



Title	ケインズ『一般理論』私注賃金基金説の系譜について(30)
Author(s)	白井, 孝昌
Citation	経済學研究, 45(4), 96-136
Issue Date	1996-03
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/32018
Type	departmental bulletin paper
File Information	45(4)_P96-136.pdf



<研究ノート>

ケインズ『一般理論』私注

賃金基金説の系譜について(30)

白井孝昌

われわれは賃金基金説の系譜をジョン・ステュアート・ミルからディヴィッド・リカードへ、そして、さらには、アダム・スミスへと遡る過程で、スミスの賃金理論の中に、ハーバート・サイモンが言うところの《知足的行動》(satisficing behavior)に合致すると思われる議論を見出した。それは、個人にせよ、あるいは、組織体にせよ、経済主体の行動形式として極めて興味深いものに思われるので、われわれの議論の本筋から些かそれることになるけれども、その行動概念に対するサイモン自身のアプローチの在り方を検討してきたのである¹⁾。その際の、われわれの問題意識は、次のような問いによって表明されるであろう。すなわち、現代経済理論において《知足的行動》という行動形式はどこまで説明されているのか²⁾。

ところで、サイモンは《知足的行動》にかかわる彼の研究活動の初期の段階で、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの『ゲームの理論と経済行動』³⁾で論じられている《ゲーム》および、《戦略》(strategy)の概念と軌を一にする

うに、サイモンが《知足的》(satisficing)という言葉が最初に用いたのは1956年に発表された論文「合理的選択と環境の構造」であるが、その着想の実質的内容は、すでに著書『組織管理行動』の初版(1947年)で述べられていたのである。われわれは、その初期におけるサイモンの考え方を検討すべく、その著書の内容の検討に着手したのであった。その著書の第2版(1957年)の「イントロダクション」では、《知足的》という言葉に加えて、《縛られた合理性》(bounded rationality)という言葉が用いられるようになっていた。そして、サイモンは、その研究の後期には、《知足的行動》という言葉捨てて、《縛られた合理性》という言葉を用いるようになったように見受けられる。今日(1990年現在)、《縛られた合理性》の概念は、ゲーム理論の専門家たちの注目するところとなっているようである。この点については、たとえば、David M. Kreps, *Game Theory and Economic Modelling* (Oxford: Clarendon Press, 1990)の第6章「縛られた合理性と回顧」(6. Bounded rationality and retrospection, pp.133-85.)、および、*The Makers of Modern Economics*, Vol. I, edited by Arnold Heertje (New York: Harvester Wheatsheaf, 1993)所載のゼルテンの論稿 Reinhard Selten, "In search of a better understanding of economic behaviour," *ibid.*, pp.115-39, を参照せよ。

- 1) Herbert A. Simon, *Administrative Behavior, A Study of Decision-Making Process in Administrative Organization* (New York: Macmillan and Co., 2nd ed., 1957). 《知足的行動》(satisficing behavior)の概念および訳語に関する概説は、拙稿「賃金基金説の系譜について(18)」(以下、「系譜(18)」と略称する)、本誌第39巻第1号(1989年6月)、pp.94-104にある。サイモンの著書の「第2版へのイントロダクション」から第I章「意思決定と管理組織」、第II章「組織管理理論の若干の問題」、第III章「意思決定における事実と価値」、そして、第IV章「組織管理行動における合理性」の第1節「手段と目的」と第2節「選択肢と諸帰結」の前半部分までを、われわれは、拙稿「系譜(18)」の後半から、「系譜(26)」の前半部分〔本誌第42巻第3号(1992年12月)pp.71-87〕までで紹介してきたのである。
- 2) すでに拙稿「系譜(18)」(p.103)で述べたよ

- 3) John von Neumann and Oscar Morgenstern, *The Theory of Games and Economic Behavior* (Princeton, N. J.: Princeton University Press, 2nd ed., 1947).

考え方に到達していたと述べていたのであった。そこで、われわれはフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンのその著書の該当箇所を検討することにし、これまで、その第1章「経済問題の定式化」の第2節「合理的行動の問題の定性的な議論」と第3節「効用の概念」のサブセクション3.6「諸公理とそれらの解釈」までを検討してきたのである。

ちなみに、《ゲーム》を《標準形式》(the normal form)に定式化するには、そのゲームに参加する《プレイヤー》(players)と、それらのプレイヤーの各々が選択することのできる総ての《戦略》(strategies)と、そうして、それらの戦略を選択・実行した結果として得られる(と期待される)《利得》(payoffs)とが、明確に定義されていなくてはならない。これら三つの要素の最後の《利得》を計測する尺度として、一般的に、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの言う《数値的効用》(numerical utilities)が必要とされるのであり、この意味において、《数値的効用》、あるいは《基数的効用》(cardinal utilities)の概念を確立するための作業を、ゲーム理論の建設者たちは避けて通ることができなかったのである。

経済理論において、《基数的効用》に對置されることの多い《序数的効用》(ordinal utilities)の概念は、その効用指数が任意の《単調増加関数》(monotonic increasing functions)によって変換されることを許容する。それに対して、《基数的効用》の概念は、その効用指数が任意の《線形変換》(linear transformations)のみを許容することを意味するのである。その場合、二つの選択対象AとBの効用の差分と、別の組み合わせAとCのそれ、あるいは、BとCの効用の差分との間の大小関係は変化することなく保存される。それゆえ、たとえば、限界効用(marginal utilities)という概念が経済分析において意味を持つことになるのである。

このような二つの効用概念の存在を背景とし

て、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの《数値的効用》の概念を基礎付ける出発点は確率的な諸事象間の選択行動の局面に求められたのである。たとえば、いま、三つの異なる事象A, B, および, Cがあつて、ある特定の個人について、それら三つの事象のあいだには、BよりもAが選好され、そうして、AよりもCが選好されるという関係があるものとしよう。さらに、それら三つの諸事象の効用指数を、それぞれ、 U_A , U_B , および、 U_C とすれば、これらの効用指数の間には、

$$U_B < U_A < U_C$$

という大小関係が成り立つはずである。

ここで、事象Bが $100 \times \alpha$ パーセントの確率で起こり、残りの $100 \times (1 - \alpha)$ パーセントの確率で事象Cが起こるという確率結合事象もまた、当該個人の選択対象になり得るものと想定しよう。そうして、この結合事象と事象Aとの間の選択の問題を考えることにしよう。

いま、 $\alpha = 0$ であるとするなら、結合事象の中で事象Cが起こる確率は100パーセントであるから、結合事象の効用は U_C に等しくなり、

$$U_A < U_C$$

であるから、事象Aよりも問題の結合事象のほうが選好されることになる。

他方、 $\alpha = 1$ であるとするなら、結合事象の中で事象Bが起こる確率は100パーセントになり、したがって、結合事象の効用は U_B に等しくなり、しかも、

$$U_B < U_A$$

であるから、問題の結合事象よりも事象Aのほうが選好されることになる。

そうすると、 α が1と0との間の特定のある α_0 という値を取るとき、

$$U_A = \alpha_0 U_B + (1 - \alpha_0) U_C$$

となるような局面が存在すると考えることがで

きる。そのとき、問題の結合事象と事象 A は、どちらがより選好されるとも言えず、両者は無差別 (indifferent) であるということになるであろう。上の効用指数の等式は、

$$U_A - U_C = \alpha_0 (U_B - U_C)$$

あるいは、

$$\frac{U_C - U_A}{U_C - U_B} = \alpha_0$$

と書き直すことができる。この最後の等式は、事象 A と事象 C の効用の差分と、そうして、事象 B と事象 C の効用の差分との比、あるいは倍率が、事象 A と無差別な結合事象の中で事象 B の起こる確率の値 α_0 によって規定されることを示している。このようにして、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンは、彼らの《数値的効用》の《基数的性質》を導いたのである。

このような性質を有する《数値的効用》の数体系が、どのような基本的諸前提に依存しているかを明らかにするために、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンは、その体系を公理論的に構成することを試みている。その際に、どのような命題を公理として選択するかについて、彼らは次のように述べていたのである。

「諸公理の数は多すぎではならず、それらの体系は出来る限り単純かつ透明であるべきであり、そうして、それぞれの公理は、その妥当性が直接に判断できるような直ちに直観的な意味を持たなくてはならない (The axioms should not be too numerous, their system is to be as simple and transparent as possible, and each axiom should have an immediate intuitive meaning by which its appropriateness may be judged directly.)」⁴⁾

フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンが上に示したような着想に基づいて構想する《数値的効用》の数体系を、このような三つの要件を

満たす公理系として構成することができるならば、その数体系にはわれわれの《直観》を通じて、経験的な基礎付けが与えられるであろう。

ところで、前稿「系譜 (29)」⁵⁾で紹介したように、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンは、彼らの《数値的効用》の数体系の基盤を構成する諸公理として、次の三つを選択するのであった。

(A) 完備した順序付けの公理 (the axiom of a complete ordering),

(B) 確率的結合事象の順序付けの公理 (the axiom of probability combination and ordering), および,

(C) 確率的結合の代数学の公理 (the axiom of algebra of combining)。

完備した順序付けの公理 (A) は、ある経済主体の選択対象となる諸事象の間に、どちらが選好されるか、あるいは、両者は無差別であるかという関係が一つだけ成立するという命題を指す。いま二つの事象の効用指数を U と V で表すと、これら二つの数の間には、

$$U > V, U < V, \text{あるいは}, U = V,$$

の三つの関係のうちの一つだけが必ず成立するということが、この公理 (A) によって要請されるのである。

公理 (A) は、確率的結合事象を選択対象としない世界でも通用する命題である。それゆえ、その公理は、その他の二つの公理 (B) および (C) よりも、「その妥当性が直接に判断できるような、直ちに直観的な意味を持たなくてはならない」という要請を満たし易い性質の命題であるように思われる。しかし、そのことは、この公理の経験的妥当性が肯定されるということの意味するものでは必ずしもないことに注意しなくてはならない。「その妥当性が直接に判断できる」ということは、その妥当性が肯定され

4) *Ibid.*, p. 25.

5) 本誌第43巻第2号 (1993年9月), pp.71 (201) - 104 (234).

るにせよ、また、否定されるにせよ、その判断が直接にできるということではなくてはならない。尤も、その公理の経験的妥当性が否定されるならば、その公理を含む公理系は意味をなさなくなるであろうから、その妥当性が肯定される場合だけを考えればよいのではないかという疑問が提起されるかもしれない。しかし、公理(A)が経験的妥当性を有すると判断するか否かは、個人によって異なり得るという意味で、多少とも《主観的》な性質の判断であると考えられる。したがって、この公理の経験的妥当性を否定する人がいると同時に、他方で、それを肯定する人がいるという事態も十分に起こり得るであろう。経験的に論駁可能な(refutable)命題とは、このような事態において、完全に葬り去られることもなければ、また、絶対の信頼も得られることのない命題なのである。その経験的妥当性を肯定されるにせよ、否定されるにせよ、ともかくも、「その妥当性が直接に判断できるような、直ちに直観的な意味を」公理(A)は有するように思われる。

これに対して、公理(B)と(C)は確率的結合事象を選択対象とする世界に特有の命題であり、そのような世界における諸行動様式について十分な知識を持たない人々にとっては、必ずしも「その妥当性が直接に判断できるような、直ちに直観的な意味を」これらの命題が持っていると言うことは困難であるかもしれない。

まず、公理(B)は、たとえば、二つの異なる事象の効用指数 U と V に対して、

$$U < V$$

という順序が[公理(A)によって]与えられているとするならば、効用指数 U をもたらす事象が確率 α で起こり、そうして、効用指数 V をもたらす事象が確率 $(1-\alpha)$ で起こるような結合事象の効用指数は

$$\alpha U + (1-\alpha)V$$

で定義され、しかも、

$$U < \alpha U + (1-\alpha)V < V$$

が成立することを要請する命題である。

この公理(B)を承認するならば、大きさの異なる二つの効用指数に対応する二つの事象の確率結合事象を、それらの二つの指数の間に来るあらゆる指数に対応させることができ、それらの指数の大小関係が、それぞれの指数に対応する確率結合事象の間の選好関係を表示することになるのである。

最後に、第3の公理(C)は問題の経済主体の選択対象となる確率結合事象の形成に当たってすべての効用指数に一次結合の代数的演算が適用できることを保証するための命題である。

これだけの諸公理が承認されるならば、先に述べたフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの《数値的効用》が過不足なく定義されるであろう。しかし、このような《数値的効用》の体系の構築に対して、経験的な立場から疑問が提出されないわけではけっしてないことに注意しておく必要がある。

