



Title	確率概念に対する或初等的講義のための, 一つの素案
Author(s)	園, 信太郎
Citation	經濟學研究, 40(4), 85-92
Issue Date	1991-03
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/31874
Type	departmental bulletin paper
File Information	40(4)_P85-92.pdf



〈研究ノート〉

確率概念に対する或初等的講義 のための、一つの素案

園 信太郎

1. 目的

北大教養部と呼ばれている一個の場において、1990年4月4日から同年7月18日まで、計十五回にわたり、人文系の一部の学徒に対して、社会科学特別講義Ⅰ「経済数学」と言う表題で、筆者は講義を行なったのであるが、この経験に基づいて、より健全な同講義のために、一つの素案を、同講義の担当教官である筆者は、思索したのである。この素案を、素朴な様式において、提示することが、ここでの唯一の目的なのである。

2. 述語 $\in$

Zermelo-Fraenkelの集合論における公理系に基づき、述語

$\in$

を統制することを明言すること。この述語の利用の様式は、

$a \in A$

であり、訓は「 a は A の元である」である。但し、数学基礎論に関する議論に踏み込むことは、担当教官の素養と資質との射程外であり、結局、不可能である。しかしながら、この述語以外の

述語は必要でないことは注意すること。従って、次の様式の外延性の公理で、述語

$=$

を定義する。

$$A=B \Leftrightarrow \forall x[x \in A \Leftrightarrow x \in B].$$

また、

$$\langle x, y \rangle = \{\{x, x\}, \{x, y\}\}$$

により順序対を定義する。この定義は善良である。三重対を、

$$\langle x, y, z \rangle = \langle \langle x, y \rangle, z \rangle$$

により定義する。四重対は、

$$\langle x, y, z, v \rangle = \langle \langle x, y, z \rangle, v \rangle$$

により定義する。

$$\{x\} = \{x, x\}$$

と略記する。類を表示する記法、

$$\{x \mid Q(x)\}$$

を、平然とした雰囲気です、導入せよ。

$$f(x) = \{s \mid \exists y [s \in y \wedge \langle x, y \rangle \in f]\}$$

に基づき関数記号

$$f(\cdot)$$

を導入する。

$$f \in \text{Map}(A, B) \Leftrightarrow$$

$$f \subseteq A \times B \wedge \forall x \in A \exists ! y \in B [\langle x, y \rangle \in f]$$

に基づき、 A から B への写像の全体

$$\text{Map}(A, B)$$

を定義する。

$$f \in \text{Map}(A, B) \Rightarrow \forall x \forall y [\langle x, y \rangle \in f \Leftrightarrow y = f(x)]$$

が従うことを注意する。

$$\forall x \in A \exists y \in B [\langle x, y \rangle \in R] \Rightarrow$$

$$\exists f \in \text{Map}(A, B) \forall x \in A [\langle x, f(x) \rangle \in R]$$

に基づき選択公理を導入する。

Axiom of regularity

及び

Axiom of replacement

は、以下の議論においては必要でないことを注意する。但し、部分集合の公理は当然利用する。また、

Axiom of infinity

として、

$$\exists A [\emptyset \in A \wedge \forall x [x \in A \Rightarrow \{x\} \in A]]$$

を採用する。但し、

$\emptyset$

は、空集合を表示する記号である。

Dedekind による無限集合の定義を導入する。この無限集合の概念に基づいて、Dedekind が提示した周知の道筋に従い、自然数系列の存在、自然数系列に対する数学的帰納法、自然数系列を定義域とする写像の帰納的定義、自然数系列の同形性、自然数系列における加法、乗法、及び累乗の定義を、基礎づける。但し、零としての

0

を含む様式で自然数系列を導入し、この自然数系列を

ω

と表記する。 ω の上には、既に通常の整列順序

$\leq$

が導入されている。また、

$<$

を

$$x < y \Leftrightarrow \neg y \leq x$$

により定義する。通常 Peano の公理系と呼ばれている公理系が従うことを注意する。

従属選択の原理を,

$$\begin{aligned} &\forall x \in A \exists y \in A R(x, y) \Rightarrow \\ &\forall z \in A \exists f \in \text{Map}(\omega, A) [z = f(0) \wedge \\ &\forall n \in \omega R(f(n), f(n+1))] \end{aligned}$$

