in f(k)$ 」, が従う。故に、 $t \in \bigcup \{f(k) \mid k \in \{d\}\}$, が従う。故に、「 $t \in f(d)$ なる任意の t に対して、 $t \in \bigcup \{f(k) \mid k \in \{d\}\}$ 」, が従う。故に、 $\bigcup \{f(j) \mid j \in \{d\}\} = f(d)$, が従う。故に、 $\langle f; \{d\} \rangle = f(d)$, が従う。 [証明終]。

[命題3]。 f を、任意の、 α 上の列、とする。「任意の集合、 A' , 及び任意の集合、 A'' , に対して、「 $A' \subseteq A''$ 」ならば、 $\langle f; A' \rangle \subseteq \langle f; A'' \rangle$ 」, が従う。

[証明]。任意の集合 A' 及び任意の集合 A'' , の各各を、固定する。 $A' \subseteq A''$, と仮定する。 $\langle f; A' \rangle = \phi$, なる場合には、 $\phi \subseteq \langle f; A'' \rangle$, より、 $\langle f; A' \rangle \subseteq \langle f; A'' \rangle$, が従う。 $\langle f; A' \rangle \neq \phi$, なる場合を考える。 $x \in \langle f; A' \rangle$ なる任意の x を固定する。「 $j \in A' \cap \text{dom}(f)$ なる或 j が存在して、 $x \in f(j)$ 」, が従う。この j を固定する。「 $j \in A' \cap \text{dom}(f)$, 且つ、 $x \in f(j)$ 」, が従う。 $A' \subseteq A''$, より、 $A' \cap \text{dom}(f) \subseteq A'' \cap \text{dom}(f)$, が従う。故に、 $j \in A'' \cap \text{dom}(f)$, が従う。故に、「 $j \in A'' \cap \text{dom}(f)$, 且つ、 $x \in f(j)$ 」, が従う。故に、「 $j \in A'' \cap \text{dom}(f)$ なる或 j が存在して、 $x \in f(j)$ 」, が従う。故に、 $x \in \langle f; A'' \rangle$, が従う。故に、 $\langle f; A' \rangle = \phi$, なる場合をも含めて、「任意の x に対して、「 $x \in \langle f; A' \rangle$ 」ならば、 $x \in \langle f; A'' \rangle$ 」, が従う。

命題が従う。

[証明終]。

[命題4]。 f を、任意の、 α 上の列、とする。「任意の集合 D' 及び任意の集合 D'' , に対して、 $\langle f; D' \cup D'' \rangle = \langle f; D' \rangle \cup \langle f; D'' \rangle$ 」, が従う。

[証明]。任意の集合 D' 及び任意の集合 D'' , の各各を、固定する。

$x \in \langle f; D' \cup D'' \rangle$ なる任意の x を固定する。[定義3], より、「 $j \in (D' \cup D'') \cap \text{dom}(f)$ なる或 j が存在して、 $x \in f(j)$ 」, が従う。この j を固定する。「 $j \in (D' \cup D'') \cap \text{dom}(f)$, 且つ、 $x \in f(j)$ 」, が従う。ところが、 $(D' \cup D'') \cap \text{dom}(f) = (D' \cap \text{dom}(f)) \cup (D'' \cap \text{dom}(f))$ 。故に、「 $j \in D' \cap \text{dom}(f)$, 或いは、 $j \in D'' \cap \text{dom}(f)$ 」, が従う。 $j \in D' \cap \text{dom}(f)$, の場合を考える。「 j

$\in D' \cap \text{dom}(f)$, 且つ, $x \in f(j)$ 」, が従う。故に, 「 $j \in D' \cap \text{dom}(f)$ なる或 j が存在して, $x \in f(j)$ 」, が従う。故に, [定義 3], より, 「 $x \in \langle f; D' \rangle$ 」, が従う。 $j \in D'' \cap \text{dom}(f)$, の場合を考える。「 $j \in D'' \cap \text{dom}(f)$, 且つ, $x \in f(j)$ 」, が従う。故に, 「 $j \in D'' \cap \text{dom}(f)$ なる或 j が存在して, $x \in f(j)$ 」, が従う。故に, [定義 3], より, $x \in \langle f; D'' \rangle$, が従う。故に, 「 $x \in \langle f; D' \rangle$, 或いは, $x \in \langle f; D'' \rangle$ 」, が従う。故に, 「 $x \in \langle f; D' \cup D'' \rangle$ なる任意の x に対して, $x \in \langle f; D' \cup D'' \rangle$ 」, が従う。

$y \in \langle f; D' \rangle \cup \langle f; D'' \rangle$ なる任意の y を固定する。「 $y \in \langle f; D' \rangle$, 或いは, $y \in \langle f; D'' \rangle$ 」, が従う。 $y \in \langle f; D' \rangle$, なる場合を考える。[定義 3], より, 「 $j' \in D' \cap \text{dom}(f)$ なる或 j' が存在して, $y \in f(j')$ 」, が従う。この j' を固定する。「 $j' \in D' \cap \text{dom}(f)$, 且つ, $y \in f(j')$ 」, が従う。一方, $D' \subseteq D' \cup D''$, より, $D' \cap \text{dom}(f) \subseteq (D' \cup D'') \cap \text{dom}(f)$, が従う。故に, 「 $j' \in (D' \cup D'') \cap \text{dom}(f)$, 且つ, $y \in f(j')$ 」, が従う。故に, 「 $j' \in (D' \cup D'') \cap \text{dom}(f)$ なる或 j' が存在して, $y \in f(j')$ 」, が従う。故に, [定義 3], より, $y \in \langle f; D' \cup D'' \rangle$, が従う。 $y \in \langle f; D'' \rangle$, なる場合を考える。[定義 3], より, 「 $j'' \in D'' \cap \text{dom}(f)$ なる或 j'' が存在して, $y \in f(j'')$ 」, が従う。この j'' を固定する。「 $j'' \in D'' \cap \text{dom}(f)$, 且つ, $y \in f(j'')$ 」, が従う。一方, $D'' \subseteq D' \cup D''$, より, $D'' \cap \text{dom}(f) \subseteq (D' \cup D'') \cap \text{dom}(f)$, が従う。故に, 「 $j'' \in (D' \cup D'') \cap \text{dom}(f)$, 且つ, $y \in f(j'')$ 」, が従う。故に, 「 $j'' \in (D' \cup D'') \cap \text{dom}(f)$ なる或 j'' が存在して, $y \in f(j'')$ 」, が従う。故に, [定義 3], より, $y \in \langle f; D' \cup D'' \rangle$, が従う。故に, 各場合において, $y \in \langle f; D' \cup D'' \rangle$ 。故に, 「 $y \in \langle f; D' \rangle \cup \langle f; D'' \rangle$ なる任意の y に対して, $y \in \langle f; D' \cup D'' \rangle$ 」, が従う。

命題が従う。

[証明終]。

[命題 5]。 f を, 任意の, $\mathcal{A}$ 上の分割列, とする。「任意の集合 D' 及び任意の集合 D'' , に対して, 「 $D' \cap D'' = \phi$, ならば, $\langle f; D' \rangle \cap \langle f; D'' \rangle = \phi$ 」, が従う。

[証明]。任意の集合 D' 及び任意の集合 D'' , の各各を, 固定する。 $D' \cap D'' = \phi$, と仮定する。「 $\langle f; D' \rangle \cap \langle f; D'' \rangle = \phi$, には非ず」, と仮定して矛盾を導く。「或 x が存在して, $x \in \langle f; D' \rangle \cap \langle f; D'' \rangle$ 」, が従う。この x を固定する。 $x \in \langle f; D' \rangle \cap \langle f; D'' \rangle$, が従う。「 $x \in \langle f; D' \rangle$, 且つ, $x \in \langle f; D'' \rangle$ 」, が従う。[定義 3], より, 「 $j' \in D' \cap \text{dom}(f)$ なる或 j' が存在して, $x \in f(j')$ 」, 且つ, 「 $j'' \in D'' \cap \text{dom}(f)$ なる或 j'' が存在して, $x \in f(j'')$ 」, が従う。ここにおける, j' 及び j'' , の各各を, 固定する。「 $j' \in D' \cap \text{dom}(f)$, 且つ, $x \in f(j')$ 」, 且つ, 「 $j'' \in D'' \cap \text{dom}(f)$, 且つ, $x \in f(j'')$ 」, が従う。 $j' = j''$, と仮定して矛盾を導く。 $j' \in D' \cap \text{dom}(f)$, より, $j'' \in D' \cap \text{dom}(f)$, が従う。故に, 「 $j'' \in D' \cap \text{dom}(f)$, 且つ, $j'' \in D'' \cap \text{dom}(f)$ 」, が従う。故に, 「 $j'' \in (D' \cap \text{dom}(f)) \cap (D'' \cap \text{dom}(f))$ 」, が従う。ところが, $(D' \cap \text{dom}(f)) \cap (D'' \cap \text{dom}(f)) \subseteq D' \cap D''$ 。故に, 「 $j'' \in D' \cap D''$ 」, が従う。ところが, $D' \cap D'' = \phi$ 。故に, 「 $j'' \in \phi$ 」, が従う。故に, 「或 y が存在して, $y \in \phi$ 」, が従う。ところが, 「任意の z に対して, 「 $z \in \phi$, には非ず」」。故に, 矛盾が生じる。故に, 「 $j' \neq j''$ 」, が従う。「 $j' \in D' \cap \text{dom}(f)$, 且つ, $D' \cap \text{dom}(f) \subseteq \text{dom}(f)$ 」, より, 「 $j' \in \text{dom}(f)$ 」, が従う。また, 「 $j'' \in D'' \cap \text{dom}(f)$, 且つ, $D'' \cap \text{dom}(f) \subseteq \text{dom}(f)$ 」, より, 「 $j'' \in \text{dom}(f)$ 」, が従う。故に, 「 $j' \in \text{dom}(f)$, 且つ, $j'' \in \text{dom}(f)$ 」, 且つ, 「 $j' \neq j''$ 」, 且つ, 「 $x \in f(j')$, 且つ, $x \in f(j'')$ 」, が従う。故に, 「 $j' \in \text{dom}(f)$, 且つ, $j'' \in \text{dom}(f)$, 且つ, $j' \neq j''$, 且つ, $x \in f(j') \cap f(j'')$ 」, が従う。故に, 「 $j' \in \text{dom}(f)$, 且つ, $j'' \in \text{dom}(f)$, 且つ, $j' \neq j''$, 且つ, 「或 x が存

