HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	サヴェジ書における殆ど一様な分割(3)精密比較の公準
Author(s)	園, 信太郎
Citation	經濟學研究, 39(1), 121-143
Issue Date	1989-06
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/31822
Type	departmental bulletin paper
File Information	39(1)_P121-143.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

経済学研究 39-1
北海道大学 1989.6

＜研究ノート＞

サヴェジ書における殆ど一様な分割 (3)
精密比較の公準

園　信太郎

1. 目的

サヴェジ氏 (Savage, Leonard Jimmie, 1917年11月20日から1971年11月1日まで) はサヴェジ書［2］第3章第3節, 34頁の上から第3番目の段落から36頁の下から第2番目の段落までにおいて, 殆ど一様な分割の概念を定義し, この概念に関する補題である定理1を示し, 且つ, この補題を含む殆ど一様な分割に関する一連の基本的性質を利用する事に基づいて, 定量的確率の存在に関する命題である定理2を導いている。また同書第3章第3節, 36頁の最下段から38頁の下から第2番目の段落までにおいて, 定性的確率が前精密, 但し原語は fine, である事, 殆ど同等である (almost equivalent) と表現される事象間の二項関係, 及び定性的確率が緊密 (tight) である事を定義し, 定理3の結論7として, 前精密性の仮定の下で, 「殆ど同等である」と言う二項関係と「殆ど一様な分割による, 定量的確率の存在に関する命題」定理2とを利用して, 定量的確率の存在に関する命題を示し, この命題の系として前精密且つ緊密な定性的確率に対して強一致する定量的確率に関する命題を提示し, さらにまたこの系との連関において定理4に言及して, 最後に公準 P6′, 但しこの論述での呼称は「精密比較の公準」, を提出している。

この論述の目的は, サヴェジ書の定理3に関する略式証明を精確に構成する作業を行う事に基づいて, その作業の副産物として, 「殆ど一様な分割の概念を経由しない, 従ってサヴェジ書の定理2を必要としない, サヴェジ書の定理3結論7を導く精確且つ簡潔な演繹の過程」を提示する事である。従ってサヴェジ氏による殆ど一様な分割に関する議論はサヴェジ氏の主命題である定理3結論7を導く事を目的とする限りにおいては必要ではないのである。

内容を述べる。第2節においてはサヴェジ書37頁定理3の証明を精確に構成する。［定義1］から［定義6］まで, ［命題1］から［命題7］まで, 及び［命題5］に対する［補題5.1］及び［補題5.2］を導入する。［定義1］から［定義6］までは各各前精密性, 緊密性, 強い確定性関係, 弱い同等関係, 殆ど同等な分割, 及び精密比較の公準に関するものである。［命題1］から［命題7］までは各各サヴェジ書の定理3における結論1から結論7までに対応する。［補題5.1］及び［補題5.2］はサヴェジ書定理3結論5の証明を簡潔にする為に導入したものであり, 且つ［補題5.2］はサヴェジ書38頁結論5の証明中において言及されている。［命題7］の証明中で利用するサヴェジ書34頁から35頁にかけての定理2についてはサヴェジ氏の論述, 及び園［6］及び［7］, 特に［7］, を参照する事

を勧める。

第3節においては「精密比較の公準による，定量的確率の存在に関する命題」を，殆ど一様な分割の概念を経由せずに，精確且つ簡潔に導く。[命題1′]から[命題4′]までを導入する。[命題4′]が「精密比較の公準による，定量的確率の存在に関する命題」である。この節の議論は園[5]第7節と本質的に同じものである。

最後の第4節では[定義 A 1]及び[定義 A 2]，及び[命題 A 1]から[命題 A 6]までを導入する。[命題4′]，[命題 A 4]，及び[命題 A 5]に基づいて，殆ど一様な分割の概念を経由せずに，精確且つ簡潔に「前精密性による，定量的確率の存在に関する命題」[命題7]を導く事を実行する。[命題 A 4]は「前精密な定性的確率から誘導される強い確定性関係によって定まる弱い確定性関係は精密比較の公準を満たす定性的確率である」と言う事を主張するものである。この様な演繹の経路の存在は園[5]第1節で指摘しておいたのであるが，ここではそれを精確に構成する事にする。

以下では有限集合の概念や数の概念を自明な事柄の様に利用するが，統計学の基礎付けを真剣に考察する場合においては，これらの概念に対する分析は不可避である。この事についてはデーデキント著，河野訳[1]，及び園[3]特に第4節及び園[5]の参考文献[1]，これはこの論述における[1]と同一である，に対する簡註を参照する事を勧める。またサヴェジ氏の哲学に対する簡註として園[4]がある。

[注意1]から[注意7]までを提示する。

[注意1] 以下では任意の可測空間 $\langle S, \boldsymbol{A}\rangle$ を固定し且つこの可測空間の上の定性的確率を考える事にする。完全加法族 $\boldsymbol{A}$ の元を事象と呼ぶ。$\boldsymbol{A}$ 上の二項関係 $\leq\cdot$ が比較可能性，推移性，「$A\cap C=\phi$ 且つ $B\cap C=\phi$ を満たす任意の事象 A, B, 及び C に対して，$A\leq\cdot B$ と $A\cup C\leq\cdot B\cup C$ とは同値である」，及び「任意の事象 A に対して $\phi\leq\cdot A$」且つ「$S\leq\cdot\phi$ には非ず」を満たす場合且つその場合に限ってこの二項関係 $\leq\cdot$ は定性的確率であると定義する。また「$B\leq\cdot A$ には非ず」を $A<\cdot B$，そして「$A\leq\cdot B$ 且つ $B\leq\cdot A$」を $A=\cdot B$，と表記する。$A<\cdot B$ を「A は確定性において B よりも小である」，或いは「B は確定性において A よりも大である」，$A=\cdot B$ を「A と B とは同等である」，$\phi<\cdot A$ を「A は確定性が正である」，と訓む事にする。$=\cdot$ は事象間の同値関係である。

[注意2] 自然数系列を $\boldsymbol{N}$ と表記する。但し $0\notin\boldsymbol{N}$。また $\omega=\boldsymbol{N}\cup\{0\}$。任意の非負整数 n に対して n 以下の自然数の全体を $\boldsymbol{N}[n]$ と表わす。写像 f の定義域を $\mathrm{dom}(f)$ と表記する。「f は分割である」と言う事は「f は $\boldsymbol{A}$ の値を取る写像であり，或自然数 n が存在して $\mathrm{dom}(f)=\boldsymbol{N}[n]$，且つ $\mathrm{dom}(f)$ の異なる任意の元 i 及び j に対して $f(i)\cap f(j)=\phi$」と言う事であると定義する。ここの n は一意的に定まる。n を分割 f の長さと呼ぶ。$B=\cup\{f(i)\mid i\in\mathrm{dom}(f)\}$ の場合には f を事象 B に対する分割と呼ぶ。また分割 f の値である各事象を項と呼ぶ。事象 A 及び B が互いに排反である場合順序対 $\langle A, B\rangle$ を分割的二重対と呼び，$C=A\cup B$ の場合は，C に対する分割的二重対と呼ぶ。また A, B 及び C が互いに排反である場合順序対 $\langle A, B, C\rangle$ を分割的三重対と呼び，$D=A\cup B\cup C$ の場合には D に対する分割的三重対と呼ぶ。

[注意3] f を S に対する任意の分割とし且つ A を任意の事象とする。「$\mathrm{dom}(f)$ の任意の元 j に対して $g(j)=f(j)\cap A$」によって写像 g を定義する。g は A に対する分割となる。この g を「f によって誘導される A に対する分割」，或いは「f が誘導する A に対する分割」，と呼ぶ。

[注意4] $\leq\cdot$ を任意の定性的確率とする。分

割の任意の項が互いに同等であるのならばその分割を同等な分割と呼ぶ。また「f は S に対する殆ど一様な分割である」と言う事は「f は S に対する分割であり且つ f の定義域の任意の部分集合 I 及び J に対して，$\#(I)<\#(J)$ ならば $\cup\{f(i)\mid i\in I\}\leqq\cdot\cup\{f(j)\mid j\in J\}$」と言う事であると定義する。

［注意5］可測空間 $\langle S, A\rangle$ 上の有限加法的測度で S に対するその測度の値が 1 であるものを定量的確率と呼ぶ。P を定量的確率とする。定性的確率 $\leqq\cdot$ に対して「任意の事象 A 及び B に対して，$A\leqq\cdot B$ ならば $P(A)\leqq P(B)$」の場合には「P は $\leqq\cdot$ に対して概一致する」と言う。この場合さらに逆が成立するのならば「P は $\leqq\cdot$ に対して強一致する」と言う。

［注意6］P を定量的確率とする。「P は定量的に精密である」と言う事は「任意の事象 B と 0 以上 1 以下の任意の実数 ρ とに対して或事象 C が存在して，$C\subseteq B$ 且つ $P(C)=\rho\cdot P(B)$」と言う事であると定義する。

［注意7］第2節［命題5］の［証明］において従属選択の原理を，また第3節［命題 4′］の［証明］において初期条件付きの従属選択の原理を，明白な様式で利用する。これらについては園［5］の第2節を参照する事を勧める。

2. 前精密性と定量的確率

［定義1］$\leqq\cdot$ を任意の定性的確率とする。$\leqq\cdot$ が前精密であるとは確定性が正である任意の事象 A に対して S に対する或分割 f が存在して f の任意の項は確定性において A よりも小であると言う事であると定義する。

［定義2］$\leqq\cdot$ を任意の定性的確率とする。$\leqq\cdot$ が緊密であるとは $A<\cdot B$ を満たす任意の事象 A 及び B に対して $A\cap C=\phi$，$\phi<\cdot C$，且つ $A\cup C<\cdot B$ を満たす或事象 C が存在すると言う事であると定義する。

［命題1］$\leqq\cdot$ を前精密な任意の定性的確率とする。B 及び C を確定性が正である任意の事象とする。C の部分集合である或事象 D が存在して D の確定性は正であり且つ B よりも小である。

［証明］仮定より S に対する或分割が存在してその分割の任意の項は B よりも小であるが従う。この分割を f とする。f が C に対して誘導する分割を g とする。C は確定性が正であるので g の定義域に属する或 j が存在して $g(j)$ の確定性は正であるが従う。この j を固定する。$g(j)\leqq\cdot f(j)$ が従う。故に $g(j)<\cdot B$。$D=g(j)$ と置く事により結論が従う。

［証明終］

［定義3］A 及び B を任意の事象とする。A は強い確定性において B よりも小であるとは或事象 C が存在して $A\cap C=\phi$，$\phi<\cdot C$，且つ $A\cup C<\cdot B$ と言う事であると定義する。この二項関係を強い確定性関係と呼び且つ $A\langle\langle\cdot B$ と表記する。

［定義4］A 及び B を任意の事象とする。A と B とが殆ど同等であるとは「$\lceil A\langle\langle\cdot B$ には非ず」且つ「$B\langle\langle\cdot A$ には非ず」」と言う事である。この二項関係を弱い同等関係と呼び且つ $A\sim\cdot B$ と表記する。即ち A と B との間で強い確定性関係 $\langle\langle\cdot$ が満たされない場合且つその場合に限って $A\sim\cdot B$ と定義する。$A\sim\cdot B$ をサヴェジ氏に従って「A と B とは殆ど同等である」と訓む事にする。

［注意］サヴェジ書では関係 $\langle\langle\cdot$ の導入は為されていない。記号は異なるが関係 $\sim\cdot$ のみが37頁冒頭の行から第3行目までの一個の文によって定義されている。

［命題2］$\leq_{\cdot}$ を前精密な任意の定性的確率とする。B, C, G, 及び H の各各を任意の事象とする。$B\sim_{\cdot}G$, $C\sim_{\cdot}H$, $B\cap C=\phi$, 且つ $G\cap H=\phi$ と仮定する。$B\cup C\sim_{\cdot}G\cup H$ が従う。

［証明］背理法による。$B\cup C\ll_{\cdot}G\cup H$ と仮定して矛盾を導く。$G\cup H\ll_{\cdot}B\cup C$ の場合も同様である。