たとえば、最初に挙げた例における三つの事象 A , B , および C について、次のように考えてみよう。これらの諸事象の効用指数については、

$$U_B < U_A < U_C$$

という大小関係が成り立っているものとする。

ここで、事象 B が 100α パーセントの確率で起こり、事象 C は 100β パーセントの確率で起こるものとしよう。最初の議論では、

$$\alpha + \beta = 1$$

の場合を考えたのである。すなわち、問題とする確率結合事象の中では、事象 B と事象 C のいずれかが起こることは確実(確率100パーセント)であるものと想定したのである。その場合には、二つの互いに異なる効用の差分の比が事象 A と無差別な B と C の確率結合事象の中で事象 B の起こる確率の値 α_0 によって規定さ

れるのであった。

しかし、確率結合事象を選択対象とすることをいったん承認するならば、その結合事象の中で二つの事象 B と C のいずれかが起こることは確実であるという想定を取り外した事態を考えることは、極めて容易であろう。たとえば、事象 B が起こる確率は α 、事象 C の起こる確率は β であるとして、さらに事象 B でもなく、また事象 C でもない事象が起こる確率 γ (>0) があって、

$$\alpha + \beta + \gamma = 1$$

であると想定することができるであろう。そうして、事象 B でもなく、また、事象 C でもない事象がどのような事態であるかが問題の経済主体にとって不明であるため、このような事象に対応する効用指数は存在しないものと想定することにしよう。この想定がフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの公理 (A) に違反することは明らかであろう。このことは、公理 (A) の経験的妥当性が確率的結合事象を選択対象としない世界では直観的に肯定することができても、確率的結合事象を選択対象とする世界では、その経験的妥当性に問題があることが直観的に判明することを意味するものと受け取られるのである。

さて、このような問題設定のもとに、事象 A と無差別な事象 B と C の結合事象を求めると、そのとき次の等式が成立する。

$$\begin{aligned} U_A &= \alpha_0 U_B + \beta_0 U_C \\ &= \alpha_0 U_B + (1 - \alpha_0 - \gamma_0) U_C \end{aligned}$$

この等式を整理すると、

$$U_A - U_C = \alpha_0 (U_B - U_C) - \gamma_0 U_C$$

さらに、

$$\frac{U_C - U_A}{U_C - U_B} = \alpha_0 + \gamma_0 \frac{U_C}{U_C - U_B}$$

が得られる。

この等式の左辺の諸効用の差分の比を規定する要因は右辺の第1項にある事象 B の起こる確率 α_0 だけではなく、第2項の構成要素もあることに注意したい。とりわけ、後者の中に事象 C と B の効用の差分と事象 C の効用の比があることは、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの《数値的効用》の定義がトートロジカルにならざるを得ないことを示しているが、そのことは、この概念にとって致命的であるように思われる。

さて、ここで議論をフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの著書『ゲームの理論と経済行動』の第I章「経済問題の定式化」における第3節「効用の概念」のサブセクション3.7「諸公理にかんする一般的注釈」(General Remarks Concerning the Axioms)に戻すことにしよう。

CXLVIII

以下に紹介するサブセクション3.7「諸公理にかんする一般的注釈」は、さらに、3.7.1, 3.7.2, および、3.7.3の三つのパートに細分されている。

そこで、まず、パート3.7.1から紹介することにするが、このパートは以下の四つのパラグラフ (116) ~ (119) で構成されている。

(116)「ここで立ち止まって、議論の状況を考え直してみるのがいいかもしれない。われわれは(許容されるところよりも)過大な結論を導いているのではないだろうか (Have we not shown too much?)。われわれは諸公理 (3:A) - (3:C) から、パート3.5.1の三つの条件である (3:2:a), (3:1:a), および、(3:1:b) の示す意味における効用の数値的特性 (the numerical character of utility) を引き出すことができる。そうして、条件 (3:1:b) は効用の諸数値 (the numerical values of utility) が数学

的期待値のように (like mathematical expectations) (確率で以て) 結合されると主張しているのである! そうして、しかも、数学的期待値という概念はこれまで、しばしば疑問視されてきており、その概念の正当性 (its legitimacy) は、確かに、《期待値》の性質 (the nature of an "expectation") にかんする仮説に依存しているのである。¹ そうであるとすると、われわれは論証すべきことを前提としてきはしなかったであろうか (Have we not then begged the question?). われわれの諸公理は、なんらかの不明瞭な仕方、数学的期待値をもたらす諸仮説 (the hypotheses which bring in the mathematical expectation) を導入していないだろうか。」

(117) 「もっとはっきりと言うと、《偶然に賭ける》という、すなわち、ギャンブルをするという行為だけにかんする (正であるにせよ、負であるにせよ) 効用というものが、一個人の中には存在しないということもあり得るのではないだろうか。そうして、数学的期待値の使用はその種の効用の痕跡を拭き去るのである (More specifically: May there not exist in an individual a (positive or negative) utility of the mere act of "taking a chance," of gambling, which the use of the mathematical expectation obliterates?).」

(118) 「このような可能性を、われわれの諸公理 (3:A) - (3:C) はどのようにして回避したのだろうか (How did our axioms (3:A) - (3:C) get around this possibility?).」

(119) 「われわれが知ることのできる限りでは、われわれの公理 (3:A) - (3:C) はその可能性を回避しよう意図するものではない。《ギャンブルをすることの効用》を排除すること (to excluding a "utility of gambling") に最も近接している公理 (3:C:b) (パート 3.6.2. における議論と比較せよ) でさえも、尤もなものであるとともに、かつ、正当なものであるように思われる——経済学の諸目的にとって現在利用

できるものよりも、はるかに精緻化された心理学の体系が用いられない限りは (unless a much more refined system of psychology is used than the one now available for the purposes of economics.)。数値的効用が——数学的期待値の使用と同じことになる公式とともに (with a formula amounting to the use of mathematical expectations) 諸公理 (3:A) - (3:C) の基盤の上に構築され得るという事実は次のことを示しているように思われるのである。すなわち、われわれは、實際上、数値的効用を、それに対して数学的期待値の解析学を適用することが正当とされるものであると定義したのである (We have practically defined numerical utility as being that thing for which the calculus of mathematical expectations is legitimate.)。² 諸公理 (3:A) - (3:C) は、必要な論理的構築が実行され得ることを保証するがゆえに、《ギャンブルをすることに特有の効用》のような概念 (concepts like a "specific utility of gambling") は、このレベルで矛盾から免れるような形で定式化され得ないのである。³⁾⁶⁾

まず、上のパラグラフ (116) の議論についてもう少し立ち入って考えてみよう。フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンは、サブセクション 3.7 「諸公理にかんする一般的な注釈」に先立つ二つのサブセクション 3.5 「数値的効用の公理論的取り扱いの概念的構造 (Conceptual Structure of the Axiomatic Treatment of Numerical Utilities)」⁷⁾ と 3.6 「諸公理と、それらの解釈 (The Axioms and their Interpretation)」⁸⁾ において、彼らの《数値的効用》の数体系を公理論的に構成して見せたのである。それは、換言すれば、彼らの念頭にある《確率

6) von Neumann and Morgenstern, *op. cit.*, p. 28.

7) *Ibid.*, pp. 24-25.

8) *Ibid.*, pp. 26-27.

的結合事象を選択対象として許容する世界》における選択行動の論理に数学的かつ公理的な表現形式を対応させる試みである。その数学的・公理的表現形式の体系において、公理とされる三つの命題 (3:A) - (3:C) は、《数値的効用》の《基数的性質》を導出するのに十分な内容を持っているか。もしもそれらの公理が十分な内容を持っていないのにもかかわらず、《数値的効用》の《基数的性質》が導出されたと主張されるならば、「われわれは（公理に含まれていることよりも）過大なことを示してしまっている」（We have shown too much.）ことになるであろう。このような論理的整合性を確認するという意味において、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンは“Have we not shown too much?” という問いを投げ掛けたかのようにも受け取ることができるであろう。実際、彼らは、その問いの直後に、「われわれは諸公理 (3:A) - (3:C) から効用の数値的特性を引き出すことができる」[We can derive from the postulates (3:A) - (3:C) the numerical character of utility....] と述べている。しかしながら、その文章が終わらないうちに、彼らの提起しようとしている問題が、たんなる数学的・公理的表現形式の体系内の論理整合性の問題ではないことが示唆され始める。そこには、彼らの言う「効用の数値的特性」は「パート 3.5.1 における条件 (3:2:a), (3:1:a), および, (3:1:b) の意味での」[in the sense of (3:2:a) and (3:1:a), (3:1:b) in 3.5.1.;] それであり、「そうして、条件 (3:1:b) は効用の諸数値が数学的期待値のように(確率でもって)結合されると主張している」[and (3:1:b) states that the numerical values of utility combine (with probabilities) like mathematical expectations!] と述べられている。われわれは、ここで、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンが指摘する条件 (3:1:b) とは何であったかを想起しなければならない。それはサブセクション 3.5 「数値的効用の公理的取り扱いの概念的

構造」のパート 3.5.1 に述べられてあった⁹⁾。そのパートの前半部分を構成する二つのパラグラフをここに再掲してみよう。

(103) 「... こうして、われわれはこれらの U と V について《自然の》関係 [the “natural” relation] $U > V$ (U は V よりも選好される [U is preferable to V] と読む), および, 《自然の》操作 [the “natural” operation]

$$\alpha U + (1-\alpha)V, (0 < \alpha < 1),$$

(それぞれの加重因子 α , および, $1-\alpha$ を伴う U と V の重心, あるいは, 交替的な確率 α , および, $1-\alpha$ を伴う U と V の結合事象, と読む) を得るのである。もしもこれらの概念の存在——と, そうして, 再現可能な観察可能性 [reproducible observability] ——が承認されるならば, われわれの進むべき道は明らかである。すなわち, われわれは効用と数値との間に, 次のような対応を見つけ出さなくてはならない。それは, 効用についての関係

$$U < V$$

と, そうして, 操作

$$\alpha U + (1-\alpha)V$$

とを数値についての同義的な概念 (the synonymous concepts for numbers) に拡張するところの効用と数値との間の対応 (a correspondence between utilities and numbers) なのである。」

(104) 「その対応を記号で次のように表すことにしよう。

$$U \rightarrow \rho = V(U),$$

ここで, U は効用を, そうして, $V(U)$ は,

9) *Ibid.*, pp. 24. このサブセクション 3.5 の議論は拙稿「系譜 (29)」の二つの節 CXLIII, および, CXLIV, 本誌第 43 巻第 2 号, pp. 73 (203) - 88 (218) に紹介されている。

その対応が効用に対して付帯させる数である。そうすると、われわれが要請する条件は、

$$\begin{aligned} (3:1:a) \quad & U > V \text{ が意味するのは,} \\ & V(U) > V(V), \\ (3:1:b) \quad & V\{\alpha U + (1-\alpha)V\} \\ & = \alpha V(U) + (1-\alpha)V(V).^1 \text{]}^{10)} \end{aligned}$$

この二つのパラグラフにおけるフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの用語法には、われわれのこれまでの用語法と少し異なるところがあるので、そのことについて、重複を厭わず、ここでも注意して置きたい。われわれは、たとえば、選択対象となる二つの事象 A と B の効用を、それぞれ U_A と U_B で表してきた。そうして、それらの効用とは、効用の指数を意味していたのである。しかし、上のパラグラフにおけるフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの用語法では、記号 U および V は《効用》を表すのではあるが、その《効用》は効用の指数ではなくて、指数で表現される以前に存在する《満足の状態》を意味しているのである。それゆえ、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの言う「《自然の》関係 $U > V$ 」は、《満足の状態》 U が《満足の状態》 V よりも選好される「 U is preferable to V 」ことを意味するのであって、二つの数の大小関係を表現しているのではないということが理解されなくてはならないであろう。そうして、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの場合も、われわれの場合も、共に、《自然》の体系の諸概念と諸関係が、数の体系の諸概念と諸関係から、明確に区別されていることを理解することが極めて重要である。ちなみに、パラグラフ(116)の冒頭の「われわれは(許容されるところよりも)過大な結論を導いたのではないだろうか[Have we not shown too much?]」という問いは、数の体系における論理的整合性を問うも

のであるかのように受け取られるかもしれないけれども、実は、それは《自然》の体系にかかわる問いであることを、われわれは以下で明確にしたいと意図しているのである。

さて、問題の条件(3:1:b)は上のパラグラフ(104)の最後に示されており、そうして、そこにはフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンによって脚注¹が付けられているので、それを再度にわたるのを厭わず、以下に紹介することにしよう。

脚注¹「いずれの場合にも、左側は効用についての《自然の》概念であり、そうして、右側は数についての通例の概念であることに注意せよ[Observe that in each case the left-hand side has the “natural” concepts for utilities, and the right-hand side the conventional ones for numbers.]」¹¹⁾

ここで左側の《自然の》概念というのは、条件(3:1:a)の初めに示されている「 $U > V$ 」であって、それは既に説明したように、「《満足の状態》 U が《満足の状態》 V よりも選好される」という《自然の》関係を意味するのである。次に、右側の「数についての通例の概念」というのは、条件(3:1:a)について言うならば「 $V(U) > V(V)$ 」であり、それは《満足の状態》 U の効用指数を意味する $V(U)$ のほうが《満足の状態》 V の効用指数である $V(V)$ よりも、数についての通例の大小関係の意味において、大きいということを表示している。ちなみに、 $V(\quad)$ という記号はパラグラフ(104)の最初に示されているように、《自然の》概念としての効用 U を数の概念としての指数 ρ に対応させることを表示する広い意味での関数記号である。

さて、問題の条件(3:1:b)には

$$\begin{aligned} & V\{\alpha U + (1-\alpha)V\} \\ & = \alpha V(U) + (1-\alpha)V(V) \end{aligned}$$

10) von Neumann and Morgenstern, *op. cit.*, p. 24.