在して, $x \in f(j') \cap f(j'')$ 」, が従う。故に,
 $\lceil j' \in \text{dom}(f), \text{ 且つ, } j'' \in \text{dom}(f), \text{ 且つ, } j' \neq j'', \text{ 且つ, } \lceil f(j') \cap f(j'') = \phi, \text{ には非ず} \rceil \rceil$, が従う。故に, $\lceil j' \in \text{dom}(f) \text{ なる或 } j' \text{ 及び } j'' \in \text{dom}(f) \text{ なる或 } j'', \text{ が存在して, } \lceil j' \neq j'', \text{ 且つ, } \lceil f(j') \cap f(j'') = \phi, \text{ には非ず} \rceil \rceil$, が従う。ところが, 「 f は $\mathcal{A}$ 上の分割列である」。故に,
 $\lceil j' \in \text{dom}(f) \text{ なる任意の } j' \text{ 及び } j'' \in \text{dom}(f) \text{ なる任意の } j'', \text{ に対して, } \lceil j' \neq j'', \text{ ならば, } f(j') \cap f(j'') = \phi \rceil \rceil$, が従う。故に, 矛盾が生じる。故に, $\langle f; D \rangle \cap \langle f; D' \rangle = \phi$, が従う。
 命題が従う。 [証明終]。

[命題6]。 f を, 任意の, $\mathcal{A}$ 上の列, とする。
 $\lceil \varphi \in \text{Map}(\text{dom}(f), \text{dom}(f)) \text{ なる任意の } \varphi \text{ に対して, 合成写像 } f \circ \varphi \text{ は } \mathcal{A} \text{ 上の列である} \rceil$, が従う。

[証明]。 $\varphi \in \text{Map}(\text{dom}(f), \text{dom}(f))$ なる任意の φ を固定する。 [定義1], より, $f \circ \varphi \in \text{Map}(\text{dom}(f), \mathcal{A})$, が従う。ところが, [命題1], より, $\text{dom}(f) = N[\max \text{dom}(f)]$, が従う。故に, $f \circ \varphi \in \text{Map}(N[\max \text{dom}(f)], \mathcal{A})$, が従う。ところが, [命題1], より, 「 $\max \text{dom}(f) \in \text{dom}(f)$, 且つ, $\text{dom}(f) \subseteq N$ 」, が従う。故に, 「 $\max \text{dom}(f) \in N$, が従う。故に, 「 $\max \text{dom}(f) \in N$, 且つ, $f \circ \varphi \in \text{Map}(N[\max \text{dom}(f)], \mathcal{A})$ 」, が従う。故に, 「 $n \in N$ なる或 n が存在して, $f \in \text{Map}(N[n], \mathcal{A})$ 」, が従う。 [定義1], より, 命題が従う。 [証明終]。

[命題7]。 f を, 任意の, $\mathcal{A}$ 上の列, とする。
 $\lceil \varphi \in \text{Map}(\text{dom}(f), \text{dom}(f)) \text{ なる任意の } \varphi \text{ に対して, } \lceil \lceil f \circ \varphi \text{ は } \mathcal{A} \text{ 上の列である} \rceil, \text{ 且つ, } \lceil D \subseteq \text{dom}(f) \text{ なる任意の } D \text{ 及び } J \subseteq \text{dom}(f) \text{ なる任意の } J, \text{ に対して, } \lceil J = \{j \mid j \in \text{dom}(f), \text{ 且つ, } \lceil k \in D \text{ なる或 } k \text{ が存在して, } j = \varphi(k) \rceil \rceil$, ならば, $\langle f; J \rangle = \langle f \circ \varphi; D \rangle$ 」」, が従う。

[証明]。 [命題6], より, 「 $f \circ \varphi$ は $\mathcal{A}$ 上の列である」, が従う。 $D \subseteq \text{dom}(f)$ なる任意の D 及び $J \subseteq \text{dom}(f)$ なる任意の J , の各各を, 固定する。

式1。 $J = \{j \mid j \in \text{dom}(f), \text{ 且つ, } \lceil k \in D \text{ なる或 } k \text{ が存在して, } j = \varphi(k) \rceil\}$,

と仮定する。故に, $J \subseteq \text{dom}(f)$, が従う。

$x \in \langle f; J \rangle$ なる任意の x を固定する。 [定義3], より, 「 $j' \in J \cap \text{dom}(f)$ なる或 j' が存在して, $x \in f(j')$ 」, が従う。この j' を固定する。
 $\lceil j' \in J \cap \text{dom}(f), \text{ 且つ, } x \in f(j') \rceil$, が従う。一方, $J \subseteq \text{dom}(f)$, より, $J \cap \text{dom}(f) = J$, が従う。故に, 「 $j' \in J$, 且つ, $x \in f(j')$ 」, が従う。故に, $j' \in J$, が従う。故に, 式1, より, 「 $j' \in \text{dom}(f)$, 且つ, 「 $k' \in D$ なる或 k' が存在して, $j' = \varphi(k')$ 」」, が従う。故に, 「 $k' \in D$ なる或 k' が存在して, $j' = \varphi(k')$ 」, が従う。この k' を固定する。「 $k' \in D$, 且つ, $j' = \varphi(k')$ 」, が従う。故に, $j' = \varphi(k')$, が従う。ところが, $x \in f(j')$ 。故に, $x \in f(\varphi(k'))$, が従う。ところが, $f(\varphi(k')) = (f \circ \varphi)(k')$ 。故に, $x \in (f \circ \varphi)(k')$, が従う。故に, 「 $k' \in D$, 且つ, $x \in (f \circ \varphi)(k')$ 」, が従う。一方, $D \subseteq \text{dom}(f)$, より, $D = D \cap \text{dom}(f)$, が従う。故に, 「 $k' \in D \cap \text{dom}(f)$, 且つ, $x \in (f \circ \varphi)(k')$ 」, が従う。故に, 「 $k' \in D \cap \text{dom}(f)$ なる或 k' が存在して, $x \in (f \circ \varphi)(k')$ 」, が従う。故に, [定義3], より, $x \in \langle f \circ \varphi; D \rangle$, が従う。故に, 「 $x \in \langle f; J \rangle$ なる任意の x に対して, $x \in \langle f \circ \varphi; D \rangle$ 」, が従う。

$y \in \langle f \circ \varphi; D \rangle$ なる任意の y を固定する。 [定義3], より, 「 $k'' \in D \cap \text{dom}(f \circ \varphi)$ なる或 k'' が存在して, $y \in (f \circ \varphi)(k'')$ 」, が従う。この k'' を固定する。「 $k'' \in D \cap \text{dom}(f \circ \varphi)$, 且つ, $y \in (f \circ \varphi)(k'')$ 」, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Map}(\text{dom}(f), \text{dom}(f))$, より, $\text{dom}(f \circ \varphi) = \text{dom}(f)$, が従う。故に, 「 $k'' \in D \cap \text{dom}(f)$, 且つ, $y \in (f \circ \varphi)(k'')$ 」, が従う。ところが, $(f \circ \varphi)(k'') = f(\varphi(k''))$ 。故に,

陳述 1. 「 $k'' \in D \cap \text{dom}(f)$, 且つ, $y \in f(\varphi(k''))$ 」,

が従う。 $j'' = \varphi(k'')$, と置く。

式 2. $j'' \in J$,

を示す。陳述 1, より, $k'' \in D \cap \text{dom}(f)$, が従う。故に, $k'' \in \text{dom}(f)$, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Map}(\text{dom}(f), \text{dom}(f))$ 。故に, $\varphi(k'') \in \text{dom}(f)$, が従う。ところが, $j'' = \varphi(k'')$ 。故に, $j'' \in \text{dom}(f)$, が従う。ところが, 陳述 1, より, $k'' \in D \cap \text{dom}(f)$ 。故に, $k'' \in D$ 。ところが, $j'' = \varphi(k'')$ 。故に, 「 $k'' \in D$ なる或 k'' が存在して, $j'' = \varphi(k'')$ 」, が従う。故に, 式 1, より, $j'' \in J$, が従う。式 2, が従う。

陳述 1, より, $y \in f(\varphi(k''))$, が従う。ところが, $j'' = \varphi(k'')$ 。故に, $y \in f(j'')$, が従う。ところが, 式 2, より, $j'' \in J$ 。故に, 「 $j'' \in J$, 且つ, $y \in f(j'')$ 」, が従う。一方, $I \subseteq \text{dom}(f)$, より, $J = J \cap \text{dom}(f)$, が従う。故に, 「 $j'' \in J \cap \text{dom}(f)$, 且つ, $y \in f(j'')$ 」, が従う。故に, 「 $j'' \in J \cap \text{dom}(f)$ なる或 j'' が存在して, $y \in f(j'')$ 」, が従う。故に, [定義 3], より, $y \in \langle f; J \rangle$, が従う。故に, 「 $y \in \langle f \circ \varphi; D \rangle$ なる任意の y に対して, $y \in \langle f; J \rangle$ 」, が従う。

命題が従う。

[証明終]。

[命題 8]。 f を, 任意の, $\mathcal{A}$ 上の分割列, とする。「 $\varphi \in \text{Map}(\text{dom}(f), \text{dom}(f))$ なる任意の φ に対して, 「 φ は $\text{dom}(f)$ から $\text{dom}(f)$ への単射である」, ならば, 「 $f \circ \varphi$ は $\mathcal{A}$ 上の分割列である」」, が従う。

[証明]。 $\varphi \in \text{Map}(\text{dom}(f), \text{dom}(f))$ なる任意の φ を固定する。「 φ は $\text{dom}(f)$ から $\text{dom}(f)$ への単射である」, と仮定する。 $j' \in \text{dom}(f)$ なる任意の j' 及び $j'' \in \text{dom}(f)$ なる任意

