HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	サヴェジ書における objectivistic views批判について
Author(s)	園, 信太郎
Citation	經濟學研究, 41(4), 1-21
Issue Date	1992-03
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/31894
Type	departmental bulletin paper
File Information	41(4)_P1-21.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

経済学研究 41-4
北海道大学 1992.3

サヴェジ書における objectivistic views 批判について

園　信太郎

1．目的

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics*, John Wiley & Sons, New York, 1954,

においてサヴェジ氏はobjectivistic viewsと彼自身がよぶ事柄を規定した後にこの観点に対する批判を行うのであるが，この批判の特性を読み取る作業を実行することが，ここでの目的である。なお，

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics*, *Second Revised Edition*, Dover Publications, New York, 1972,

が上掲のサヴェジ氏唯一の主著の第2版に相当するのであるが，第1版との異同が明記されているので，ここではこのDover版により，太文字や斜字体は皆原文の通りとして，引用を行い，しかも第1版執筆時期のサヴェジ氏の態度を問題とするのである。なおサヴェジ氏による第1版及び第2版文献表に言及する場合には，サヴェジ氏式の文献表示法を，ただし第1版と第2版とでは異なる流儀が採用されているのだが，そのまま利用することとする。

サヴェジ氏は第1章においてobjectivistic viewsと彼がよぶ事柄を提示し，かつその問題点を確認しているのだが，この章から彼の批判の特性を洞察することは困難であると筆者は判断する。彼の批判の特性は第3章の可測集合，経験による学習，及び未知固定確率に関する，数学的な，ただし基本的な，いくつかの注意において，さらには，不確定性に直面しつつ決定を下さねばならない孤独な個人のその経験を執拗に重視する論述の態度において，潜在するのだが，第4章においてその特性は明白となるのであり，この章において，サヴェジ氏はprobabilistという言葉に対する彼自身の態度を露呈したうえで，objectivistic viewsに対する，少なくとも彼にとっては極めて本質的な，ただし簡潔なように見えるかもしれない，批判を明示するのである。それ故に，probabilistという言葉への彼自身の個性的態度が彼のobjectivistic views批判の一個の基底であること，及び，彼自身の批判が，実学的手法の希求や数学原理の探求を契機としたとは言い難いことのみでなく，さらには自己のprobabilist観の正当化や自己が行わざるを得なかった，統計学の基礎に対する，全くの異端であると断じ去られてしまうかもしれない，思弁的作業への自己弁護としての側面を所有することが，多少行間を読むことにより，従うのであり，結局サヴェジ氏のobjectivistic views批判は，客観論的見方への個人論的批判と，彼の独特のprobabilist観の間接的正当化とからなる，二重的特性を持たざるを得ないのである。

2. Objectivistic views

第1章第2節3頁第3番目の段落を引用する。

Objectivistic views hold that some repetitive events, such as tosses of a penny, prove to be in reasonably close agreement with the mathematical concept of independently repeated random events, all with the same probability. According to such views, evidence for the quality of agreement between the behavior of the repetitive event and the mathematical concept, and for the magnitude of the probability that applies (in case any does), is to be obtained by observation of some repetitions of the event, and from no other source whatsoever.

Objectivistic viewsを客観論的な見方と訳しておけば，確率概念に関する客観論的な見方とは，サヴェジ氏によれば，反復的と形容される事象と数学的模型としての基礎づけが確定している確率過程の概念との間に合理的に密接な一致が存在すると主張し，さらには，その一致の程度の質及び採用される確率測度は，その反復的事象に対する観察にのみ基づいて，最終的には，定まると主張する，viewsとはいうが紛れもなく一個の，確率観なのである。なお

be in reasonably close agreement with

という表現が，慎重に選ばれた，中立公正な表現であること，及びKolmogorov，ただしサヴェジ氏が採用している綴りはKolmogoroffだが，の公理系に基づく測度論的確率論の含蓄をサヴェジ氏が既に味得していることは，いうまでもない。

さらにはBritish-American Schoolということばが同章同節の3頁から4頁にかけての段落で，ただし批判的雰囲気において，導入されるが，この段落は次である。

The great burst of statistical research in the English-speaking world in the present century has revolved around objectivistic views on the interpretation of probability. As will shortly be explained, any purely objectivistic view entails a severe difficulty for statistics. This difficulty is recognized by members of the **British-American School**, if I may use that name without its being taken too literally or at all nationalistically, and is regarded by them as a great, though not insurmountable, obstacle; indeed, some of them see it as the central problem of statistics.

ここでは英語圏において，しかも客観論的な見方に基づく，統計学の大きな発展があったことを率直に，歴史上の事実として，認めていることが注目される。

さらにこれに続く4頁の段落を引く。

The difficulty in the objectivistic position is this. In any objectivistic view, probabilities can apply fruitfully only to repetitive events, that is, to certain processes; and (depending on the view in question) it is either meaningless to talk about the probability that a given proposition is true, or this probability can be only 1 or 0, according as the proposition is in fact true or false. Under neither interpretation can probability serve as a measure of the trust to be put in the proposition. Thus the existence of evidence for a proposition can never, on an objectivistic view, be expressed by saying that the proposition is true with a certain probability. Again, if one must choose among several courses of action in the light of experimental evidence, it is not meaningful, in terms of objective probabil-

ity, to compute which of these actions is most promising, that is, which has the highest expected income. Holders of objectivistic views have, therefore, no recourse but argue that it is not reasonable to assign probabilities to the truth of propositions or calculate which of several actions is the most promising, and that the need expreesed by the attempt to set up such concepts must be met in other ways, if at all.

純粋に客観論的な見方によれば，反復的な事象に対してのみ確率の応用が有効となり得るのであるから，特定の命題の真実さの程度を表わすために確率を利用することは容認されないか，あるいは，その命題の真偽が「未知ではあるが定まっている」とすれば，その真か偽かに応じて，その命題に対する確率は1か0かの，未知ではあるが定まっている値を，取るとせざるを得ないかの，いずれかであること，さらには，この確率観に立つ限り，実際に得ている証拠に基づいて，例えば実験結果や実地検分に基づいて，いずれの選択肢が最も，ただし自己にとって，実入りがあるかを，不確定性を確率概念により把握しつつ見積もることは容認されないことが，ここで確認されているのであり，またこの上の引用段落で指摘されているように，純粋に客観論的な見方のこれらの難点は，当然ではあるが，British-American Schoolも承知している事柄なのである。

これに続く4頁の段落を次に引用する。

The British-American School has had great success in several respects. The number of its adherents has rapidly increased. It has contributed many procedures of strong intuitive appeal and (one feels) of lasting worth. These have found widespread application in many sciences, in industry, and in commerce. The success of the school may pragmatically be taken as evidence for the correctness of the general view on which it is based. Indeed, anyone who overthrows that view must either discredit the procedures to which it has led, or show, as I hope to show in this book, that they are on the whole consistent with the alternative proposed.

British-American Schoolが確かな実用性を所有する多くの手法を多くの分野にもたらしたことを，第1版執筆時期においてサヴェジ氏は，ひとまず認める態度を示していること，及びそれらの手法を，British-American Schoolの確率観との比較において，論理的により包括的かつより精確な確率観に基づき正当化することへのある程度の関心を，第1版執筆時期においてではあるが，サヴェジ氏は失ってはいなかったことが，この箇所から知れるのである。

以上の引用箇所に批判的雰囲気があることは事実だが，その内容は常識的であり，さらには穏当であると筆者は判断する。

3．第3章第4節 Some mathematical details

同章同節40頁第2番目の段落を，最後の一文を除いて，引用する。

To indicate a different topic that will also be treated here, those of you who have had more than elementary experience with mathematical treatments of probability know that it is not usual to suppose, as has been done here, that all sets have a numerical probability, but rather that a sufficiently rich class of sets do so, the remainder considered unmeasurable. Again, it is usual to suppose that, if each of an infinite sequence of disjoint sets is measurable, the probability of their union is the sum of their probabilities, that

is, probability measures are generally assumed to be countably additive. But the theory being developed here does assume that probability is defined for all events, that is, for all sets of states, and it does not imply countable additivity, but only finite additivity. The present section not only answers the questions raised in the preceding paragraph, but also discusses the relation of the notions of limited domain of definition and of countable additivity to the theory of probability developed here. The general conclusions of this discussion are: First, there is no technical obstacle to working with the limited domain of definition, and, except for expository complications, it might have been mildly preferable to have done so throughout. Second, it is a little better not to assume coutable additivity as a postulate, but rather as a special hypothesis in certain contexts.