或事象 E が存在して $(B\cup C)\cap E=\phi$, $\phi<_{\cdot}E$, 且つ $B\cup C\cup E<_{\cdot}G\cup H$。この E に対して $E=E'\cup E''$ 且つ $E'\cap E''=\phi$ を満たす確定性が正である或事象 E' 及び E'' が存在する。この E' 及び E'' を固定する。$B\sim_{\cdot}G$ より $G\leq_{\cdot}B\cup E'$。一方 $(B\cup E')\cup(C\cup E'')<_{\cdot}G\cup H$。故に $C\cup E''<_{\cdot}H$ が従う。ところが $C\sim_{\cdot}H$ より $H\leq_{\cdot}C\cup E''$。故に矛盾が生じる。［証明終］

［命題3］$\leq_{\cdot}$ を前精密な任意の定性的確率とする。B, C, G, 及び H の各各を任意の事象とする。$B\sim_{\cdot}C$, $G\sim_{\cdot}H$, $B\cup C\sim_{\cdot}G\cup H$, $B\cap C=\phi$, 且つ $G\cap H=\phi$ と仮定する。$B\sim_{\cdot}G$ が従う。

［注意］この命題は第3節［命題 2′］と第4節［命題 A 4］とにより直ちに従う。しかし敢えてサヴェジ氏の証明を提示する。

［証明］背理法による。$B\ll_{\cdot}G$ と仮定して矛盾を導く。$G\ll_{\cdot}B$ の場合も同様である。$B\cup E<_{\cdot}G$, $B\cap E=\phi$, 且つ $\phi<_{\cdot}E$ を満たす事象 E が存在する。この E を固定する。

$B\cup C<_{\cdot}S$ 且つ $G\setminus C=_{\cdot}\phi$ の場合を考える。$G\leq_{\cdot}C$ が従う。ところが $B\cup E<_{\cdot}G$。故に $B\cup E<_{\cdot}C$。一方 $B\sim_{\cdot}C$ より $C\leq_{\cdot}B\cup E$。故に矛盾が生じる。

$B\cup C<_{\cdot}S$ 且つ $\phi<_{\cdot}G\setminus C$ の場合を考える。確定性において正且つ E 以下であり，しかも $B\cup C$ と互いに排反である，或事象 E' が存在する。この E' を固定する。$G\cup H\leq_{\cdot}B\cup C\cup E'$ が従う。ところが $B\cup E'<_{\cdot}G$ 且つ $G\cap H=\phi$。故に $H<_{\cdot}C$。

$E'=E''\cup E'''$ 且つ $E'''\leq_{\cdot}E''$ を満たす互いに排反且つ確定性が正である事象 E'' 及び E''' を固定する。また $E''''\subseteqq G\setminus C$ 且つ $E''''\leq_{\cdot}E'''$ を満たす確定性が正である事象 E'''' を固定する。$H\cup E''''<_{\cdot}C\cup E''''$ が従う。ところが G と H とは互いに排反であり且つ $E''''\subseteqq G$。故に $G\leq_{\cdot}H\cup E''''$。ところが $B\cup E''\cup E'''<_{\cdot}G$。故に $B\cup E''\cup E'''<_{\cdot}C\cup E''''$。故に $B\cup E''<_{\cdot}C$。一方 $C\leq_{\cdot}B\cup E''$。故に矛盾が生じる。

$B\cup C=_{\cdot}S$ の場合を考える。$B\cup C\sim_{\cdot}G\cup H$ 及び 前精密性より $G\cup H=_{\cdot}S$ が従う。

$\phi<_{\cdot}C\cap G$ の場合を考える。$E''\subseteqq C\cap G$, $\phi<_{\cdot}E''$, 且つ $E''\leq_{\cdot}E$ を満たす事象 E'' を固定する。$B\cup E''<_{\cdot}G$ が従う。ところが $B\cup E''=_{\cdot}(B\cap G)\cup(B\cap H)\cup E''$ 且つ $G=_{\cdot}(G\cap B)\cup(G\cap C)$。故に $(B\cap H)\cup E''<_{\cdot}G\cap C$。ところが $B\sim_{\cdot}C$ より $C\leq_{\cdot}B\cup E''$。故に $C<_{\cdot}G$。ところが $C=_{\cdot}(C\cap G)\cup(C\cap H)$。故に $C\cap H<_{\cdot}G\cap B$。故に $(C\cap H)\cup(B\cap H)\cup E''<_{\cdot}(G\cap B)\cup(G\cap C)$。故に $H\cup E''<_{\cdot}G$。一方 $H\cap E''=\phi$, $\phi<_{\cdot}E''$, 且つ $G\sim_{\cdot}H$ より $G\leq_{\cdot}H\cup E''$。故に矛盾が生じる。

$C\cap G=_{\cdot}\phi$ の場合を考える。$B\cup C=_{\cdot}S$ より $G\leq_{\cdot}B$ が従う。ところが $B\cup E<_{\cdot}G$ より $B<_{\cdot}G$。故に矛盾が生じる。　［証明終］

［定義5］殆ど同等な分割とはその分割の項が互いに殆ど同等である事を言う。即ち f は殆ど同等な分割であると言う事は f は分割であり且つ f の任意の項 A 及び B に対して $A\sim_{\cdot}B$ と言う事であると定義する。また分割的二重対 $\langle A, B\rangle$ が $A\sim_{\cdot}B$ を満たすのならばこれを殆ど同等な分割的二重対と呼ぶ。

［命題4］$\leq_{\cdot}$ を前精密な任意の定性的確率とする。S に対する殆ど同等な分割は S に対す

る殆ど一様な分割である。

［証明］f を S に対する任意の殆ど同等な分割とする。f の長さを n とする。r を 0 か或いは n よりも小である任意の自然数とする。f に関する任意の r 個の項の合併は殆ど同等である事が［命題 2］及び数学的帰納法により従う。

f の任意の r 個及び $r+1$ 個の項の合併を各々 A 及び B とし，$A\leq\cdot B$ を示す。背理法による。$B<\cdot A$ と仮定して矛盾を導く。合併 B を構成する f の $r+1$ 個の項の内任意の r 個を固定してこの r 個の合併を C とし且つ残りの 1 個を D とする。$C\cup D<\cdot A$ 且つ $C\cap D=\phi$ が従う。ところが $C\sim\cdot A$。故に $D=\cdot\phi$。一方前精密性より「ϕ と殆ど同等な任意の事象は ϕ と同等である」。故に，f の任意の項は D と殆ど同等であるので，f の任意の項は ϕ と同等である。故に f の項の全体の合併は ϕ と同等となる。ところが f の項の全体の合併は S に等しい。故に $S=\cdot\phi$ が従う。一方 $\phi<\cdot S$。故に矛盾が生じる。　　［証明終］

［命題 5］［Savage, L. J. の単純分割補題］$\leq\cdot$ を前精密な任意の定性的確率とする。任意の事象は二つの，但し共に空集合である場合を含めて，殆ど同等な事象へと分割出来る。即ち任意の事象 B に対して或事象 C 及び D が存在して $B=C\cup D$，$C\cap D=\phi$，且つ $C\sim\cdot D$。

［注意］次の［証明］においてはその後に従う［補題 5.1］及び［補題 5.2］を利用する。

［証明］B を任意の事象とする。$T=\{\langle B', B'', B'''\rangle\mid\langle B', B'', B'''\rangle$ は事象から成る分割的三重対であり且つ $B'\leq\cdot B''\cup B'''$ 且つ $B'''\leq\cdot B'\cup B''\}$ と置く。また「$B'\subseteqq C'$, $B'''\subseteqq C'''$, 且つ $C''\leq\cdot B''\setminus C''$ と言う場合且つその場合に限って $R(\langle B', B'', B'''\rangle, \langle C', C'', C'''\rangle)$」によって T 上の二項関係 R を定義する。

$\langle\phi, B, \phi\rangle$ は T の元である。故に $T\neq\phi$ が従う。$\langle C, G, D\rangle$ を T の任意の元とする。［補題 5.1］より G に対する或分割 f が存在して f の任意の項 A に対して $A\leq\cdot G\setminus A$ が従う。この f を固定する。$D\cup\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)$ 且つ $m<j\}\leq\cdot C\cup\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)$ 且つ $j\leq m\}$ を満たす 0 或いは f の長さ以下の自然数 m の内で最小の数を $m(*)$ と表記する。f は G に対する分割であり且つ $D\leq\cdot C\cup G$。故にこの $m(*)$ は確定する。

$C'=C\cup\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)$ 且つ $j<m(*)\}$,
$G'=$「$m(*)\neq0$ ならば $f(m(*))$」且つ「$m(*)=0$ ならば ϕ」，且つ $D'=D\cup\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)$ 且つ $m(*)<j\}$,

と置く。$\langle C', G', D'\rangle$ は事象から成る分割的三重対である。また $m(*)$ の定義より $D'\leq\cdot C'\cup G'$ が従う。

$m(*)\neq0$ の場合を考える。$m(*)$ の最小性より

$C\cup\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)$ 且つ $j\leq m(*)-1\}<\cdot D\cup\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)$ 且つ $m(*)-1<j\}$

が従う。故に $C'<\cdot D'\cup G'$ が従う。

$m(*)=0$ の場合を考える。$C'=C$，$G'=\phi$，且つ $D'=D\cup G$ が従う。ところが $C\leq\cdot D\cup G$。一方 $m(*)$ の定義より $D\cup G\leq\cdot C$。故に $C=\cdot D\cup G$ が従う。故に $C'=\cdot D'$ が従う。

故に $\langle C', G', D'\rangle\in T$ が従う。ところが $C\subseteq C'$ 且つ $D\subseteqq D'$。また G' の定義より $G'\leq\cdot G\setminus G'$ が従う。故に $R(\langle C, G, D\rangle, \langle C', G', D'\rangle)$。故に次の陳述 (*) が従う。

陳述 (*)。$T\neq\phi$ 且つ T の任意の元 $\langle C, G, D\rangle$ に対して T の或元 $\langle C', G', D'\rangle$ が存在して $R(\langle C, G, D\rangle, \langle C', G', D'\rangle)$。

故に従属選択の原理により N から T への或写像 F が存在して N の任意の元 n に対して $R(F(n), F(n+1))$。この F を固定する。任

意の自然数 n に対して $\langle C(n),\ G(n),\ D(n)\rangle = F(n)$ と置く。また

$$C(*)=\cup\{C(n)\mid n\in N\},$$
$$D(*)=\cup\{D(n)\mid n\in N\},\ \text{且つ}$$
$$G(*)=\cap\{G(n)\mid n\in N\},$$

と置く。$\langle C(*),\ G(*),\ D(*)\rangle$ は事象から成る B に対する分割的三重対である。

$C(*)\sim\cdot D(*)$ を示す。背理法による。$C(*)\ll\cdot D(*)$ と仮定して矛盾を導く。$D(*)\ll\cdot C(*)$ と仮定する場合も同様である。

$C(*)\cup E<\cdot D(*)$, $C(*)\cap E=\phi$, 且つ $\phi<\cdot E$ を満たす事象 E が存在する。また $E=E'\cup E''$, $E'\cap E''=\phi$, $E''\leq\cdot E'$, 且つ $\phi<\cdot E''$ を満たす事象 E' 及び E'' が存在する。この E' 及び E'' を固定する。

[補題 5.2] より或自然数 $n(*)$ が存在して $G(n(*))<\cdot E''$。この $n(*)$ を固定する。$D(*)\setminus D(n(*))\subseteq G(n(*))$ が従う。故に $D(*)=D(n(*))\cup(D(*)\setminus D(n(*)))$ より $D(*)\leq\cdot G(n(*))\cup D(n(*))$ が従う。故に $C(*)\cup E'\cup E''<\cdot D(n(*))\cup G(n(*))$ が従う。ところが $G(n(*))\leq\cdot E''$。故に $C(*)\cup E'<\cdot D(n(*))$。一方 $C(n(*))\subseteq C(*)$ 且つ $G(n(*))\leq\cdot E'$ より $C(n(*))\cup G(n(*))\leq\cdot C(*)\cup E'$。故に $C(n(*))\cup G(n(*))<\cdot D(n(*))$ が従う。ところが $D(n(*))\leq\cdot C(n(*))\cup G(n(*))$。故に矛盾が生じる。

故に $C(*)\sim\cdot D(*)$ が従う。一方 [補題 5.2] より $G(*)=\cdot\phi$ が従う。故に $\langle C(*),\ D(*)\cup G(*)\rangle$ は B に対する分割的二重対であり且つ $C(*)$ と $D(*)\cup G(*)$ とは殆ど同等である。

[証明終]

[補題 5.1] $\leq\cdot$ を前精密な任意の定性的確率とする。A を任意の事象とする。A に対する或分割 f が存在して $j\in\mathrm{dom}(f)$ を満たす任意の j に対して $f(j)\leq\cdot A\setminus f(j)$。