の j'' , の各各を, 固定する。 $j' \neq j''$, と仮定する。故に, $\varphi(j') \neq \varphi(j'')$, が従う。ところが, 「 $\varphi(j') \in \text{dom}(f)$, 且つ, $\varphi(j'') \in \text{dom}(f)$ 」。
故に, [定義 2], より, $f(\varphi(j')) \cap f(\varphi(j'')) = \phi$, が従う。ところが, 「 $f(\varphi(j')) = (f \circ \varphi)(j')$, 且つ, $f(\varphi(j'')) = (f \circ \varphi)(j'')$ 」。
故に, $(f \circ \varphi)(j') \cap (f \circ \varphi)(j'') = \phi$, が従う。故に, 「 $j' \in \text{dom}(f)$ なる任意の j' 及び $j'' \in \text{dom}(f)$ なる任意の j'' , に対して, 「 $j' \neq j''$, ならば, $(f \circ \varphi)(j') \cap (f \circ \varphi)(j'') = \phi$ 」, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Map}(\text{dom}(f), \text{dom}(f))$, より, $\text{dom}(f) = \text{dom}(f \circ \varphi)$, が従う。故に, 「 $j' \in \text{dom}(f \circ \varphi)$ なる任意の j' 及び $j'' \in \text{dom}(f \circ \varphi)$ なる任意の j'' , に対して, 「 $j' \neq j''$, ならば, $(f \circ \varphi)(j') \cap (f \circ \varphi)(j'') = \phi$ 」, が従う。一方, [命題 6], より, 「 $f \circ \varphi$ は $\mathcal{A}$ 上の列である」, が従う。故に, [定義 2], より, 命題が従う。[証明終]。

[命題 9]。 $\llcorner$ を, 任意の, $\mathcal{A}$ 上の定性的確率, とし, 且つ, f を, 任意の, $\mathcal{A}$ 上の列, とし, 且つ, g を, 任意の, $\mathcal{A}$ 上の分割列, とする。「 $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ なる任意の D に対して, 「 $j \in D$ なる任意の j に対して, $f(j) \llcorner g(j)$ 」, ならば, $\langle f; D \rangle \llcorner \langle g; D \rangle$ 」, が従う。

[証明]。 $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ なる任意の D を固定する。「 $j \in D$ なる任意の j に対して, $f(j) \llcorner g(j)$ 」, と仮定する。

$M = \{m \mid m \in N, \text{ 且つ, } \langle f; D \cap N[m] \rangle \llcorner \langle g; D \cap N[m] \rangle, \text{ には非ず}\}$,

と置く。 $M \neq \phi$, と仮定して矛盾を導く。「 $M \neq \phi$, 且つ, $M \subseteq N$ 」, が従う。故に, M において最小である, 元, が存在する。この元を $m(*)$ とする。即ち,

$m(*) = \min M$,

と置く。 $m(*) \in M$ 及び M の定義, より,

陳述 1. $\langle m(*) \in N, \text{且つ}, \langle \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle \preceq \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle, \text{には非ず} \rangle$,

が従う。

式 1. $D \cap N[m(*)] \neq \phi$,

を示す。

$D \cap N[m(*)] = \phi$, と仮定して矛盾を導く。[定義 3], より, $\langle \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle = \phi, \text{且つ}, \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle = \phi \rangle$, が従う。ところが, [定義 5.1] における性質 2, より, $\phi \preceq \phi$, が従う。故に, $\langle \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle \preceq \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle$, が従う。一方, 陳述 1, より, $\langle \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle \preceq \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle, \text{には非ず} \rangle$, が従う。故に, 矛盾が生じる。故に, $D \cap N[m(*)] \neq \phi$, が従う。式 1, が従う。

式 2. $1 \preceq m(*)$,

を示す。

式 1 及び [命題 3.12], より, 「或 d が存在して, $\langle d = \min D, \text{且つ}, d \in D \cap N[m(*)] \rangle$ 」, が従う。この d を固定する。 $\langle d = \min D, \text{且つ}, d \in D \cap N[m(*)] \rangle$, が従う。故に, $\min D \in D \cap N[m(*)]$, が従う。故に, 「 $\min D \in D, \text{且つ}, \min D \in N[m(*)]$ 」, が従う。故に, $\min D \in N[m(*)]$, が従う。故に, [定義 3.1], より, 「 $\min D \in N, \text{且つ}, \min D \leq m(*)$ 」, が従う。故に, $\min D \leq m(*)$, が従う。

$\min D = m(*)$, と仮定して矛盾を導く。 $D \cap N[m(*)] = D \cap N[\min D]$, が従う。ところが, 式 1, より, $D \neq \phi$, が従う。故に, [命題 3.13], より, $D \cap N[\min D] = \{\min D\}$, が従う。故に, $D \cap N[m(*)] = \{\min D\}$, が従う。故に, 「 $\langle \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle = \langle f; \{\min D\} \rangle, \text{且つ}, \langle \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle = \langle g; \{\min D\} \rangle$ 」, が従う。一方, 「 $\min D \in D, \text{且つ}, D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ 」, より, $\min D \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$, が従う。故に, 「 $\min D \in \text{dom}(f), \text{且つ}, \min D \in \text{dom}(g)$ 」, が従う。故に, $\min D \in \text{dom}(f)$, が従う。故に, [命題 2], より, $\langle f; \{\min D\} \rangle = f(\min D)$, が従う。ところが, $\langle \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle = \langle f; \{\min D\} \rangle$ 。故に, $\langle \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle = f(\min D)$, が従う。一方, $\min D \in \text{dom}(g)$ 。故に, [命題 2], より, $\langle g; \{\min D\} \rangle = g(\min D)$, が従う。ところが, $\langle \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle = \langle g; \{\min D\} \rangle$ 。故に, $\langle \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle = g(\min D)$, が従う。一方, 「 $j \in D$ なる任意の j に対して, $f(j) \preceq g(j)$ 」。故に, $\min D \in D$, より, $f(\min D) \preceq g(\min D)$, が従う。ところが, 「 $\langle \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle = f(\min D), \text{且つ}, \langle \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle = g(\min D) \rangle$ 」。故に, $\langle \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle \preceq \langle \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle$, が従う。ところが, 陳述 1, より, 「 $\langle \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle \preceq \langle \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle, \text{には非ず} \rangle$ 」, が従う。故に, 矛盾が生じる。

故に, $\min D \neq m(*)$, が従う。ところが, $\min D \leq m(*)$ 。故に, $\min D \preceq m(*)$, が従う。ところが, $\min D \in N$ 。故に, $1 \leq \min D$ 。故に, $1 \preceq m(*)$, が従う。式 2, が従う。

式 3. $m(*) - 1 \in N$,

を示す。

陳述 1, より, $m(*) \in N$, が従う。式 2, より, $1 \preceq m(*)$, が従う。故に, 「或 x が存在して, $\langle x \in N, \text{且つ}, x + 1 = m(*) \rangle$ 」, が従う。この x を固定する。「 $x \in N, \text{且つ}, x + 1 = m(*)$ 」, が従う。故に, 「 $x \in N, \text{且つ}, x = m(*) - 1$ 」, が従う。故に, $m(*) - 1 \in N$, が従う。式 3, が従う。

式 4. $\langle \langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \preceq \langle \langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle$,

う。故に, $D \cup \{m(*)\} = D$, が従う。故に, $(D \cap N[m(*) - 1]) \cup \{m(*)\} = D \cap N[m(*)]$, が従う。式 6, が従う。

式7。 $(D \cap N[m(*) - 1]) \cap \{m(*)\} = \phi,$

を示す。

「 $(D \cap N[m(*) - 1]) \cap \{m(*)\} = \phi$, には非ず」,
と仮定して、矛盾を導く。「或 y が存在して、
 $y \in (D \cap N[m(*) - 1]) \cap \{m(*)\}$ 」, が従う。こ
の y を固定する。 $y \in (D \cap N[m(*) - 1]) \cap \{m$
 $(*)\}$, が従う。故に、「 $y \in D \cap N[m(*) - 1]$,
且つ、 $y \in \{m(*)\}$ 」, が従う。故に、「 $y \in D$,
且つ、 $y \in N[m(*) - 1]$ 」, 且つ、 $y \in \{m(*)\}$ 」,
が従う。故に、「 $y \in D$, 且つ、「 $y \in N[m(*) -$
 $1]$, 且つ、 $y \in \{m(*)\}$ 」」, が従う。故に、「 $y \in$
 $N[m(*) - 1]$, 且つ、 $y \in \{m(*)\}$ 」, が従う。
ところが、「 $y \in \{m(*)\}$, と、 $y = m(*)$, とは、
同値である」。故に、「 $y \in N[m(*) - 1]$, 且つ、
 $y = m(*)$ 」, が従う。故に、「 $m(*) \in N[m(*) -$
 $1]$ 」, が従う。ところが、式 2 及び「命題 3. 7」,
より、「 $m(*) \notin N[m(*) - 1]$ 」, が従う。故に、
矛盾が生じる。故に、「 $(D \cap N[m(*) - 1]) \cap \{m$
 $(*)\} = \phi$ 」, が従う。式 7, が従う。

陳述 2. $\langle f; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cup f(m(*)) = \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle$, 且 $\langle g; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cup g(m(*)) = \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle$.