確率概念を統制する計算体系の基盤が可測空間であることは当然サヴェジ氏も承知しているが，しかし事象の全体を特定の完全加法族として処理せずに，あえて「全事象としての集合の任意の部分集合は，不確定性に直面しているその個人にとって，事象である」という様式を彼は採用したのであるから，この破格への弁明をサヴェジ氏はなさねばならないのである。だが引用箇所の最後から第2番目の文，Firstから始まる一文は，明快な弁明とは言い難いのであり，実際，サヴェジ氏の確率概念に対する執拗な態度と，しかもこの彼自身の態度を緻密に伝達するために，彼自身が一貫して採用している，説明の労の回避とは無縁である，その論述の個性的流儀とからすれば，もしかりにではあるが彼の選好が，彼が採用せざるを得なかった様式よりも，通常の枠組による処理の方式へと，たとい微かであれ，傾くのならば，破格の選択は起こり得なかったと筆者は判断せざるを得ないのだが，しかも，非可測集合に対するサヴェジ氏の態度のこの微妙さは，Kolmogorovの公理系の要である，「確率」が全事象に対して 1 を配分する完全加法的測度であることを要請する純粋数学的仮定を，個人的不確定性下選好を統制する，自己が自己に対して課する規範としての公準系に，組み込むことは，議論の展開上得策でないとする，Secondから始まる最後の文が示す判断の明快性と対照すれば，筆者にとっては一個の謎である。なおサヴェジ氏は同章同節41頁第2番目の段落において，任意の実数集合に対して値が確定し，かつ実数直線上のLebesgue測度の拡張であり，しかも合同な実数集合に対しては同じ値を取る，実数直線上の有限加法的な測度が存在すること，及びこの場合の有限加法性を完全加法性に置き換えることはできないこと，即ち，一次元Lebesgue測度の実数全体のベキ集合上への拡張である，合同変換に関して不変な，完全加法的確率測度は存在しないことを，注意しているが，サヴェジ氏がそこで簡略に言及しているように，前者はBanach, Stefan, による古典的命題であり，また後者は，選択公理が本質的に機能することにより示される「Lebesgue可測でない集合の存在」により従う，今日においては，周知の命題である。

次に第3章第4節42頁冒頭の段落を引く。

To get a feeling for the question whether literally all sets should be regarded as measurable, suppose that S is a cube of unit volume and that the probability measure P that strictly agreeds with $\leq$ is such that the probability of a parallelepiped is equal to its volume. It follows that the probability of any set having Jordan content is its Jordan content, but, if a set has not Jordan content, a continuum of possibilities is still open. Though other possibilities are conceivable, it is not unnatural to consider an idealized person for whom the numerical probability

attached to each Borel set, or even each Lebesgue measurable set, is its Lebesgue measure. To go further and take seriously comparisons between sets that are not Lebesgue measurable, or even between those that are not Borel measurable, seems to me to be without any implication bearing on reality. I suppose it might be argued, on the contrary, that there is no feature of reality that can properly be interpreted by postulating that the person is able to compare only sets from a sufficiently narrow field, so that it is simpler and more elegant to admit all sets. The question seems to be one of taste, but the following remark illustrates what I consider an awkwardness in supposing probability to be attached to all sets. It would seem, at first glance, that the person should be able, if he is so constituted, to regard all pairs of geometrically congruent sets for which he makes any comparison at all as equivalent, but the famous Banach-Tarski paradox [B5] shows that this cannot be done if all sets are regarded as measurable. I think it a little more graceful to abstain from comparison between the more bizarre sets than to give up, or even much modify, my everyday notions about the symmetry of such probability problems associated with geometry.

ここでサヴェジ氏は非可測集合に対する彼の関心を露呈するのだがその文気は直截的とは言い難いのであり，実際，段落の初めではJordan測度の拡張であるBorel測度や，さらにはLebesgue測度に基づく，ただしidealized personによる，確率配分を考えることは不自然ではない，即ち

it is not unnatural

と表現し，しかしながら中程では，Lebesgue非可測とまで行かずとも，Borel可測でない集合間での真剣な確率比較すら既に，自分にとっては現実性にかかわる含意がないように思われる，つまり

seems to me to be without any implication bearing on reality

と述べつつも，「これと対立して，その個人が充分に狭い集合体からの集合のみを比較できるのであると要請することにより適切に解釈し得る，現実性を持つ特徴は存在しないのであり，それ故に，すべての集合を比較の対象として容認することがより単純かつより優雅であるとも，議論され得ると，この私は思いいたるのである」とサヴェジ氏は微言するのであり，しかもこの微言が示唆する流儀こそがサヴェジ氏が現実界において採用している流儀そのものなのだが，が，しかし，終わりの部分では，このような議論はtasteの問題にすぎないというむきもあろうが，事態は見かけほど単純ではないとして，「三次元Lebesgue測度の三次元Euclid空間のベキ集合上への拡張である，有限加法的かつ合同変換に関して不変な，測度は存在しない」という命題を自明な副産物としてもたらす，the famous Banach-Tarski paradox に，言及するのであり，ついに，確率配分の問題と幾何学的直観との間の妙味をあえて捨てることは得策であるまいとして，ほどよく狭められた事象系における比較へと我我の欲念を制限することのほうが，より奥ゆかしかろうとするのであり，しかもこの最後の判断は，サヴェジ氏が現実界において取っている態度とは，少なくとも外面においては，齟齬するのである。

この曲折した段落から，サヴェジ氏のobjectivistic views批判は，いわゆる頻度論批判などとは異なり，客観論的な見方の基盤である測度論的な枠組，従って集合論的枠組と，不確定性に直面しつつ行いを選択せざるを得ぬ個人の経験との間の，その格差への省察を一個の契機として

いることが知れるのであり，しかも，驚くべきことだが，サヴェジ氏はこの微妙な省察における自己の心の揺動を，忠実に，しかし簡潔に，記述しているのである。

なお同章同節43頁最後の段落でサヴェジ氏は，de Finetti, Bruno, や Koopman, Bernard Osgood, の議論に言及しつつ，不確定性下選好を行う個人の定める確率が完全加法的でないことに対して，不合理であるとよぶに値すると，我我が，感じることがないかぎり，確率測度の完全加法性をサヴェジ氏の公準系に組み込むつもりはないということを言明し，かつ可算無限集合上の，ただし一点のみからなる集合に対しては値0を配分する，有限加法的確率測度が完全加法的とはなりえないという，自明ではあるが文脈に適合した，周知の事実に注意を促している。ここにもやはり「個人の経験」を執拗に問うサヴェジ氏の態度が現われているが，しかし論旨は明晰である。

4．第3章第6節 The approach to certainty through experience

同章同節46頁冒頭の段落を末尾の二文を除いて引用する。

In §3, the theory of personal probability was, from the purely mathematical point of view, reduced to that of probability measures, a subject that has been elaborately studied, more or less explicitly, for centuries. Any mathematical problem concerning personal probability is necessarily a problem concerning probability measures—the study of which is currently called by mathematicians **mathematical probability** — and conversely. The particular outlook and interpretation implicit in a personalistic concept of probability leads, however, to problems that, though perfectly meaningful for mathematical probability, might not otherwise have been emphasized.

さらに同章同節同頁の第3番目の段落を引く。

As was brought out in §5, the person learns by experience. The purpose of the present section is to explore with a moderate degree of generality how he typically becomes almost certain of the truth, when the amount of his experience increases indefinitely. To be specific, suppose that the person is about to observe a large number of random variables, all of which are independent given B_i for each i, where the B_i are a partition of S. It is to be expected intuitively, and will soon be shown, that under general conditions the person is very sure that after making the observation he will attach a probability of nearly 1 to whichever element of the partition actually obtains.