11) *Ibid.*, p. 24n.

という等式だけが掲げられているが、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンによれば、それは「右側」の「数についての通例の概念」なのである。ただし、その等式の左辺にある関数記号 $V\{\}$ の中の要素は《満足の状態》 U が α という確率で起こり、そうでない場合は《満足の状態》 V が $(1-\alpha)$ の確率で起こる確率結合事象としての《満足の状態》という《自然の》概念を表すものであって、数についての演算のようなものを決して意味するものでないことに注意しなくてはならない。

それに対して、上の等式の右辺は「数についての通例の概念」である《一次結合》の演算を表している。こうして、条件 (3:1:b) は、全体としては、「数についての通例の概念」を表示しているのであるが、しかし、左辺の関数記号の中に「確率結合事象としての《満足の状態》」という《自然の》概念が姿を現しているのである。そこには《自然の》概念としての「確率的結合事象」を生み出す「《自然の》操作」(the “natural” operation) が、

$$\alpha U + (1-\alpha)V$$

のように、《数学的期待値》(the mathematical expectation) を計算する数の演算としての《一次結合》に似た記号形式で表示されているけれども、それは確率論的・数学的表現形式を付与される以前の《自然の》概念を表示しているに過ぎないのである。

さて、ここで、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンのサブセクション3.7のパラグラフ (116) の議論に立ち戻ることしよう。フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの述べるところでは、「条件 (3:1:b) は効用の諸数値が数学的期待値のように、(確率で) 結合されると主張しているのである！そうして、しかも、数学的期待値という概念は、これまで、しばしば疑問視されてきており、その概念の正当性は、確かに、《期待》というものの性質にかんする仮説に依存するのである [and (3:1:b) states

that the numerical values of utility combine (with probabilities) like mathematical expectations! And yet the concept of mathematical expectation has been often questioned, and its legitimacy is certainly dependent upon some hypothesis concerning the nature of an “expectation.”]」。¹²⁾

《自然の》操作を通じて生み出される《自然の》概念としての《確率的結合事象の満足の状態》に《数学的期待値》と同様な数学的表現形式を当てはめることに対して、これまで、どのような疑問が提起されてきたのであろうか。あるいは、また、《数学的期待値》という概念の正当性が《期待》というものの性質にかんする仮説によって左右されるという事実は、どのようないきさつから知られるようになってきたのであろうか。このような問いについて考えるのにフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの脚注が参考になるので、以下に節を改めて、その脚注を紹介することにしよう。

CXIX

フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンは、上に再度引用した文章に脚注¹を付して、次の二つの論文の参照を促している。

¹ Cf. *Karl Menger*: Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre, *Zeitschrift für Nationalökonomie*, vol. 5, (1934) pp. 459ff, and *Gerhard Tintner*: A contribution to the non-static Theory of Choice, *Quarterly Journal of Economics*, vol. LVI, (1942) pp. 274ff.¹³⁾

最初の論文はオーストリア学派の総帥とされるカール・メンガー (Carl Menger, 1840-1921) の息子で数学者のカール・メンガー (Karl

12) *Ibid.*, p. 28.

13) *Ibid.*, p. 28n. この引用の活字はフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの原著のまま。

Menger, 1902-) が『国民経済学雑誌』第5巻(1934年)に発表した「価値理論における不確定要素: いわゆるペテルスブルク・ゲームに関連する考察」(“Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre: Betrachtungen in Anschluß an das sogenannte Petersburger Spiel”)¹⁴⁾であり、いま一つの論文は、ハーヴァード大学の『経済学季刊雑誌』第56巻(1942年)に載ったガーハート・ティントナーの「選択の非静学理論への一貢献」¹⁵⁾である。これら二つの論文についての立ち入った検討は別の機会に譲ることにして、《数学的期待値》に対する疑問の解説に代えて、K. メンガーの論文の一部分をここに紹介して置こう。メンガーは、その論文の冒頭で、《ペテルスブルク・ゲーム》(Das Petersburger Spiel)について、次のような解説を加えている。

(1) 「確率論において《ペテルスブルク・ゲーム》の名称で呼ばれるものは、二人の人間 A と B の間で行われる次のようなゲームである [Mit dem Namen “Petersburger Spiel” wird in der Wahrscheinlichkeitsrechnung folgendes Spiel zwischen zwei Personen A and B bezeichnet²⁾]: 1個のコインが投げられて、表が出るならば、このゲームの親である A からゲームの子である B は1ドゥカーテン (ヨーロッパで13~19世紀にわたって通用した金貨の単位) を与えられ、そうして、このゲームは終了する [Eine Münze wird geworfen; fällt Kopf, so erhält der Spieler B vom Spielgeber A einen Dukaten und das Spiel ist beendet;].

それに対して、裏が出るならば、もう一度コインが投げられて、この2度目の試行で表が出るならば、B は A から2ドゥカーテンを与えられ、そうして、このゲームは終了する [fällt dagegen Schrift, so wird nochmals geworfen; fällt beim zweiten Wurf Kopf, so erhält B von A zwei Dukaten und das Spiel ist beendet;]. この2度目の試行で再び裏が出ると、3度目の試行に移り、この3度目の試行で表が出ると、B は A から4ドゥカーテンを与えられ、そうして、このゲームは終了する [fällt auch beim zweiten Wurf Schrift, so wird ein drittesmal geworfen; fällt beim dritten Wurf Kopf, so erhält B von A vier Dukaten und das Spiel ist beendet;]. この3度目の試行で裏が出ると、4度目の試行に移るといように、ゲームは続く [fällt auch beim dritten Wurf Schrift, so wird ein viertesmal geworfen usw.]. このゲームは、要するに、コインの表が出るまで試行が続けられるのであり [Es wird, kurz gesagt, die Münze so lange geworfen, bis zum ersten Male Kopf fällt;], 第 n 回目の試行が開始されて (結局、第 $n-1$ 回目の試行で裏が出て、そうして、第 n 回目の試行で表が出ると)、そのゲームの子である B が A から 2^{n-1} ドゥカーテンという金額を受け取り、そこで、このゲームは終了する [tritt dies beim n -ten Wurf ein (fällt also bei den $n-1$ ersten Würfen Schrift und beim n -ten Wurf Kopf), so erhält der Spieler B von A den Betrag von 2^{n-1} Dukaten und das Spiel ist beendet.] のである。 $n=1, 2, 3, 4, \dots$ のそれぞれの場合に応じて、結果として得られる利得の額は、それぞれ、 $2^0=1, 2^1=2, 2^2=4, 2^3=8, \dots$ ドゥカーテンとなる [Je nachdem $n=1, 2, 3, 4, \dots$ ausfällt, ist die Höhe des ausgesetzten Gewinnes bzw. $2^0=1, 2^1=2, 2^2=4, 2^3=8, \dots$ Dukaten.].¹⁶⁾

14) Karl Menger, “Das Unsicherheitsmoment in der Wertlehre: Betrachtungen im Anschluß an das sogenannte Petersburger Spiel,” *Zeitschrift für Nationalökonomie*, Band V (1934), pp. 459-85.

15) Gerhard Tintner, “A Contribution to the Non-Static Theory of Choice,” *The Quarterly Journal of Economics*, Vol. LVI, (1942), pp. 274-306.

16) Menger, *op. cit.*, pp. 459-60. K. メンガーのこの論文は、全部で49個のパラグラフから構成

上に引用したパラグラフの第1センテンスの末尾にはメンガーの脚注²が付けられていて、そこには次のような説明が述べられている。

「² このゲームは1713年にニコラウス・ベルヌーイによって、モンモールという数学者に伝えられ、そうして、モンモールの論文「賭けゲームの解析にかんする試論」(パリ, 1713年刊)で公表された[Das Spiel wurde von Nikolaus Bernoulli 1713 dem Mathematiker Montmort mitgeteilt und von diesem in seinem essay d'analyse sur les jeux de hazard, Paris 1713, veröffentlicht.]. それはダニエル・ベルヌーイの論文「運の計測に関する新理論の見本」(『ペテルスブルク学会記録』第5巻(1738年)p. 175所載)を通じて広く知られるようになった[Bekannter wurde es durch die Abhandlung von Daniel Bernoulli: Specimen theoriae novae de mensura sortis, in den Commentarii Academiae Petropol. V, 1738, S. 175.]. このゲームにこのような名称が付けられたのは、ペテルスブルクに在住したベルヌーイ一族との交際を配慮してのことである[Seinen Namen hat das Spiel mit Rücksicht auf die Beziehungen der Familie Bernoulli zu Petersburg erhalten.].」¹⁷⁾

ベルヌーイ一族は多数の優れた数学者を出したことで歴史上、非常に有名である。17世紀の中葉にオランダからスイスのバーゼルに移住した新教徒ニコラウス・ベルヌーイ(Nikolaus Bernoulli, 1623-1708)には、ヤーコブ(Jakob, 1654-1705)、ニコラウス(Nikolaus, 1662-1716)および、ヨーハン(Johann, 1667-1748)の三人の息子があった。2番目のニコラウスは画家であるが、ヤーコブとヨーハンの二人は優れた数

学者で、両者ともライプニッツの親友であった。ヨーハンには、更に、ニコラウス(Nikolaus, 1695-1726)、ダニエル(Daniel, 1700-82)、および、ヨーハン(Johann, 1710-90)の3人の息子がおり、いずれも数学者として知られている。このニコラウスとダニエルが上の脚注²に出てくる人物で、両者ともペテルスブルク大学の教授を勤めたのである。従って、脚注²で述べられてあったように1713年に数学者モンモールにこのゲームを伝えたとき、ニコラウス・ベルヌーイは18歳であったことになるであろうし、また、ダニエルが1738年に論文を発表したとき、彼は38歳であったことになるであろう。

さて、メンガーの議論に戻ると、ペテルスブルク・ゲームの紹介を終えた彼は、続けて次のような問いを提起するのである。

(2) 「 B がこのゲームを開始するとき、彼の数学的期待値¹⁾はどれくらいの大きさになるのだろうか [Wie groß ist die mathematische Hoffnung¹⁾ des B , wenn er an dieses Spiel tritt?].」¹⁸⁾

この文章の中の《数学的期待値》(die mathematische Hoffnung)という言葉には脚注¹が付けられていて、そこには次のような説明が加えられている。

「¹⁾ あるゲームの数学的期待値は、その場合の確率を a で表し、獲得される利得を w 貨幣単位で表すと、 $a \cdot w$ 貨幣単位という金額になるものと理解されている [Man versteht unter der mathematischen Hoffnung bei einem Spiel, bei welchem die Wahrscheinlichkeit a dafür besteht, daß w Geldeinheiten gewonnen werden, den Betrag von $a \cdot w$ Geldeinheiten.]. 幾つもの利得に、それぞれ異なる確率が付与される、すなわち、利得 w_1 に対して確率 a_1 があり、利得 w_2 に対して確率 a_2 がある... というよ

されている。以下では、それらに通し番号を付して参照の便を計る。ちなみに、メンガーの論文の第1節「ペテルスブルク・ゲーム」はパラグラフ (1) ~ (4) で構成されている。

17) Ibid., p. 459n.

18) Ibid., p. 460.