を示す。

式5及び「命題2」, より, 「 $f(m(*)) = \langle f; \{m(*)\} \rangle$ 」, 且つ, $g(m(*)) = \langle g; \{m(*)\} \rangle$ 」, が従う。故に, 「 $\langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup f(m(*)) = \langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup \langle f; \{m(*)\} \rangle$ 」, 且つ, $\langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup g(m(*)) = \langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup \langle g; \{m(*)\} \rangle$ 」, が従う。ところが, 「命題4」, より, 「 $\langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup \langle f; \{m(*)\} \rangle = \langle f; (D \cap N[m(*) - 1])$

$(D \cap N[m(*) - 1]) \cup \{m(*)\} = (D \cup \{m(*)\}) \cap (N[m(*) - 1] \cup \{m(*)\})$, が従う。ところが, [命題 3.6], より, $N[m(*) - 1] \cup \{m(*)\} = N[m(*)]$, が従う。故に, $(D \cap N[m(*) - 1]) \cup \{m(*)\} = (D \cup \{m(*)\}) \cap N[m(*)]$, が従う。一方, 式 5, より, $\{m(*)\} \subseteq D$, が従

$\cup \{m(*)\}$ }, 且つ, $\langle g; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cup \langle g; \{m(*)\} \rangle = \langle g; (D \cap N[m(*)-1]) \cup \{m(*)\} \rangle$, が従う。故に, 「 $\langle f; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cup f(m(*)) = \langle f; (D \cap N[m(*)-1]) \cup \{m(*)\} \rangle$, 且つ, $\langle g; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cup g(m(*)) = \langle g; (D \cap N[m(*)-1]) \cup \{m(*)\} \rangle$ 」, が従う。ところが, 式6, より, $(D \cap N[m(*)-1]) \cup \{m(*)\} = D \cap N[m(*)]$ 。故に, 「 $\langle f; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cup f(m(*)) = \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle$, 且つ, $\langle g; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cup g(m(*)) = \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle$ 」, が従う。陳述2, が従う。

式8。 $\langle g; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cap g(m(*)) = \phi$,

を示す。式5及び[命題2], より, $g(m(*)) = \langle g; \{m(*)\} \rangle$, が従う。故に, $\langle g; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cap g(m(*)) = \langle g; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cap \langle g; \{m(*)\} \rangle$, が従う。ところが, 式7, より, $(D \cap N[m(*)-1]) \cap \{m(*)\} = \phi$ 。故に, 「 g は分割列である」及び[命題5], より, $\langle g; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cap \langle g; \{m(*)\} \rangle = \phi$, が従う。故に, $\langle g; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cap g(m(*)) = \phi$, が従う。式8, が従う。

式9。 $\langle f; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cup f(m(*)) \preceq \langle g; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cup g(m(*))$,

を示す。

式4, より, $\langle f; D \cap N[m(*)-1] \rangle \preceq \langle g; D \cap N[m(*)-1] \rangle$, が従う。一方, 式5及び「 $j \in D$ なる任意の j に対して, $f(j) \preceq g(j)$ 」, より, $f(m(*)) \preceq g(m(*))$, が従う。式8及び[命題5.3], より, $\langle f; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cup f(m(*)) \preceq \langle g; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cup g(m(*))$, が従う。式9, が従う。

式9及び陳述2, より, $\langle f; D \cap N[m(*)] \rangle \preceq \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle$, が従う。ところが, 陳述

1, より, 「 $\langle f; D \cap N[m(*)] \rangle \preceq \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle$, には非ず」, が従う。故に, 矛盾が生じる。

故に, $M = \phi$, が従う。故に, 「 $m \in N$ なる任意の m に対して, $m \notin M$ 」, が従う。故に, M の定義, より, 「 $m \in N$ なる任意の m に対して, $\langle f; D \cap N[m] \rangle \preceq \langle g; D \cap N[m] \rangle$ 」, が従う。ところが, $\max \text{dom}(f) \in N$ 。故に, $\langle f; D \cap N[\max \text{dom}(f)] \rangle \preceq \langle g; D \cap N[\max \text{dom}(f)] \rangle$, が従う。ところが, [命題1], より, $N[\max \text{dom}(f)] = \text{dom}(f)$, が従う。故に, $\langle f; D \cap \text{dom}(f) \rangle \preceq \langle g; D \cap \text{dom}(f) \rangle$, が従う。ところが, $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ 。故に, $D \subseteq \text{dom}(f)$ 。故に, $D \cap \text{dom}(f) = D$ 。故に, $\langle f; D \rangle \preceq \langle g; D \rangle$, が従う。命題が従う。

[証明終]。

[命題10]。 $\preceq$ を, 任意の, $\mathcal{A}$ 上の定性的確率, とし, 且つ, f を, 任意の, $\mathcal{A}$ 上の列, とし, 且つ, g を, 任意の, $\mathcal{A}$ 上の分割列, とする。「 $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ なる任意の D に対して, 「 $D \neq \phi$, 且つ, 「 $j \in D$ なる任意の j に対して, $f(j) \not\preceq g(j)$ 」」, ならば, $\langle f; D \rangle \not\preceq \langle g; D \rangle$ 」, が従う。

[証明]。 $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ なる任意の D を固定する。「 $D \neq \phi$, 且つ, 「 $j \in D$ なる任意の j に対して, $f(j) \not\preceq g(j)$ 」」, と仮定する。

$M = \{m \mid m \in N, \text{ 且つ, } D \cap N[m] \neq \phi, \text{ 且つ, } \langle g; D \cap N[m] \rangle \preceq \langle f; D \cap N[m] \rangle\}$,

と置く。 $M \neq \phi$, と仮定して矛盾を導く。

M の定義, より, $M \subseteq N$, が従う。故に, $M \neq \phi$, より, M において最小である, 元, が存在する。この元を $m(*)$ と表記する。即ち, $m(*) = \min M$, と置く。 M の定義及び $m(*) \in$

M , より,

陳述 1. 「 $m(*) \in N$, 且つ, $D \cap N[m(*)] \neq \phi$, 且つ, $\langle g; D \cap N[m(*)] \rangle \preceq \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle$,

が従う。一方, $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ 及び [命題 1], より, $D \subseteq N$, が従う。ところが, $D \neq \phi$. 故に, 「 D において最小である, 元, 即ち, $\min D$, が存在して, 且つ, $\min D \in N$ 」, が従う。

式 1. $\min D \leq m(*)$,

を示す。陳述 1, より, $D \cap N[m(*)] \neq \phi$, が従う。故に, [命題 3.12], より, $\min D \in D \cap N[m(*)]$, が従う。故に, 「 $\min D \in D$, 且つ, $\min D \in N[m(*)]$ 」, が従う。故に, $\min D \in N[m(*)]$, が従う。故に, [定義 3.1], より, $\min D \leq m(*)$, が従う。 $\min D = m(*)$, と仮定して矛盾を導く。 $D \cap N[m(*)] = D \cap N[\min D]$, が従う。ところが, [命題 3.13], より, $D \cap N[\min D] = \{\min D\}$, が従う。故に, $D \cap N[m(*)] = \{\min D\}$, が従う。故に, 「 $\langle f; D \cap N[m(*)] \rangle = \langle f; \{\min D\} \rangle$, 且つ, $\langle g; D \cap N[m(*)] \rangle = \langle g; \{\min D\} \rangle$ 」, が従う。一方, 「 $\min D \in D$, 且つ, $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ 」, より, $\min D \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$, が従う。故に, 「 $\min D \in \text{dom}(f)$, 且つ, $\min D \in \text{dom}(g)$ 」, が従う。故に, [命題 2], より, 「 $\langle f; \{\min D\} \rangle = f(\min D)$, 且つ, $\langle g; \{\min D\} \rangle = g(\min D)$ 」, が従う。故に, 「 $\langle f; D \cap N[m(*)] \rangle = f(\min D)$, 且つ, $\langle g; D \cap N[m(*)] \rangle = g(\min D)$ 」, が従う。ところが, 「 $j \in D$ なる任意の j に対して, $f(j) \neq g(j)$ 」. 故に, $\min D \in D$, より, $f(\min D) \neq g(\min D)$, が従う。故に, 「 $\langle f; D \cap N[m(*)] \rangle \neq \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle$ 」, が従う。ところが, 陳述 1, より, 「 $\langle g; D \cap N[m(*)] \rangle \preceq \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle$ 」, が従う。故に, [定義 5.2], より, 矛盾が生じる。故に, $\min D \neq m(*)$,

が従う。ところが, $\min D \leq m(*)$. 故に, $\min D \leq m(*)$, が従う。式 1, が従う。

陳述 2. 「 $m(*) - 1 \in N$, 且つ, $D \cap N[m(*) - 1] \neq \phi$, 且つ, 「 $\langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \neq \langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle$ 」,

を示す。式 1, より, $\min D \leq m(*)$, が従う。ところが, $\min D \in N$. 故に, $1 \leq \min D$, が従う。故に, $1 \leq m(*)$, が従う。一方, 陳述 1, より, $m(*) \in N$, が従う。故に, 「或 x が存在して, 「 $x \in N$, 且つ, $x + 1 = m(*)$ 」」, が従う。この x を固定する。「 $x \in N$, 且つ, $x + 1 = m(*)$ 」, が従う。故に, 「 $x \in N$, 且つ, $x = m(*) - 1$ 」, が従う。故に, $m(*) - 1 \in N$, が従う。

$m(*) - 1 \in N$ 及び式 1, より, $\min D \leq m(*) - 1$, が従う。故に, $\min D \in N$ 及び [定義 3.1], より, $\min D \in N[m(*) - 1]$, が従う。ところが, $\min D \in D$. 故に, 「 $\min D \in D$, 且つ, $\min D \in N[m(*) - 1]$ 」, が従う。故に, $\min D \in D \cap N[m(*) - 1]$, が従う。故に, 「或 x' が存在して, $x' \in D \cap N[m(*) - 1]$ 」, が従う。故に, $D \cap N[m(*) - 1] \neq \phi$, が従う。

$m(*) - 1 \leq m(*)$ 及び $m(*)$ の最小性, より, $m(*) - 1 \notin M$, が従う。ところが, 「 $m(*) - 1 \in N$, 且つ, $D \cap N[m(*) - 1] \neq \phi$ 」. 故に, M の定義, より, 「 $\langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \preceq \langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle$ 」, には非ず, が従う。故に, [定義 5.2], より, 「 $\langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \neq \langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle$ 」, が従う。

陳述 2, が従う。

式 2. $m(*) \in D$,

を示す。「 $m(*) \in D$, には非ず」, と仮定して矛盾を導く。陳述 2, より, $m(*) - 1 \in N$, が従う。故に, 「 $m(*) \in N$, 且つ, $m(*) \neq 1$ 」, が従う。ところが, $m(*) \in D$. 故に, [命題 3.11], より, $D \cap N[m(*) - 1] = D \cap N[m(*)]$, が従

う。ところが、陳述2, より, $\langle f; D \cap N[m(*)-1] \rangle \not\leq \langle g; D \cap N[m(*)-1] \rangle$ 。故に, $\langle f; D \cap N[m(*)] \rangle \not\leq \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle$, が従う。ところが, 陳述1, より, $\langle g; D \cap N[m(*)] \rangle \leq \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle$, が従う。故に, [定義5.2], より, 矛盾が生じる。故に, $m(*) \in D$, が従う。