不確定性に直面している個人のその行動の重要な一側面を，個人的確率の概念により把握し，かつサヴェジ氏が提示している公準系を前提とすれば，この確率概念が，有限加法的確率測度に関する算術の体系の統制下にはいることを，ただし演繹的に，確認する作業は，同章の第5節までで完了しているのだが，上掲の初めの部分では，純粋数学の一分野としてのその地位が既に確定している測度論的確率論における議論を，完全加法的確率測度を，特定の個人の個人的確率を表現している定量的確率として解釈することにより，個人の不確定性下選好に関する議論として読み直し得るということ，及び有限加法的確率測度を利用して表現される個人的確率に関する議論が，通常の確率論においては純粋数学者の興味をあまり引くことがない測度論的議論へと，我我の関心を，誘導し得るということを述べているのである。次の引用箇所では，

個人が経験により学習するという事柄を，個人的確率に基づく条件つき確率を利用して，確率論的に把握し得ることを指摘した同章第5節の議論を受けて，個人の経験が限りなく増加する状況においては，その個人が直面する世界のその真なる状態がいかなるものであるかについて，不確定性下の選好を行わざるを得ないその個人は，ほとんど確信するようになること，及び想定されている観察が，もしかりにではあるが，終了するのならば，その世界の真の状態がいかなるものであれ，このような確信に自己が至ることを，観察が始まる前に，その個人は承知していることが，簡略な流儀においてではあるが，この節において，条件つき確率を利用して，例示されることを注意しているのである。なおこの節50頁の第2番目の段落は次であり，これはこの節の性格の要約である。

To summarize informally, it has now been shown that, with the observation of an abundance of relevant data, the person is almost certain to become highly convinced of the truth, and it has also been shown that he himself knows this to be the case.

この第3章第6節における実際の議論展開は，大数の弱法則，対数関数に負の符号をつけた関数 -log の正の実数値上での凸性，及び凸関数に関する基本的不等式，ただしサヴェジ氏はJensenの不等式という呼称は使っていない，を利用する，数学的には，全くではないが，ほぼ自明な性格のものであり，それ故に，本来の数学的興味には乏しいのだが，「個人が，自己の経験を地道に積み重ねることにより，世界の真の状態なるものへのある確信へと到達するはずである」という一個の憶測の，ただし個人的確率に基づく，サヴェジ氏式正当化の試みとして，筆者は読まざるを得ないのであるが，一方では，サヴェジ氏は確かに第2章第3節において，the true description of the world, としての，the true state of the world, 即ち「真の状態」なる言葉を導入しているのであるが，この問題の節の，少なくとも数学的議論の展開に関する限りでは，「真の状態に関する確信」という表現における「真の状態」なるものは，なんら本質的な役割を演じてはいないとも，筆者は読み取らざるを得ないのである。しかしここでもまた，あくまでも「個人の経験」を基盤として確率概念を把握しようとするサヴェジ氏の態度が貫徹されているのであり，しかも本来の客観論的な見方に立つ限りでは，実際，objectivistic viewsでは，反復的事象と数学的模型としての確率過程との間のreasonableな対応，及びその事象に関する観察結果にのみ基づき，それ故に「個人の経験」とよばれる事柄が本質的な役割を果たす余地は，少なくとも理論上は，排除される様式において，確率が確定されねばならぬとするのであるから，「経験による学習」とよばれる事柄を，この節におけるように，測度論における，しかもきわめて基本的な事柄のみに基づいて，分析する事すら，論外とせざるを得ないのである。

なおここで同章同節49頁式(14)について，この節で利用されている諸記号を前提とした上で，数の原理に関する一個の古典への算術上の作法として，あえて微細に過ぎる指摘を行いたいのである。それは三列にわたるこの式の，第三列目における，第二列と第三列とを結ぶ等号の成立が，

$$(*) \qquad E\left(R'^{-1}(x_r) \mid B_1 \right) = 1$$

なる等式の成立を自明として，それ故にこの等式（*）への直接的言及なしに，式（14）に至るまでのサヴェジ氏の議論から，明らかに帰結するとされていることに関するものなのであり，しかし，残念ながら，問題の箇所までの議論からは（*）は従わないということなのであり，それ故に，論理的には，問題の等号が自明であるとは言い難いのである。実際，

$C(i) = \{ x \mid \xi(x \mid i) > 0 \}, i=1, 2,$

と置くと，サヴェジ氏の前提からすれば，$C(i)$ は有限集合であるがさらに，同頁の冒頭の一文中の式 $\phi = 1$ より，$C(1) \subseteqq C(2)$ となる。従って式（＊）において，条件つき期待値作用素中の関数の定義は確定するが，しかし右辺は 1 ではなく

$$\sum_{x \in C(1)} \xi(x \mid 2)$$

とせねばならない。それ故に，もし $C(1) \neq C(2)$ ならば，この和は 1 よりも小であるから，問題の三列目の等号は，「左辺は右辺より大である」を示す不等号 $>$ により置き換えられねばならない。また，$C(1) = C(2)$ ならば，この和は 1 に等しいので，当然，サヴェジ氏の三列目の $=$ は正当である。だが，前者の場合には，式(14)の上の行でサヴェジ氏が明示している証明すべき不等式 $I > 0$ が，ここで指摘した修正により得られる不等式により，直ちに従うのであるから，式(14)にかかわるサヴェジ氏の結論は，そのまま通用するのである。

5．第3章第7節における未知固定確率

同章同節の表題は Symmetric sequences of events であるが，客観論的な見方を保持する者が，「未知ではあるが固定されている確率」という表現によって指し示そうとする，一個の状況に対する批判的分析を，de Finettiによる議論に基づいて，簡潔率直に行うことが，サヴェジ氏の本来の意図なのであり，それ故に，de Finettiによる表現定理への言及はあるが，対称的，symmetric，と形容される確率測度，即ち52頁での，ただしDover版のためのサヴェジ氏による脚注における，引用符つき形容詞 “exchangeable”を用いれば，「交換可能な」確率測度に関する，数学的議論の展開が第一の関心事でないことは明白である。

客観論的な見方からすれば，ただしいかなる個人からも「外的世界である」とされる一個の場を想定した上でだが，その外的世界における特定の系のその特性を表示する可能な諸指標の内の一つの，重要ではあるがあくまでも一つの，指標が，「確率」と呼ばれるのであり，しかもこの「確率」は，その特定の系に対する，ただし特定の試行の反復として把握されるあらかじめ指定されている実験を想定した上でだが，その実験結果の系列のみに基づいて，その確率測度としての特性が，ただし理論上は，確定するという性格を所有する，確率概念なのである。従って，客観論的な見方を保持する統計家が，もしかりにではあるが，「あなたから見ても，そして私から見ても，紛れもなくそこにあるあの一個の硬貨を，向こうにいるあの彼が繰り返し，しかも限りなく，投げ上げるという一個の実験を我我が想定するのならば，少なくとも我我にとっては未知である，ただし固定されている，あの硬貨が表を現わすその確率は，観察される各回の実験結果からなる表裏の系列における，表の出現の様式，例えば，各回までの結果において，表が現われる相対的頻度を，その各回に対応させて得られる，表が現われる相対的頻度からなる系列，のみに基づいて，ただし我我の判断とは別個の指標として，確定するのである」と主張したとしても，この主張の現実界における適否がいかなるものであれ，彼は自己の確率観に，少なくとも表面上は齟齬しない，表現を採用していることになるのである。

だが，純粋に個人論的な統計家には，もしかりにではあるが，そのような統計家がこの現実界において紛れもなく存在しているのであるとしても，上述の客観論的統計家のように，正正堂堂と「未知ではあるが固定されている確率」という言い回しを，ただし客観論的な見方からすればこの言い回しは極めて自然に生じて来ざるを得ないのだが，利用することは，決して許されないのである。実際，個人論的な見方を彼が保持して行こうとすれば，彼が直面せざるを得ぬと想定されるいかなる不確定性に対しても，