[証明] A を任意の事象とする。$A=\cdot\phi$ の場合には, A のみを項とする分割を定める事により結論が従う。

$\phi<\cdot A$ の場合を考える。前精密性より S に対する或分割 g が存在して g の任意の項は確定性において A よも小である。この g を固定する。$\phi<\cdot A$ より g の或項 B が存在して $\phi<\cdot A\cap B$。この B を固定する。$C=A\cap B$ と置く。$C\subseteq A$ 且つ $\phi<\cdot C<\cdot A$ が従う。また $\phi<\cdot A\setminus C<\cdot A$ が従う。「$C\leq\cdot A\setminus C$ ならば $E=C$」且つ「$A\setminus C<\cdot C$ ならば $E=A\setminus C$」によって E を定める。$\phi<\cdot E$ 且つ $E\leq\cdot A\setminus E$ が従う。

前精密性より S に対する或分割 h が存在して h の任意の項は確定性において E よりも小である。この h を固定する。h が誘導する A に対する分割を f とする。$j\in\mathrm{dom}(f)$ を満たす任意の j に対して $f(j)<\cdot A\setminus f(j)$ が従う。これを示す。$j\in\mathrm{dom}(f)$ を満たす任意の j を固定する。$h(j)<\cdot E$ より $f(j)<\cdot E$ が従う。ところが $E\leq\cdot A\setminus E$。故に $f(j)<\cdot A\setminus E$。一方 $f(j)<\cdot E$ より $A\setminus E<\cdot A\setminus f(j)$ が従う。故に $f(j)<\cdot A\setminus f(j)$ が従う。この f により結論が従う。

[証明終]

[補題 5.2] $\leq\cdot$ を前精密な任意の定性的確率とする。$\langle A(n);\ n\in N\rangle$ を事象から成る任意の列とし且つ任意の自然数 n に対して $A(n+1)\subseteq A(n)$ 且つ $A(n+1)\leq\cdot A(n)\setminus A(n+1)$ とする。$\phi<\cdot E$ を満たす任意の事象 E に対して或自然数 m が存在して $A(m)<\cdot E$ が従う。またこの結論より $\cap\{A(m)\mid m\in N\}=\cdot\phi$ が従う。

[証明] サヴェジ氏式でない普通の流儀で示す [サヴェジ氏式の証明はこの節の末尾で提示する]。背理法により結論の前半を示す。確定性が正である或事象 E が存在して任意の自然数 n に対して $E\leq\cdot A(n)$ と仮定して矛盾を導く。この E を固定する。前精密性より S に

対する或分割 f が存在して f の任意の項に対してその項は確定性において E よりも小である。この f を固定する。f の長さを m とする。次の陳述 (*) を数学的帰納法によって示す。

陳述 (*)。1以上且つ m 以下である任意の自然数 j に対して $\cup\{f(k)\mid k\in N$ 且つ $k\leqq j\}<\cdot A(m-j+1)$.

$j=1$ の場合を示す。$f(1)<\cdot E$ 且つ $E\leqq\cdot A(m)$。故に $f(1)<\cdot A(m)$。これより $j=1$ の場合が従う。

$j=i$ 且つ $i<m$ の場合を仮定して $j=i+1$ の場合を示す。$f(i+1)<\cdot E$ 且つ $E\leqq\cdot A(m-i+1)$。故に $f(i+1)<\cdot A(m-i+1)$。ところが $A(m-i+1)\leqq\cdot A(m-i)\setminus A(m-i+1)$。故に $f(i+1)<\cdot A(m-i)\setminus A(m-i+1)$ が従う。ところが $\cup\{f(k)\mid k\in N$ 且つ $k\leqq i\}<\cdot A(m-i+1)$。故に $(\cup\{f(k)\mid k\in N$ 且つ $k\leqq i\})\cup f(i+1)<\cdot A(m-i+1)\cup(A(m-i)\setminus A(m-i+1))$。故に $\cup\{f(k)\mid k\in N$ 且つ $k\leqq i+1\}<\cdot A(m-i)$ が従う。

故に陳述 (*) が従う。$j=m$ の場合より $\cup\{f(k)\mid k\leqq m\}<\cdot A(1)$ が従う。ところが $S=\cup\{f(k)\mid k\leqq m\}$。故に $S<\cdot A(1)$。一方 $A(1)\leqq\cdot S$。故に矛盾が生じる。

次に結論の後半を示す。$A(*)=\cap\{A(m)\mid m\in N\}$ と置く。背理法による。$\phi<\cdot A(*)$ と仮定して矛盾を導く。前精密性より $\phi<\cdot E$ を満たす或事象 E が存在して $E<\cdot A(*)$。この E を固定する。結論の前半より或自然数 m が存在して $A(m)<\cdot E$。この m を固定する。故に $A(m)<\cdot A(*)$ が従う。ところが $A(*)\subseteqq A(m)$。故に $A(*)\leqq\cdot A(m)$。故に矛盾が生じる。　[証明終]

[命題6] 任意の事象 A 及び任意の非負整数 n に対して A に対する長さ 2^n の殆ど同等な或分割 f が存在する。

[証明] A を任意の事象とする。非負整数 n に関する数学的帰納法により示す。$n=0$ の場合には A のみを項とする分割を定める事により結論が従う。$n=m$ の場合を仮定して $n=m+1$ の場合を示す。

A に対する長さ 2^m の殆ど同等な或分割 g が存在する。この g を固定する。

[命題5] より g の各項に対して殆ど同等な分割的二重対が存在する。1以上且つ 2^m 以下の任意の自然数 j に対して $g(j)$ に対するこの分割的二重対を一個対応させる写像を G とし且つ $\langle A(j,\ 1),\ A(j,\ 2)\rangle=G(j)$ と置く。即ち以下の様に G を定める。1以上且つ 2^n 以下の任意の自然数 j に対して $M(j)=\{\langle A',\ A''\rangle\mid A'$ 及び A'' は事象であり，$g(j)=A'\cup A'',\ A'\cap A''=\phi$，且つ $A'\sim\cdot A''\}$ と置くと [命題5] よりこの j に対して $M(j)\neq\phi$ が従う。ところが1以上且つ 2^m 以下の自然数の全体 $N[2^m]$ は有限集合であるので $\Pi\{M(j)\mid j\in N[2^m]\}\neq\phi$ が従う。故に $G\in\Pi\{M(j)\mid j\in N[2^m]\}$ を満たす或 G が存在する。この G を固定する。$j\in N[2^m]$ を満たす任意の j に対して $\langle A(j,\ 1),\ A(j,\ 2)\rangle=G(j)$ と置く。

1以上且つ 2^{m+1} 以下の任意の自然数 k に対して k が奇数ならば $f(k)=A((k+1)/2,\ 1)$ 且つ k が偶数ならば $f(k)=A(k/2,\ 2)$ によって写像 f を定義する。f は A に対する長さ 2^{m+1} の分割である。さらに f は殆ど同等な分割となる。これを示す。

$i\in N[2^{m+1}]$ を満たす任意の i に対して i が奇数ならば $I(i)=(i+1)/2$ 且つ $R(i)=1$，また i が偶数ならば $I(i)=i/2$ 且つ $R(i)=2$ によって写像 I 及び R を定義する。この i に対して $f(i)=A(I(i),\ R(i))$ が従う。また $R(i)=1$ ならば $Q(i)=2$ 且つ $R(i)=2$ ならば $Q(i)=1$ によって $N[2^{m+1}]$ を定義域とする写像 Q を定義する。

k 及び i を1以上且つ 2^{m+1} 以下の任意の自

然数とする。

$I(k)=I(i)$ 且つ $R(k)=R(i)$ の場合を考える。$f(k)=f(i)$ が従う。故に $f(k)\sim_{\cdot}f(i)$ が従う。

$I(k)=I(i)$ 且つ $R(k)\neq R(i)$ の場合を考える。$M(I(k))$ の定義より $\langle f(k),\ f(i)\rangle\in M(I(k))$ 或いは $\langle f(i),\ f(k)\rangle\in M(I(k))$ が従う。故に $f(k)\sim_{\cdot}f(i)$ が従う。

$I(k)\neq I(i)$ の場合を考える。$\langle A(I(k),\ R(k)),\ A(I(k),\ Q(k))\rangle$ 及び $\langle A(I(i),R(i)),\ A(I(i),\ Q(i))\rangle$ は各各 $g(I(k))$ 及び $g(I(i))$ に対する分割的二重対であり，また $A(I(k),\ R(k))\sim_{\cdot}A(I(k),\ Q(k))$ 且つ $A(I(i),\ R(i))\sim_{\cdot}A(I(i),\ Q(i))$。ところが g は殆ど同等な分割であるので，$g(I(k))\sim_{\cdot}g(I(i))$。故に［命題3］より $A(I(k),\ R(k))\sim_{\cdot}A(I(i),\ R(i))$ が従う。故に $f(k)\sim_{\cdot}f(i)$ が従う。

故に f は A に対する長さ 2^{m+1} の殆ど同等な分割である。　［証明終］

［命題7］$\leq_{\cdot}$ を前精密な任意の定性的確率とする。$\leq_{\cdot}$ に概一致する定量的確率 P が一意的に存在する。この一意的に存在する定量的確率 P は定量的に精密である。即ち任意の事象 B 及び0以上且つ1以下の任意の実数 ρ に対して或事象 C が存在して $C\subseteqq B$ 且つ $P(C)=\rho\cdot P(B)$ が従う。また任意の事象 B に対して $\phi<_{\cdot}B$ と $0<P(B)$ とは同値である。さらにまた任意の事象 B 及び C に対して $P(B)=P(C)$ と言う場合且つその場合に限って $B\sim_{\cdot}C$ が従う。

［注意］次の証明中で利用するサヴェジ書34頁から35頁にかけての定理2は「無限に多くの長さに対して S に対する殆ど一様な分割が存在するのならば，その定性的確率に対して概一致する定量的確率が一意的に存在する。しかもこの定量的確率は定量的に精密である」と言う内容の命題である。これについては園［7］を参照する事を勧める。

［証明］［命題6］及びサヴェジ書の定理2「殆ど一様な分割による，定量的確率の存在に関する命題」により $\leq_{\cdot}$ に対して概一致する定量的確率が一意的に存在し且つこの定量的確率は定量的に精密であるが従う。この一意的に存在する定量的確率を P と表記する。

$\phi<_{\cdot}B$ を満たす任意の事象 B に対して $0<P(B)$ を示す。背理法による。或事象 B が存在して $\phi<_{\cdot}B$ 且つ $P(B)=0$ と仮定して矛盾を導く。この B を固定する。前精密の仮定より S に対する或分割 f が存在して f の任意の項は確定性において B よりも小である。故に $P(B)=0$ 及び P が $\leq_{\cdot}$ に概一致する事より f の各項の P に関するその確率の値は0に等しい。一方有限加法性より $P(\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)\})=\sum_{j\in\mathrm{dom}(f)}P(f(j))$。故に $P(\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)\})=0$ が従う。ところが $\cup\{f(j)\mid j\in\mathrm{dom}(f)\}=S$。故に $P(S)=0$ が従う。一方 $P(S)=1$。故に矛盾が生じる。

$0<P(B)$ を満たす任意の事象 B に対して $\phi<_{\cdot}B$ は P の概一致性及び $P(\phi)=0$ より従う。B 及び C を任意の事象とする。$P(B)=P(C)$ を仮定して $B\sim_{\cdot}C$ を導く。背理法による。$B<\!<_{\cdot}C$ と仮定して矛盾を導く。$C<\!<_{\cdot}B$ と仮定する場合も同様である。$B\cup E<_{\cdot}C$，$B\cap E=\phi$，且つ $\phi<_{\cdot}E$ を満たす事象 E が存在する。この E を固定する。P の概一致性より $P(B\cup E)\leqq P(C)$ が従う。故に有限加法性より $P(B)+P(E)\leqq P(C)$。ところが既に示した結果より $0<P(E)$。故に $P(B)<P(C)$ が従う。一方 $P(B)=P(C)$。故に矛盾が生じる。

逆に $B\sim_{\cdot}C$ を仮定して $P(B)=P(C)$ を導く。背理法による。$P(B)<P(C)$ と仮定して矛盾を導く。$P(C)<P(B)$ と仮定する場合も同様である。P の定量的精密性より $D\subseteqq S\setminus B$，$0<P(D)$，且つ $P(D)<P(C)-P(B)$ を満たす或事象 D が存在する。この D を固定する。有限加法性より $P(B\cup D)=P(B)+P(D)$。$P(D)<P(C)-P(B)$ より $P(B\cup D)<P(C)$ が