うな一つのゲームにおいて、 $a_1 \cdot w_1 + a_2 \cdot w_2 + \dots$ 貨幣単位という金額は、そのゲームの子の数学的期待値と呼ばれる [Bei einem Spiel, bei welchem mehrere Gewinne mit verschiedenen Wahrscheinlichkeiten ausgesetzt sind, und zwar so, daß die Wahrscheinlichkeit a_1 dafür besteht, daß man w_1 gewinnt, ferner die Wahrscheinlichkeit a_2 dafür, daß man w_2 gewinnt, ... wird als mathematische Hoffnung des Spielnehmers der Betrag von $a_1 \cdot w_1 + a_2 \cdot w_2 + \dots$ Geldeinheiten bezeichnet.]。あるゲームがあって、たとえば、そこでは、1個のサイコロを1回投げて、6の目が出ると、そのゲームの子は6ドゥカーテンを受け取り、そうして、5の目が出ると、3ドゥカーテンを受け取るのに対して、1, 2, 3, あるいは、4の目が出ると、何も受け取らないものとする、その場合には、このゲームの子の数学的期待値は、彼が6, あるいは、3ドゥカーテンを受け取ることについての確率がそれぞれ、 $1/6$ であるとして、

$$\left(\frac{1}{6}\right) \cdot 6 + \left(\frac{1}{6}\right) \cdot 3 = 1\frac{1}{2}$$

ドゥカーテンになる [Besteht ein Spiel z. B. darin, daß ein Würfel einmal geworfen wird und daß der Spieler 6 Dukaten bekommt, wenn 6 Punkte fallen, und 3 Dukaten, wenn 5 Punkte fallen, dagegen nichts bekommt, wenn 1, 2, 3 oder 4 Punkte fallen, so beträgt die mathematische Hoffnung des Spielnehmers, da die Wahrscheinlichkeit von je $1/6$ dafür besteht, daß er 6 oder 3 Dukaten gewinnt,

$$\left(\frac{1}{6}\right) \cdot 6 + \left(\frac{1}{6}\right) \cdot 3 = 1\frac{1}{2} \text{ Dukaten.}]。$$

《偏りのない》サイコロが存在するなら(すなわち、たとえば、120回というような多くの回数にわたってサイコロを投げるとき、1, 2, 3, 4, 5, 6の目のそれぞれが、その試行回数の $1/6$ に相当する回数ずつ、すなわち、今の例で言うと20回ずつ出るようなサイコロが存在するなら)、

このゲームが多くの回数にわたって行われ、そうして、そのゲームの子は、その各々の試行にあたって、彼の数学的期待値と同額を、したがって、われわれの例の場合には $1\frac{1}{2}$ ドゥカーテンを、賭け金として支払うであろうから、多くの回数にわたるゲームの終了後には、受け取った利得の総額と賭け金の総額は、ほとんど異ならないものになるであろう [Liegen „richtige“ Würfel vor (d. h. Würfel, bei denen, wenn sie eine größere Anzahl von Malen, etwa 120 Male, geworfen werden, jede der Punktzahlen 1, 2, 3, 4, 5, 6 ungefähr beim sechsten Teil der Würfe, also etwa bei 20 Würfeln, fällt), so werden, wenn das Spiel eine größere Zahl von Malen gespielt wird und der Spieler bei jedem Einzelspiel einen seiner mathematischen Hoffnung gleichen Betrag, also in unserem Beispiel $1\frac{1}{2}$ Dukaten, als Einsatz leistet, nach Abschluß der vielen Spiele, die Summe der ausgezahlten Gewinne und die Summe der Einsätze sich meistens wenig voneinander unterscheiden.]。]¹⁹⁾

賭けゲームの子に関する《数学的期待値》についての、上のようなメンガーの説明は良しとして、彼がメイン・テキストの第2の параグラフで提起したペテルスブルク・ゲームの子であるBの数学的期待値が、どのような大きさになるかという問いの答えはどうなるであろうか。メンガーは次のように述べている。

(3) 「第1回目の試行で表が出る場合の確率を $1/2$ として、その場合にBは1ドゥカーテンの利得を期待するものとする、彼の数学的期待値は $1/2$ ドゥカーテンという金額になる [Dafür, daß beim ersten Wurf Kopf fällt, besteht die Wahrscheinlichkeit $1/2$; da B in diesem Fall den Gewinn eines Dukaten zu erwarten hat, liefert diese Möglichkeit zu seiner mathe-

19) Ibid., p. 460n.

matischen Hoffnung den Beitrag von $1/2$ Dukaten.]. 第2回目の試行で初めて表が出て、 B が2ドゥカーテンを受け取る場合について考えると、その確率を $1/4$ とした結果、この場合に見込まれる利得は $(1/4) \times 2 = 1/2$ ドゥカーテンという金額になる [Dafür, daß erst beim weiten Wurf Kopf fällt und B zwei Dukaten bekommt, besteht die Wahrscheinlichkeit $1/4$, so daß diese Möglichkeit den Beitrag $(1/4) \times 2 = 1/2$ Dukaten liefert.]. 一般に、第 n 回目の試行について、その確率を $(1/2^n)$ とすると、第 n 回目の試行で初めて表が出て、 B が 2^{n-1} ドゥカーテンの利得を受け取るので、その結果、第 n 回目の試行について、その場合に見込まれる利得は $(1/2^n) 2^{n-1} = 1/2$ ドゥカーテンという金額になり、それが数学的期待値であって、その n 回目までの数学的期待値を全部合計すると、

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots$$

となるが、それは、すなわち、無限大である [Allgemein besteht für jede ganze Zahl n die Wahrscheinlichkeit $1/2^n$, daß erst beim n -ten Wurfe Kopf fällt und B den Betrag von 2^{n-1} Dukaten gewinnt, so daß für jede ganze Zahl n diese Möglichkeit den Beitrag $(1/2^n) 2^{n-1} = 1/2$ Dukaten zu seiner mathematischen Hoffnung liefert, welche demnach insgesamt

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{2} + \dots$$

d. h. unendlich groß ist.].²⁰⁾

こうして、ペテルスブルク・ゲームの《子》(der Spielnehmer)である B が、一つのゲームに賭けることから得られると期待する利得の数学的期待値を、通例の算出方法で計算すると、

その値は無限大になることが示された。数学的期待値の意味するところからして、 B が、そのゲームに参加するために支払わなければならない《賭け金》(ein Einsatz)よりも賞金(ein Ausatz)の数学的期待値のほうが大きい限り、このゲームは B にとって有利であるから、 B がこのゲームに参加しない理由はないように思われる。そうして、賞金の数学的期待値が、上のように無限大であるとすれば、《賭け金》の額がどのように大きくとも、それが有限値である限りにおいて、 B がこのゲームに参加しない理由はないであろう。しかし、現実には、このゲームにおける人々の行動を観察するなら、《賭け金》がある程度大きくなると、もはや誰もゲームに参加する者はいなくなるに違いない。そういう訳で、メンガーは次のように述べるのである。

(4)「ペテルスブルク・ゲームが考案され、そうして、このゲームの数学的期待値が無限大になると算定されてより以来、この事態は一つのパラドックスと見なされ、そうして、それは多数の様々な研究者たちを、その解明の試みに駆り立ててきたのである [Dieser Sachverhalt ist, seit das Petersburger Spiel ersonnen und die Unendlichkeit der mathematischen Hoffnung des Spielnehmers errechnet worden ist, als ein Paradoxon betrachtet worden und hat zahlreiche verschiedenartige Forscher zu Versuchen seiner Aufklärung angeregt.].²¹⁾

以上は、K. メンガーの論文「価値理論における不確定要素：いわゆるペテルスブルクのゲームに関連する考察」の第1節「ペテルスブルクのゲーム」の全文の紹介である。この論文は以下に示す目次から判るように、10個の節から成るのであり、第1節は、その論文のほんの一部分でしかない。

20) Ibid., pp. 460-1.

21) Ibid., p. 461.

目次 (Inhaltsverzeichnis)²²⁾

1. ペテルスブルクのゲーム (Das Petersburger Spiel.) pp. 459-461.
2. 何がパラドックスと見なされるのか, そうして, どのような問題が以下で論じられるのか (Was als Paradoxie betrachtet wurde und welches Problem im folgenden behandelt wird.) pp. 461-2.
3. このゲームの表面上つじつまの合わない行動 (Die angebliche Ungereimtheit des Spieles.) pp. 462-3.
4. 確率論的な解決 (Eine wahrscheinlichkeitstheoretische Lösung.) pp. 463-4.
5. 限定されない評価関数による解決 (Die Lösung durch unbeschränkte Bewertungsfunktionen.) pp. 464-9.
6. 限定された評価関数による解決 (Die Lösung durch beschränkte Bewertungsfunktionen.) pp. 469-71.
7. 小さい確率を無視することによる解決 (Die Lösung durch Vernachlässigung kleiner Wahrscheinlichkeiten.) pp. 471-2.
8. 賭けゲームに直面した場合の行動に関する原理 (Grundsätze über das Verhalten gegenüber Glücksspielen.) pp. 472-78.
9. 個人の諸特性の性格描写 (Über die Kennzeichnung individueller Eigenschaften.) p. 478.
10. 認識論的な覚書 (Erkenntnistheoretische Bemerkungen.) pp. 479-85.

このように, 上に紹介した第1節の論述はメンガーの論文の一部分でしかないけれども, それを見るだけでも, 《数学的期待値》という概念が観察に基づく経験的事実に照らして疑問視されてきた事情は十分に了解されるであろう。その疑問を解決するのにどのような道があるか

について問うことは別の機会に譲り, ここでは上掲のフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンのパラグラフ (116) の末尾に立ち戻って, こう問うことにしよう。すなわち, 彼らが《数値的効用》の《基数的性質》を導出した際に, 彼らが前提として置いた「諸公理は, なんらかの不明瞭な仕方では, 数学的期待値をもたらす仮説を導入していないだろうか」(Do not our postulates introduce, in some oblique way, the hypotheses which bring in the mathematical expectation?)²³⁾と。

この問いは, やや一般的に過ぎて, フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンが, どのようなことを心配しているのかが, 判り難いかもしれない。そこで, 彼らは, パラグラフ (117) で, もっと具体的な形の問いを提起するのである。すなわち, 「《偶然に賭ける》という, すなわち, ギャンブルをするという行為だけにかんする(正にせよ, 負にせよ) 効用というものは, 一個人の中には存在しないかもしれない」[May there not exist in an individual a (positive or negative) utility of the mere act of “taking a chance,” of gambling,] という問いが, それである。

フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの言う「《偶然に賭ける》という, すなわち, ギャンブルをするという行為だけにかんする効用」(a utility of the mere act of “taking a chance,” of gambling) とは何を意味するのであろうか。それは, 通常の消費者選択理論における「取得される財の数量の《効用》」(“utility” of the quantities of goods acquired) という概念と, どのような違いを持っているのだろうか。

後者は, 取得される財の一定の数量を《使用, あるいは, 消費するという行為》に基づいて生じるものである。それに対して, 前者は, 何ら

22) *Ibid.*, p. 459.23) von Neumann and Morgenstern, *op.cit.*, p. 28.

かの財を使用したり、あるいは、消費したりする行為とは無関係に、それらの財をただ取得するためだけの《機会》(a chance)に賭けるという行為に基づいて生じるものと考えられる。それは、賭けた結果として「取得される財の数量を使用、あるいは、消費するという行為」に基づいて生じる効用とは全然別の効用概念でなくてはならない。

いま、二つの事象 B と C の効用 U_b と U_c を通例の消費者選択理論における効用と同類の概念であるとする。すなわち、 U_b は事象 B において取得される財の数量を使用、あるいは、消費することに基づいて生じる効用であると考えことにしよう。 U_c についても同様であるとする。さらに、事象 B が起こる確率を α 、事象 C が起こる確率を $(1-\alpha)$ とした場合の結合確率事象を記号 D で表すことにしよう。

事象 D は、言ってみれば、二つの事象 B と C が、それぞれ、 α と $(1-\alpha)$ の確率で起こる機会 (a chance) であって、その効用は上に定義した事象 B 、あるいは、事象 C の効用とは全然別の概念でなければならない。

しかしながら、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの立てた《確率的結合事象の順序付けの公理(B)》の条件(3:B:a)ないし(3:B:c)²⁴⁾によれば、

$$U_D = \alpha U_b + (1-\alpha) U_c$$

であり、しかも、仮に $u_B < u_C$ と想定すれば、

$$U_b < U_D < U_c$$

となるような U_D が事象 D の効用とされるのである。このことは、事象 D の効用が、それぞれ事象 B と C とにおいて取得される財の数量を使用、あるいは、消費する行為に基づく効用 U_b 、および、 U_c の加重平均として定義されることを意味している。このように定義される事

象 D の効用は「取得される財を使用、あるいは、消費する行為に基づく効用」と同類の概念であって、それが事象 B と C の効用とは全然別の概念であるとは、とうてい言うことができない。

そこで、「《偶然に賭ける》という、すなわち、ギャンブルをするという行為だけにかんする効用というもの」が1個人の中に存在するとすれば、そのような効用は公理(B)の条件(3:B:a)や(3:B:b)に基づいて定義される数学的期待値 $\alpha U_b + (1-\alpha) U_c$ の使用とは相入れないであろう。それゆえ、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンのパラグラフ(117)の文章の後半に言うように、「そうして、数学的期待値の使用はその種の効用(=《偶然に賭ける》という、すなわち、ギャンブルをするという行為だけにかんする効用)の痕跡を拭い去る」[which (=a utility of the mere act of "taking a chance," of gambling) the use of the mathematical expectation obliterates] ことになるのである。

フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンが彼らの《数値的効用》を導出する際に決定的に重要な役割を演じる《数学的期待値》には、これらの問いが示唆するように、期待に基づく経済主体の行動を定式化する上で、いろいろな問題点を抱えていることは、一応、了解されたであろう。そこで、もう一度、パラグラフ(116)の末尾の、より一般的な形の問いに目を戻そう。その問いはこうであった。

「われわれの諸公理は、何らかの不明瞭な仕方、数学的期待値をもたらず諸仮説を導入してはいないだろうか [Do not our postulates introduce, in some oblique way, the hypotheses which bring in the mathematical expectations?].」

この問いの文章の中で、「何らかの不明瞭な仕方」[in some oblique way] という句に重点が置かれていることは、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの議論の流れからおのずと

24) Ibid., p. 25.