彼は，少なくとも理論上は，彼によってその値が定められる「確率」，即ち「その不確定性に対する，彼自身の，個人的確率」を，自己に対する，自己による，孤独かつ独特の尋問により，配分しなければならないのであり，それ故に，すべての確率は，少なくとも彼にとっては，ただ固定されているというだけでなく，既知でなければならないはずのものなのである。従って，「純粋に個人論的な見方は，確率に関する通常の議論において，平然と，しかもしばしば，利用される未知固定確率の存在を，全く排除してしまうのであるから，この見方は，錯誤でないとしても，欠陥を，しかも大きな欠陥を，持っている確率観であるとせねばならない」という判断は，少なくとも有用性を追及する見地からすれば，正当であるかのようであり，さらには，この「欠陥」を契機として，純粋に個人論的な見方を暗黙の内に放棄してしまい，個人論的な見方と客観論的な見方との折衷へと救いを求めようとする傾向すら，生じ得るかもしれないのである。だが，サヴェジ氏が指摘するように，「未知固定確率」がかかわり得る状況に対する，ただし純粋に個人論的な見方からの，数の原理に基づく分析が，de Finettiにより既に与えられているのであり，それ故に，上述の「欠陥」に基づく，個人論的な見方に対する，ただし客観論的な見方からすれば全く正当な，一個の批判は，そのままでは，個人論的な見方における欠陥を指摘したものとは，純粋に個人論的な見方からすれば，言い難いのである。

そこでまず50頁から51頁にかけての第3章第7節冒頭の段落を引く。

A problem often posed by statisticians is to estimate from a sequence of observations the unknown probability p that repeated trials of some sort are successful. On an objectivistic view, this problem is natural and important, for on such a view the probability that a coin falls heads, for example, is a property of the coin that can be determined by experimentation with the coin and in no other way. But on a personalistic view of probability, strictly interpreted, no probability is unknown to the person concerned, or, at any rate, he can determine a probability only by interrogating himself, not by reference to the external world.

さらにこれに続く51頁第2番目の段落を引く。

This situation has been interpreted to imply that the personalistic view is wrong, or at any rate inadequate, because it apparently cannot even express one of the most natural and typical problems of statistics. Thus far in this book, I have not argued against the possibility of defining some useful notion of objective probability, but have contented myself with presenting a particular notion of personal probability. Therefore, at this point it might be tempting to seek a dualistic theory admitting both objective and personal probabilities in some kind of articulation with one another. De Finetti [D3] has shown, however, that it is not necessary to do so, that the notion of a coin with unknown probability p can be reinterpreted in terms of personal probability alone.

最初の段落でサヴェジ氏は「その，the，未知なる確率」を自明な事柄であるとして利用することが本来の個人論的な見方からは容認されないはずであることを率直に指摘するが，さらには，「その外的世界，the external world」への直接的言及によって確率を定めようとする営みとの妥協を一切排除する性格を，本来の個人論的な見方が所有していることを，確認しているのである。また次の段落では，「その未知なる確率」という言葉は，少なくとも統計学において

は，利用されて当然であり，かつ重要な言葉であるという，客観論的主張を，ひとまず容認した上で，実際，少なくとも本邦においては，「未知固定確率」が高等学校の教科書に当然の事柄として登場しているはずだが，しかしながら，このような客観論的主張に対する，個人論的な見方が持つ，根元的不適応が，個人論的な見方の欠陥とは，少なくとも論理上は，見なし得ないこと，及び客観論的な見方と個人論的な見方との折衷である dualistic theory への欲求は本来必要でないことを，de Finettiの業績に言及しつつ，サヴェジ氏は簡潔に注意するのである。

なお，本筋から多少それるが，ここで文献に関する短い注意を付加することとする。サヴェジ氏による文献表の274頁において，

[D2] "La prévision: ses lois logiques, ses sources subjectives," *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 7 (1937), 1-68.

及び

[D3] "Le vrai et le probable," *Dialectica*, 3 (1949), 78-93.

とあるが，上掲二番目の段落では，確かにサヴェジ氏は，この[D3]へと言及はしているのだが，ただしこの[D3]を筆者は未読であるが，この段落に続く議論においてサヴェジ氏が言及しているのは[D2]のみである。また筆者は，明らかに語学的怠惰の故に，この de Finetti による古典的論文も未読なのだが，しかし，出版社及び出版年にあえて注意を促しつつ言及するのだが，今筆者の手元にある手軽な論文集，

Kyburg, Henry E., Jr., and Howard E. Smokler, *Studies in Subjective Probability*, Robert E. Krieger Publishing Company, Huntington, New York, 1980,

の53頁から118頁にかけて，この[D2]の英訳が収められているのであり，しかもこの英訳の78頁から90頁にかけての CHAPTER III *Exchangeable Events* では，多分 de Finetti 式確率観の当然の帰結としての「de Finetti の表現定理」に対する，Fourier変換に基づく証明が与えられているのである。なおこの英訳の193頁から224頁にかけて，1977年の de Finetti の別の議論の英訳も収められている。サヴェジ氏は1971年11月1日に急逝しているのであるから，上掲の小論文集もde Finettiのこの別の議論も当然未知である。ところが，Dover版のためにサヴェジ氏が追加した文献表の292頁に，

Kyburg, Henry E., Jr., and Howard E. Smokler
1964 *Studies in Subjective Probability*, New York, John Wiley and Sons.

とあるが，上掲の手軽な論文集をこのWiley版小論文集の，通常の意味での，再版とみなすことは困難なのであり，実際，内容の大きな差異が存在するのであり，例えば，サヴェジ氏の急逝の後に世に出た，ただしサヴェジ氏による文献表の296頁には掲示されている，

Savage, Leonard J.
1971 "Elicitation of personal probabilities and expectations," *Journal of the American Statistical Association*, 66, 783-801,

が新版には収められているのである。

次に52頁末尾の段落を引く。

Examination of situations in which "unknown probability" is appealed to, whether justifiably or not, shows that, from the personalistic standpoint, they always refer to symmetric sequences of events in the sense of

the following definition. The sequence of random variables $\mathbf{x}_r$, taking only the values 0 and 1, is a *symmetric*† *sequence*, if and only if the probability that any b of the $x_r(s)$'s equal 1 and any c other $x_r(s)$'s equal 0 depends only on the integers b and c.

ここで短剣符†はWiley版，即ち第1版での，脚注を示すものであり，その脚注は

† De Finetti uses the French word for "equivalent."+

であり，また，ここで上付の＋はDover版，即ち第2版での，脚注を示すものであり，その脚注は

+ He and others now prefer "exchangeable." The concept seems to have been first suggested by Jules Haag (1928).

である。両脚注とも哲人統計家としてのサヴェジ氏の片鱗を示すものであるが，ここでは無視することとする。

これは symmetric sequences of events とサヴェジ氏が呼ぶ事柄に対する事実上の定義にほかならないのではあるが，客観論的な流儀において「未知」なる確率が利用される幾つかの状況を，その利用の様式の現実界に対する適否に基づいてではなく，従って「その未知確率」という言葉が実際の場で有利に機能するか否かという問とは無縁に，純粋数学的に省察することによりこの概念が得られたことを，あえてサヴェジ氏が注意していることは，注目すべきであると，筆者は判断する。

次に53頁冒頭の段落を引く。

It is easy to verify that any mixture of independent sequences in the sense of (3) is a symmetric sequence. De Finetti has discovered that the converse is also true. These conclusions can be formally summarized thus:

THEOREM 1 A sequence of random variables $\mathbf{x}_r$, taking only the values 0 and 1, is symmetric, if and only if there exists a probability measure M on the interval $[0, 1]$ such that the probability that any prescribed n of the $x_r(s)$'s equal 1 is given by (4). Two such measures, M and M', must be essentially the same,† in the sense that, if B is a subinterval of $[0, 1]$, then $M(B)=M'(B)$.