従う。P の概一致性より $B\cup D\leqq\cdot C$。ところが $B\cap D=\phi$ 且つ $\phi<\cdot D$。故に $B<\cdot C$。一方 $B\sim\cdot C$。故に矛盾が生じる。　[証明終]

[注意] [命題7] より「$\leqq\cdot$ を前精密且つ緊密である任意の定性的確率とする。$\leqq\cdot$ に対して強一致する定量的確率が一意的に存在する。しかもこの定量的確率は定量的に精密である」と言う命題が従う。これよりサヴェジ書38頁の系1「前精密且つ緊密な定性的確率に対しては，それに対して強一致する定量的確率が存在する。さらに無限に多くの長さに対して S に対する同等な分割が存在する」が従う。また次が従う。

[サヴェジ書38頁の定理4] 前精密且つ緊密である事の必要充分条件は一方が他方よりも確定性において小である事象から成る任意の対に対して S に対する或分割が存在してその分割の任意の項と確定性が小である方のその事象との合併が確定性において他方の事象よりも小である事である。即ち $B<\cdot C$ を満たす任意の事象 B 及び C に対して S に対する或分割 f が存在して $j\in\mathrm{dom}(f)$ を満たす任意の j に対して $B\cup f(j)<\cdot C$ と言う事がその必要充分条件である。

[証明] 必要条件である事を示す。$\leqq\cdot$ は前精密且つ緊密であると仮定する。B 及び C を $B<\cdot C$ を満たす任意の事象であると仮定する。$\leqq\cdot$ が緊密である事より $B\cup E<\cdot C$, $B\cap E=\phi$, 且つ $\phi<\cdot E$ を満たす事象 E が存在する。この E を固定する。前精密性よりその任意の項が E よりも確定性が小である S に対する或分割が存在する。この分割を固定しその任意の項を E' と表記する。$E'<\cdot E$ 且つ $B\cap E=\phi$ より $B\cup E'<\cdot B\cup E$。故に $B\cup E'<\cdot C$ が従う。必要条件である事が従う。

充分条件である事を示す。前精密性を示す。仮定により $\phi<\cdot E$ を満たす任意の E に対して或分割が存在してその分割の任意の項と ϕ との合併は確定性において E よりも小である。これより前精密性が従う。次に緊密性を示す。B 及び C を $B<\cdot C$ を満たす任意の事象とする。仮定により S に対する或分割が存在してその分割の任意の項と B との合併は C よりも確定性が小である。一方 $B<\cdot S$ より $\phi<\cdot S\setminus B$。故にこの分割が $S\setminus B$ に対して誘導する分割の項の内で確定性が正であるものが存在する。この項を D と表記する。また D と $S\setminus B$ との共通部分を G と表記する。$B\cup G=B\cup D$。故に $B\cup G<\cdot C$。ところが $\phi<\cdot G$ 且つ $B\cap G=\phi$。故に緊密性が従う。　[証明終]

[注意終]

以上の考察に基づいて精密比較の公準を導入する。

[定義6] [精密比較の公準の導入] $\leqq\cdot$ を任意の定性的確率とする。$\leqq\cdot$ が精密比較の公準を満たすと言う事は $B<\cdot C$ を満たす任意の事象 B 及び C に対して S に対する或分割 f が存在して f の任意の項 D に対して $B\cup D<\cdot C$ と言う事であると定義する。

[注意] 上の [注意] で示したサヴェジ書38頁定理4より，$\leqq\cdot$ が精密比較の公準を満たす事と $\leqq\cdot$ が前精密且つ緊密である事とは同値であるが従う。

[補遺] [補題5.2] に対するサヴェジ氏式証明を次の [補題*] を用いて構成する。

[補題*] $\leqq\cdot$ を任意の定性的確率とし且つ $\langle A(n)\,;\,n\in N\rangle$ 及び $\langle B(n)\,;\,n\in N\rangle$ を事象から成る任意の列とする。任意の自然数 n に対して $A(n+1)\subseteqq A(n)$ 且つ $A(n+1)\leqq\cdot A(n)\setminus A(n+1)$ と仮定し，さらにまた任意の自然数 m 及び n に対して $B(m)<\cdot A(n)$ を仮定する。任意の自然数 n, $k\leqq n$ を満たす任意の自

然数 k, 及び基数が 2^{k-1} である N の任意の部分集合 J に対して $\cup\{B(j)\mid j\in J\}<\cdot A(n-k+1)$ が従う。

［補題＊に対する注意］［補題＊］においては前精密性を仮定していない事を注意する。前精密性を仮定する場合にはこの補題における列 $B(\cdot)$ は自明なものに限られる。即ちその場合には列 $B(\cdot)$ の各項は空集合 ϕ と確定性において同等となるのである。

［補題＊の証明］ n を任意の自然数とする。k に関する数学的帰納法を用いる。$k=1$ の場合は任意の自然数 m に対して $B(m)<\cdot A(n)$ より結論が従う。

$k<n$ 且つ k に対して結論が成立すると仮定して $k+1$ の場合を示す。J を基数が 2^k である N の任意の部分集合とする。$N[2^k]$ から J への或全単射 a が存在する。この a を固定する。$J'=a[N[2^{k-1}]]$ 且つ $j''=a[N[2^k]\setminus N[2^{k-1}]]$ と置く。$J=J'\cup J''$, $J'\cap J''=\phi$, 且つ$\#(J')=\#(J'')=2^{k-1}$ が従う。帰納法の仮定より $\cup\{B(j)\mid j\in J''\}<\cdot A(n-k+1)$ が従う。ところが $A(n-k+1)\leq\cdot A(n-k)\setminus A(n-k+1)$。故に $\cup\{B(j)\mid j\in J''\}<\cdot A(n-k)\setminus A(n-k+1)$ が従う。ところが数学的帰納法の仮定より $\cup\{B(j)\mid j\in J'\}<\cdot A(n-k+1)$。故に $\cup\{B(j)\mid j\in J'\cup J''\}<\cdot A(n-k+1)\cup(A(n-k)\setminus A(n-k+1))$。故に $\cup\{B(j)\mid j\in J\}<\cdot A(n-(k+1)+1)$ が従う。故に $k+1$ の場合の結論が従う。　［証明終］

［補題5.2］に対するサヴェジ書38頁上から第2番目の段落の［証明］：背理法による。確定性が正である或事象 H が存在して任意の自然数 n に対して $H\leq\cdot A(n)$ と仮定して矛盾を導く。この H を固定する。前精密性より S に対する或分割 f が存在して f の任意の項は確定性において H よりも小であるが従う。この f を固定し且つ f の長さを i とする。任意の自然数 j に対して $j\leqq i$ ならば $B(j)=f(j)$ 且つ $i<j$ ならば $B(j)=f(i)$ によって事象から成る列 $\langle B(n);n\in N\rangle$ を定義する。m 及び n を任意の自然数とする。$B(m)<\cdot H$ より $B(m)<\cdot A(n)$ が従う。また $k(0)=\min\{k\mid k\in N$ 且つ $i\leqq 2^{k-1}\}$ と置く。上で示した［補題＊］より $k(0)\leqq n$ を満たす任意の自然数 n に対して $\cup\{B(j)\mid j\in N$ 且つ $j\leqq 2^{k(0)-1}\}<\cdot A(n-k(0)+1)$ が従う。B の定義より $\cup\{f(j)\mid j\in N$ 且つ $j\leqq i\}=\cup\{B(j)\mid j\in N$ 且つ $j\leqq 2^{k(0)-1}\}$。また f は S に対する分割であり且つ i は f の長さである。故に $S<\cdot A(n-k(0)+1)$ が従う。特に $n=k(0)$ と置くと $S<\cdot A(1)$ が従う。ところが $A(1)\leq\cdot S$。故に矛盾が生じる。　［証明終］

3. 精密比較の公準と定量的確率

精密比較の公準に基づいて，殆ど一様な分割の概念を経由せずに，「精密比較の公準による，定量的確率の存在に関する命題」［命題4′］を導く事にする。

［命題1′］ $\leq\cdot$ を精密比較の公準を満たす任意の定性的確率とする。任意の事象 A に対して或事象 B 及び C が存在して $A=B\cup C$, $B\cap C=\phi$, 且つ $B=\cdot C$。

［注意］この命題は［命題5］［Savage, L. J. の単純分割補題］に対する［証明］と同じ論法によって従う。

［命題2′］ B, C, G, 及び H を任意の事象とする。$B\cap C=\phi$, $G\cap H=\phi$, $B=\cdot C$, $G=\cdot H$, 且つ $B\cup C=\cdot G\cup H$ と仮定する。$B=\cdot G$ が従う。

［証明］背理法による。$B<\cdot G$ と仮定して矛盾を導く。$G<\cdot B$ と仮定する場合も同様であ

る。$G=\cdot H$ より $B<\cdot H$。一方 $B=\cdot C$。故に $C<\cdot H$。故に $B<\cdot G$, $C<\cdot H$, 且つ $G\cap H=\phi$ が従う。故に $B\cup C<\cdot G\cup H$ が従う。ところが $B\cup C=\cdot G\cup H$ より $G\cup H\leq\cdot B\cup C$。故に矛盾が生じる。　　[証明終]

[命題 3′] [二進的分割に関する命題] $\leq\cdot$ を精密比較の公準を満たす任意の定性的確率とする。A を任意の事象とし且つ n を 0 或いは任意の自然数とする。A に対する長さ 2^n の或同等な分割が存在する。即ち A に対する或分割 f が存在して f の長さは 2^n であり且つ 2^n 以下の任意の自然数 i 及び j に対して $f(i)=\cdot f(j)$。

[注意] この命題は [命題 1′] 及び [命題 2′] と, [命題 6] の [証明] における論法とにより従う。

[命題 4′] $\leq\cdot$ を精密比較の公準を満たす任意の定性的確率とする。$\leq\cdot$ に対して概一致する或定量的確率が存在する。即ち事象の全体を定義域とする或有限加法的確率測度 P が存在して任意の事象 A 及び B に対して $A\leq\cdot B$ ならば $P(A)\leqq P(B)$。またこの P は一意的に定まる。しかもこの一意的に定まる P は定量的に精密であり且つ $\leq\cdot$ に対して強一致する。即ち任意の事象 B 及び 0 以上且つ 1 以下の任意の実数 ρ に対して或事象 H が存在して $H\leqq B$ 且つ $P(H)=\rho\cdot P(B)$, 且つ任意の事象 A 及び B に対して $A\leq\cdot B$ と $P(A)\leqq P(B)$ とは同値である。

[証明] [第 1 段] 一意性を示す。即ち $\leq\cdot$ に概一致する任意の定量的確率 P 及び Q に対して $P=Q$ を示す。[命題 3′] [二進的分割に関する命題] により任意の非負整数 n に対して S に対する長さ 2^n の或同等な分割 f が存在する。この f を固定する。また A を任意の事象とする。

$$\cup\{f(i)\,|\,i\in N[2^n] \text{ 且つ } i\leqq j\}\leq\cdot A$$

を満たす 2^n 以下の非負整数の内で最大のものを $j(*)$ と置く。$j=0$ の場合 $\phi\leq\cdot A$ よりこの式は満たされるので $j(*)$ は確定する。

$$\cup\{f(i)\,|\,i\in N[2^n] \text{ 且つ } i\leqq j(*)\}\leq\cdot A$$

が従う。

P 及び Q を $\leq\cdot$ に対して概一致する任意の定量的確率とする。

式 1。$j(*)/2^n\leqq P(A)$

が従う。$j(*)=2^n$ の場合には $S\leq\cdot A$。故に P 及び Q の概一致性より $P(A)=1$ 且つ $Q(A)=1$ が従う。

$j(*)<2^n$ の場合を考える。$j(*)$ の最大性より

$$A<\cdot\cup\{f(i)\,|\,i\in N[2^n] \text{ 且つ } i\leqq j(*)+1\}$$

が従う。故に概一致性より

式 2。$P(A)\leqq(j(*)+1)/2^n$

が従う。式 1 及び式 2 における P を Q によって置き換える事によって得られる式も亦従う。故に $j(*)/2^n\leqq Q(A)$ 且つ $Q(A)\leqq(j(*)+1)/2^n$。故に