明らかになるであろう。彼らは、続けて、パラグラフ (118) において、次のように問うのである。すなわち、「われわれの諸公理 (3:A) - (3:C) は、このような可能性を、どのようにして回避したのであるか」と。

ここに言う「このような可能性」(this possibility) とは、それらの諸公理が「何らかの不明瞭な仕方、数学的期待値をもたらす諸仮説を導入して」いるという可能性であろう。

《数値的効用》の数体系を構築するに当たってフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンが、その礎石とした諸公理 (3:A) - (3:C) に対して自ら提起した、このような問いへの答えが、続くパラグラフ (119) に述べられているのである。そのパラグラフの冒頭で、彼らは次のように言明しているのであった。すなわち、「われわれが知ることのできる限りでは、われわれの公理 (3:A) - (3:C) はその可能性を回避しようと意図するものではない」(As far as we can see, our postulates (3:A) - (3:C) do not attempt to avoid it.) と。

この言明は、「われわれが知ることのできる限りでは」という副文節を付けられている分だけ、その断定性を和らげられている点に注意しよう。事実、この言明の理由付けも完全なものではあり得ない。彼らは、そのパラグラフの第2センテンスで、次のような理由付けを提出するのである。すなわち、

「《ギャンブルをすることの効用》を排除することに最も近接している公理 (3:C:b) でさえも——経済学の諸目的にとって現在利用できるものよりも、はるかに精緻化された心理学の体系が用いられない限りは——尤もなものであるとともに、かつ、正当なものであるように思われる」[Even that one which gets closest to excluding a “utility of gambling” (3:C:b), seems to be plausible and legitimate, — unless a much more refined system of psychology is used than the one now available for the purposes of economics.] と。

彼らの理由付けは、それぞれの公理を、それ自体として眺めて、その《尤もらしさ》(plausibility) と《正当性》(legitimacy) を直接に《直観》に照らして行われているようである。そうして、このために、彼らは公理となるべき命題に「その妥当性が直接に判断できるような直ちに直観的な意味を持たなくてはならない」(each axiom should have an immediate intuitive meaning by which its appropriateness may be judged directly)²⁰ という要請を、パート3.5.2で明記していたのである。しかしながら、ここまで来てみると、そのような要請によっても、問題の公理の《経験的妥当性》を確保することはとうていできないと言うほかないようである。

フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの理由付けを具体的に検討してみよう。彼らは《確率結合の代数学の公理》(the axiom of algebra of combining) (3:C) の一つの条件 (3:C:b) を取り上げて、その直観的な意味を問うのである。

まず、公理 (3:C) は《確率的結合事象の順序付けの公理》(the axiom of probability combination and ordering) (3:B) と共に、数学的期待値を形成するための公理であることに注意しよう。そうして、そのようにして形成される数学的期待値の使用は「《偶然に賭ける》という、すなわち、ギャンブルをするという行為だけにかんする効用」の「痕跡を拭い去る」(to obliterate) のであった。そのような意味を持つ公理 (3:C) を構成する条件の一つである (3:C:b) は、次のような記号で示されていた。

$$\alpha\{\beta U + (1-\beta)V\} + (1-\alpha)V \\ = \gamma U + (1-\gamma)V$$

ただし、ここで $\gamma = \alpha\beta$ とする。

われわれ自身の議論では、これらの記号を、やや厳密さを欠く仕方を使って来たが、しかし、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンのテキ

ストの中では、これらの記号は、すべて、彼らのいわゆる「効用の領域における《自然の》操作と《自然の》関係」(“natural” operations and relations in the domain of utility)を表すものである。

たとえば、上の等式の右辺の記号の全体は、次のことを意味する。いま、効用 U をもたらす事象と、効用 V をもたらす事象が、それぞれ、確率 γ 、および、 $(1-\gamma)$ で起こる場合に、それら二つの事象の確率的結合事象を1回の《自然の》操作によって形成した場合の効用がそれである。

さて、同じ等式の左辺の記号の全体が意味するところは、次のとおりである。まず、効用 U をもたらす事象と効用 V をもたらす事象が、それぞれ、確率 β 、および、 $(1-\beta)$ で起こる場合に、それら二つの事象の確率的結合事象を最初の《自然の》操作によって形成した場合の効用が、左辺の第1項から α を取り除いた部分によって表されている。次に、その確率的結合事象と効用 V をもたらす事象とが、それぞれ、確率 α と $(1-\alpha)$ で起こる場合に、それら二つの事象の確率的結合事象を第2回目の《自然の》操作によって形成した場合の効用が左辺の全体の意味するところである。

したがって、問題の条件 (3:C:b) は、次のことを意味することになる。すなわち、いま、三つの確率を表す数値 γ 、 α 、および、 β について、等式

$$\gamma = \alpha \beta$$

が成立するならば、効用 U と V をもたらす二つの事象を確率 γ にかんする1回の《自然の》操作によって形成される確率的結合事象の効用は、最初に確率 β にかんする《自然の》操作によって形成される確率的結合事象と効用 U をもたらす事象とに確率 α にかんする第2回目の《自然の》操作を加えて形成される確率的結合事象の効用に等しくなる。この条件によって、確率的結合事象を形成する《自然の》操作と数

値的な確率的結合の代数的演算との間に、平行的関係が保たれて、両者の間に矛盾が生じる余地がないことが保証される。そうして、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの《直観的判断》によれば、これらの《自然の》操作と代数的演算との間に平行的関係が保たれることに取り立てて不自然な点はないとされるのである。しかし、それはあくまでもフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの《直観的判断》によるものであって、それと異なる判断には正当性が無いと断定することもできないのである。

こういうわけで、《数値的効用》の公理的体系的基盤となる諸公理自体について、それらの経験的な尤もらしさと正当性を、それ以上主張することは諦めて、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンは、彼らがその公理的体系的提示し得たという事実の意味を探るのである。すなわち、パラグラフ (119) における彼らの文章は次のように続けられている。

「数値的効用が——数学的期待値の使用と同じことになる公式とともに——諸公理 (3:A) — (3:C) の基盤の上に構築され得るという事実は次のことを示しているように思われる。すなわち、われわれは、實際上、数値的効用を、それに対して数学的期待値の解析学を適用することが正当とされるものであると定義したということがそれである [The fact that a numerical utility —— with a formula amounting to the use of mathematical expectations —— can be built upon (3:A) — (3:C), seems to indicate this: We have practically defined numerical utility as being that thing for which the calculus of mathematical expectations is legitimate.]」

フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの言う《数値的効用》が、そのように定義されるものであるなら、《数値的効用》が用いられる世界には、「《偶然に賭ける》という、すなわち、ギャンブルをするという行為だけにかんする効

用というもの」(a utility of the mere act of “taking a chance,” of gambling) の存在は否定されていることになるであろう。

上に再度引用した文章の末尾には、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンによって脚注²が付けられているが、それについては、以下で節を改めて紹介することにしよう。

さて、パラグラフ(119)の末尾、したがって、パート3.5.2の末尾は次の文章で締めくくられている。

「諸公理(3:A)–(3:C)は必要な論理的構築が実行され得ることを保証するがゆえに、《ギャンブルをすることに特有の効用》のような概念は、このレベルで矛盾から免れるような形で定式化され得ないのである[Since (3:A)–(3:C) secure that the necessary construction can be carried out, concepts like a “specific utility of gambling” cannot be formulated free of contradiction on this level.³]」

これらの諸公理から導かれる効用の数学的期待値(たとえば、 $\alpha U_b + (1-\alpha)U_c$ というような形の)が《ギャンブルをするという行為だけにかんする効用》[a utility of the mere act of gambling], すなわち、《ギャンブルをすることに特有の効用》[a “specific utility of gambling”]と両立し得ないことは、すでに明らかである。それゆえ、消費者選択理論などで用いられる通常の効用に加えて《ギャンブルをすることに特有の効用》の存在を許容するならば、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの定式化を支える公理的・数学的技法のレベルでは矛盾を解消することはできないであろう。この点にかんする彼らの述懐は上の引用文に付けられている脚注³に述べられている。すなわち、

「³これは逆説的な主張であるように思われるかもしれない。しかし、その捕らえ難い概念を公理論化することを本気で試みたことのある者ならば恐らく誰でもそれに同意することであろう。」[This may seem to be a paradoxical

assertion. But anybody who has seriously tried to axiomatize that elusive concept, will probably concur with it.]²⁵⁾

CXLX

フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンのパラグラフ(119)の文章に付けられた脚注²を以下に紹介しておこう。その脚注は、彼らの《数値的効用》(a numerical utility)が「それに対して数学的期待値の解析学を適用することが正当とされるもの」[that thing for which the calculus of mathematical expectations is legitimate]として定義されているという事実を指摘する文章に付けられているのであった。そこには、次のような事実が紹介されている。

「²こうして、《セント・ピーターズバーグ・パラドックス》を(数学的期待値ではなくて)、いわゆる、《モラル・エクスペクテーション》の使用によって《解く》というダニエル・ベルヌーイの有名な示唆は、効用を人の貨幣的所有物の対数値として数値的に定義することを意味するのである[Thus Daniel Bernoulli’s well-known suggestion to “solve” the “St. Petersburg Paradox” by the use of the so-called “moral expectation” (instead of the mathematical expectation) means defining the utility numerically as the logarithm of one’s monetary possessions.]」²⁶⁾

ここでフォン・ノイマンとモルゲンシュテルンの言う、「ダニエル・ベルヌーイの有名な示唆」の具体的な内容は、先に紹介したK. メンガーの論文の第5節「限定されない評価関数による解決」に述べられているので、以下に、それを紹介する。

25) *Ibid.*, p. 28n.

26) *Ibid.*

第5節「限定されない評価関数による解決」

(Die Lösung durch unbeschränkte
Bewertungsfunktionen)²⁷⁾

(12)「もう一つ別の解決の道は次のような事情に根拠を置くものである。すなわち、ゲームの子が獲得することのできる利得は、彼の受け取る金額によるのではなく、その金額がもたらす効用によって評価されるという事情がそれである(Andere Lösungsversuche stützen sich auf den Umstand, daß die Gewinne, welche der Spielnehmer machen kann, von ihm nicht nach ihrem Betrage, sondern nach dem Nutzen, den sie für ihn haben, eingeschätzt werden.)。このような着想¹⁾はペテルスブルク問題の取り扱いに対する二つの異なった形式の中で援用され(Dieser Gedanke¹⁾ wurde in zwei verschiedenen Formen zur Behandlung des Petersburgers Problems herangezogen.)」²⁸⁾

このパラグラフの第2センテンスの主語である「このような着想」という言葉に付せられてある脚注¹⁾には、ダニエル・ベルヌーイの名前が出てくるので、次に、その記述を紹介することにしよう。

「¹⁾この着想は、最初に、数学者クラーメル(線形連立方程式の理論に対する彼の貢献は広く知られている)によって開発されたようである[Er scheint zum ersternmal beim Mathematiker Cramer (dessen Verdienste um die Theorie der linearen Gleichungen allgemein bekannt sind) aufgetreten zu sein.]。それと同じことが、詳しく言うと、1728年に、ある問題に関してダニエル・ベルヌーイからニコラウス・ベルヌーイに宛られた既公開の手紙の中に書かれてある(上記の1738年の著書の459ペー

ジ、脚注²⁾、および、ドイツ語版56ページ)が、その問題とは、数学上の計算と通例の評価との間の相異が何に由来するのかという問いである[Derselbe schrieb nämlich 1728 in einem von D. Bernoulli (s. o. S. 459, Anm. 2, 1738, deutsche Ausgabe, S. 56) veröffentlichten Brief an N. Bernoulli über die Frage, woher der Unterschied zwischen der mathematischen Rechnung und der üblichen Schätzung rühre:]。『それは、数学者たちが(理論上)貨幣を、ただ、その数量に従って評価するのに対して、分別のある人々は(實際上)その貨幣から引き出される効用に従って評価するということに由来するのであると、私は思います [„Ich glaube, er beruht darauf, daß (in der Theorie) die Mathematiker das Geld lediglich nach seiner Menge, (in der Praxis) vernünftige Leute hingegen nach dem Nutzen schätzen, den sie daraus ziehen.“]。』ダニエル・ベルヌーイは、このような着想を独立に考え出しただけでなく、彼はそれを最初に公表したのであり、そうして、本稿で前述したのと同じやり方で明確に述べたのである[Unabhängig faßte diesen Gedanken D. Bernoulli, der ihn (l. c.) als erster öffentlich aussprach und in einer gleich noch zu besprechenden Art präzierte.]。『価値は物品の価格から評価されるのではなく、効用から評価されるのである。なぜなら、一人の個人はその効用のために物品を自分のものとするのであるから [„Valor non est aestimandus ex pretio rei, sed ex emolumento quod unusquisque inde capessit.“]。価格は物品それ自体から評価されるのであり(ちなみに、これらの言葉は、交換における様々な諸個人の評価の相互作用を通じて価格を説明するという現代経済理論の根本思想から、ベルヌーイが、まだ、なお遙か遠くに位置していたことを示している)、そうして、価格はあらゆる人について同じであるが、効用はそれぞれの個人の状態から評価される [Pretium ex re ipsa aestimatur (diese

27) Menger, *op. cit.*, p. 464. メンガーの論文の第5節は9個のパラグラフ(12)～(20)で構成されている。

28) *Ibid.*, pp. 464-5.