ここで脚注†は

†Technical note: If "probability measure" were here understood to mean a countably additive probability measure on the Borel sets of $[0, 1]$, the theorem would remain true, and the essential uniqueness of M would become true uniqueness.

である。なお冒頭の文の(3)とは，52頁冒頭の二行をともなった，51頁の末尾の行である次式である。

$$(3)\quad P(x_r(s)=x_r;\ r=1, \cdots, n) = \int p^y(1-p)^{n-y}\, dM(p),$$

where M is a probability measure on the real numbers in the interval $[0, 1]$.

また定理中の(4)とは，52頁第2番目の段落中の次式である。

$$(4)\qquad \int p^n\, dM(p).$$

ただしここに n は任意の非負整数である。なお53頁における二重短剣符‡の付いた第1版での脚注で，サヴェジ氏は，この定理自身は the theory of the Hausdorff moment problem により very quickly and naturally に従うことを注意してい

る。

この定理1はde Finettiの表現定理と呼ばれる命題であるが，サヴェジ氏はこの定理においてprobability measureという言葉を有限加法的確率測度の意味で使っているのであり，それ故に，定理中の，そしてこの定理に基づくサヴェジ氏の議論中の，M 及び M' は，有限加法的確率測度であることは，単に確率測度と呼べば今日では完全加法性を満たすことが暗黙の前提であるはずなので，注意を要することである。なおこのことと連関する微細な注意がこの節の末尾に付加してある。

この定理により，「表が出る未知固定確率」なる概念を利用する，通常流布している，硬貨投げに関する表現が指し示そうとする状況は，「未知固定確率」を利用することなしに，純粋に個人論的な見方から，表現されることとなるのである。例えば，「この硬貨が表を見せるその確率は，私にとって未知であるが，しかしその未知ではあるが固定されている確率は，二分の一を越えることはない」という表現が指し示そうとする状況は，「この硬貨を投げ上げ続けるという試行系列を，この私は，対称的な，即ち交換可能な，確率過程により表現するのだが，この対称的な列に対する，de Finettiの表現定理によりその存在が保証されている，あの有限加法的確率測度は，1/2を越える1以下の実数全体に対しては，測度0を配分すると，この私は判断する」と表現されるのである。実際，53頁第3番目の段落で，サヴェジ氏は次のように注意するのである。

It is Theorem 1 that makes it possible to express propositions referring to unknown probabilities in purely personalistic terms. If, for example, a statistician were to say, "I do not know the p of this coin, but I am sure it is at most one half," that would mean in personalistic terms, "I regard the sequence of tosses of this coin as a symmetric sequence, the measure M of which assigns unit measure to the interval $[0,1/2]$." This condition on M means in turn that for every n the (personal) probability of n consecutive heads is at most 2^{-n}, as is easily verified. I do not insist that propositions couched in terms of a fictitious unknown probability are bad, if understood as suggestive abbreviations, but only that the meaningfulness of such propositions does not constitute an inadequacy of the personalistic view of probability.

この最後の文でfictitious unknown probabilityとサヴェジ氏は述べているが，「その未知なる確率を p とする」という言い回しにおける確率 p は，それが存在することの論理的基盤が極めて曖昧であるので，fictitiousという形容詞は正当であると，筆者は判断するのである。しかしもし，このような仮想的な確率を利用する表現が，なんらかの意義を有するのであるとしても，その有意性が，純粋に個人論的な見方の，統計学の基礎における不備を示唆するものでないことは，サヴェジ氏による，簡潔ではあるが，de Finettiの表現定理に対する評価と説明とから明らかなのである。

「未知固定確率」を利用する，あるいはthe unknown probabilityを利用する，客観論的な見方からすれば不可欠な表現の流儀が示唆することを試みているその状況を，この独特の「未知」なる確率を利用せずに，純粋に個人論的な見方から，数学的に厳格に表現し直す試みは，上で述べたように，de Finettiの議論に基づいてサヴェジ氏が簡潔に指摘しているように，定理1における有限加法的確率測度 M を利用する様式に依存しているのである。しかしこの M は，この定理においては，測度として現われてはいるがサヴェジ氏にとっての本来の確率，即ち個人的確率として現われている訳ではないのである。従って，個人的な確率としての解釈を持ち

得るとサヴェジ氏によって仮定されている，対称的な確率過程を定める確率測度と，この M とを結びつける，ただしその解釈が明瞭な命題が，もし可能ならば，提示されることが望まれるのである。しかしサヴェジ氏は，この種の命題が既に de Finetti によって与えられていることを，53頁から54頁にかけての段落で次のように指摘するのである。

The mathematical concept of probability measure or, a trifle more generally, bounded measure is fundamental to mathematics generally. Probability measures, often under other names, are, therefore, employed in many parts of pure and applied mathematics completely unrelated to probability proper. For example, the distribution of mass in a not necessarily rigid body is expressed by a bounded measure that tells how much of the body is in each region of space. We must, therefore, not be surprised if, even in studying probability itself, we come across some probability measures used not to measure probability proper but only for auxiliary purposes. In the event that p is not actually an unknown parameter, the measure M presented by Theorem 1 seems at first sight to be such a purely auxiliary measure, but, as a matter of fact, M does measure certain interesting probabilities, at least approximately. For example, letting

$$(6) \qquad \bar{x}_n = \frac{1}{n}\sum_{1}^{n} x_r,$$

it can be shown that ［引用者による補正。δ は有限加法的確率測度 M の分布関数の連続点であると仮定する］

$$(7) \quad \lim_{n\to\infty} P(\bar{x}_n(s) \leq \delta) = M(p \leq \delta).$$

In words, the person considers the average of any large number of future observations to be distributed approximately the way p is distributed by M. This is an extension of the ordinary weak law of large numbers, proved in [D2] along with a corresponding extension of the strong law.

結局単位区間上の測度 M が，M の分布関数の連続点 α 及び β によって定まる，半開区間 $]\alpha, \beta]$ に配分する値は，対称的系列に対する n 回までの観察に関する算術平均 $\bar{x}_n$ が $]\alpha, \beta]$ にはいるその個人的確率の，n に関する極限値として解釈できるのである。なお，この引用段落の終わりから二番目の文で，サヴェジ氏は式(7)に対して，「測度 M による配分の様式に従って，近似的に，多数回にわたる将来の観察のその算術平均が分布することになると，その個人は考察する」と了解できる，ただし英語による，解釈を与えているが，しかし，式(7)自身は，例えば，そこで言及している収束が0以上1以下の任意の実数 δ に関して一様であるというような，収束の状況には，直接に言及はしていないのであるから，「p が M によって分布されるようにして，the way p is distributed by M」という言い回しは，過大であり，誤解を招く恐れがあると筆者は判断するのである。しかし，このような細かい文脈においてさえも，不確定性に直面しつつ決断を下さねばならないその一個人の経験を重視する，サヴェジ氏の態度が貫徹されているのである。

この第3章第7節では，客観論的な見方からすれば正当であるように思えてしまう「未知ではあるが固定されている確率」という事柄と，純粋に個人論的な見方とが，無縁であることを契機として，個人論的な見方の確率観としての難点を指摘しようとする流儀に対して，de Finetti の古典的結果に基づいて，正当な反論が簡潔率直に提示されているのであるが，しかしこの反論が，「未知固定確率」を，少なくとも表面上は平然と利用している，客観論的な見方に対する，

サヴェジ氏による，従って個人的確率の概念に基づく，それ故に，個人の経験を重視する立場からの，間接的批判となっていることは明白である。

なお55頁における，式(12)が現われる段落の次の次の段落の，第二の文中の，

if and only if M assigns the measure 1 to some one value of p

という表現は，

if and only if M assigns the measure 1 to any neighborhood of some one value of p