式 3。$(-1)/2^n\leqq P(A)-Q(A)\leqq 1/2^n$

が従う。式 3 は任意の非負整数 n に対して成立する。一方 $\lim\langle 1/2^n;n\in\omega\rangle=0$。故に $P(A)=Q(A)$ が従う。　　[第 1 段終]

[第 2 段] $\leq\cdot$ に概一致する任意の定量的確率は定量的に精密である事を示す。P を $\leq\cdot$ に概

一致する任意の定量的確率とし且つ B を任意の事象とする。また ρ を0以上1以下の任意の実数とする。

$T=\{\langle C,\ G,\ D,\ n\rangle|\langle C,\ G,\ D\rangle$ は B に対する事象から成る分割的三重対であり $P(C)\leqq\rho\cdot P(B)$, $P(G)\leqq 1/2^n$, $P(D)\leqq(1-\rho)\cdot P(B)$, 且つ $n\in\omega\}$

と置く。また「$C\subseteqq C'$, $D\subseteqq D'$, 且つ $m=n+1$ の場合且つその場合に限って $R(\langle C, G, D, n\rangle, \langle C', G', D', m\rangle)$」によって T 上の二項関係 R を定義する。

式 (*)　$\langle\phi,\ B,\ \phi,\ 0\rangle\in T$

を示す。ρ 及び $P(B)$ は共に非負である。ところが $P(\phi)=0$。故に $P(\phi)\leqq\rho\cdot P(B)$。一方 $\rho\leqq 1$ より $0\leqq 1-\rho$。故に $0\leqq(1-\rho)\cdot P(B)$。故に $P(\phi)\leqq(1-\rho)\cdot P(B)$。また $P(B)\leqq 1$ 且つ $2^0=1$。故に式 (*) が従う。

陳述(*)　T の任意の元 $\langle C,\ G,\ D,\ n\rangle$ に対して T の或元 $\langle C',\ G',\ D',\ m\rangle$ が存在して $R(\langle C,\ G,\ D,\ n\rangle, \langle C',\ G',\ D',\ m\rangle)$

を示す。$\langle C,\ G,\ D,\ n\rangle$ を T の任意の元とする。[命題3'] [二進的分割に関する命題] より S に対する長さ 2^{n+1} の或同等な分割 f が存在する。この f を固定する。f によって誘導される G に対する分割を g と表記する。P の概一致性より g の任意の項に対する P の値は $1/2^n$ 以下である。

$P(C\cup\cup\{g(j)\,|\,j\in N\,[2^{n+1}]$ 且つ $j\leqq k\})\leqq\rho\cdot P(B)$

且つ $k=0$ 或いは $k\in N\,[2^{n+1}]$ を満たす最大の k を $k(*)$ と表記する。$P(C)\leqq\rho\cdot P(B)$ より $k=0$ の場合にはこの不等式は満たされるので $k(*)$ は確定する。

$C'=C\cup\cup\{g(j)\,|\,j\in N\,[2^{n+1}]$ 且つ $j\leqq k(*)\}$,

$k(*)=2^{n+1}$ ならば $G'=\phi$,

$k(*)<2^{n+1}$ ならば $G'=g(k(*)+1)$,

且つ

$D'=D\cup\cup\{g(j)\,|\,j\in N\,[2^{n+1}]$ 且つ $k(*)+1<j\}$

と置く。$P(C')\leqq\rho\cdot P(B)$ 且つ $P(G')\leqq 1/2^{n+1}$ が従う。また $\langle C',\ G',\ D'\rangle$ は事象から成る B に対する分割的三重対である。

$k(*)=2^{n+1}$ の場合を考える。$C'=C\cup G$, $G'=\phi$, $D'=D$ が従う。
故に $\langle C',\ G',\ D',\ n+1\rangle\in T$ が従う。

$k(*)<2^{n+1}$ の場合を考える。$C'\cup G'=C\cup\cup\{g(j)\,|\,j\in N\,[2^{n+1}]$ 且つ $j\leqq k(*)+1\}$。ところが $k(*)$ の最大性より $\rho\cdot P(B)<P(C\cup\cup\{g(j)\,|\,j\in N\,[2^{n+1}]$ 且つ $j\leqq k(*)+1\})$。故に $P(B)-P(C\cup\cup\{g(j)\,|\,j\in N\,[2^{n+1}]$ 且つ $j\leqq k(*)+1\})<(1-\rho)\cdot P(B)$。ところが $P(B)=P(C'\cup G')+P(D')$。故に $P(D')<(1-\rho)\cdot P(B)$。故に $\langle C',\ G',\ D',\ n+1\rangle\in T$ が従う。また $C\subseteqq C'$ 且つ $D\subseteqq D'$。故に $m=n+1$ と置くと $R(\langle C,\ G,\ D,\ n\rangle, \langle C',\ G',\ D',\ m\rangle)$ が従う。故に陳述 (*) が従う。

式 (*), 陳述 (*), 及び初期条件付き従属選択の原理より「ω から T への或写像 F が存在して $F(0)=\langle\phi,\ B,\ \phi,\ 0\rangle$ 且つ ω の任意の元 n に対して $R(F(n), F(n+1))$」が従う。この F を固定する。任意の非負整数 n に対して $\langle C(n),\ G(n),\ D(n),\ M(n)\rangle=F(n)$ と置く。数学的帰納法により任意の非負整数 m 及び n に対して $m\leqq n$ ならば $C(m)\subseteqq C(n)$ 且つ $D(m)\subseteqq D(n)$ が従う。即ち列 $C(\cdot)$ 及び $D(\cdot)$ は集

合の列として非減少列である。またこれも数学的帰納法により任意の非負整数 n に対して $M(n)=n$ が従う。

$C(*)=\cup\{C(n)\mid n\in\omega\}$ 且つ $D(*)=\cup\{D(n)\mid n\in\omega\}$

と置く。事象の全体は完全加法族であるので $C(*)$ 及び $D(*)$ は共に事象である。

n を任意の非負整数とする。$C(n)\subseteqq C(*)$ より $P(C(n))\leqq P(C(*))$ が従う。一方 $P(C(n))\leqq P(B)-(P(G(n))+P(D(n)))$, $P(G(n))\leqq 1/2^n$, 且つ $P(D(n))\leqq(1-\rho)\cdot P(B)$ より $\rho\cdot P(B)-(1/2^n)\leqq P(C(n))$ が従う。故に $\rho\cdot P(B)-(1/2^n)\leqq P(C(*))$ が従う。ここに n は任意の非負整数であり且つ $\lim\langle 1/2^n; n\in\omega\rangle=0$。故に

式4.　　$\rho\cdot P(B)\leqq P(C(*))$

が従う。同様にして

式5。　　$(1-\rho)\cdot P(B)\leqq P(D(*))$

が従う。一方

式6。　　$C(*)\cap D(*)=\phi$

が従う。これを示す。背理法による。或 x が存在して $x\in C(*)\cap D(*)$ と仮定して矛盾を導く。この x を固定する。$x\in C(*)$ 且つ $x\in D(*)$ が従う。故に或非負整数 i 及び j が存在して $x\in C(i)$ 且つ $x\in D(j)$ が従う。この i 及び j を固定する。$k=\max\{i, j\}$ と置く。列 $C(\cdot)$ 及び $D(\cdot)$ の非減少性より $x\in C(k)$ 且つ $x\in D(k)$ が従う。故に $x\in C(k)\cap D(k)$。故に $C(k)\cap D(k)\neq\phi$。ところが $\langle C(k), G(k), D(k)\rangle$ は B に対する分割的三重対である。故に $C(k)\cap D(k)=\phi$。故に矛盾が生じる。

一方式5及び $D(*)\subseteqq B$ より

$$P(B\setminus D(*))\leqq\rho\cdot P(B)$$

が従う。ところが式6及び $C(*)\subseteqq B$ より $C(*)\subseteqq B\setminus D(*)$。故に $P(C(*))\leqq P(B\setminus D(*))$。故に

$$P(C(*))\leqq\rho\cdot P(B)。$$

故に式4より $P(C(*))=\rho\cdot P(B)$ が従う。故に $H=C(*)$ と置くと $H\in A$, $H\subseteqq B$, 且つ $P(H)=\rho\cdot P(B)$ が従う。　　[第2段終]

[第3段] $\leqq_\cdot$ に対して概一致する任意の定量的確率は $\leqq_\cdot$ に対して強一致する事を示す。P を $\leqq_\cdot$ に対して概一致する任意の定量的確率とし且つ B 及び C を $B<_\cdot C$ を満たす任意の事象とする。この場合 $P(B)<P(C)$ を示す。

精密比較の公準より S に対する或分割 f が存在して f の任意の項と B との合併は確定性において C よりも小であるが従う。この f を固定する。$B<_\cdot C$ より $B<_\cdot S$。故に $\phi<_\cdot S\setminus B$。f は S に対する分割であるので f の或項 D が存在して D と $S\setminus B$ との共通部分は確定性において正であるが従う。この D を固定する。$E=(S\setminus B)\cap D$ と置く。$B\cup E<_\cdot C$ 且つ $B\cap E=\phi$ が従う。P の概一致性より $P(B\cup E)\leqq P(C)$。故に有限加法性より $P(B)+P(E)\leqq P(C)$。

$0<P(E)$ を示す。$0\leqq P(E)$ より $P(E)\neq 0$ を示せば従う。これを示す。背理法による。$P(E)=0$ と仮定して矛盾を導く。$\phi<_\cdot E$ 及び精密比較の公準より S に対する或分割 g が存在して g の任意の項は確定性において E よりも小であるが従う。この g を固定する。g の長さを m とする。j を m 以下の任意の自然数とする。$g(j)<_\cdot E$ が従う。故に P の概一致性により $P(g(j))\leqq P(E)$。ところが $P(E)=$

0。故に $P(g(j))=0$。故に $\sum_{j=1}^{m}P(g(j))=0$。ところが有限加法性と数学的帰納法とにより $P(\cup\{g(j)\mid j\in N[m]\})=\sum_{j=1}^{m}P(g(j))$。故に $P(\cup\{g(j)\mid j\in N[m]\})=0$。ところが g は S に対する分割であるので，$\cup\{g(j)\mid j\in N[m]\}=S$。故に $P(S)=0$。ところが $P(S)=1$。故に矛盾が生じる。

故に $P(B)<P(B)+P(E)$。故に $P(B)<P(C)$ が従う。　［第3段終］

［第4段］$\leqq\cdot$ に対して概一致する或定量的確率が存在する事を示す。

精密比較の公準及び［命題3′］［二進的分割に関する命題］より任意の非負整数 n に対して S に対する長さ 2^n の或同等な分割が存在する。また数学的帰納法により「S に対する長さの等しい任意の同等な分割 f 及び g に対してその各分割の項から成る任意の合併の確定性における順序はそれらの合併を構成する項の個数の順序と一致する」即ち「任意の自然数 m，S に対する長さ m の任意の同等な分割 f 及び g，及び $N[m]$ の任意の部分集合 I 及び J に対して，$\#(I)\leqq\#(J)$ の場合且つその場合に限って $\cup\{f(i)\mid i\in I\}\leqq\cdot\cup\{g(j)\mid j\in J\}$」が従う。前者に基づき

「任意の事象 A 及び任意の非負整数 n に対して，S に対する長さ 2^n の或同等な分割 f が存在して $\cup\{f(i)\mid i\in N[2^n]$ 且つ $i\leqq j\}\leqq\cdot A$ を満たす0或いは 2^n 以下の自然数である j の内で最大のものを $J(A,\ n)$ と表記する」

によって $A\times\omega$ を定義域とする非負整数値を取る写像 $J(A,\ n)$ を定義する。また後者より

「任意の事象 A，任意の非負整数 n，及び S に対する長さ 2^n の任意の同等な分割 f に対して $\cup\{f(i)\mid i\in N[2^n]$ 且つ $i\leqq j\}\leqq\cdot A$ を満たす0或いは 2^n 以下の自然数である j の内で最大のものは $J(A,\ n)$ に等しい」

が従う。

任意の事象 A 及び任意の非負整数 n に対して $K(A,\ n)=J(A,\ n)/2^n$ と置く。$0\leqq J(A,\ n)\leqq 2^n$ より $0\leqq K(A,\ n)\leqq 1$ が従う。故に，有理数から成る集合 $\{K(A,\ n)\mid n\in\omega\}$ は上に有界であるので，この集合は実数体において上限をもつ。この事に基づき任意の事象 A に対して

$$P(A)=\sup\{K(A,\ n)\mid n\in\omega\}$$

と置く事により事象の全体 $\boldsymbol{A}$ を定義域とする実数値を取る写像 P を定義する。

陳述1。任意の事象 A に対して $0\leqq P(A)$。

これを示す。A を任意の事象とする。任意の非負整数 n に対して $0\leqq K(A,\ n)$。故に $0\leqq\sup\{K(A,\ n)\mid n\in\omega\}$ が従う。故に $0\leqq P(A)$ が従う。