式3. $\langle f; \{m(*)\} \rangle \leq \langle g; \{m(*)\} \rangle$,

を示す。式2及び $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$, より, $m(*) \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$, が従う。故に, 「 $m(*) \in \text{dom}(f)$, 且つ, $m(*) \in \text{dom}(g)$ 」, が従う。故に, [命題2], より, 「 $\langle f; \{m(*)\} \rangle = f(m(*))$, 且つ, $\langle g; \{m(*)\} \rangle = g(m(*))$ 」, が従う。ところが, 「 $j \in D$ なる任意の j に対して, $f(j) \leq g(j)$ 」, 故に, 式2, より, $f(m(*)) \leq g(m(*))$, が従う。故に, $\langle f; \{m(*)\} \rangle \leq \langle g; \{m(*)\} \rangle$, が従う。式3, が従う。

式4. $\langle g; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cap \langle g; \{m(*)\} \rangle = \phi$,

を示す。「或 y が存在して, $y \in (D \cap N[m(*)-1]) \cap \{m(*)\}$ 」, と仮定して矛盾を導く。この y を固定する。 $y \in (D \cap N[m(*)-1]) \cap \{m(*)\}$, が従う。故に, 「 $y \in D \cap N[m(*)-1]$, 且つ, $y \in \{m(*)\}$ 」, が従う。ところが, 「 $y \in \{m(*)\}$, と, $y = m(*)$, とは, 同値である」。故に, 「 $y \in D \cap N[m(*)-1]$, 且つ, $y = m(*)$ 」, が従う。故に, $m(*) \in D \cap N[m(*)-1]$, が従う。故に, 「 $m(*) \in D$, 且つ, $m(*) \in N[m(*)-1]$ 」, が従う。故に, $m(*) \in N[m(*)-1]$, が従う。ところが, 陳述2, より, $m(*)-1 \in N$ 。故に, 「 $m(*) \in N$, 且つ, $m(*) \neq 1$ 」, 故に, [命題3.7], より, $m(*) \in N[m(*)-1]$, が従う。故に, 矛盾が生じる。故に, 「任意の y' に対して, $y' \notin (D \cap N[m(*)-1]) \cap \{m(*)\}$ 」, が従う。故に, $(D \cap N[m(*)-1]) \cap \{m(*)\} = \phi$, が従う。ところが, 「 g は分割

列である」。故に, [命題5], より, $\langle g; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cap \langle g; \{m(*)\} \rangle = \phi$, が従う。式4, が従う。

式5. $\langle f; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cup \langle f; \{m(*)\} \rangle \leq \langle g; D \cap N[m(*)-1] \rangle \cup \langle g; \{m(*)\} \rangle$,

を示す。陳述2, より, $\langle f; D \cap N[m(*)-1] \rangle \leq \langle g; D \cap N[m(*)-1] \rangle$, が従う。故に, 式3及び式4及び [命題5.10], より, 式5, が従う。

式6. $(D \cap N[m(*)-1]) \cup \{m(*)\} = D \cap N[m(*)]$,

を示す。 $(D \cap N[m(*)-1]) \cup \{m(*)\} = (D \cup \{m(*)\}) \cap (N[m(*)-1] \cup \{m(*)\})$, が従う。ところが, 式2, より, $D \cup \{m(*)\} = D$, が従う。一方, 陳述2, より, $m(*)-1 \in N$, が従う。故に, 「 $m(*) \in N$, 且つ, $m(*) \neq 1$ 」, が従う。故に, [命題3.6], より, $N[m(*)-1] \cup \{m(*)\} = N[m(*)]$, が従う。故に, $(D \cap N[m(*)-1]) \cup \{m(*)\} = D \cap N[m(*)]$, が従う。式6が従う。

式5及び [命題4], より, $\langle f; (D \cap N[m(*)-1]) \cup \{m(*)\} \rangle \leq \langle g; (D \cap N[m(*)-1]) \cup \{m(*)\} \rangle$, が従う。故に, 式6, より, $\langle f; D \cap N[m(*)] \rangle \leq \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle$, が従う。ところが, 陳述1, より, $\langle g; D \cap N[m(*)] \rangle \leq \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle$, が従う。故に, [定義5.2], より, 矛盾が生じる。

故に,

式7. $M = \phi$,

が従う。

式 8. $D \cap N[\max \text{dom}(f)] = D$,

を示す。 $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$, より, $D \subseteq \text{dom}(f)$, が従う。ところが, [命題 1], より, $\text{dom}(f) = N[\max \text{dom}(f)]$, が従う。故に, $D \subseteq N[\max \text{dom}(f)]$, が従う。故に, $D \cap N[\max \text{dom}(f)] = D$, が従う。式 8, が従う。

陳述 3. 「 $\max \text{dom}(f) \in N$, 且つ, $D \cap N[\max \text{dom}(f)] \neq \emptyset$ 」,

を示す。[命題 1], より, $\max \text{dom}(f) \in N$, が従う。一方, $D \neq \emptyset$ 及び式 8, より, $D \cap N[\max \text{dom}(f)] \neq \emptyset$, が従う。陳述 3, が従う。

式 7, より, $\max \text{dom}(f) \in M$, が従う。故に, M の定義及び陳述 3, より, 「 $\langle g; D \cap N[\max \text{dom}(f)] \rangle \preceq \langle f; D \cap N[\max \text{dom}(f)] \rangle$, には非ず」, が従う。故に, [定義 5.2], より, $\langle f; D \cap N[\max \text{dom}(f)] \rangle \not\preceq \langle g; D \cap N[\max \text{dom}(f)] \rangle$, が従う。故に, 式 8, より, $\langle f; D \rangle \not\preceq \langle g; D \rangle$, が従う。

命題が従う。

[証明終]。

[命題 11]. $\preceq$ を, 任意の, α 上の定性的確率, とし, 且つ, f を, 任意の, α 上の列, とし, 且つ, g を, 任意の, α 上の分割列, とする。「 $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ なる任意の D に対して, 「 $\forall j \in D$ なる任意の j に対して, $f(j) \preceq g(j)$ 」, 且つ, 「 $k \in D$ なる或 k が存在して, $f(k) \not\preceq g(k)$ 」, ならば, $\langle f; D \rangle \not\preceq \langle g; D \rangle$ 」, が従う。

[証明]. $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ なる任意の D を固定する。「 $\forall j \in D$ なる任意の j に対して, $f(j) \preceq g(j)$ 」, 且つ, 「 $k \in D$ なる或 k が存在して, $f(k) \not\preceq g(k)$ 」, と仮定する。

$L = \{l \mid l \in D, \text{ 且つ, } f(l) \not\preceq g(l)\}$,

と置く。

陳述 1. 「 $L \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$, 且つ, $L \neq \emptyset$, 且つ, 「 $l \in L$ なる任意の l に対して, $f(l) \not\preceq g(l)$ 」,

を示す。 $l' \in L$ なる任意の l' を固定する。 L の定義, より, 「 $l' \in D$, 且つ, $f(l') \not\preceq g(l')$ 」, が従う。故に, $l' \in D$, が従う。ところが, $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$. 故に, $l' \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$, が従う。故に, 「 $l' \in L$ なる任意の l' に対して, $l' \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ 」, が従う。故に, $L \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$, が従う。

「 $k \in D$ なる或 k が存在して, $f(k) \not\preceq g(k)$ 」, なる陳述における k を固定する。「 $k \in D$, 且つ, $f(k) \not\preceq g(k)$ 」, が従う。故に, L の定義, より, $k \in L$, が従う。故に, 「或 k' が存在して, $k' \in L$ 」, が従う。故に, $L \neq \emptyset$, が従う。

$l \in L$ なる任意の l を固定する。 L の定義, より, 「 $l \in D$, 且つ, $f(l) \not\preceq g(l)$ 」, が従う。故に, $f(l) \not\preceq g(l)$, が従う。故に, 「 $l \in L$ なる任意の l に対して, $f(l) \not\preceq g(l)$ 」, が従う。陳述 1, が従う。

陳述 1 及び [命題 10], より,

式 1. $\langle f; L \rangle \not\preceq \langle g; L \rangle$,

が従う。

陳述 2. 「 $j' \in D \setminus L$ なる任意の j' に対して, $f(j') \preceq g(j')$ 」,

を示す。 $j' \in D \setminus L$ なる任意の j' を固定する。「 $j' \in D$, 且つ, $j' \notin L$ 」, が従う。故に, $j' \in D$, が従う。ところが, 「 $j \in D$ なる任意の j に対して, $f(j) \preceq g(j)$ 」. 故に, $f(j') \preceq g(j')$, が従う。故に, 「 $j' \in D \setminus L$ なる任意の j' に対して, $f(j') \preceq g(j')$ 」, が従う。陳述 2, が従う。

陳述2及び[命題9], より,

$$\text{式2. } \langle f; D \setminus L \rangle \preceq \langle g; D \setminus L \rangle,$$

が従う。式1及び式2及び[命題5.9], より,

$$\text{式3. } \langle f; L \rangle \cup \langle f; D \setminus L \rangle \preceq \langle g; L \rangle \cup \langle g; D \setminus L \rangle,$$

が従う。

$$\text{式4. } L \cup (D \setminus L) = D,$$

を示す。 $x \in L \cup (D \setminus L)$ なる任意の x を固定する。「 $x \in L$, 或いは, $x \in D \setminus L$ 」, が従う。 $x \in L$, の場合を考える。 L の定義, より, 「 $x \in D$, 且つ, $f(x) \preceq g(x)$ 」, が従う。故に, $x \in D$, が従う。 $x \in D \setminus L$, の場合を考える。「 $x \in D$, 且つ, $x \notin L$ 」, が従う。故に, $x \in D$, が従う。故に, 「 $x \in L \cup (D \setminus L)$ なる任意の x に対して, $x \in D$ 」, が従う。

$y \in D$ なる任意の y を固定する。「 $y \in L$, 或いは, $y \notin L$ 」, が従う。 $y \in L$, の場合を考える。「 $y \in L$, 或いは, $y \in D \setminus L$ 」, が従う。故に, $y \in L \cup (D \setminus L)$, が従う。 $y \notin L$, の場合を考える。「 $y \in D$, 且つ, $y \notin L$ 」, が従う。故に, $y \in D \setminus L$, が従う。故に, 「 $y \in L$, 或いは, $y \in D \setminus L$ 」, が従う。故に, $y \in L \cup (D \setminus L)$, が従う。故に, 「 $y \in D$ なる任意の y に対して, $y \in L \cup (D \setminus L)$ 」, が従う。