としなければならないのである。実際，ここでの M は有限加法的確率測度なのであるから，前者のままであると，サヴェジ氏がこの表現を含むその文で明らかに,clearly,成立するとしている命題に対する,その反例が,サヴェジ氏自身が第5章第4節78頁の末尾から二番目の文中で言及している，Banachによる古典的な，正整数上の有限加法的測度のある例を利用して，容易に提示できるのである。このような注意は微細に過ぎるかもしれないが，あえて付加することとした。サヴェジ氏は完全加法性を,確率概念を規定する公準系には,組み込まない立場を採用しているのであるが，この箇所では，彼自身の数学的経験に基づいて，多分意識せずに，M が完全加法的であるのならば紛れもなく通用することとなる一個の選択肢を，結果としては，選んでしまったこととなるのである。

6．第4章第4節における objectivistic views 批判

同章同節の61頁から62頁にかけての段落を引く。

Keynes, writing in 1921 of what are here called objectivistic views, complained, "The absence of a recent expositon of the logical basis of the frequency theory by any of its adherents has been a great disadvantage to me in criticizing it." (Chap.Ⅷ, Sec.17, of [K4]). I believe that his complaint applies as aptly to my position today as to his then, though I cannot pretend to have combed the intervening literature with anything like the thoroughness Keynes himself would have employed. Reichenbach, to be sure, presents in great detail an interesting view that must be classified as objectivistic [R2], but it seems far removed from those that dominate modern statistical theory and form the main subject of the following discussion. Whatever objectivistic views may be, they seem, to holders of necessary and personalistic views alike, subject to two major lines of criticism. In the first place, objectivistic views typically attach probability only to very special events. Thus, on no ordinary objectivistic view would it be meaningful, let alone true, to say that on the basis of the available evidence it is very improbable, though not impossible, that France will become a monarchy within the next decade. Many who hold objectivistic views admit that such everyday statements may have a meaning, but they insist, depending on the extremity of their positions, that that meaning is not relevant to mathematical concepts of probability or even to science generally. The personalistic view claims, however, to analyze such statements in terms of mathematical probability, and it considers them important in science and other human activities.

さらに62頁の第2番目の段落を引く。

Secondly, objectivistic views are, and I think

fairly, charged with circularity. They are generally predicated on the existence in nature of processes that may, to a sufficient degree of approximation, be represented by a purely mathematical object, namely an infinite sequence of independent events. This idealization is said, by the objectivists who rely on it, to be analogous to the treatment of the vague and extended mark of a carpenter's pencil as a geometrical point, which is so fruitful in certain contexts. When it is pointed out to the objectivist that he uses the very theory of probability in determining the quality of the approximation to which he refers, he retorts that the applied geometer—a fictitious character whose reputation for solidity in science is unquestioned — likewise uses geometry in determining the quality of his approximations. Let the geometer then be challenged, and he replies with a threefold reference to experience, saying, "It is a common experience that with sufficient experience one develops good judgement in the use of geometry and thenceforth generally experiences success in the predictions he bases on it." "Now," says the objectivist, "the geometer's answer is my answer." But it seems to critics of objectivistic views that, though the geometer may be entitled to make as many allusions to experience as he pleases, the probabilist is not free to do so, precisely because it is the business of the probabilist to analyze the concept of experience. He, therefore, cannot properly support his position by alluding to experience until he has analyzed that concept, though he can, of course, allude to as many experiences as he wishes.

第一の引用段落で提示されている objectivistic views 批判の要旨を少しく一般化して述べれば,「通常の客観論的な見方によれば,反復的と形容される事象に対してのみ,例えば,「繰り返され得るであろうその試行を,もし仮にではあるが限りなく繰り返すのならば得られることとなり得るであろう結果の系列の,その全体」における,ある種の部分集合に対してのみ,確率を配分することとならざるを得ないのであるから,また,より一般的に表現すれば,統計学の基礎づけにおいて,正当であると呼ぶに値する確率概念とは,確率配分を許容する事象と,確率配分を許容し得るとしても,数の原理に基づく,真剣な考察には値しない事象との間の,少なくとも漠然とした,ある区別を,承認するものでなければならないのであるから,このような見方によれば,不確定性に直面しつつ決断を下さねばならないその個人が考察せざるを得ないこととなる任意の事象に対して,確率を配分する流儀は,統計学の基礎づけにおいて正当であるとは言い難いとして,当然排除されてしまうのである。しかし,前章第3章までのサヴェジ氏による,極めて基本的な数の原理のみに基づく,簡潔率直な議論を尊重する限り,「「任意の事象」に対して確率を配分することの,統計学の基礎づけにおけるその正当性を,我我は否定すべきでない」という一個の主張を,非数学的であるとして,真剣な考察の対象から除外することは,我我にとっては,既に許されないはずである」と,なるのである。

なお,冒頭の一文中の[K4]であるが,これは,サヴェジ氏の第1版文献表277頁から,付加されているサヴェジ氏自身による短評とともに引用すれば,次である.

Keynes, John Maynard

[K4] *A Treatise on Probability*, London and New York, Macmillan & Co., 1921; second edition, 1929.

A long, but often entertaining, account of Keynes' view, a necessary one. The historical

passages and bibliography are of special interest.

また同文献表の279頁より[R2]の部分を引用すれば次となる。

Reichenbach, Hans
[R2] *The Theory of Probability*, Berkeley and Los Angeles, University of California Press, 1949.
The most recent and complete statement of Reichenbach's elaborately worked out objectivistic view.

このReichenbachの書物を,筆者は残念ながら,未読なのだが,今筆者の手元にある,同出版社より1971年に出された再版によれば,目次と索引とを除いて482頁におよぶ,数の原理に関する,労作なのである。しかしサヴェジ氏は第4章第2節58頁第4番目の段落において,「合成的確率,composite probability」に対する非友好的文脈において,この労作に,批判的に言及しているのであり,この段落をすべて引くと次である。

Finally, the objection concerning composite probability would seem to apply, even if an endless hierarchy of higher order probabilities were introduced. The composite probability B would here be the limit of a sequence of numbers, $E_n(E_{n-1}(\cdots E_2(P_1(B))\cdots))$, a limit that could scarcely be postulated not to exist in any interpretable theory of this sort. The reader may wish to evaluate for himself the arguments in favor of such a hierarchy put forward by Reichenbach (Chapter 8, [R2]), taking proper account of the differences between Reichenbach's overall view, and his mathematical theory, of probability on one hand and, on the other, the personalistic view and measure-theoretic mathematical theory that are the basis of my critique of higher order probabilities.

さて一方Keynes卿による古典[K4]であるが,筆者の手元にある,

Keynes, John Maynard, *A Treatise on Probability*, The Collected Writings of John Maynard Keynes, Volume VIII, St. Martin's Press, Inc., New York, for the Royal Economic Society, The Macmillan Press Ltd., London, as an affiliated publisher, 1973,

によれば,同書の第8章の,ただし手元の全集版の章番号はローマ数字ではなく算用数字なのだが,第17節は,この章の最終節だが,119頁から120頁にかけての一個の段落のみからなるものであり,しかもその内容はここで引用するにふさわしい性格を持っているので,これをあえて,サヴェジ氏による批判を補足する雰囲気において,次にそのまま引用する。

The absence of a recent exposition of the logical basis of the frequency theory by any of its adherents has been a great disadvantage to me in criticizing it. It is possible that some of the opinions, which I have examined at length, are now held by no one; nor am I absolutely certain, at the present stage of the inquiry, that a partial rehabilitation of the theory may not be possible. But I am sure that the objections which I have raised cannot be met without a great complication of the theory, and without robbing it of the simplicity which is its greatest preliminary recommendation. Until the theory has been given new foundations, its logical basis is not so secure as to permit controversial applications of it in practice. A good deal of modern statistical work may be based, I think, upon

an inconsistent logical scheme, which, avowedly founded upon a theory of frequency, introduces principles which this theory has no power to justify.