Worte zeigen nebenbei, daß der Grundgedanke der modernen Wirtschaftstheorie, die Preise durch das Zusammenspiel der Bewertungen verschiedener Individuen im Tausch zu erklären, Bernoulli noch ganz fern lag), omnibusque idem est, emolumentum ex conditione personae.]. こうして、疑いもなく、1000人の領主たちが利益を得ることは、金持ちたちにとってよりも、貧者たちにとって更に一層重要になるのである。とは言え、価格は両者のどちらに對しても同じなのであるけれども [Ita procul dubio pauperis magis refert lucrum facere mille ducatorum, quam divitis, etsi pretium utriq[ue] idem sit.“。] 同じくビュッフォンは彼の《道德算術の試論》(『博物学』第IV巻への補遺, 1777年, 72ページ以下)において次のような考えを主張している [Auch Buffon hat in seinem Essai d'Arithmetique morale (Supplement zu Band IV der Historie Naturelle, 1777, S. 72ff.) diesen Gedanken vertreten.]. 『財産は、その数量によって評価されてはならない... [„L'argent ne doit pas être estimé par sa quantité numérique...]. 人が貨幣から得る利益は、その数量に正比例するのではなくて、100,000エキュの金利を持つ金持ちは10,000エキュしか持たない者よりも10倍にまでは幸福になっていない [Il s'en faut bien que les avantages qu'on tire de l'argent soient en juste proportion avec sa quantité; un homme riche à 100.000 écus de rente n'est pas dix fois plus heureux que l'homme qui n'a que 10.000 écus“;]. そうして、(上掲書, 89ページ) 『守銭奴は数学者と同じである。両者とも貨幣をその数量で評価する [und (l. c., S. 89): „L'avare est comme le Mathématicien; tous deux estiment l'argent par sa quantité numérique.“。] さらに、この考えはラプラス『確率の解析理論』パリ, 1812年(『全集』第VII巻, パリ, 1886年, xix ページ以下) によって強調された [Nachdrücklich wurde der Gedanke sodann von La-

place, Théorie analytique des probabilités, Paris 1812 (Oeuvres VII, Paris 1886, S. XIXff.) betont]. 『人は期待される財産について、その相対価値と絶対価値とを区別しなくてはならない [„On doit distinguer dans le bien espéré sa valeur relative de sa valeur absolue:]. 後者は人に欲望を起こさせる動機から独立であるのにたいして、前者はそれらの動機と共に成長する』 [celle-ci est indépendante des motifs qui le font désirer, au lieu que la première croît avec les motifs“] のであり、そうして、それはF. A. ランゲによって、再三再四(たとえば、『労働問題』, 1865年刊) 強調されている [und von F. A. Lange wiederholt (z. B. „Die Arbeiterfrage“, 1865) hervorgehoben.]. 理論経済学において、前世紀の70年代に、この考えが新たに発見されたことが一つの時代を開いた [In der theoretischen Ökonomie leitete die Neuentdeckung dieses Gedankens in der 70er Jahren des vorigen Jahrhunderts eine neue Epoche ein.] のである。限界効用理論の先駆者たちにかんする優れた文献目録がワインバーガーの『限界効用理論』(1926年)の中に見出されるが、そこには、もちろん、この理論自体が述べられていると共に、私見によれば、不当な評価が不完全な仕方でも述べられている [Gute Literaturangaben finden sich über die Vorläufer der Grenznutzentheorie bei Weinberger, „Die Grenznutzentheorie“, 1926, wo freilich diese Theorie selbst neben einer sehr unvollständigen Darstellung eine m. E. (= meines Erachtens) ungerechte Beurteilung erfährt.].²⁹⁾

この脚注の冒頭に出てくる数学者クラーメル [Gabriel Cramer (1704-52)] はダニエル・ベルヌーイ (1700-82年) の同時代人である。ダニエル・ベルヌーイからニコラウス・ベルヌーイに宛られた問題の手紙が書かれた年代は1728

29) *Ibid.*, pp. 464n – 5 n.

年とされているから、このニコラウス・ベルヌーイはこのダニエルと同時にペテルスブルク大学の教授として招かれた彼の長兄のニコラウス(1695-1726年)ではなくて、彼らの父ヨーハン[Johann Bernoulli (1667-1748)]の次兄で画家のニコラウス・ベルヌーイの息子のニコラウス(1687-1759年)でなくてはならない。このニコラウス・ベルヌーイはイタリアのパドヴァ大学の数学講座の教授であった。ちなみに、その教授職の前任者の一人が、かのガレリオ・ガリレイなのであった。問題の手紙がドイツ語で書かれていることは、この脚注の中の引用文から明らかであろう。ベルヌーイ家の人々は、後の分析心理学者カール・グスタフ・ユングを出したユング家の人々と同様、スイスのバーゼルの市民であったから、彼らが私信をドイツ語で書くことは、極めて自然であると考えられる。

また、この脚注の原文から『ペテルスブルク学会記録』第V巻[Commentarii Academiae Petropol. V, 1738]に載せられているダニエル・ベルヌーイの論文がラテン語で書かれていること、そうして、ビュッフォンの「道徳算術の試論」[Essai d'Arithmetique morale]とラプラスの『確率の解析理論』[Théorie analytique des probabilités]はフランス語で書かれていることが判るであろう。

そこで、まず、従兄のニコラウス・ベルヌーイに宛て書かれたダニエル・ベルヌーイの手紙からの引用文から見て行くことにしよう。ダニエルはこう述べていたのであった。

「それは、数学者たちが(理論上)貨幣を、ただ、その数量に従って評価するのに対して、分別のある人々は(實際上)その貨幣から引き出される効用に従って評価するというに由来するのであると私は思います。」

すでに紹介したように、メンガーの論文の第1節「ペテルスブルク・ゲーム」で、このゲームの子である B の数学的期待値が無限大になるのは、第 n 回目の試行でコインの表が出ると、その結果として与えられる利得が 2^{n-1} ドゥカー

テンという貨幣の数量であることと、その利得が得られる確率が $(1/2^n)$ であることから、その回の試行の数学的期待値が

$$\left(\frac{1}{2}\right)2^{n-1} = \frac{1}{2} \text{ドゥカーテン}$$

という定数になることに原因があると考えていであろう。なぜなら、このゲームはコインの表が出ない限り、何回でも繰り返し試行することができるのであり、そうして、その1回の試行の数学的期待値である $1/2$ ドゥカーテンを何回でも繰り返し加算することによって、このゲームに対する B の数学的期待値を算出することが出来ると、理論上、考えられるからである。

ダニエル・ベルヌーイが「数学者たちは(理論上)貨幣を、ただ、その数量に従って評価する」[daß (in der Theorie) die Mathematiker das Geld lediglich nach seiner Menge,]と述べているのは、数学的期待値を算出するに当たって、第 n 回目の試行の利得が 2^{n-1} ドゥカーテンという貨幣の数量で評価されていることを指しているのである。

それでは、彼が「分別のある人々は(實際上)その貨幣から引き出される効用に従って評価する」[(in der Praxis) vernünftige Leute hingegen nach dem Nutzen schätzen,]と述べているのは、どんなことを意味するのであろうか。その説明は、もちろん、ここで紹介しようとしている、彼の論文の本文の中に述べられているのである。少し具体的に触れて置くと、第 n 回目の利得 2^{n-1} ドゥカーテンから引き出される効用をダニエル・ベルヌーイがどのような形で定義しようとしているかが、われわれの今後の主要な関心事の一つになるであろう。

さて、メンガーは、ダニエル・ベルヌーイがニコラウス・ベルヌーイに宛て書いた手紙から引用された上記の引用文に続けて、次のような注釈を加えていることに注意しよう。

「ダニエル・ベルヌーイは、このような着想を独立に考え出しただけでなく、彼はそれを最

初に公表したのであり、そうして、本稿で前述したのと同じ仕方で明確に述べたのである。」

この注釈は、上に掲げたパラグラフ(12)の脚注¹⁾の冒頭に述べられているクラメールの着想との関係で述べられているものと思われる。しかし、メンガーの文章からだけでは、クラメールとダニエル・ベルヌーイとの間の関係が不明瞭であるので、ここで少し説明を加えて置くことにしよう。

すでに述べたように、ニコラウス・ベルヌーイが数学者モンモールに宛た手紙で、後に「ペテルスブルク・ゲーム」と呼ばれることになる賭けゲームの確率論的に興味ある《パラドックス》を紹介したのが、1713年のことであった。それから15年後の1728年に、当時24歳であったガブリエル・クラメールは、このパラドックスに対する一つの解決を考えついたと伝えられている。それは、そのゲームの子の数学的期待値が、そのゲームから獲得できると期待される貨幣の量、それ自体ではなくて、その貨幣に対して彼が認める主観的価値(subjective value)、あるいは、効用(utility)に基づいて定義されればよいという着想であった。やがて紹介することになるであろうメンガーのパラグラフ(14)の脚注²⁾によれば、クラメールは効用関数の形を貨幣量 w を $1/2$ 乗するべき関数として、すなわち、 $c\sqrt{w}$ のように特定したのである。

さらに、クラメールがこの着想を公表してから10年後の1738年にダニエル・ベルヌーイの論文が出て、そこでベルヌーイ自身の着想が対数関数の形の効用関数で示されたのである。効用関数をべき関数の形で考えるというクラメールの着想は、ベルヌーイのこの論文の脚注を通じて後世に伝えられることになったのであるが、効用関数を対数形で考えるという着想については、ダニエル・ベルヌーイが「それを最初に公表した」人物とされるのである。

次に、『ペテルスブルク学会記録』第V巻、(1738年)にあるダニエル・ベルヌーイの論文からの引用文を見ることにしよう。彼は、まず

次のように述べている。

「価値は物品の価格から評価されるのではなく[Valor non est aestimandus ex pretio rei,]て、その効用から[sed ex emolumento]評価されるのである。なぜなら、一人の個人はその効用のために物品を自分のものにするのであるから[quod unusquisque inde capessit.]である。」

「価値」という言葉は、ラテン語、ドイツ語、フランス語、英語、あるいは、日本語のいずれにおいても多義的に用いられている。この事情は18世紀前半のダニエル・ベルヌーイの場合はもちろんのこと、アダム・スミスが『国富論』において《交換価値》と《使用価値》との区別に言及しなくてはならなかった18世紀後半でも、また、そのような区別が陳腐化した今日においてすら変わりがない。ダニエル・ベルヌーイが上で用いている「価値」という言葉は、たとえば、ペテルスブルク・ゲームの中の第 n 回目の試行の数学的期待値を算定するにあたって、ゲームの子である B が、その試行で得られるかもしれない利得をどう評価するかという、いわば B の《主観的価値》を意味するものと受け取られなくてはならない。

また、ダニエル・ベルヌーイの言う「物品の価格」は、彼の前出の手紙の中で用いられている「貨幣の数量」[seiner Menge]と同義であると考えられることもできるし、上に述べた第 n 回目の試行の利得である 2^{n-1} ドゥカーテンと考えてもよいであろう。そうすると、 B が第 n 回目の試行の利得について認める《主観的価値》は、その利得の貨幣量の 2^{n-1} ドゥカーテンそれ自体ではなくて、それから引き出される「効用」[emolumentum]でなくてはならないと述べられていることになるであろう。

それに続けて、ダニエル・ベルヌーイはこう述べていたのであった。

「価格は物品それ自体から評価されるのであり[Pretium ex re ipsa aestimatur](...)、そうして、価格はあらゆる人について同じである

が [omnibusque idem est,], 効用はそれぞれの個人の状態から評価される [emolumentum ex conditione personae.]。]

この文章は三つの文節から構成されているが、それらのうち、第2と第3の文節の意味は次のように受け取ってよいであろう。すなわち、たとえば、ベテルスブルク・ゲームの第 n 回目の利得 2^{n-1} ドッカーテンはゲームの子である B が誰であっても同じであるが、その 2^{n-1} ドッカーテンから引き出される効用は B が誰であるかによって異なる評価になり得るということである。