式4, が従う。

[命題4], より, 「 $\langle f; L \rangle \cup \langle f; D \setminus L \rangle = \langle f; L \cup (D \setminus L) \rangle$, 且つ, $\langle g; L \rangle \cup \langle g; D \setminus L \rangle = \langle g; L \cup (D \setminus L) \rangle$ 」, が従う。故に, 式3, より, $\langle f; L \cup (D \setminus L) \rangle \preceq \langle g; L \cup (D \setminus L) \rangle$, が従う。故に, 式4, より, $\langle f; D \rangle \preceq \langle g; D \rangle$, が従う。

命題が従う。

[証明終]。

[命題12]。 $\preceq$ を, 任意の, α 上の定性的確率, とし, 且つ, f 及び g , の各各を, 任意の, α 上の分割列, とする。「 $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ なる任意の D に対して, 「 $\langle f; D \rangle \preceq \langle g; D \rangle$, 且つ, 「 $j \in D$ なる任意の j 及び $k \in D$ なる任意の k , に対して, 「 $j \leq k$, ならば, 「 $f(j) \preceq f(k)$, 且つ, $g(k) \preceq g(j)$ 」」」」」, ならば, 「 $n \in N$ なる任意の n に対して, $\langle f; D \cap N[n] \rangle \preceq \langle g; D \cap N[n] \rangle$ 」」」, が従う。

[証明]。 $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ なる任意の D を固定する。「 $\langle f; D \rangle \preceq \langle g; D \rangle$, 且つ, 「 $j \in D$ なる任意の j 及び $k \in D$ なる任意の k , に対して, 「 $j \leq k$, ならば, 「 $f(j) \preceq f(k)$, 且つ, $g(k) \preceq g(j)$ 」」」」」, と仮定する。

$$M = \{m \mid m \in N, \text{ 且つ, } \langle g; D \cap N[m] \rangle \preceq \langle f; D \cap N[m] \rangle\},$$

と置く。 $M \neq \phi$, と仮定して矛盾を導く。

M の定義, より, $M \subseteq N$, が従う。ところが, $M \neq \phi$. 故に, M において最小である, 元, が存在する。この元を $m(*)$ と表記する。即ち, $m(*) = \min M$, と置く。 M の定義及び $m(*) \in M$, より,

$$\text{陳述1. } \langle m(*) \in N, \text{ 且つ, } \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle \preceq \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle,$$

が従う。

$$\text{式1. } D \cap N[m(*)] \neq \phi,$$

を示す。 $D \cap N[m(*)] = \phi$, と仮定して矛盾を導く。陳述1, より, $\langle g; D \cap N[m(*)] \rangle \preceq \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle$, が従う。故に, $\langle g; \phi \rangle \preceq$

$\langle f; \phi \rangle$, が従う。ところが, [定義 3], より, $\langle g; \phi \rangle = \phi$, 且つ, $\langle f; \phi \rangle = \phi$, が従う。故に, $\phi \neq \phi$, が従う。故に, [定義 5.2], より, $\langle \phi \neq \phi$, には非ず], が従う。ところが, [定義 5.1] における性質 2, より, $\phi \neq \phi$, が従う。故に, 矛盾が生じる。故に, $D \cap N[m(*)] \neq \phi$, が従う。式 1, が従う。

$D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$, より, $D \subseteq N$, が従う。ところが, 式 1, より, $D \neq \phi$, が従う。故に, D において最小である, 元, $\min D$, が存在する。

式 2. $\min D \leq m(*)$,

を示す。式 1 及び [命題 3.12], より, $\min D \in D \cap N[m(*)]$, が従う。故に, 「 $\min D \in D$, 且つ, $\min D \in N[m(*)]$ 」, が従う。故に, $\min D \in N[m(*)]$, が従う。故に, [定義 3.1], より, $\min D \leq m(*)$, が従う。

$\min D = m(*)$, と仮定して矛盾を導く。ところが, 陳述 1, より, $\langle g; D \cap N[m(*)] \rangle \neq \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle$, が従う。故に, $\langle g; D \cap N[\min D] \rangle \neq \langle f; D \cap N[\min D] \rangle$, が従う。ところが, [命題 3.13], より, $D \cap N[\min D] = \{\min D\}$, が従う。故に, $\langle g; \{\min D\} \rangle \neq \langle f; \{\min D\} \rangle$, が従う。一方, 「 $\min D \in D$, 且つ, $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ 」, より, $\min D \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$, が従う。故に, 「 $\min D \in \text{dom}(f)$, 且つ, $\min D \in \text{dom}(g)$ 」, が従う。故に, [命題 2], より, 「 $\langle g; \{\min D\} \rangle = g(\min D)$, 且つ, $\langle f; \{\min D\} \rangle = f(\min D)$ 」, が従う。故に, $g(\min D) \neq f(\min D)$, が従う。 $j' \in D$ なる任意の j' を固定する。 $\min D \leq j'$, が従う。ところが, 「 $j \in D$ なる任意の j 及び $k \in D$ なる任意の k , に対して, 「 $j \leq k$, ならば, 「 $f(j) \leq f(k)$, 且つ, $g(k) \leq g(j)$ 」」」。故に, 「 $f(\min D) \leq f(j')$, 且つ, $g(j') \leq g(\min D)$ 」, が従う。故に, $f(\min D) \leq f(j')$, が従う。ところが, $g(\min D) \neq f(\min D)$ 。故に, [命題

5.6], より, $g(\min D) \neq f(j')$, が従う。一方, $g(j') \leq g(\min D)$ 。故に, [命題 5.5], より, $g(j') \neq f(j')$, が従う。故に, 「 $j' \in D$ なる任意の j' に対して, $g(j') \neq f(j')$ 」, が従う。ところが, 「 $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$, 且つ, $D \neq \phi$ 」。故に, [命題 10], より, $\langle g; D \rangle \neq \langle f; D \rangle$, が従う。故に, [定義 5.2], より, 「 $\langle f; D \rangle \neq \langle g; D \rangle$, には非ず」, が従う。ところが, $\langle f; D \rangle \sim \langle g; D \rangle$ 。故に, [定義 5.3], より, 「 $\langle f; D \rangle \leq \langle g; D \rangle$, 且つ, $\langle g; D \rangle \leq \langle f; D \rangle$ 」, が従う。故に, $\langle f; D \rangle \leq \langle g; D \rangle$, が従う。故に, 矛盾が生じる。

故に, $\min D \neq m(*)$ 。ところが, $\min D \leq m(*)$ 。故に, $\min D \leq m(*)$, が従う。式 2, が従う。

陳述 2. 「 $m(*) - 1 \in N$, 且つ, $\langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \neq \langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle$ 」,

を示す。「 $\min D \in D$, 且つ, $D \subseteq N$ 」, より, $\min D \in N$, が従う。故に, $1 \leq \min D$, が従う。ところが, 式 2, より, $\min D \leq m(*)$ 。故に, $1 \leq m(*)$, が従う。ところが, 陳述 1, より, $m(*) \in N$, が従う。故に, 「或 x が存在して, 「 $x \in N$, 且つ, $x + 1 = m(*)$ 」」, が従う。この x を固定する。「 $x \in N$, 且つ, $x + 1 = m(*)$ 」, が従う。故に, 「 $x \in N$, 且つ, $x = m(*) - 1$ 」, が従う。故に, $m(*) - 1 \in N$, が従う。ところが, $m(*) - 1 \leq m(*)$ 。故に, $m(*) - 1 \in N$ 及び $m(*)$ の最小性及び M の定義, より, 「 $\langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \neq \langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle$, には非ず」, が従う。故に, [定義 5.2], より, 「「 $\langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \leq \langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle$, には非ず」, には非ず」, が従う。故に, $\langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \leq \langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle$, が従う。陳述 2, が従う。

陳述 2, より, $m(*) - 1 \in N$, が従う。故に, $m(*) = (m(*) - 1) + 1$, より, $m(*) \neq 1$, が従う。

式3。 $m(*) \in D$,

を示す。 $m(*) \notin D$, と仮定して矛盾を導く。陳述1, より, $m(*) \in N$ 。ところが, $m(*) \neq 1$ 。故に, [命題3.11], より, $D \cap N[m(*) - 1] = D \cap N[m(*)]$, が従う。ところが, 陳述2, より, $\langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \leq \langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle$ 。故に, $\langle f; D \cap N[m(*)] \rangle \leq \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle$, が従う。ところが, 陳述1, より, $\langle g; D \cap N[m(*)] \rangle \not\leq \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle$, が従う。故に, [定義5.2], より, 矛盾が生じる。故に, $m(*) \in D$, が従う。式3, が従う。

陳述3。「 $\langle f; \{m(*)\} \rangle = f(m(*))$ 」, 且つ, $\langle g; \{m(*)\} \rangle = g(m(*))$ 」,

を示す。式3及び $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$, より, $m(*) \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$, が従う。故に, 「 $m(*) \in \text{dom}(f)$ 」, 且つ, 「 $m(*) \in \text{dom}(g)$ 」, が従う。故に, [命題2], より, 「 $\langle f; \{m(*)\} \rangle = f(m(*))$ 」, 且つ, 「 $\langle g; \{m(*)\} \rangle = g(m(*))$ 」, が従う。陳述3, が従う。

式4。 $\langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cap g(m(*)) = \phi$,

を示す。 $(D \cap N[m(*) - 1]) \cap \{m(*)\} = (D \cap \{m(*)\}) \cap (N[m(*) - 1] \cap \{m(*)\}) \subseteq N[m(*) - 1] \cap \{m(*)\}$, より, $(D \cap N[m(*) - 1]) \cap \{m(*)\} \subseteq N[m(*) - 1] \cap \{m(*)\}$, が従う。ところが, 「 $m(*) \in N$ 」, 且つ, 「 $m(*) \neq 1$ 」。故に, [命題3.7], より, $m(*) \notin N[m(*) - 1]$, が従う。故に, $N[m(*) - 1] \cap \{m(*)\} = \phi$, が従う。故に, $(D \cap N[m(*) - 1]) \cap \{m(*)\} \subseteq \phi$, が従う。故に, $(D \cap N[m(*) - 1]) \cap \{m(*)\} = \phi$, が従う。ところが, 「 g は α 上の分割列である」。故に, [命題5], より, $\langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cap \langle g; \{m(*)\} \rangle = \phi$, が従う。ところが, 陳述3, より, $\langle g; \{m(*)\} \rangle = g(m(*))$, が従う。故に, $\langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cap g(m(*))$