この第一の引用段落でサヴェジ氏は，上で注意したKeynes卿とReichenbachとへの言及をも含めて，客観論的な見方における，事象概念に対する独特の制限が提示されることとなるその動機づけの，論理的基盤が極度に不明確であるという，伝統的事実の確認を簡潔に行っているのであり，さらには，個人論的な見方が数の原理に基づく真剣な考察の対象とはなりえないという断定は，サヴェジ氏が実際に展開している議論を尊重するのならば，承認できないはずであるという，サヴェジ氏自身の意見を付加しているのである。ただし，Keynes卿がthe frequency theoryと呼ぶ事柄と，サヴェジ氏がobjectivistic viewsとしてまとめている事柄とが，どの程度まで一致するのかは，この論述の第5節でのべた「未知固定確率」への態度を考えれば，前者は後者に真に含まれるはずであると筆者は憶測はするが，明白ではないのであり，しかも，この筆者の論述では冷淡に無視しているのだが，サヴェジ氏は，実際には，Keynes卿の主張を，necessary views であるとサヴェジ氏自身が呼ぶ見方に含まれるとして，personalistic viewsの立場から批判することを，ただしobjectivistic views批判とは別系統の議論により，試みてしまっているのであり，それ故に，Keynes卿へのサヴェジ氏による言及は，断章取義的には正鵠を得ているようだが，その論理的正当性は不明確なのである。またReichenbachの労作への言及は，上で引用したように，前節第5節で示したサヴェジ氏によるde Finettiへの言及と比較すれば明らかなように，抽象的と呼ばざるを得ず，Reichenbach式objectivistic viewへの正当簡潔な批判であるか否か，筆者には，判断ができないのである。

第二の引用段落において，サヴェジ氏は，客観論的な見方，objectivistic views，に対する，一個の簡潔かつ致命的な批判が存在していることを，鋭敏に確認しているのであるが，しかしここでサヴェジ氏は，probabilist という名詞に対する常識的でない態度を，ただしこの常識的でない態度は，この段落に至るまでのobjectivistic views批判の展開を支える，紛れもなく一個の基底であると，筆者は，判断せざるを得ないのであるが，この独自の態度を，多分意識的に，露呈するのである。

客観論的な見方に内在する悪循環の指摘とは，「反復的事象と特定の確率過程との間の合理的に密接であるとされる対応の存在，即ち，「近似」という言葉を利用して表現すれば，反復的事象に対する特定の確率過程による充分な精度をもつ「近似」の存在を，仮定することが，客観論的な見方の前提であるが，この見方においては，繰り返され得ると想定される試行を，もし仮にではあるが限りなく繰り返すのならば，その結果として得られることとなり得る結果の系列の全体と，純粋数学における考察の対象である確率過程との間の，その「近似」が，充分な精度であると判断する段階において，暗黙のうちに，客観論的な見方がその流儀に忠実な様式において定義しなければならない，その確率概念が利用されているのである」という主張である。例えば，「この硬貨を投げ上げる場合において，表がでる確率は二分の一である」という主張を，客観論的な見方から表現し直すことを考えるのならば，この場合しばしば採用される様式は，しかもこの様式は，少なくとも本邦においては，高等学校における数学において平然と利用されているはずのものなのだが，「nを任意の正整数とする場合において，この硬貨の表及び裏を，各各，1及び0で表現すれば，各項が1あるいは0である，n項からなる列の，ただしこのような列は全部で2^n個存在するのだが，その全体における，0以上n以下の各整数kに対して定まる，「k個の1と$n-k$個の0とからなる列の全体」，即ち「n回この硬貨を投げ上げる場合に丁度k回表がでるとい

う事象」を表現する集合，に対して，値

$$p(n,\ k)\ =\ \frac{n!}{k!\cdot(n-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$$

を配分するその確率測度によって定まる，一個の確率過程により，この硬貨を限りなく投げ続けることにより得られるであろう結果の列の全体が把握される」と，多分，なるであろう。ただし，説明の中立性を保つために，「把握される」という言い回しを用いることで，「近似」という言葉は排除したのだが，これは，通常「近似」という言葉は，「誤差」に対応する概念が想定された上で利用されるのであるから，もし仮にではあるが，サヴェジ氏が，暗黙のうちに，なんらかの「誤差」を想定したうえで，その「誤差」の類似物を，客観論的な見方を保持する者たちは「暗黙のうちに」利用しているのであると，論難するのであるのならば，少なくとも筆者は，その論難の論理的根拠は薄弱であると判断せざるを得ないからなのである。さて，この表現のし直しにおいて，上で述べてあるように，1及び0は，各各，表及び裏を表現するのであり，また，「k個の1とn-k個の0とからなる列の全体」は，「n回この硬貨を投げ上げる場合に丁度k回表がでるという事象」を表現するのであるが，しかし，「その確率測度」の値である $p(n,\ k)$ はいかなる事柄を表現しているのであろうか？ 通常は，この問に対して，「その硬貨をn回投げ上げるという試行は，繰り返され得る一個の試行であるから，この試行を限りなく繰り返す場合に得られるであろう結果の列を想定することができるが，この列の第N回までの結果のうちで表が丁度k回でている結果の総数を$K(N)$とすれば，比率 $K(N)/N$ が，Nが増加するに従って，値 $p(n,\ k)$ に限りなく近づくという状況を，表現しているのである」と，客観論的な見方を尊重する者ならば，多分答えざるを得ないであろう。しかし，さらに，当然だが，「「比率 $K(N)/N$ が，Nが増加するに従って，値 $p(n,\ k)$ に限りなく近づく」という言い回しにおける「限りなく近づく」ということは，いかなる事柄を指し示しているのか？」と，我我は，問わねばならないのである。この場合，「この「限りなく近づく」ということは，多分，いかなる正の有理数rに対しても，比率 $K(N)/N$ と値 $p(n,\ k)$ との間のなんらかの隔たりが，例えば，これら二つの値の差の絶対値が，rよりも大となるようなその「たしからしさ」が，Nが増加するに従って，「無視できる「たしからしさ」」となるというようなことを，示唆しているのであろう」と，筆者は憶測せざるを得ないのであるが，しかしもしそうならば，当然，この「たしからしさ」とは何かと，我我は問わねばならないのであり，そこでもし，この問に対して，「その確率測度」という言葉が再び利用されるのならば，再び，「「その確率測度」の値である $p(n,\ k)$ はいかなる事柄を表現しているのであろうか？」と，我我は，問わねばならないのであり，結局問答は振出に戻り，客観論的な見方に対して極度の不信感を持っている我我の蒙昧は，少しも改善されずに終わるのである。ただしサヴェジ氏は冒頭の文で，悪循環，circularity，と述べているが，これは「条件つき」の悪循環なのであり，客観論的な見方の支持者たちからの理性的な反論が，当然期待されねばならない所なのである。

しかしさらにサヴェジ氏は，客観論的な見方に立つ多分一部の者には，架空の，しかも学術上の評価が堅固不抜である「幾何学者，geometer」の，その個人的権威と，その「幾何学者」が利用するであろう「経験，experience」という言葉とに基づいて，自分達の立場を擁護する傾向があることを指摘するのである。この擁護は，サヴェジ氏は明確には指摘していないのだが，上で述べた悪循環の嫌疑に対して直接に答えることはせずに，「その確率測度」がいかなる事柄を表現しているのかを真剣に問うことは，probabilistの本来の役割ではなく，またそのような問への答は，個個の現場における一人一人の経験の積み重ねにより各人が摸索するほかはな

いものである，という態度を暗に含むものなのである。なおサヴェジ氏が a threefold reference to experience という言い回しで指し示そうとした事柄にかかわる「経験」を，Xという記号を利用して，少しく一般化して述べれば，多分次のようになるであろう。

第一は，Xに関する，ただし特定の公理系を前提とした，多数の基本的証明と多数の基本的計算とを繰り返すことにより，個人が積み重ねることとなる，その個人の「経験」。

第二は，その個人がXを現場において利用する営みの繰り返しにおいて得られる，多数の，成功及び失敗の事例に関する，現場において積み重ねられるその個人の「経験」。

第三は，「これら二つの「経験」をその個人が繰り返し集積するに従って，Xの応用に関する適切な判断力をその個人は所有するに至るのである」と，我我によって解釈される，個人に関する学習の過程を，我我が，多くの個人に対して観察することにより，我我一人一人が積み重ねることとなるその「経験」。