に基づき導入する。この従属選択の原理が、選択公理により従うことを注意する。

Dedekind 無限集合でない集合, 即ち, Dedekind 有限集合に対する, 基数の概念を基礎づける。特に, 任意の有限集合 A に対して, この A の基数である, ω の元が一意的に存在することを示すが, ここで従属選択の原理を利用する。

有限集合 A の基数を

$$\#(A)$$

と表記する。 A 及び B を任意の有限集合とする場合において, 次の加法法則を示す。

$$A \cap B = \emptyset \Rightarrow \#(A \cup B) = \#(A) + \#(B).$$

既に確立している数学的帰納法に基づき, この加法法則を一般化する。

通常は, 通常の数系列が既に確定しているとの前提に基づき, 有限集合の定義を行ない, 有限集合でない集合として無限集合を定義することを, 注意する。従属選択の原理を利用することにより, 通常有限集合の定義と, Dedekind による有限集合の定義とが, 同値であることを示す。

3. 定性的確率

A が S 上の完全加法族であることを次の様式に基づいて定義する。

$$0. A \subseteq \mathfrak{P}(S).$$

$$1. S \in A.$$

$$2. A \in A \Rightarrow S \setminus A \in A.$$

$$3. f \in \text{Map}(\omega, A) \Rightarrow \bigcup \{f(i) \mid i \in \omega\} \in A.$$

ここに $\mathfrak{P}(S)$ は S のベキ集合である。即ち,

$$\mathfrak{P}(S) = \{X \mid X \subseteq S\}.$$

$\{\emptyset, S\}$ も $\mathfrak{P}(S)$ も共に S 上の完全加法族である。 $\mathfrak{M}$ を, 空でない, 各元が S 上の完全加法族である, 任意の集合とする場合において,

$$\cap \mathfrak{M}$$

は S 上の完全加法族である。 M を $M \subseteq \mathfrak{P}(S)$ をみたす任意の集合とし, かつ「 M を部分集合とする S 上の完全加法族」の全体を $\mathfrak{M}$ として,

$$\sigma[M] = \cap \mathfrak{M}$$

に基づき, M を含む最小の, 但し, S 上の, 完全加法族を定義する。この場合,

$$\mathfrak{P}(S) \in \mathfrak{M}$$

より, この定義は善良である。 A を S 上の任意の完全加法族とする。順序対

$$\langle S, A \rangle$$

を可測空間 measurable space と呼ぶ。

次に「硬貨投げに関する事象系」への一個の定式を与えること。

$$\exists H \exists T [H \neq T]$$

を注意する。この H 及び T を固定する。例えば, $H = \emptyset$ かつ $T = \{\emptyset\}$ 。

$$W = \text{Map}(N, \{H, T\})$$

と置く。但し、 N は0を含まない自然数系列である。

$$\forall x \in \{H, T\} \forall i \in N [W(x, i) = \{w \in W \mid w(i) = x\}]$$

と置く。

$$M = \{X \mid \exists x \in \{H, T\} \exists i \in N [X = W(x, i)]\}$$

と置く。

$$B(W) = \sigma[M]$$

と置く。即ち $B(W)$ は M を含む最小の、 S 上の、完全加法族である。この $B(W)$ を「硬貨投げに関する事象系」と呼ぶ。 $B(W)$ 間の同形性について、敢て、言及せよ。

Savage, L. J. による著名な教科書に従い、定性的確率に関する議論を展開する。但し、可測空間 $\langle S, A \rangle$ 上の定性的確率 $\ll$ は、以下の様式に基づいて定義する。

0. $\ll \subseteq A \times A$, 即ち、 $\ll$ は A 上の二項関係である。

$$1. A \ll B \vee B \ll A.$$

$$2. A \ll B \wedge B \ll C \Rightarrow A \ll C.$$

$$3. A \cap C = \emptyset \wedge B \cap C = \emptyset \Rightarrow [A \ll B \Rightarrow A \cup C \ll B \cup C].$$

$$4. \forall A \in A [\emptyset \ll A] \wedge \neg S \ll \emptyset.$$

$A \ll B$ は「 A は B よりも確からしいには非ず」と訓む。

$$x \ll y \Leftrightarrow \neg y \ll x$$

に基づき A 上の二項関係 $\ll$ を導入する。訓は「 x よりも y は確からしい」である。

$$x = \cdot y \Leftrightarrow x \ll y \wedge y \ll x$$

に基づき A 上の二項関係 $= \cdot$ を導入する。訓は「 x と y とは無差別である」である。 $= \cdot$ は A 上の同値関係である。

可測空間 $\langle S, A \rangle$ 上の任意の定性的確率 $\ll$ に対して、

$$\forall A, B, C, D \in A [A \ll B \wedge C \ll D \wedge B \cap D = \emptyset \Rightarrow A \cup C \ll B \cup D]$$