$= \phi$, が従う。式4, が従う。

式5。 $(D \cap N[m(*) - 1]) \cup \{m(*)\} = D \cap N[m(*)]$,

を示す。 $(D \cap N[m(*) - 1]) \cup \{m(*)\} = (D \cup \{m(*)\}) \cap (N[m(*) - 1] \cup \{m(*)\})$ 。ところが, 式3, より, $D \cup \{m(*)\} = D$, が従う。一方, 「 $m(*) \in N$ 」, 且つ, 「 $m(*) \neq 1$ 」及び[命題3.6], より, $N[m(*) - 1] \cup \{m(*)\} = N[m(*)]$, が従う。故に, $(D \cup \{m(*)\}) \cap (N[m(*) - 1] \cup \{m(*)\}) = D \cap N[m(*)]$, が従う。故に, $(D \cap N[m(*) - 1]) \cup \{m(*)\} = D \cap N[m(*)]$, が従う。式5, が従う。

陳述4。「 $\langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup f(m(*)) = \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle$ 」, 且つ, 「 $\langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup g(m(*)) = \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle$ 」,

を示す。陳述3, より, 「 $\langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup f(m(*)) = \langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup \langle f; \{m(*)\} \rangle$ 」, 且つ, 「 $\langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup g(m(*)) = \langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup \langle g; \{m(*)\} \rangle$ 」, が従う。ところが, [命題4], より, 「 $\langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup \langle f; \{m(*)\} \rangle = \langle f; (D \cap N[m(*) - 1]) \cup \{m(*)\} \rangle$ 」, 且つ, 「 $\langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup \langle g; \{m(*)\} \rangle = \langle g; (D \cap N[m(*) - 1]) \cup \{m(*)\} \rangle$ 」, が従う。故に, 「 $\langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup f(m(*)) = \langle f; (D \cap N[m(*) - 1]) \cup \{m(*)\} \rangle$ 」, 且つ, 「 $\langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup g(m(*)) = \langle g; (D \cap N[m(*) - 1]) \cup \{m(*)\} \rangle$ 」, が従う。故に, 式5, より, 「 $\langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup f(m(*)) = \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle$ 」, 且つ, 「 $\langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup g(m(*)) = \langle g; D \cap N[m(*)] \rangle$ 」, が従う。陳述4, が従う。

式6。 $g(m(*)) \not\leq f(m(*))$,

を示す。陳述2, より, $\langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \leq \langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle$, が従う。一方, 陳述

1, より, $\langle g; D \cap N[m(*)] \rangle \not\leq \langle f; D \cap N[m(*)] \rangle$. 故に, 陳述 4, より, $\langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup g(m(*)) \not\leq \langle f; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cup f(m(*))$, が従う。ところが, 式 4, より, $\langle g; D \cap N[m(*) - 1] \rangle \cap g(m(*)) = \phi$. 故に, [命題 5.11], より, $g(m(*)) \not\leq f(m(*))$, が従う。式 6, が従う。

$$H = \{l \mid l \in D, \text{ 且つ, } m(*) \not\leq l\},$$

と置く。

陳述 5. 「 $D = (D \cap N[m(*)]) \cup H$, 且つ, $(D \cap N[m(*)]) \cap H = \phi$,

を示す。 $j'' \in D$ なる任意の j'' を固定する。 $D \subseteq N$, より, $j'' \in N$, が従う。故に, 「 $j'' \leq m(*)$, 或いは, $m(*) \not\leq j''$ 」, が従う。 $j'' \leq m(*)$, なる場合を考える。「 $j'' \in N$, 且つ, $j'' \leq m(*)$ 」, が従う。故に, [定義 3.1], より, $j'' \in N[m(*)]$, が従う。故に, $j'' \in D \cap N[m(*)]$, が従う。 $m(*) \not\leq j''$, なる場合を考える。「 $j'' \in D$, 且つ, $m(*) \not\leq j''$ 」, が従う。 H の定義, より, $j'' \in H$, が従う。故に, $j'' \in (D \cap N[m(*)]) \cup H$, が従う。故に, 「 $j'' \in D$ なる任意の j'' に対して, $j'' \in (D \cap N[m(*)]) \cup H$ 」, が従う。 $j''' \in (D \cap N[m(*)]) \cup H$ なる任意の j''' を固定する。「 $j''' \in D \cap N[m(*)]$, 或いは, $j''' \in H$ 」, が従う。 $j''' \in D \cap N[m(*)]$, の場合を考える。「 $j''' \in D$, 且つ, $j''' \in N[m(*)]$ 」, が従う。故に, $j''' \in D$, が従う。 $j''' \in H$, なる場合を考える。 H の定義, より, 「 $j''' \in D$, 且つ, $m(*) \not\leq j'''$ 」, が従う。故に, $j''' \in D$, が従う。故に, 「 $j''' \in (D \cap N[m(*)]) \cup H$ なる任意の j''' に対して, $j''' \in D$ 」, が従う。故に, $D = (D \cap N[m(*)]) \cup H$, が従う。

$(D \cap N[m(*)]) \cap H \neq \phi$, と仮定して矛盾を導く。「或 k' が存在して, $k' \in (D \cap N[m(*)]) \cap H$, が従う。この k' を固定する。 $k' \in (D \cap N[m(*)]) \cap H$, が従う。故に, 「 $k' \in D \cap N[m(*)]$, 且つ, $k' \in H$ 」, が従う。 $k' \in D \cap N[m(*)]$, より, $k' \in N[m(*)]$, が従う。故に, [定義 3.1], より, $k' \leq m(*)$, が従う。 $k' \in H$ 及び H の定義, より, 「 $k' \in D$, 且つ, $m(*) \not\leq k'$ 」, が従う。故に, $m(*) \not\leq k'$, が従う。故に, 矛盾が生じる。故に, $(D \cap N[m(*)]) \cap H = \phi$, が従う。

陳述 5, が従う。

$$\text{式 7. } H \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g),$$

を示す。 $k'' \in H$ なる任意の k'' を固定する。 H の定義, より, 「 $k'' \in D$, 且つ, $m(*) \not\leq k''$ 」, が従う。故に, $k'' \in D$, が従う。ところが, $D \subseteq \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$. 故に, $k'' \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$, が従う。故に, 「 $k'' \in D$ なる任意の k'' に対して, $k'' \in \text{dom}(f) \cap \text{dom}(g)$ 」, が従う。式 7, が従う。

陳述 6. 「 $l \in H$ なる任意の l に対して, $g(l) \not\leq f(l)$,

を示す。 $l \in H$ なる任意の l を固定する。 H の定義, より, 「 $l \in D$, 且つ, $m(*) \not\leq l$ 」, が従う。ところが, 「 $m(*) \not\leq l$, ならば, $m(*) \leq l$ 」. 故に, 「 $l \in D$, 且つ, $m(*) \leq l$ 」, が従う。故に, 式 3 及び 「 $j \in D$ なる任意の j 及び $k \in D$ なる任意の k , に対して, 「 $j \leq k$, ならば, 「 $f(j) \not\leq f(k)$, 且つ, $g(k) \not\leq g(j)$ 」」, より, 「 $f(m(*)) \not\leq f(l)$, 且つ, $g(l) \not\leq g(m(*))$ 」, が従う。故に, $f(m(*)) \not\leq f(l)$, が従う。故に, 式 6 及び [命題 5.6], より, $g(m(*)) \not\leq f(l)$, が従う。一方, $g(l) \not\leq g(m(*))$. 故に, [命題 5.5], より, $g(l) \not\leq f(l)$, が従う。故に, [命題 5.4], より, $g(l) \not\leq f(l)$, が従う。故に, 「 $l \in H$ なる任意の l に対して, $g(l) \not\leq f(l)$ 」, が従う。陳述 6, が従う。

式 7 及び陳述 6 及び [命題 9], より,

陳述 1. 「 $J' \subseteq \text{dom}(f)$, 且つ, $J'' \subseteq \text{dom}(f)$ 」,

が従う。ところが, $\varphi \in \text{Inj}(\text{dom}(f), \text{dom}(f))$ 。
故に, [命題 4.9], より,

陳述 2. 「 $\#(D') = \#(J')$, 且つ, $\#(D'') = \#(J'')$ 」,

が従う。ところが, $\#(D') \leq \#(D'')$ 。故に,

式 1. $\#(J') \leq \#(J'')$,

が従う。ところが, 「 f は $\mathcal{A}$ 上の殆ど一様な分割列である」。故に, 陳述 1 及び式 1 及び [定義 1], より,

式 2. $\langle f; J' \rangle \leq \langle f; J'' \rangle$,

が従う。一方, [命題 6.7], より,

陳述 3. 「 $\langle f; J' \rangle = \langle f \circ \varphi; D' \rangle$, 且つ, $\langle f; J'' \rangle = \langle f \circ \varphi; D'' \rangle$ 」,

が従う。故に, 式 2 及び陳述 3, より,

$\langle f \circ \varphi; D' \rangle \leq \langle f \circ \varphi; D'' \rangle$,

が従う。故に, 「 $D' \subseteq \text{dom}(f)$ なる任意の D' 及び $D'' \subseteq \text{dom}(f)$ なる任意の D'' , に対して, 「 $\#(D') \leq \#(D'')$, ならば, $\langle f \circ \varphi; D' \rangle \leq \langle f \circ \varphi; D'' \rangle$ 」, が従う。ところが, $\varphi \in \text{Map}(\text{dom}(f), \text{dom}(f))$, より, $\text{dom}(f) = \text{dom}(f \circ \varphi)$, が従う。故に, 「 $D' \subseteq \text{dom}(f \circ \varphi)$ なる任意の D' 及び $D'' \subseteq \text{dom}(f \circ \varphi)$ なる任意の D'' , に対して, 「 $\#(D') \leq \#(D'')$, ならば, $\langle f \circ \varphi; D' \rangle \leq \langle f \circ \varphi; D'' \rangle$ 」, が従う。ところが, 「 $f \circ \varphi$ は $\mathcal{A}$ 上の分割列である」。故に, [定義 1], より, 「 $f \circ \varphi$ は $\mathcal{A}$ 上の殆ど一様な分割列である」, が従う。