このXを「幾何学」とした場合が，サヴェジ氏が「幾何学者」の返答として直接言及している事柄に多分対応するのであるが，サヴェジ氏が問題としている場合は，このXを「測度論的確率論」，あるいは単に「確率論」，とした場合であるはずである。さてさらに，このXを利用してだが，サヴェジ氏式「幾何学者」の意向をくみとった上で，彼によるサヴェジ氏への返答を憶測すれば，恐らくは次のようになるであろう。

「Xの利用の様式に対する省察とは，我我一人一人が，上述した三つの「経験」を尊重しつつ，個個の場合に即して慎重に行わなければならない事柄なのであり，それ故に，ある利用の場を想定した上で，Xにおけるある一般的概念の例を指定して，その例がその想定されている場においていかなる事柄を表現しているのかと問うことは，少なくともそのような問に対して規範的な様式に基づく返答を我我が期待する限りにおいては，理論上は，得策であるとは言い難いのであり，さらには，Xという理論を考究する者たちにとっては，このような末節的問いかけへの返答を真剣に考察することは，実際上は不毛であると，この私は，ただし私の個人的な経験に基づいてではあるが，判断せざるを得ないのである」

結局，今このXを「確率論」とすれば，「「その確率測度はいかなる事柄を表現するのか」という問は，個個の場合において我我一人一人が，「経験」に基づいて，その答を摸索しなければならない問なのであり，この問に対する論理的に精確であると呼ぶに値する一般的返答をprobabilist に対して期待することは，我我の「経験」に基づく限りでは，的外れである」という「幾何学者」からの返答が，サヴェジ氏に対して，もたらされることとなるであろう。

さて筆者はサヴェジ氏が提示しているサヴェジ氏式「幾何学者」の返答が，見事ではあるが簡潔に過ぎると判断して，少しく一般化して，中立性を失わないように努力しつつ，冗長に書き直したのではあるが，ここまで書き直してしまうのならば，サヴェジ氏の問いかけに対する「幾何学者」の態度は，数学的理論の応用全般に通用する，極めて常識的態度であると筆者は判断せざるを得ないのである。ところがサヴェジ氏は，この事実上の暗黙の常識に対してあえて異議を唱えているのであり，それはXという理論の考究者たちの基本的性格が，Xが「幾何学」である場合と，「確率論」である場合とでは，本質的に異なるとする立場に基づくのであり，結局，probabilistの本来の役割は，ただし引用中の表現によれば the business は，「経験概念，the concept of experience」の分析であると，サヴェジ氏は，断じるのである。従ってサヴェジ氏

の個人的経験を尊重する限りでは,probabilistは純粋数学者では全くないのであり，それどころか,通常の応用数学者とも見なし難いのである。これは全くの反常識的態度であり，しかもサヴェジ氏によるobjectivistic views批判のその動機づけの根底にかかわるprobabilist観であると,筆者は判断せざるを得ないのであるが，さらにはそれ故に,サヴェジ氏のobjectivistic views批判は,通常の頻度論批判とは根本的に異なる意図,即ち彼自身のprobabilist観の正当性への間接的証拠の提示という意図を，暗に含むものであると，筆者は，独断せざるを得ないのである。結局，サヴェジ氏による批判は，一見する限りでは，彼が保持する個人論的見方の論理的一貫性に関する優位性を明らかに意識した上での，客観論的見方への個人論的批判であるが，一方では，サヴェジ氏が実際に行っているような，確率概念に関する，常識ある数学者たちからすれば数学的とは言い難い,思弁的作業をも,確率論研究者の正当な作業であると，かなり強引に主張するための，ある種の自己弁護の側面を紛れもなく所有しているのである。

7．結論

サヴェジ氏のobjectivistic views批判の特性を読み取る作業を以上のように，ただし簡略ではあるが，行うことにより，この哲人統計家の批判が二重的特性を持つことがほぼ明らかとなるのである。彼の批判は，その始めにおいては，この論述の第2節で確認したように，客観論的な見方への，頻度論批判的な，常識的かつ穏当な雰囲気を装うのではあるが，しかし，実際にはそれは，第3，4，及び5節で読み取ったように，不確定性に直面しつつ行為を選択せざるを得ない孤独な個人の経験をあくまでも重視することにより，客観論的見方の基礎である，既に常識として流布している,測度論的定式化への,純粋に個人論的な立場からの批判をも含むのである。さらには，前節第6節において筆者はあえて指摘したのだが，客観論的な見方が暗黙のうちに悪循環に陥っているのではないのかという嫌疑と随伴して，サヴェジ氏の批判の根底には,経験概念の分析こそがprobabilistの本来の役割であるとする，独特の確率論者観が存在しているのであり，かつ，それ故に，probabilistは，測度論的確率論の有意性を，他の数学的諸理論の応用におけるのと同様の，極めて常識的な，流儀によって，主張することは，サヴェジ氏のprobabilist観からすれば,許されないこととなるのである。従って筆者は,サヴェジ氏のobjectivistic views批判は，客観論的な見方への個人論的批判としての性格のみでなく，サヴェジ氏自身の反常識的probabilist観への間接的正当化，さらには，自己の思弁的作業をも確率論研究者の正当な作業であると,ただし常識的なprobabilistたちに対してだが，容認させるための，自己弁護としての側面をも所有していると判断せざるを得ないのである。

8．補遺

この論述の第3節の第2番目の引用段落においてサヴェジ氏は,彼の第1版文献表271頁によれば,

Banach, S., and A. Tarski
[B5] “Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes,” *Fundamenta Mathematicae*, 6(1924),244-277,

に言及しているが，筆者はこの古典的論文を未読である。しかし,

志賀 浩二（しが・こうじ),『無限からの光芒—ポーランド学派の数学者たち』,日本評論社,東京，1988年4月20日,

の第2部,203頁から238頁まで,のすべてがこの

Banach-Tarskiの逆理の解説にあてられていることは，少なくとも我我にとっては，多分周知である。またこの解説の末尾の文献表には，専門書である，

Wagon, Stan, *The Banach-Tarski Paradox*, *Encyclopedia of Mathematics and Its Applications*, *Volume 24*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985,

が掲示されている。なおこの専門書のローマ数字のv頁には，次のような多少無気味な会話が，史実とは多少異なるではあろうが，しるされている。

Delians: "How can we be rid of the plague?"
Delphic Oracle: "Construct a cubic altar of double the size of the existing one."
Banach and Tarski: "Can we use the Axiom of Choice?"

さて上掲志賀氏の書物の208頁の定理2に基づきBanach-Tarskiによる問題の命題を述べれば次のようになる。

「A 及び B を，三次元Euclid空間における，内点を持つ有界点集合とする。この場合ある正整数sと，三次元Euclid空間における点集合からなる集合列 $\{A_i\}_{i=1}^{s}$ 及び $\{B_i\}_{i=1}^{s}$ とが存在して，次の（1）及び（2）をみたす。

（1） $A = \cup_{i=1}^{s} A_i, B = \cup_{i=1}^{s} B_i$, かつ異なる任意の添数$j$及び$k$に対して$A_j \cap A_k$ 及び $B_j \cap B_k$ は共に空である。
（2）各添数iに対してA_iとB_iとは三次元Euclid空間において合同である。」

この命題が逆理と呼ばれる状況を同書210頁第3節の第3番目の段落において志賀氏は，原文のまま引用するが，次のように説明する。

半径1cmの豆粒のような球と，太陽系が占めるくらいの大きな宇宙空間を考えてみよう．定理2を認めれば，この途方もなく大きな空間も，半径1cmの球を有限個の細片に適当に分割して，組み立て直すことによってでき上ってしまうというのである．

サヴェジ氏は，少なくとも第1版執筆時期においては，このような「自然界の本来の性」が立ち現われる状況をも，意識せざるを得なかったのである。

(1991年12月2日，北大教養部の快適なる一室にて)

註．第5節の引用文の式(7)に対する補正は，第1回目の校正中の1992年1月25日に，付加したものである．