及び

$$\forall A, B, C, D \in A [A \ll B \wedge C \ll D \wedge B \cap D = \emptyset \Rightarrow A \cup C \ll B \cup D]$$

が従う。既に確立している数学的帰納法を利用して、これらの結果を一般化すること。

完全加法族 A の元を事象と呼ぶ場合もある。またこの A を事象系と呼ぶこととする。 f が事象系 A に関する分割であることを、次の様式に基づいて定義する。

$$0. \exists n \in \omega [f \in \text{Map}(N[n], A)].$$

$$1. \forall i, j \in \text{dom}(f) [i \neq j \Rightarrow f(i) \cap f(j) = \emptyset].$$

但し、ここに、

$$N[n] = \{i \mid i \in N \wedge i \leq n\}$$

であり、特に、 $N[0] = \emptyset$ 。また、

$$\text{dom}(f) = \{x \mid \exists y [\langle x, y \rangle \in f]\}$$

であり、 f の定義域である。分割 f に対して

$$\exists! n \in \omega [f \in \text{Map}(N[n], A)]$$

が従うことに基づいて、この一意的に存在する n を「分割 f の長さ」と呼び、

$$\delta(f)$$

と表記する。特に、 $\delta(\emptyset) = 0$ 。また、事象系 A に関する分割 f が、 $\langle S, A \rangle$ 上の定性的確率 $\ll$ に関して、一様であるとは、

$$\forall i, j \in \text{dom}(f) [f(i) = \cdot f(j)]$$

をみたすことである。この場合、 f を、一様な分割であると呼ぶ。

事象系 A に関する分割 f が、事象 A に対する分割であるとは、

$$A = \bigcup \{f(i) \mid i \in \text{dom}(f)\}$$

をみたすことである。この場合さらに、定性的確率 $\ll$ に関して f が一様であるのならば、 f は A に対する一様な分割であると呼ぶ。事象 A に対する分割の全体を、

$$\text{Par}(A)$$

と表記する。定性的確率 $\ll$ が既に与えられている場合において、 $\ll$ に関して一様な、 A に対する分割の全体を、

$$\text{UPar}(A)$$

と表記する。これはまた、

$$\text{UPar}(A, \ll)$$

とも表記される。また、任意の事象 A に対して、

$$\forall i \in N[1] [\langle A \rangle(i) = A]$$

に基づいて、 $N[1]$ から A への写像 $\langle A \rangle$ を定義する。

$$N[1] = \{1\}$$

より、

$$\langle A \rangle \in \text{Par}(A)$$

かつ

$$\langle A \rangle \in \text{UPar}(A, \ll)$$

が従う。但し、 $\ll$ は $\langle S, A \rangle$ 上の任意の定性的確率である。分割 $\langle A \rangle$ の長さは 1 である。

A 及び B を任意の事象とし、かつ $B \subseteq A$ とする。また f を A に対する任意の分割とする。

$$\forall i \in \text{dom}(f) [g(i) = f(i) \cap B]$$

により、 $\text{dom}(f)$ から A への写像 g を定義する。この g は B に対する長さ $\delta(f)$ の分割となる。 g を、 f により誘導される、 B に対する分割と呼ぶ。

4. P6'

Savage, L. J. による著名な教科書に従い、定性的確率に対する要請である、 $P6'$ を導入する。

$\ll$ を可測空間 $\langle S, A \rangle$ 上の任意の定性的確率とする。 $\ll$ が要請 $P6'$ をみたすとは次のことである。

$$\begin{aligned} &\forall A, B \in A [A \triangleleft B \Rightarrow \\ &\exists f \in \text{Par}(S) \forall i \in \text{dom}(f) [A \cup f(i) \triangleleft B]]. \end{aligned}$$