命題が従う。

[証明終]。

[命題 2]。 $\leq$ を, 任意の, $\mathcal{A}$ 上の定性的確率, とし, 且つ, f を任意の集合とする。「 f は $\mathcal{A}$ 上の分割列であり, 且つ, 「 $r \in N$ なる任意の r 及び $D' \subseteq \text{dom}(f)$ なる任意の D' 及び $D'' \subseteq \text{dom}(f)$ なる任意の D'' , に対して, 「 $r = \#(D')$, 且つ, $r+1 = \#(D'')$ 」, ならば, $\langle f; D' \rangle \leq \langle f; D'' \rangle$ 」, なる事と, 「 f は $\mathcal{A}$ 上の殆ど一様な分割列である」, なる事とは, 同値である。

[証明]。前者を仮定して後者を導く。 $D' \subseteq \text{dom}(f)$ なる任意の D' を固定する。 $M = \{m \mid m \in N, \text{ 且つ, } D'' \subseteq \text{dom}(f) \text{ なる或 } D'' \text{ が存在して, } m = \#(D''), \text{ 且つ, } \#(D') \leq m\}$, と置く。「 $M = \emptyset$, には非ず」, と仮定して矛盾を導く。 M において最小である, 元, を $m(*)$ とする。即ち, $m(*) = \min M$, と置く。 $m(*) \in M$ より, 「 $m(*) \in N$, 且つ, $D'' \subseteq \text{dom}(f)$ なる或 D'' が存在して, 「 $m(*) = \#(D'')$, 且つ, $\#(D') \leq m(*)$, 且つ, $\langle f; D'' \rangle \leq \langle f; D' \rangle$ 」, が従う。この D'' を固定する。「 $\#(D') \leq \#(D'')$, 且つ, $0 \leq \#(D'')$ 」, より, $0 \leq \#(D'')$, が従う。ところが, $\#(\emptyset) = 0$ 。故に, $D'' \ni \emptyset$ 。故に, $j(*) \in D''$ なる或 $j(*)$ が存在する。この $j(*)$ を固定する。 $D''' = D'' \setminus \{j(*)\}$, と置く。

「 $\#(D'') \leq \#(D') + 1$, には非ず」 と仮定して矛盾を導く。

式 1. $m(*) - 1 \in N$,

を示す。「 $\#(D') + 1 \leq \#(D'')$, 且つ, $m(*) = \#(D'')$ 」, より, $\#(D') + 1 \leq m(*)$, が従う。故に, $\#(D') \leq m(*) - 1$ 。ところが, $0 \leq \#(D')$ 。故に, $0 \leq m(*) - 1$ 。故に, $m(*) - 1 \in N$ 。

式 2. $D''' \subseteq \text{dom}(f)$,

を示す。 D''' の定義により $D''' \subseteq D''$ 。ところが, $D'' \subseteq \text{dom}(f)$ 。故に, $D''' \subseteq \text{dom}(f)$ 。

式 3. $m(*) - 1 = \#(D''')$,

を示す。 D''' の定義により, $[D'' = D''' \cup \{j(*)\}]$,
且つ, $j(*) \in D'''$, が従う。故に, $\#(D'') =$
 $\#(D''') + 1$ 。ところが, $m(*) = \#(D'')$ 。故に,
 $m(*) = \#(D''') + 1$ 。故に, $m(*) - 1 = \#(D''')$ 。

式 4. $\#(D') \leq \#(D''')$,

を示す。 D''' の定義により, $[D'' = D''' \cup \{j(*)\}]$,
且つ, $j(*) \in D'''$, が従う。故に, $\#(D'') =$
 $\#(D''') + 1$ 。ところが, $\#(D') + 1 \leq \#(D'')$ 。故
に, $\#(D') + 1 \leq \#(D''') + 1$ 。故に, $\#(D') \leq$
 $\#(D''')$ 。

式 5. $\langle f; D''' \rangle \leq \langle f; D' \rangle$,

を示す。 D''' の定義により, $D''' \subseteq D'$, が従う。
故に, [命題 6.3], より, $\langle f; D''' \rangle \subseteq \langle f; D' \rangle$,
が従う。故に, [命題 5.1], より, $\langle f; D''' \rangle \leq$
 $\langle f; D' \rangle$, が従う。ところが, $\langle f; D' \rangle \leq \langle f;$
 $D' \rangle$ 。故に, [命題 5.5], より, $\langle f; D''' \rangle \leq \langle f;$
 $D' \rangle$, が従う。

式 1, 式 2, 式 3, 式 4, 及び式 5, より,
 $m(*) - 1 \in M$, が従う。ところが, $m(*) = \min$
 M 。故に, $m(*) \leq m(*) - 1$ 。ところが, $m(*)$
 $- 1 \leq m(*)$ 。故に, 矛盾が生じる。

故に, $\#(D') \leq \#(D') + 1$ 。ところが, $\#(D') \leq$
 $\#(D')$ 。故に, $\#(D') + 1 = \#(D')$ 。 $r = \#(D')$,
と置く。 $[D' \subseteq \text{dom}(f)]$, 且つ, $D'' \subseteq \text{dom}(f)$,
且つ, $r = \#(D')$, 且つ, $r + 1 = \#(D'')$, が従
う。故に, $\langle f; D' \rangle \leq \langle f; D'' \rangle$, が従う。とこ
ろが, $\langle f; D'' \rangle \leq \langle f; D' \rangle$ 。故に, 矛盾が生じ
る。

故に, $M = \emptyset$, が従う。 $D^* \subseteq \text{dom}(f)$ なる任意
の D^* を固定する。 $\#(D') \leq \#(D^*)$, と仮定す

る。 $\#(D^*) \in \emptyset$, 且つ, $M = \emptyset$, より, $\#(D^*)$
 $\in M$, が従う。また, $0 \leq \#(D')$, より, $0 \leq$
 $\#(D^*)$, が従う。故に, $\#(D^*) \in M$, 且つ,
 $\#(D^*) \in N$, が従う。故に, M の定義により,
 $[D \subseteq \text{dom}(f)]$ なる任意の D に対して, $[\#$
 $(D^*) = \#(D)]$, 且つ, $\#(D') \leq \#(D)$, ならば,
 $\langle f; D' \rangle \leq \langle f; D \rangle$, が従う。故に, $D^* \subseteq \text{dom}$
 (f) , より, $[\#(D^*) = \#(D^*)]$, 且つ, $\#(D') \leq$
 $\#(D^*)$, ならば, $\langle f; D' \rangle \leq \langle f; D^* \rangle$, が従
う。ところが, $\#(D^*) = \#(D^*)$, 且つ, $\#(D') \leq$
 $\#(D^*)$ 。故に, $\langle f; D' \rangle \leq \langle f; D^* \rangle$, が従う。
故に, $[D' \subseteq \text{dom}(f)]$ なる任意の D' 及び D^*
 $\subseteq \text{dom}(f)$ なる任意の D^* , に対して, $[\#(D') \leq$
 $\#(D^*)]$, ならば, $\langle f; D' \rangle \leq \langle f; D^* \rangle$, が
従う。ところが, f は $\mathcal{A}$ 上の分割列である。故
に, f は $\mathcal{A}$ 上の殆ど一様な分割列である, が従
う。

後者を仮定して前者を導く。 $r \in N$ なる任意の
 r 及び $D' \subseteq \text{dom}(f)$ なる任意の D' 及び D''
 $\subseteq \text{dom}(f)$ なる任意の D'' , の各各を, 固定す
る。 $[r = \#(D')]$, 且つ, $r + 1 = \#(D'')$, と仮定
する。 $r \leq r + 1$, より, $\#(D') \leq \#(D'')$, が従
う。故に, $\langle f; D' \rangle \leq \langle f; D'' \rangle$, が従う。故に,
 $[r \in N]$ なる任意の r 及び $D' \subseteq \text{dom}(f)$ なる
任意の D' 及び $D'' \subseteq \text{dom}(f)$ なる任意の D'' ,
に対して, $[\#(D') = r]$, 且つ, $r + 1 = \#(D'')$,
ならば, $\langle f; D' \rangle \leq \langle f; D'' \rangle$, が従う。とこ
ろが, f は $\mathcal{A}$ 上の分割列である。故に, 前者が
従う。

命題が従う。

[証明終]。

参考文献

- [1] デーデキント, ユリウス ヴィルヘルム リヒ
ャルト (Dedekind, Julius Wilhelm Richard),
著, 河野伊三郎, 訳, (1961), 『数について——連
続性と数の本質——』, 岩波文庫 (33-924-1), 岩
波書店, 東京。
- [2] 日本数学会編集, (1985), 『岩波数学辞典, 第
3版』, 岩波書店, 東京。

この辞典における, 858 頁の右側及び 862 頁の文献達及び 1588 頁の, 人名達の中央の列, の各各において, 1 回づつ, 「Janes」, なるローマ文字達による表現が在るが, これは, 多分, 「Jaynes」, とすべき者ではないのか, と, 筆者は判断するのである, が, しかし, 誰が執筆したのかが不明であるので, 直接問い質す事ができないのである。

- [3] Savage, Leonard Jimmie, (1972), *The Foundations of Statistics, Second Revised Edition*, Dover Publications, New York, 但し, この著者に対する第 1 版は, 1954 年に, John Wiley & Sons, New York, より出版されている。

[4] 園信太郎, (1987年3月), 「Savage の行為の或抽象化, Dedekind の数, 個人的確率, 及び, von Neumann-Morgenstern 効用, について」, 経済学研究 (北海道大学), 第36巻第4号, 1(457)-16(472)。

[5] 園信太郎, (1988年3月), 「サヴェジ氏の哲学に対する簡潔なる序説」, 経済学研究 (北海道大学), 第37巻第4号, 48(488)-61(501)。

[6] 園信太郎, (1988年6月), 「サヴェジ氏の定量的確率, に対する, 従属選択の原理を伴う一個の簡潔なる接近」, 経済学研究 (北海道大学), 第38巻第1号, 36(36)-84(84)。

(1988年, 初夏, 於北大, 了)