陳述2。$P(S)=1$。

これを示す。n を任意の非負整数とする。$J(S,\ n)=2^n$ より $K(S,\ n)=1$ が従う。故に $\sup\{K(S,\ n)\mid n\in\omega\}=1$。故に $P(S)=1$ が従う。

陳述3。任意の事象 A に対して有理数から成る列 $\langle K(A,\ n)\ ;\ n\in\omega\rangle$ は上に有界な非減少列である。従って実数体において $\lim\langle K(A,\ n)\ ;\ n\in\omega\rangle$ が一意的に存在して且つ $P(A)=\lim\langle K(A,\ n)\ ;\ n\in\omega\rangle$ が従う。

これを示す。A を任意の事象とする。有界である事は $P(A)$ を定義する際に既に示してある。非減少性のみを示す。S に対する長さ 2^n の或同等な分割 f が存在して

$$\cup\{f(i)\mid i\in N[2^n] \text{ 且つ } i\leqq J(A,\ n)\}\leqq\cdot A$$

が従う。この f を固定する。2^n 以下の任意の自然数 i に対して

$$M(i)=\{\langle B,\ C\rangle\mid\langle B,\ C\rangle \text{ は事象から成る } f(i) \text{ に対する分割的二重対であり且つ } B=\cdot C\}$$

と置く。[命題1'] により 2^n 以下の任意の自然数 i に対して $M(i)\neq\phi$ が従う。故に「有限選択の原理」或いは数学的帰納法により

$$\Pi\{M(i)\mid i\in N[2^n]\}\neq\phi$$

が従う。故に $F\in\Pi\{M(i)\mid i\in N[2^n]\}$ を満たす或写像 F が存在する。この F を固定する。2^n 以下の任意の自然数 i に対して

$$\langle A(i,\ 1),\ A(i,\ 2)\rangle=F(i)$$

と置く。2^{n+1} 以下の任意の自然数 j に対して

$$j \text{ が奇数ならば } g(j)=A((j+1)/2,\ 1) \text{ 且つ } j \text{ が偶数ならば } g(j)=A(j/2,\ 2)$$

と置く事により $N[2^{n+1}]$ を定義域とする写像 g を定義する。[命題2'] により g は S に対する長さ 2^{n+1} の同等な分割である事が従う。一方数学的帰納法により

$$\cup\{f(i)\mid i\in N[2^n] \text{ 且つ } i\leqq J(A,\ n)\}=\cup\{g(i)\mid i\in N[2^{n+1}] \text{ 且つ } i\leqq 2\cdot J(A,\ n)\}$$

が従う。故に

$$\cup\{g(i)\mid i\in N[2^{n+1}] \text{ 且つ } i\leqq 2\cdot J(A,\ n)\}\leqq\cdot A$$

が従う。ところが $2\cdot J(A,\ n)\in\{0\}\cup N[2^{n+1}]$。故に

$$2\cdot J(A,\ n)\leqq J(A,\ n+1)$$

が従う。故に

$$K(A,\ n)\leqq K(A,\ n+1)$$

が従う。故に数学的帰納法より任意の非負整数 m 及び n に対して $m\leqq n$ ならば

$$K(A,\ m)\leqq K(A,\ n)$$

が従う。故に陳述3が述う。

陳述4。任意の事象 B 及び C に対して，B と C とが互いに排反ならば $P(B\cup C)=P(B)+P(C)$。

これを示す。B 及び C を任意の事象とし且つ $B\cap C=\phi$ とする。また n を任意の非負整数とする。

式7。$J(B\cup C,\ n)\leqq J(B,\ n)+J(C,\ n)+1$

を示す。S に対する長さ 2^n の同等な分割を固定してこれを f と表記する。

$$\cup\{f(i)\mid i\in N[2^n] \text{ 且つ } i\leqq j\}\leqq\cdot B$$

を満たす0或いは 2^n 以下の自然数である j の内で最大のものを $j(*)$ と置く。$j(*)=J(B,\ n)$ 且つ $j(*)\leqq J(B\cup C,\ n)$ が従う。$j(*)=J(B\cup C,\ n)$ の場合には $0\leqq J(C,\ n)$ より式7が従う。

$j(*)<J(B\cup C,\ n)$ の場合を考える。$j(*)+1\leqq J(B\cup C,\ n)$ が従う。$j(*)<2^n$ であるので，

$j(*)$ の最大性より

$$B<\cdot\cup\{f(i)\,|\,i\in N[2^n]\text{ 且つ }i\leqq j(*)+1\}$$

が従う。ところが

$$\cup\{f(i)\,|\,i\in N[2^n]\text{ 且つ }i\leqq J(B\cup C,\ n)\}\leq\cdot B\cup C。$$

故に

$$\cup\{f(i)\,|\,i\in N[2^n]\text{ 且つ }j(*)+1<i\leqq J(B\cup C,\ n)\}<\cdot C$$

が従う。故に

$$J(B\cup C,\ n)-(j(*)+1)\leqq J(C,\ n)。$$

故に

$$J(B\cup C,\ n)\leqq j(*)+J(C,\ n)+1$$

が従う。これより式7が従う。

式8。$J(B,\ n)+J(C,\ n)\leqq J(B\cup C,\ n)$

を示す。式7に対する証明における f 及び $j(*)$ を用いる。

$C\leq\cdot\cup\{f(i)\,|\,i\in N[2^n]\text{ 且つ }j(*)<i\leqq J(B\cup C,\ n)\}$ の場合を考える。$J(C,\ n)\leqq J(B\cup C,\ n)-j(*)$ が従う。これより式8が従う。

$\cup\{f(i)\,|\,i\in N[2^n]\text{ 且つ }j(*)<i\leqq J(B\cup C,\ n)\}<\cdot C$ の場合を考える。$\cup\{f(i)\,|\,i\in N[2^n]\text{ 且つ }i\leqq j(*)\}\leq\cdot B$ より $\cup\{f(i)\,|\,i\in N[2^n]\text{ 且つ }i\leqq J(B\cup C,\ n)\}<\cdot B\cup C$。$f$ は S に対する分割であるので $J(B\cup C,\ n)<2^n$ が従う。$J(B\cup C,\ n)+1$ は 2^n 以下の自然数であるので，$J(B\cup C,\ n)$ の最大性より

$$B\cup C<\cdot\cup\{f(i)\,|\,i\in N[2^n]\text{ 且つ }i\leqq J(B\cup C,\ n)+1\}$$

が従う。ところが

$$\cup\{f(i)\,|\,i\in N[2^n]\text{ 且つ }i\leqq j(*)\}\leq\cdot B\text{ 且つ }B\cap C=\phi。$$

故に

$$C<\cdot\cup\{f(i)\,|\,i\in N[2^n]\text{ 且つ }j(*)<i\leqq J(B\cup C,\ n)+1\}$$

が従う。故に

$$J(C,\ n)<(J(B\cup C,\ n)+1)-j(*)$$

が従う。これより $j(*)+J(C,\ n)\leqq J(B\cup C,\ n)$ が従う。故に式8が従う。

式7及び式8より

式9。$K(B,\ n)+K(C,\ n)\leqq K(B\cup C,\ n)\leqq K(B,\ n)+K(C,\ n)+(1/2^n)$

が従う。ここに n は任意の非負整数である。また陳述3より任意の事象 A に対して有理数から成る列 $\langle K(A,\ n)\,;n\in\omega\rangle$ は実数体において極限をもつ。故に有理数から成る列 $\langle K(B,\ n)+K(C,\ n)\,;n\in\omega\rangle$ は実数体において極限を持ち且つそれは $\langle K(B,\ n)\,;n\in\omega\rangle$ 及び $\langle K(C,\ n)\,;n\in\omega\rangle$ の極限の和に等しい。故に

$$\lim\langle K(B,\ n)+K(C,\ n)\,;n\in\omega\rangle=P(B)+P(C)$$

が従う。また $\lim\langle 1/2^n\,;n\in\omega\rangle=0$。故に式9より

$$\lim\langle K(B\cup C)\,;n\in\omega\rangle=P(B)+P(C)$$

が従う。故に $P(B\cup C)=P(B)+P(C)$ が従

う。故に陳述4が従う。

陳述1，陳述2，及び陳述4より P は事象の全体である完全加法族 A を定義域とする定量的確率となる。

この P が $\leq\cdot$ に対して概一致する事を示す。B 及び C を $B\leq\cdot C$ を満たす任意の事象とし且つ n を任意の非負整数とする。$J(B,\ n)\leqq J(C,\ n)$ が従う。故に $K(B,\ n)\leqq K(C,\ n)$ が従う。ここに n は任意の非負整数であるので陳述3より $P(B)\leqq P(C)$ が従う。[第4段終]

以上により結論が従う。　　[証明終]

4. 強い確定性，弱い確定性，及び定量的確率

「定性的確率から誘導される強い確定性関係」に基づいて［命題7］［サヴェジ書37頁定理3結論7］を導く。

［定義 A1］［強い確定性関係；［定義3］の再掲］$\leq\cdot$ を任意の定性的確率とする。任意の事象 B 及び C に対して

> 或事象 E が存在して $\phi<\cdot E$，$B\cap E=\phi$，且つ $B\cup E<\cdot C$

と言う場合且つその場合に限って

$$B\ll\cdot C$$

によって事象間の二項関係 $\ll\cdot$ を定義する。この二項関係を定性的確率 $\leq\cdot$ から誘導される強い確定性関係と呼ぶ。また $A\ll\cdot B$ を A は強い確定性関係において B よりも小である，或いは B は強い確定性関係において A よりも大であると訓む事にする。

既に示した［命題1］［サヴェジ書37頁定理3結論1］を以下で用いるので［命題 A1］として再掲する。

［命題 A1］$\leq\cdot$ を前精密な任意の定性的確率とする。$\phi<\cdot B$ 且つ $\phi<\cdot C$ を満たす任意の事象 B 及び C に対して或事象 D が存在して，$D\subseteqq C$，$\phi<\cdot D$，且つ $D<\cdot B$。

［命題 A2］$\leq\cdot$ を前精密な任意の定性的確率とし且つ $\ll\cdot$ を $\leq\cdot$ より誘導される強い確定性関係とする。任意の事象 A 及び B に対して次の性質1，性質2，及び性質3が従う。

性質1．$A\ll\cdot B$ ならば $A<\cdot B$。
性質2．$\phi\ll\cdot A$ の必要充分条件は $\phi<\cdot A$。
性質3．$A\ll\cdot S$ の必要充分条件は $A<\cdot S$。

［証明］性質1を示す。$A\ll\cdot B$ と仮定する。確定性が正である或事象 E が存在して，A と E とは互いに排反であり且つ A と E との合併は確定性において B よりも小である。この E を固定する。$A\cup E<\cdot B$ が従う。ところが $A\leq\cdot A\cup E$。故に $A<\cdot B$ が従う。

性質2を示す。必要性は性質1より従う。充分性を示す。$\phi<\cdot A$ と仮定する。［命題 A1］より確定性が正である或事象 E が存在して $E<\cdot A$。ところが $\phi<\cdot E$，$\phi\cap E=\phi$，且つ $\phi\cup E=E$。故に $E\ll\cdot A$ が従う。

性質3を示す。必要性は性質1より従う。充分性を示す。$A<\cdot S$ と仮定する。$\phi<\cdot S\setminus A$ が従う。故に［命題 A1］より $S\setminus A$ の部分集合であり且つ確定性が正である或事象 E が存在して E の確定性は $S\setminus A$ よりも小であるが従う。この E を固定する。$A\leq\cdot A$，$E<\cdot S\setminus A$，且つ $A\cap(S\setminus A)=\phi$ より $A\cup E<\cdot A\cup(S\setminus A)$ が従う。ところが $A\cup(S\setminus A)=S$。故に $A\cup E<\cdot S$ が従う。ところが $\phi<\cdot E$ 且つ $A\cap E=\phi$。故に $A\ll\cdot S$ が従う。［証明終］

［命題 A3］$\leq\cdot$ を前精密な任意の定性的確率

とし且つ $\ll\cdot$ を $\leq\cdot$ より誘導される強い確定性関係とする。任意の事象 A, B, 及び C に対して以下の性質1から性質5までが従う。