以下、可測空間 $\langle S, A \rangle$ 上の定性的確率 $\ll$ を固定して議論する。

$\ll$ が $P6'$ をみたすとする。

$$\forall A \in A \exists B \in A [B \subseteq A \wedge B \ll A \setminus B]$$

が従う。

$\ll$ が $P6'$ をみたすとする。

$$\begin{aligned} &\forall A \in A [\emptyset \ll A \Rightarrow \\ &\exists f \in \text{Par}(A) \forall i \in \text{dom}(f) [\emptyset \ll f(i) \wedge f(i) \ll A \setminus f(i)]] \end{aligned}$$

が従う。

$\ll$ が $P6'$ をみたすとする。また、 $A(\cdot)$ を N から A への任意の写像とする。

$$\forall n \in N [A(n+1) \subseteq A(n) \wedge A(n+1) \ll A(n) \setminus A(n+1)]$$

を仮定する。

$$\begin{aligned} &\forall B \in A [\emptyset \ll B \Rightarrow \\ &\exists m \in N \forall n \in N [m \leq n \Rightarrow A(n) \ll B]] \end{aligned}$$

が従う。

[補題] この補題は Savage, L. J. による補題である。ここでは「単純分割に関する補題」と呼ぶこととする。 $\ll$ は $P6'$ をみたすと仮定する。

$$\begin{aligned} &\forall A \in A \exists B \in A \exists C \in A [A = B \cup C \wedge B \cap C \\ &= \emptyset \\ &\wedge B = \cdot C] \end{aligned}$$

が従う。

[証明] の概略。

$$\emptyset \ll A$$

をみたす任意の事象 A を固定する。

$$\langle A', A'', A''' \rangle \in A \times A \times A$$

かつ

$$A' \cap A'' = A' \cap A''' = A'' \cap A''' = \emptyset$$

かつ

$$A = A' \cup A'' \cup A'''$$

かつ

$$A' \ll A'' \cup A''' \wedge A''' \ll A' \cup A''$$

をみたす三重対 $\langle A', A'', A''' \rangle$ の全体を

T

と表記する。 T 上の二項関係を、

$$\begin{aligned} &R(\langle A', A'', A''' \rangle, \langle B', B'', B''' \rangle) \Leftrightarrow \\ &A' \subseteq B' \wedge A''' \subseteq B''' \wedge B'' \ll A'' \setminus B'' \end{aligned}$$

に基づいて定義する。

$$\forall x \in T \exists y \in T R(x, y)$$

を示す。次に、

$$\langle \emptyset, A, \emptyset \rangle \in T$$

及び従属選択の原理に基づいて、

$$\exists F \in \text{Map}(\omega, T)[F(0) = \langle \emptyset, A, \emptyset \rangle \wedge \\ \forall n \in \omega R(F(n), F(n+1))]$$

が従う。

$$\forall n \in \omega [\langle A'(n), A''(n), A'''(n) \rangle = F(n)]$$

に基づき、 ω を定義域とする写像 $A'(\cdot)$, $A''(\cdot)$, 及び $A'''(\cdot)$ を定義する。

$$\forall n \in \omega [A'(n) \subseteq A'(n+1) \wedge A'''(n) \subseteq A'''(n+1) \wedge A''(n+1) \subseteq A''(n) \setminus A''(n+1)]$$

が従う。

$$A' = \bigcup \{A'(n) \mid n \in \omega\}, \\ A'' = \bigcap \{A''(n) \mid n \in \omega\}, \text{ かつ} \\ A''' = \bigcup \{A'''(n) \mid n \in \omega\}$$

と置く。

$$A'' = \cdot \emptyset$$

が従う。さらに、

$$A' = \cdot A'''$$

が従う。以上で命題が従う。ここで [証明] の概略が終了する。

次に「二進的な分割系」を定義する。 A を任意の事象とし、かつ $\llcorner$ を可測空間 $\langle S, A \rangle$ 上の定性的確率とする。 Φ が A に対する二進的な分割系であることを、次の様式に基づいて定義する。

$$0. \Phi \in \text{Map}(\omega, \text{UPar}(A)). \\ 1. \Phi(0) = \langle A \rangle. \\ 2. \forall n \in \omega [2 \cdot \delta(\Phi(n)) = \delta(\Phi(n+1))] \wedge \\ \forall k \in \text{dom}(\Phi(n)) [\Phi(n)(k) = \Phi(n+1)(2 \cdot k$$

$$-1) \cup \Phi(n+1)(2 \cdot k)]].$$

単純分割に関する補題、数学的帰納法に基づく選択、即ち、有限選択、及び従属選択の原理を利用することに基づき、「 $\llcorner$ が $P6'$ をみたすならば、任意の事象 A に対して A に対する二進的な分割系が存在する」と言う主張を正当化すること。