上の引用文の第1の文節に続いて (...) の中に述べられているドイツ語の文章はK. メンガーが、その文節に加えた注釈である。それは次のような文章であった。

「(ちなみに、これらの言葉は、交換における様々な個人の評価の相互作用を通じて価格を説明するという現代経済理論の根本思想から、ベルヌーイが、まだなお遙か遠くに位置していたことを示している)[diese Wort zeigen nebenbei, daß der Grundgedanke der modernen Wirtschaftstheorie, die Preise durch das Zusammenspiel der Bewertungen verschiedener Individuen im Tausch zu erklären, Bernoulli noch ganz fern lag].」

もちろん、メンガーの注釈からも明らかなように、第1の文節は、それ自体としても誤りの命題であるが、さらに第1の文節と第2の文節を続けて読むと、「価格は物品それ自体から評価されるがゆえに、あらゆる人について同じになる」とも主張されているかのようでもある。「価格があらゆる人について同じになる」ということは、現代の経済学の用語で言えば、《一物一価の法則》が成り立つという主張であるが、もちろん、この法則が成り立つ理由は「価格は物品それ自体から評価される」という第1の文節の命題にあるのではない。第1の文節の命題がそれ自体で誤りであるという注釈を付け加えたとき、K. メンガーの胸中には、父カール・

メンガー [Carl Menger] の功績に対する熱い思いがあったに違いない。それはともかくとして、価格に関するベルヌーイのこの命題は、どちらかと言えば、その商品の生産に投下された労働量によって価格が規制されるという《労働価値説》に親近性を有するように思われる。

次に、ビュッフォンからの引用文の中の次のような箇所特に注目しよう。

「人が貨幣から得る利益は、その数量に正比例するのではなくて、100,000 エキュの金利を持つ金持ちは10,000 エキュしか持たない者よりも10倍にまで幸福にはなっていない [Il s'en faut bien que les avantages qu'on tire de l'argent soient en juste proportion avec sa quantité; un homme riche à 100.000 écus de rente n'est pas dix fois plus heureux que l'homme qui n'a que 10,000 écus]。]

ここには、明らかに、限界効用逓減の法則が述べられている。それにしても、この文章に続く「守銭奴は数学者と同じである [L'avare est comme le Mathématicien;], 両者とも貨幣をその数量で評価する [tous deux évaluent l'argent par sa quantité numérique.]」という文章は胡椒がよく効いている。守銭奴は貨幣を手放して取得される物品から満足を得るのではなくて、貨幣それ自体から満足を得るのであり、しかも、その限界効用は逓減することがないと考えられるからである。

最後に、ラプラスからの次の引用文に少し注釈をつけておこう。

「人は期待される財産について、その相対価値 [sa valeur relative] と絶対価値 [sa valeur absolue] とを区別しなくてはならない。後者は人に欲望を起こさせる動機から独立である [celle-ci est indépendante des motifs qui le font désirer] のに対して、前者はそれらの動機と共に成長する [la première croît avec les motifs]。]

ラプラスがここに言う「相対価値」と「絶対価値」は、現代の経済学の用語法とは全然異なる

るものであることに注意しなくてはならないであろう。おそらく、彼の言う「絶対価値」は上で触れたベルヌーイの言葉で言うところの「価格」[pretium]に相当するもので、ベルヌーイによれば、「価格は物品それ自体から評価される」[Pretium ex re ipsa aestimatur]のことであり、そうして、価格は「あらゆる人について同じ」[omnibusque idem est]であるので、それは、ラプラスの言うように、「人に欲望を起こさせる動機から独立である」[est indépendante des motifs qui le font désirer]ことになるのであろう。それに対して、ラプラスの言う「相対価値」は、ベルヌーイの言葉で言うところの「効用」[emolumentum]に相当するもので、それは、ベルヌーイによれば、「それぞれの個人の状態から評価される」[ex conditione personae (aestimatur)]がゆえに、ラプラスの言うように、それは「それらの動機と共に成長する」[la première croît avec les motifs]ことになるのであろう。

要するに、ラプラスの言う「絶対価値」は、それが様々な個人の欲望から独立に定まるものであるという意味で《絶対的》なのであり、そうして、彼の「相対価値」は、それがそれぞれの個人の欲望に依存して定まるものであるという意味で《相対的》なのである。

以上でメンガーのパラグラフ(12)に対する脚注³⁰⁾への注釈を終わりにして、次は、彼の本文の議論に目を戻すことにしよう。彼は、パラグラフ(12)に続けてこう述べる。

(13)「われわれが、まず最初に扱う有名な解決の試みは次のような前提から出発する。すなわち、このゲームの子である B は、このゲームを始めるに当たって、ある一定の財産を所有しており、そうして、彼にこのゲームがもたらすところのものは、結局のところ、財産の増大だけなのである[Der bekanntere Lösungsversuch³⁰⁾, den wir zuerst behandeln, geht

davon aus, daß der Spielnehmer B , wenn er an das Spiel tritt, irgendein Vermögen besitze; was ihm das Spiel bringen kann, sei also nur ein Vermögenszuwachs;] が、しかし、その増大した財産の査定は査定の対象となる財産に依存し、そうして、多く持つ人は少なく持つ人よりも、同じ金額をより小さく評価する [die Bewertung von Vermögenszuwächsen hänge aber vom Vermögen des Bewertenden ab; wer viel besitzt, bewerte dieselbe Summe geringer als der, der wenig besitzt;] ものであり、そうして、いまや、ペテルスブルク・ゲームの際に発生する賞金は、このゲームの子にとって、それに相応する金額よりも小さい価値を有するので、かれの期待値の低下を生み出すと考えられる [bedenke man nun, daß die beim Petersburger Spiel auftretenden Gewinne für den Spielnehmer einen geringeren Wert haben, als ihrem Betrag entsprechen würde, so ergebe sich eine Reduktion seiner Hoffnung;] のであり、こうして、彼の数学的期待値は無限大であるのに、彼の実際の期待値は有限になってもよいのである [während seine mathematische Hoffnung unendlich ist, sei seine tatsächliche Hoffnung endlich.]。』³⁰⁾

このパラグラフの冒頭にある「有名な解決の試み」[Der bekanntere Lösungsversuch]という言葉には、脚注³⁰⁾が付けられており、それには、ダニエル・ベルヌーイの前掲論文の参照が指示されている。そうして、ダニエル・ベルヌーイの、この「有名な解決の試み」を紹介するのが、ここで取り上げているメンガーの論文の第5節の目的であることは、すでに述べたところである。そこでメンガーの議論を続けて追うことにしよう。

(14)「この考え方は定量的な形で明確に示される [Der Gedanke wurde auch quantitativ

30) Ibid., p. 465.

präzisiert²⁾]. すなわち、どのような財産の増大もすべて、一つの《主観的な》価値に帰着させられるが、その価値はその財産の増加分に正比例し、そうして、評価される財産に反比例する [Jedem Vermögenszuwachs werde ein „subjektiver“ Wert zugeschreiben, der dem Zuwachs direkt und dem Vermögen des Bewertenden umgekehrt proportional ist.]. このような議論の発端から必然的に次のような結果が判明する。すなわち、財産は記号 v で、その増加分は記号 w で、そうして、主観的価値は記号

$$C \log \frac{v+w}{v}$$

で書き表されて、ここで C は評価にだけ依存する（しかし、 w には依存しない）定数であり、そうして、 $\log$ は自然対数を表す [Aus diesem Ansatz ergibt sich zwangsläufig, daß bei einem Vermögen v dem Zuwachs w der subjektive Wert

$$C \log \frac{v+w}{v}$$

zugeschrieben wird, wobei C eine nur vom Bewertenden abhängende (aber von w unabhängige) Konstante und $\log$ den natürlichen Logarithmus bezeichnet.]. 財産 $a \cdot v$ に対する増加分 $a \cdot w$ の主観的価値は上の公式の結果として

$$C \log \frac{av+aw}{av} = C \log \frac{v+w}{v}$$

となり、従って、財産 v に対する増加分 w の主観的価値に等しい [Der subjektive Wert des Zuwachses $a \cdot w$ zum Vermögen $a \cdot v$ ergibt sich dieser Formel zufolge als

$$C \log \frac{av+aw}{av} = C \log \frac{v+w}{v},$$

also gleich dem subjektiven Wert des Zu-

wachses w zum Vermögen v .].³¹⁾

このパラグラフの冒頭の文章には脚注²⁾が付けられていて、そこには次のように述べられている。

[²⁾ まず第1にクラーメルは上記引用箇所において、 $C\sqrt{w}$ という形の評価関数に注目しているが、この関数に従えば、たとえば、ある利得 w が4倍になっても、わずか2倍の高さに、また、利得が9倍になっても、わずか3倍の高さにしか評価されない [Zunächst wohl von Cramer, der l. c. die Bewertungsfunktion $C\sqrt{w}$ ins Auge faßt, derzufolge beispielsweise das 4fache eines Gewinnes w bloß doppelt so hoch, das 9fache bloß dreimal so hoch eingeschätzt wird als der Gewinn w selbst.]. 対数形の評価関数に行き着いた、この有名な明確化はメンシューラ・ソルティス（運の度合）の名称のもとにダニエル・ベルヌーイの上記論文に由来する [Die berühmte Präzisierung, welche zur logarithmischen Bewertungsfunktion führt, stammt unter dem Namen mensura sortis von D. Bernoulli, l. c.]. すなわち、『こうして、確かに、富は誰にでも常に、その財産の金額に反比例して効用を付加するということが、極めて真実らしく思われる。』[„Ita vero valde probabile est, lucrum quodvis semper emolumentum aferre summae bonorum reciprocae proportionale“] ——そうして、それは、とりわけ、ラプラスによって引き継がれたのである [——und wurde insbesondere von Laplace übernommen.]. すなわち、『人は、この相対価値を評価するための一般的な規則を与えることができない [„On ne peut donner de règle générale pour apprécier cette valeur relative;]. それにもかかわらず、その絶対価値に正比例し、結局のところ、個人の利益に反比例するので、相対価値は無限に小さい額になると仮定するのが自然であろう。』[cependant il est naturel de supposer la valeur relative d'une somme

31) Ibid., pp. 465-6.

infiniment petite, en raison directe de sa valeur absolue, en raison inverse au bien total de la personne intéressée.“] 後者(すなわち, ラプラス)に引き続いて, 財産 v に対する, その増加分 w の精神的価値の大きさを

$$C \log \frac{v+w}{w}$$

で表し, そして, 利得の精神的価値とその利得の得られる確率の積で, その個人の精神的期待値を表すのが習慣になっている[Im Anschluß an diesen letzteren pflegt man die GröÙe

$$C \log \frac{v+w}{w}$$

als moralischen Wert des Zuwachses w zum Vermögen v zu bezeichnen, das Produkt des moralischen Wertes eines Gewinnes und der Wahrscheinlichkeit desselben als moralische Hoffnung.]. 本論文の本文の中で用いられている《主観的価値》あるいは《主観的期待値》という名称はエッティンガーが提案したものである[Öttinger (Crelles Journ. f. d. r. u. angew. Math., 36, 1848, S.26 u. 300ff.) schlägt die im Text verwendete Bezeichnung subjektiver Wert bzw. subjektive Hoffnung vor.]. 後になって, このような推定から, 一般的なウェーバー・フェヒナーの心理法則が現れる。すなわち, 刺激 r に対する増加分 s の感覚は, その増加分 s に正比例し, そうして, 刺激 r に反比例するから, 従って, その感覚は

$$\log \frac{r+s}{r}$$

に比例するであろうというのである[Später ging das Weber-Fechnersche Gesetz der Psychologie allgemein von der Annahme aus, daß die Empfindung des Zuwachses s zum Reize r diesem Zuwachs s direkt und dem Reize r umgekehrt proportional und daher

$$\log \frac{r+s}{r}$$

proportional sei.]. フェヒナーは『精神物理学要論』1860年, 第I巻, 236ページ, 第II巻, 10ページで, こう述べている。すなわち, もしも人が財産の大きさを刺激として受け取り, その価値を, それに付随する感覚として受け取るならば, ベルヌーイの評価関数は, ここにうまく当て嵌まるというのである[Fechner, Elemente der Psychophysik, 1860, I, S.236, II, S. 10, bemerkt, daß sich herein die Bernoullische Bewertungsfunktion einordnet, wenn man die GröÙe des Vermögens als Reiz, den Wert desselben als die zugehörige Empfindung auffaßt.]. しかし, 感覚(そうして, 希には, その表出)は加算されたり, それを通じて計測されたり, また, 数値的に比較されることが決してなく, せいぜいのところ, その強度に従って配列することができる(すなわち, 数学的に言うとき, 数として合同ではなく, 単に, 位相的に写像可能である)に過ぎないのに対して, 評価の《感覚》について, その表出(つまり, 財の交換の際のなんらかの行動方式)は数量的に非常によく明確化できる(たとえば, われわれは, 経済人 A が財 G の数量 x の取得に対して支払う用意があるところの貨幣単位の数を, 様々な数量 x について決定することができる)ので, その結果, 注意深く定式化された限界効用理論の命題は論理的な批判に対して, 徹底的に耐えるのである[Während aber Empfindungen nie (und ihre Äußerungen selten) addiert und dadurch gemessen und zahlenmäßig verglichen, sondern bestenfalls der Intensität nach geordnet werden können (d. i., mathematisch gesprochen, auf die Zahlen nicht kongruent, sondern bloß topologisch abbildbar sind), sind hinsichtlich der Bewertuns „empfindungen“ die Äußerungen(nämlich gewisse Verhaltensweisen beim Gütertausch) sehr wohl zahlen-

mäßig präzisierbar (z. B. können wir die Zahl der Geldeinheiten, die der Wirtschaftler A für den Erwerb einer Quantität x des gutes G auszugeben bereitist, für verschiedene Quantitäten x feststellen), so daß die Aussagen der Grenznutzentheorie bei vorsichtiger Formulierung logischer Kritik durchaus standhalten.。]³²⁾