性質1．$A\ll\cdot B$ ならば「$B\ll\cdot A$ には非ず」。

性質2．$A\ll\cdot B$ 且つ「$A\ll\cdot C$ には非ず」ならば，$C\ll\cdot B$。

性質3．$A\ll\cdot B$ 且つ「$C\ll\cdot B$ には非ず」ならば，$A\ll\cdot C$。

性質4．$A\cap C=\phi$ 且つ $B\cap C=\phi$ ならば，$A\ll\cdot B$ と $A\cup C\ll\cdot B\cup C$とは同値である。

性質5．「$A\ll\cdot\phi$ には非ず」且つ $\phi\ll\cdot S$。

［証明］性質1を示す。$A\ll\cdot B$ と仮定する。［命題 A2］の性質1より $A<\cdot B$ が従う。故に「$B<\cdot A$ には非ず」。故に再び［命題 A2］より「$B\ll\cdot A$ には非ず」が従う。

性質2を示す。$A\ll\cdot B$ 且つ「$A\ll\cdot C$ には非ず」と仮定する。$A\ll\cdot B$ より確定性が正である或事象 E が存在して，A と Eとは互いに排反であり且つ A と E との合併は確定性において B よりも小である。この E を固定する。［命題 A1］より確定性が正である或事象 E' 及び E'' が存在して，E' と E'' とは互いに排反であり且つ E' と E'' との合併は E に等しいが従う。この E' 及び E'' を固定する。「$A\ll\cdot C$ には非ず」より $C\leq\cdot A\cup E'$ が従う。$A\cup E'<\cdot B$ 且つ $B\leq\cdot S$ より $C<\cdot S$ が従う。故に $\phi<\cdot S\setminus C$。故に［命題 A1］より $S\setminus C$ の部分集合であり且つ確定性が正である或事象 E''' が存在して E''' の確定性は E'' よりも小であるが従う。この E''' を固定する。$C\leq\cdot A\cup E'$, $E'''<\cdot E''$, 且つ $(A\cup E')\cap E''=\phi$ より $C\cup E'''<\cdot A\cup E'\cup E''$ が従う。ところが $E'\cup E''=E$。故に $C\cup E'''<\cdot A\cup E$ が従う。ところが $A\cup E<\cdot B$。故に $C\cup E'''<\cdot B$。ここに $\phi<\cdot E'''$ 且つ $C\cap E'''=\phi$。故に $C\ll\cdot B$ が従う。

性質3を示す。$A\ll\cdot B$ 且つ「$C\ll\cdot B$ には非ず」と仮定する。$A\ll\cdot B$ より確定性が正である或事象 E が存在して，A と E とは互いに排反であり且つ A と E との合併は確定性において B よりも小である。この E を固定する。

$B<\cdot C$ の場合を考える。$A\cup E<\cdot C$ が従う。ここに $\phi<\cdot E$ 且つ $A\cap E=\phi$。故に $A\ll\cdot C$。

$C<\cdot B$ の場合を考える。［命題 A1］より確定性が正である或事象 E' 及び E'' が存在して，E' と E'' とは互いに排反であり且つ E' と E'' との合併は E に等しいが従う。この E' 及び E'' を固定する。一方 $C<\cdot B$ 且つ $B\leq\cdot S$ より $\phi<\cdot S\setminus C$。故に［命題 A1］より $S\setminus C$ の部分集合であり且つ確定性が正である或事象 E''' が存在して E''' は確定性において E'' よりも小である。この E''' を固定する。$C\ll\cdot B$ には非ず，$\phi<\cdot E'''$，且つ $C\cap E'''=\phi$ より $B\leq\cdot C\cup E'''$ が従う。ところが $A\cup E<\cdot B$。故に $A\cup E<\cdot C\cup E'''$。故に $A\cup E'\cup E''<\cdot C\cup E'''$, $E'''<\cdot E''$，且つ $(A\cup E')\cap E''=\phi$。故に $A\cup E'<\cdot C$。ここに $\phi<\cdot E'$ 且つ $A\cap E'=\phi$。故に $A\ll\cdot C$ が従う。

［注意。性質2を用いて性質3を導くと次の様になる。$A\ll\cdot B$ 且つ「$C\ll\cdot B$ には非ず」と仮定する。背理法による。「$A\ll\cdot C$ には非ず」と仮定して矛盾を導く。$A\ll\cdot B$ 及び性質2より $C\ll\cdot B$ が従う。ところが「$C\ll\cdot B$ には非ず」。故に矛盾が生じる。

また性質3を用いて性質2を導くと次の様になる。$A\ll\cdot B$ 且つ「$A\ll\cdot C$ には非ず」と仮定する。背理法による。「$C\ll\cdot B$ には非ず」と仮定して矛盾を導く。ところが $A\ll\cdot B$。故に性質3より $A\ll\cdot C$。ところが「$A\ll\cdot C$ には非ず」。故に矛盾が生じる。］

性質4を示す。$A\cap C=\phi$ 且つ $B\cap C=\phi$ と仮

定する。

$A\ll\cdot B$ と仮定する。確定性が正である或事象 E が存在して，A と E とは互いに排反であり且つ A と E との合併は確定性において B よりも小である。この E を固定する。[命題 A2] の性質1より $A<\cdot B$。故に $A\cup C<\cdot B\cup C$。故に $\phi<\cdot S\setminus(A\cup C)$。[命題 A1] より $S\setminus(A\cup C)$ の部分集合であり且つ確定性が正である或事象 E' が存在して $E'<\cdot E$ が従う。この E' を固定する。$A\cup E'<\cdot A\cup E$ が従う。故に $A\cup E'<\cdot B$ が従う。故に $(A\cup C)\cup E'<\cdot B\cup C$。ここに $\phi<\cdot E'$ 且つ $(A\cup C)\cap E'=\phi$。故に $A\cup C\ll\cdot B\cup C$ が従う。

$A\cup C\ll\cdot B\cup C$ と仮定する。確定性が正である或事象 E が存在して，$A\cup C$ と E とは互いに排反であり且つ $A\cup C$ と E との合併は確定性において $B\cup C$ よりも小である。この E を固定する。故に $(A\cup E)\cup C<\cdot B\cup C$。ところが $(A\cup E)\cap C=\phi$ 且つ $B\cap C=\phi$。故に $A\cup E<\cdot B$。ここに $\phi<\cdot E$ 且つ $A\cap E=\phi$。故に $A\ll\cdot B$ が従う。

性質5を示す。定性的確率の定義により $\phi\leq\cdot A$。故に「$A<\cdot\phi$ には非ず」。故に [命題 A2] の性質1より「$A\ll\cdot\phi$ には非ず」。一方定性的確率の定義により $\phi<\cdot S$。故に [命題 A2] の性質2より $\phi\ll\cdot S$ が従う。　[証明終]

[定義 A2] $\leq\cdot$ を任意の定性的確率とし且つ $\ll\cdot$ を $\leq\cdot$ より誘導される強い確定性関係とする。「任意の事象 A 及び B に対して，「$B\ll\cdot A$ には非ず」の場合且つその場合に限って $A\lesssim B$」によって事象間の二項関係 $\lesssim$ を定義する。ここに $A\lesssim B$ を A は強い確定性において B よりも大には非ず，或いは B は強い確定性において A よりも小には非ず，と訓む事にする。また「任意の事象 A 及び Bに対して，$A\lesssim B$ 且つ $B\lesssim A$ の場合且つその場合に限って $A\sim\cdot B$」によって事象間の二項関係 $\sim\cdot$ を定義する。ここに $A\sim\cdot B$ を A と B とは殆ど同等であると訓む事にする。さらにまた二項関係 $\lesssim$ 及び $\sim\cdot$ の各各を「$\leq\cdot$ より誘導される弱い確定性関係」及び「$\leq\cdot$ より誘導される弱い同等関係」と呼ぶ事にする。

[命題 A4] [弱い確定性に関する補題] $\leq\cdot$ を前精密な任意の定性的確率とする。$\ll\cdot$ を $\leq\cdot$ より誘導される強い確定性関係とし且つ $\lesssim$ を $\leq\cdot$ より誘導される弱い確定性関係とする。この場合事象間の二項関係 $\lesssim$ は定性的確率である。従って二項関係 $\sim\cdot$ は事象間の同値関係となる。さらにまたこの定性的確率 $\lesssim$ は精密比較の公準を満たす。

[証明] [第一段] A 及び B を任意の事象とする。「$A\lesssim B$ 或は $B\lesssim A$」を示す。「$A\lesssim B$ には非ず」と仮定する。故に「「$B\ll\cdot A$ には非ず」には非ず」が従う。故に $B\ll\cdot A$ が従う。故に [命題 A3] の性質1より「$A\ll\cdot B$ には非ず」が従う。故に $B\lesssim A$ が従う。　[第1段終]

[第2段] A, B, 及び C を任意の事象とする。「$A\lesssim B$ 且つ $B\lesssim C$ ならば，$A\lesssim C$」を示す。$A\lesssim B$ 且つ $B\lesssim C$ と仮定する。背理法による。「$A\lesssim C$ には非ず」と仮定して矛盾を導く，故に $C\ll\cdot A$。ところが $B\lesssim C$ より「$C\ll\cdot B$ には非ず」。故に [命題 A3] の性質2より $B\ll\cdot A$ が従う。ところが $A\lesssim B$ より「$B\ll\cdot A$ には非ず」。故に矛盾が生じる。[注意。$C\ll\cdot A$ と [命題 A3] の性質3とを用いて矛盾を導く事も出来る。]　[第2段終]

[第3段] A, B, 及び C を任意の事象とする。$A\cap C=\phi$ 且つ $B\cap C=\phi$ と仮定する。「$A\lesssim B$ と $A\cup C\lesssim B\cup C$ とは同値である」を示す。

$A\lesssim B$ と仮定する。「$B\ll\cdot A$ には非ず」が従う。故に [命題 A3] の性質4より「$B\cup C\ll\cdot A\cup C$ には非ず」。故に $A\cup C\lesssim B\cup C$ が従う。

$A\cup C\lesssim B\cup C$ と仮定する。「$B\cup C\ll\cdot A\cup C$

には非ず」が従う。故に［命題 A 3］の性質4より「$B\ll\cdot A$ には非ず」が従う。故に $A\lessapprox B$ が従う。　［第3段終］

［第4段］「任意の事象 A に対して $\phi\lessapprox A$」且つ「$S\lessapprox\phi$ には非ず」を示す。A を任意の事象とする。［命題 A 3］の性質5の前半より「$A\ll\cdot\phi$ には非ず」。故に $\phi\lessapprox A$ が従う。また［命題 A 3］の性質5の後半より。$\phi\ll\cdot S$ 故に「「$\phi\ll\cdot S$ には非ず」には非ず」。故に「$S\lessapprox\phi$ には非ず」が従う。　［第4段終］

［第5段］$\lessapprox$ が精密比較の公準を満たす事を示す。A 及び B を任意の事象とし且つ $A\ll\cdot B$ と仮定する。或事象 E が存在して $\phi<\cdot E$, $A\cap E=\phi$, 且つ $A\cup E<\cdot B$。この E を固定する。［命題 A 1］より或事象 E' 及び E'' が存在して $\phi<\cdot E'$, $\phi<\cdot E''$, $E'\cap E''=\phi$, 且つ $E=E'\cup E''$。この E' 及び E'' を固定する。前精密性より S に対する或分割 f が存在して f の任意の項は確定性において E' よりも小であるが従う。この f を固定する。また G を f の任意の項とする。$A\cup G<\cdot A\cup E'$ が従う。これより $\phi<\cdot S\setminus(A\cup G)$。故に［命題 A 1］より或事象 H が存在して $H\subseteqq S\setminus(A\cup G)$, $\phi<\cdot H$, 且つ $H<\cdot E''$。この H を固定する。$A\cup G\cup H<\cdot A\cup E'\cup E''$ が従う。ところが $E'\cup E''=E$ 且つ $A\cup E<\cdot B$。故に $A\cup G\cup H<\cdot B$ が従う。ここに $\phi<\cdot H$ 且つ $(A\cup G)\cap H=\phi$。故に $A\cup G\ll\cdot B$。ここに G は S に対する分割 f の任意の項である。故に S に対する或分割が存在してその分割の任意の項と A との合併は強い確定性において B よりも小であるが従う。　［第5段終］