$P6'$ と「硬貨投げに関する事象系」に対する一個の定式である

$$B(W)$$

とのかかわりについて言及せよ。但し、直積完全加法族、従属選択の原理、及び Savage, L. J. の議論に言及せよ。

5. 定量的確率

$$R$$

により実数系を表示する。 P が可測空間 $\langle S, A \rangle$ 上の定量的確率であることを、次の様式に基づいて、定義する。

$$0. P \in \text{Map}(A, R). \\ 1. \forall A \in A [0 \leq P(A)]. \\ 2. \forall A, B \in A [A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cup B) = P(A) + P(B)]. \\ 3. P(S) = 1.$$

$\langle S, A \rangle$ 上の定量的確率 P が、同じ可測空間上の定性的確率 $\llcorner$ に対して「ほとんど一致する」とは、

$$\forall A, B \in A [A \llcorner B \Rightarrow P(A) \leq P(B)]$$

をみたすことである。また、「一致する」とは、

$$\forall A, B \in \mathcal{A} [A \ll B \Leftrightarrow P(A) \leq P(B)]$$

をみたすことである。

$$I = \{x \in \mathbb{R} | 0 \leq x \wedge x \leq 1\}$$

と置く。可測空間 $\langle S, \mathcal{A} \rangle$ 上の定量的確率 P が精密であるとは、

$$\forall A \in \mathcal{A} \forall a \in I \exists B \in \mathcal{A} [B \subseteq A \wedge P(B) = a \cdot P(A)]$$

をみたすことである。

[補題 1] $\ll$ 及び P を各々、可測空間 $\langle S, \mathcal{A} \rangle$ 上の、定性的及び定量的確率とする。 $\ll$ は $P6'$ をみたすと仮定する。

$$\forall A \in \mathcal{A} [\emptyset \ll A \Rightarrow 0 < P(A)]$$

が従う。さらに、「 P が $\ll$ に対してほとんど一致するのならば、 P は $\ll$ に対して一致する」が従う。

[補題 2] $\ll$ 及び P を各々、可測空間 $\langle S, \mathcal{A} \rangle$ 上の、定性的及び定量的確率とする。 $\ll$ は $P6'$ をみたすと仮定する。従属選択の原理を利用することにより、「 P が $\ll$ に対してほとんど一致するのならば、 P は精密である」が従う。

[補題 3] $\ll$ を可測空間 $\langle S, \mathcal{A} \rangle$ 上の、 $P6'$ をみたす、定性的確率とする。また、 P 及び Q を $\langle S, \mathcal{A} \rangle$ 上の定量的確率とする。 P 及び Q の各々が $\ll$ に対してほとんど一致するのならば、 $P=Q$ 、即ち、

$$\forall A \in \mathcal{A} [P(A) = Q(A)]$$

が従う。但し、従属選択の原理により形成した二進的な分割系を利用して、この補題を証明すること。

[補題 4] $\ll$ を可測空間 $\langle S, \mathcal{A} \rangle$ 上の、 $P6'$ をみたす、定性的確率とする。「 $\langle S, \mathcal{A} \rangle$ 上の或定量的確率 P が存在して、 P は $\ll$ に対してほとんど一致する」が従う。但し、従属選択の原理により形成した二進的な分割系を利用して、この補題を証明すること。

[補題 1] から [補題 4] まだが、個別に、従って相互に依存せずに、証明されることを確認せよ。

[命題] $\ll$ を可測空間 $\langle S, \mathcal{A} \rangle$ 上の定性的確率とする。 $\ll$ は $P6'$ をみたすと仮定する。「 $\langle S, \mathcal{A} \rangle$ 上の或定量的確率 P が一意的に存在して、 P は $\ll$ に対して一致する」が従う。しかも、この P は精密である。また、 $\ll$ に対してほとんど一致する任意の定量的確率 Q に対して、 $P=Q$ 。

[証明] [補題 1], [補題 2], [補題 3], 及び [補題 4] より、明らかに従う。 [証明終]

上述の [命題] を利用して、条件つき確率の概念に対する基礎づけの一角への、言及をなすのである。さらには、実数概念と確率概念との連関に対して、愚直に、省察せよ。

(1991年, 1月7日, 新春の北大教養部にて)