以上により結論が従う。　［証明終］

［命題 A 5］［前精密性と概一致性とに関する補題］$\leq\cdot$ を前精密な任意の定性的確率とし且つ P を $\leq\cdot$ に対して概一致する任意の定量的確率とする。確定性が正である任意の事象 A 及び任意の正の実数 ε に対して或事象 B が存在して，$B\subseteqq A$, $\phi<\cdot B$, 且つ $P(B)<\varepsilon$。

［注意］次の証明においては従属選択の原理を用いる必要はない。

［証明］A を確定性が正である任意の事象とする。任意の自然数 n に対して

$$M(n)=\{F\mid F\text{ は }N[n]\text{ から }A\text{ への写像であり且つ }F(1)\subseteqq A\text{ 且つ }\phi<\cdot F(n)\text{ 且つ }j<n\text{ を満たす任意の自然数 }j\text{ に対して }F(j+1)\subseteqq F(j)\text{ 且つ }F(j+1)\leq\cdot F(j)\setminus F(j+1)\}$$

と置く。

［第1段］「任意の自然数 n に対して $M(n)\neq\phi$」を示す。自然数 n に関する数学的帰納法による。

$n=1$ の場合を示す。$F(1)=A$ によって $N[1]$ から A への写像 F を定義する。$A\subseteqq A$ 且つ $\phi<\cdot A$ より $M(1)\neq\phi$ が従う。

k を任意の自然数とし且つ $n=k$ の場合の結論を仮定して $n=k+1$ の場合を示す。数学的帰納法の仮定により $M(k)\neq\phi$。故に或写像 F が存在して $F\in M(k)$。この F を固定する。$\phi<\cdot F(k)$ が従う。前精密性より S に対する或分割 f が存在して f の任意の項は確定性において $F(k)$ よりも小であるが従う。この f を固定する。f によって誘導される $F(k)$ に対する分割を g とする。$\phi<\cdot F(k)$ より g の或項 E が存在して $\phi<\cdot E$。この E を固定する。ところが $E<\cdot F(k)$。故に $\phi<\cdot F(k)\setminus E$。「$E\leq\cdot F(k)\setminus E$ ならば $E'=E$」且つ「$F(k)\setminus E<\cdot E$ ならば $E'=F(k)\setminus E$」と置く。$E'\subseteqq F(k)$, $\phi<\cdot E'$, 且つ $E'\leq\cdot F(k)\setminus E'$ が従う。

「$k+1$ 以下の任意の自然数 j に対して，「$j<k+1$ ならば $G(j)=F(j)$」且つ「$j=k+1$ ならば $G(j)=E'$」」

によって $N[k+1]$ から A への写像 G を定義する。$G\in M(k+1)$ を示す。

$G(1)\subseteqq A$ を示す。$1<k+1$ より $G(1)=F(1)$。故に $F(1)\subseteqq A$ より $G(1)\subseteqq A$ が従う。

$\phi<\cdot G(k+1)$ を示す。$G(k+1)=E'$。ところが $\phi<\cdot E'$。故に $\phi<\cdot G(k+1)$ が従う。

j を $k+1$ よりも小である任意の自然数とする。$j<k$ の場合を考える。$j+1<k+1$ が従う。故に $G(j+1)=F(j+1)$ 且つ $G(j)=F(j)$。ところが $F(j+1)\subseteqq F(j)$ 且つ $F(j+1)\leqq\cdot F(j)\setminus F(j+1)$。故に $G(j+1)\subseteqq G(j)$ 且つ $G(j+1)\leqq\cdot G(j)\setminus G(j+1)$ が従う。

$j=k$ の場合を考える。$j+1=k+1$ が従う。故に $G(j)=F(k)$ 且つ $G(j+1)=E'$。ところが $E'\subseteqq F(k)$ 且つ $E'\leqq\cdot F(k)\setminus E'$。故に $G(j+1)\subseteqq G(j)$ 且つ $G(j+1)\leqq\cdot G(j)\setminus G(j+1)$ が従う。

故に $G\in M(k+1)$ が従う。故に $M(k+1)\neq\phi$ が従う。　［第1段終］

［第2段］「任意の自然数 n 及び $M(n)$ の任意の元 F に対して $P(F(n))\leqq 1/2^{n-1}$」を示す。自然数 n に関する数学的帰納法による。

$n=1$ の場合を示す。任意の事象 A に対して $P(A)\leqq 1$ より従う。k を任意の自然数とし且つ $n=k$ の場合の結論を仮定して $n=k+1$ の場合を示す。G を $M(k+1)$ の任意の元とする。$F=G|N[k]$ と置く。$F\in M(k)$ が従う。数学的帰納法の為の仮定より $P(F(k))\leqq 1/2^{k-1}$ が従う。故に $P(G(k))\leqq 1/2^{k-1}$。ところが $G(k+1)\subseteqq G(k)$ より $G(k)=G(k+1)\cup(G(k)\setminus G(k+1))$。故に P の有限加法性より

$$P(G(k+1))+P(G(k)\setminus G(k+1))\leqq 1/2^{k-1}$$

が従う。一方 $G(k+1)\leqq\cdot G(k)\setminus G(k+1)$。故に P の概一致性より

$$P(G(k+1))\leqq P(G(k)\setminus G(k+1))$$

が従う。故に $2\cdot P(G(k+1))\leqq 1/2^{k-1}$。故に

$$P(G(k+1))\leqq 1/2^{k}$$

が従う。　［第2段終］

［第3段］結論を示す。ε を任意の正の実数とする。

$$\lim\langle 1/2^{n};\ n\in\omega\rangle=0$$

より $1/2^{m-1}<\varepsilon$ を満たす最小の自然数 m が確定する。この m を用いる。［第1段］の結論より $M(m)\neq\phi$ が従う。故に或写像 F が存在して $F\in M(m)$。この F を固定する。［第2段］の結論より $P(F(m))\leqq 1/2^{m-1}$。故に

$$P(F(m))<\varepsilon$$

が従う。ところが $M(m)$ の定義及び数学的帰納法により $F(m)\subseteqq A$。また $M(m)$ の定義より $\phi<\cdot F(m)$。故に $B=F(m)$ と置く事により $B\subseteqq A$，$\phi<\cdot B$，且つ $P(B)<\varepsilon$ が従う。
［第3段終］　［証明終］

次に［命題 A4］［弱い確定性に関する補題］及び［命題 A5］［前精密性と概一致性とに関する補題］を用いて［命題7］［前精密性による，定量的確率の存在に関する命題］を，［命題4'］［精密比較の公準による，定量的確率の存

在に関する命題］に基づいて，導く事にする。

［命題 A6］［前精密性による，定量的確率の存在に関する命題；［命題 7］の再掲］$\leq_{\cdot}$ を前精密な任意の定性的確率とし且つ $\sim_{\cdot}$ を $\leq_{\cdot}$ より誘導される弱い同等関係とする。$\leq_{\cdot}$ に対して概一致する定量的確率が一意的に存在する。しかもこの一意的に定まる定量的確率は定量的に精密である。この定量的確率を P と表記する。またさらに「任意の事象 A に対して，$\phi <_{\cdot} A$ と $0<P(A)$ とは同値である」及び「任意の事象 B 及び Cに対して，$B\sim_{\cdot} C$と$P(B)=P(C)$ とは同値である」が従う。

［証明］$\lessapprox$ を $\leq_{\cdot}$ より誘導される弱い確定性関係とする。［命題 A4］より $\lessapprox$ は精密比較の公準を満たす定性的確率である。［命題 4′］［精密比較の公準による，定量的確率の存在に関する命題］より $\lessapprox$ に対して概一致する定量的確率が一意的に存在する事，この一意的に定まる定量的確率は定量的に精密である事，及びこの定量的確率は $\lessapprox$ に対して強一致する事が従う。この一意的に定まる定量的確率を P と表記す。

［第1段］P は $\leq_{\cdot}$ に対して概一致する事を示す。B 及び C を任意の事象とし且つ $P(B)<P(C)$と仮定する。P が $\lessapprox$に対して概一致する事より $B\ll_{\cdot} C$ が従う。故に［命題 A2］の性質1より $B<_{\cdot} C$ が従う。　［第1段終］

［第2段］A を任意の事象とする。「$\phi <_{\cdot} A$ と $0<P(A)$ とは同値である」を示す。P は $\lessapprox$ に対して強一致する。故に $\phi \ll_{\cdot} A$ と $0<P(A)$ とは同値である。ところが［命題 A2］の性質2より $\phi <_{\cdot} A$ と $\phi \ll_{\cdot} A$ とは同値である。故に $\phi <_{\cdot} A$ と $0<P(A)$ とは同値である。　［第2段終］

［第3段］B 及び C を任意の事象とする。「$B\sim_{\cdot} C$ と $P(B)=P(C)$ とは同値である」を示す。$B\sim_{\cdot} C$ と「$B\lessapprox C$ 且つ $C\lessapprox B$」とは同値である。一方 P が $\lessapprox$ に対して強一致する事より「$B\lessapprox C$ 且つ $C\lessapprox B$」と「$P(B)\leqq P(C)$ 且つ $P(C)\leqq P(B)$」とは同値である。ところが「$P(B)\leqq P(C)$ 且つ $P(C)\leqq P(B)$」と $P(B)=P(C)$ とは同値である。故に $B\sim_{\cdot} C$ と $P(B)=P(C)$ とは同値である。　［第3段終］

［第4段］Q を $\leq_{\cdot}$ に対して概一致する任意の定量的確率とする。Q は $\lessapprox$ に対して概一致する定量的確率である事を示す。B 及び C を任意の事象とし且つ $Q(B)<Q(C)$ と仮定する。$d=Q(C)-Q(B)$ と置く。$0<d$ が従う。Q が $\leq_{\cdot}$ に対して概一致する事より $B<_{\cdot} C$ が従う。故に $\phi <_{\cdot} S\setminus B$。故に［命題 A5］より「或事象 D が存在して，$D\subseteqq S\setminus B$，$\phi <_{\cdot} D$，且つ $Q(D)<d$」が従う。この D を固定する。$B\cap D=\phi$ より $Q(B\cup D)=Q(B)+Q(D)$。ところが $Q(D)<d$。故に $Q(B\cup D)<Q(B)+d$。ところが $d=Q(C)-Q(B)$。故に $Q(B\cup D)<Q(C)$。ところが Q は $\leq_{\cdot}$ に対して概一致する。故に $B\cup D<_{\cdot} C$ が従う。ここに $\phi <_{\cdot} D$ 且つ $B\cap D=\phi$。故に $B\ll_{\cdot} C$ が従う。
［第4段終］

［第5段］Q を $\leq_{\cdot}$ に対して概一致する任意の定量的確率とする。$Q=P$ を示す。［第4段］の結論により Q は $\lessapprox$ に対して概一致する定量的確率である。P の一意性より $Q=P$ が従う。
［第4段終］

［第1段］，［第2段］，［第3段］，及び［第5段］より結論が従う。　［証明終］

参 考 文 献

［1］デーデキント，ユリウス ヴィルヘルム リヒャルト (Dedekind, Julius Wilhelm Richard) 著，河野伊三郎訳，『数について —— 連続性と数の本質 ——』，岩波文庫 (33-924-1)，岩波書店，東京，1961.

［2］Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations*

of Statistics, Second Revised Edition, Dover Publications, New York, 1972, 但し第1版は John Wiley & Sons, New York, より1954年に出版されている。

[3] 園信太郎,「Savage の行為の或抽象化, Dedekind の数, 個人的確率, 及び, von Neumann-Morgenstern 効用, について」, 経済学研究 (北海道大学), 第36巻第4号, 1(457)-16(472), 1987年3月。

[4] 園信太郎,「サヴェジ氏の哲学に対する簡潔なる序説」, 経済学研究 (北海道大学), 第37巻第4号, 48(488)-61(501), 1988年3月。

[5] 園信太郎,「サヴェジ氏の定量的確率, に対する, 従属選択の原理を伴う一個の簡潔なる接近」, 経済学研究 (北海道大学), 第38巻第1号, 36(36)-84(84), 1988年6月。

[6] 園信太郎「サヴェジ書における殆ど一様な分割(1) 定義」, 経済学研究 (北海道大学), 第38巻第2号, 76(238)-13 (293), 1988年9月。

[7] 園信太郎「サヴェジ書における殆ど一様な分割(2) 定量的確率」, 経済学研究 (北海道大学), 第38巻第4号, 118(556)-143(581), 1989年3月。

(1989年, 春, 於北大教養部, 了)