この脚注は、本文のパラグラフ (14) に提示されている対数形式の《評価関数》[Bewertungsfunktion] の由来を述べたものである。メンガーは、それがダニエル・ベルヌーイに由来すると主張しているのである。

ダニエルの同時代人であるクラメルは、その脚注の冒頭に述べられているように、対数形式ではなくて、

$$U(w) = C\sqrt{w}$$

という形の評価関数を考えたとされている。ちなみに、メンガーがクラメルについて「上記引用箇所」[l. c.] と述べているのは、先にクラメルについて説明を加えたように、ダニエル・ベルヌーイの論文の中のクラメルに関する脚注を指しているのである。

さて、クラメルの評価関数において、利得の値を λ 倍すると、

$$\begin{aligned} U(\lambda w) &= C\sqrt{\lambda w} \\ &= C\sqrt{\lambda}\sqrt{w} \\ &= \sqrt{\lambda}U(w) \end{aligned}$$

が成立する。ここで、 λ は正の実数であるが、いま、その λ の値を、たとえば、4、あるいは、9、と置いてみると、この脚注の冒頭の文章に述べられているように、利得の値 w が 4 倍になれば、効用の値 $U(w)$ は 2 倍、そうして、利得の値が 9 倍になれば、効用の値は 3 倍になることが判る。

メンガーは、それに続けて、1713年に刊行された『ペテルスブルク学会記録』第 V 巻に掲載されたダニエル・ベルヌーイの論文からの引用文を証拠として挙げ、さらに、1812年にパリで刊行されたラプラスの著書『確率の解析理論』からの引用文を挙げている。そうして、メンガーは《主観的価値》[subjektiver Wert]、および、《主観的期待値》[subjektive Hoffnung] という用語がエッティンガーに負うものであることを記した上で、最後に、《ウェーバー・フェヒナーの心理法則》[das Weber-Fechnersche Gesetz der Psychologie] に触れて、それがダニエル・ベルヌーイに由来する証拠として、フェヒナーの『精神物理学要論』(1860年刊)の参照箇所を示しているのである。

いわゆる《ウェーバー・フェヒナーの法則》は、今日でも、広く用いられる生理学 [physiology] の教科書の《体性感覚系》[the Somatic Sensory System] に関する章で、しばしば、紹介されているようである。たとえば、カンデルとシュワルツの『神経科学概論』(第 2 版, 1985年)³³⁾には次のような説明が与えられている。

「強度の点においてのみ異なる刺激を区別する能力は、その刺激がどのくらい大きいかには依存する [The capacity to distinguish stimuli that differ only in magnitude depends on how large the stimuli are.]。二つの重さを弁別する場合を考えよ [Consider the discrimination of two weights.]。人は 1 キログラムの重さが 2 キログラムの重さと違うことを感知することができる [One can perceive a 1-kg weight as different from a 2-kg weight;] が、しかし、50 キログラムと 51 キログラムの重さの間の区別をすることは非常に難しい [but it is very difficult to distinguish between a 50- and

33) Eric R. Kandel, and James H. Schwartz, *Principles of Neural Science*, (New York: Elsevier, 2nd ed., 1985).

32) *Ibid.*, pp. 465n-6n.

a 51-kg weight.]. しかし、どちらの場合も、1キログラム違うだけなのである [Yet both sets differ by only 1 kg!]. このような現象は1834年にエルンスト・ウェバーによって検討され、そうして、彼は、今日、ウェバーの法則として知られる刺激の強度と弁別との間の定量的関係を明らかにした [This phenomenon was examined in 1834 by Ernst Weber, who developed a quantitative relationship between stimulus intensity and discrimination, now known as Weber's law.]. この法則によると、

$$\Delta S = K \times S$$

が成立するが、ここで、 ΔS は基準刺激 S (すなわち、弁別の背景)との相対的關係で感知することのできる最小の刺激強度の差分であり、そうして、 K は定数である [This law states that

$$\Delta S = K \times S$$

where ΔS is the minimal intensity difference that can be perceived relative to a reference stimulus S (i. e., background), and K is a constant.]. こうして、基準刺激の強度が増加するにつれて、第2の刺激強度が基準刺激強度と違うことを感知するのに必要とされる刺激強度の差分も、また、増加するのである [Thus, as the intensity of the reference stimulus increases, the difference in magnitude necessary to perceive a second stimulus as different from the reference stimulus also increases.].³⁴⁾

この引用文の翻訳は、その分野の専門用語に必ずしも従うことなく、自由に直訳しているから、少し注釈が必要とされるであろう。エルンスト・ハインリッヒ・ウェーバー [Ernst Heinrich Weber, 1795-1878] の実験は、被験者の手の平を使って行われたので、上の引用文にある重量の数値例よりも、はるかに軽いもの(彼は

32オンス=907.184グラムと32ドラム=56.699グラムの二つの重量を基準刺激とした)³⁵⁾であったが、とりあえず、上の数値例に従って、50キログラムと51キログラムとの間の弁別を例にとつて説明することにしたい。実験は、まず50キログラムの重量を経験させて、次に、その重量を少しずつ増加させて行くのである。たとえば、50キログラムに0.5キログラムを追加した場合に、その違いが弁別できなかったとするならば、もう少し重量を追加して弁別可能か否かを問うのである。こうして、たとえば、51キログラムのとき、初めて違いが判ったという答えが得られるならば、その追加分である1キログラムが上の公式の ΔS に相当することになるのである。そうして、その51キログラムの重量の比較の対象になった50キログラムの重量が、上述の《基準刺激》[the reference stimulus]であって、記号 S で表されるのである。なお、 ΔS は上の訳文では《基準刺激 S との相対的關係で感知することのできる最小の刺激強度の差分》[the minimal intensity difference that can be perceived relative to a reference stimulus S]と直訳したが、わが国の一般の教科書では、たとえば、《弁別域》という簡潔な訳語が用いられている。《基準刺激》に対する《弁別域》の比率、すなわち、 $\Delta S/S$ はウェーバー比とも呼ばれるが、ウェーバーは、刺激強度 S が極端に大きくもなく、また小さくもない、中間の領域で、この比率が一定に近くなることを発見したのである。ここで、ウェーバーの法則を構成する二つの変数 S 、および、 ΔS は、いずれも、経済理論の世界で用いられている意味において《操

34) *Ibid.*, p. 290.

35) フェヒナーの著書 *Elemente der Psychophysik*, 1860, にはヘルムート・アドラーによる英訳書があるが、その英訳書の次の箇所を参照せよ。Gustav Fechner, *Elements of Psychophysics*, Vol. I, translated by Hermut E. Adler; edited by Davis H. Howes, and Edwin G. Boring, (Holt, Rinehart and Winston, Inc.: New York, 1966), pp.114-6.

作的に有意義な》[operationally meaningful] 概念であると言うことができるであろう。

カンデルとシュワルツは、上の引用文に続けてこう述べている。

「1860年に、グスタフ・フェヒナーはウェーバーの法則を修正して、刺激の強度と、ある被験者によって経験される感覚の強度との間の数学的な関係を、

$$I = K \log \left(\frac{S}{S_0} \right)$$

と表したが、ここで、記号 I は主観的に経験される感覚の強度、 S_0 は刺激の強度の推定において用いられる出発点になる刺激、 S は S_0 よりも強い刺激、そうして、 K は定数である [In 1860, Gustav Fechner modified Weber's law and described the mathematical relationship between stimulus intensity and the intensity of the sensation experienced by a subject,

$$I = K \log \left(\frac{S}{S_0} \right)$$

where I is the subjectively experienced intensity, S_0 is the threshold, S is the suprathreshold stimulus used in the estimation of stimulus magnitude, and K is a constant.].」³⁶⁾

上に紹介したカンデルとシュワルツの解説は、私見によれば、今日の生理学教科書の標準的な解説と見なすことができる。その意味で、この解説には格別の落ち度はないと言ってよいであろうが、しかし、学史的な興味を強く有する者の目からすると、幾つかの点について明確な記載が欠けているように思われる。

たとえば、小さな点について言えば、《ウェーバーの法則》という名称は誰の発案になるのか。われわれは、この名称をフェヒナーに負うので

あるが、カンデルとシュワルツの文章からは、そのように断定することはできないであろう。

もっと大きな点について言えば、次のような疑問を抱くことはできないであろうか。既に触れたように、ウェーバーの法則は S と ΔS という二つの数量の比で定式化されるが、これらの数量の計測の手続きが明確に定義されているという意味で、それは《操作的に有意義な》概念であると言える。それに対して、上の引用文中の対数式で表現されているフェヒナーの法則の中の記号 I で示される概念は、ある特定の被験者によって経験される《感覚の強度》という極めて主観的な概念である。ウェーバー比を消費者選択理論という《限界代替率》に対比させれば、フェヒナーの I は《基数的な効用指数》に対応すると見なすことができるであろう。とすれば、方法的には、ウェーバーが《序数的効用》の立場に置かれるのに対して、フェヒナーは《基数的効用》の立場に置かれることになるのであろうか。このようなアナロジーを思い浮かべるのは、経済理論の発展史に関心を有する者にとって、必ずしも不自然なことではないであろう。

しかしながら、事実はそうではない。このようなアナロジーは、もっと幅の広い歴史的展望の中で適用されなくてはならないのである。

CXLXI

1930年代を通じて、K. メンガーの当該論文の根底にあるアイデアや、あるいは、J. R. ヒックスの『価値と資本』の前半部分に見られる、経済学のアングロ・サクソン世界での、パレートのアイデアの継承・発展の動向に平行して、いわゆる《心理物理学》(Psychophysics) の分野において新しい展開が始まっていたことに目を転じることにしよう。

科学者たちが《感覚》(sensation) を計測することができるかもしれないという可能性について真剣に取り組み始めたとき、《心理物理

36) Kandel and Schwartz, *op. cit.*.

学」という学問領域が成立したと言われている。その動向は1850年代に始まったが、その中で中心的な役割を演じた人々の一人に G. J. フェヒナーがいる。

1850年10月22日の朝、フェヒナーは、ベッドの中で、《感覚の内的世界》(the inner world of sensation)と《刺激の外的世界》(the outer world of stimuli)とを結び付ける方法について思いを巡らせていた。そのとき、彼は刺激が2倍になる毎に、感覚は一定の量で増加するのではないかという着想を得たとされている。これは、たとえば、外的な刺激の強度が、

$$1(=2^0), 2(=2^1), 4(=2^2), 8(=2^3), \dots$$

のように幾何級数的 (geometric) に増大するにつれて、内的な感覚の強度は、

$$0, 1(=0+1), 2(=1+1), 3(=2+1), \dots$$

のように算術級数的 (arithmetic) に増加するということにほかならない。ちなみに、それは、マルサスの人口論の着想に非常に類似するところがあるように思われるが、ここでは、そのことには立ち入らないことにしよう。

このような刺激の強度の数を2の累乗の形で表すと、その指数と感覚の強度の数とが等しくなっているから、刺激の強度の数を記号 S で表わし、そうして、感覚の強度の数を記号 I で表すと、

$$S=2^I$$

が成り立つ。この関係は対数を用いて、

$$I=\log_2 S$$

と書くことができるから、フェヒナーの上記の着想はダニエル・ベルヌーイの効用関数と類似の形式で表されることになる。

しかし、フェヒナーは感覚の強度 (I) を直接的に計測する方法は存在しないと考えていたのである。たとえば、この明るさのほうが、あの明るさよりも強いというように、感覚の強度

の順序をつけることはできても、ある強度が他の強度よりも何倍強いかという強度の比率を指示することができないならば、感覚が本当に計測されたことにはならないと彼は考えていた。そうして、そのような比率を直接に計測する方法は存在しないと彼は信じていたのである。

そこで、彼は、1834年に公刊された E. H. ウェーバーの業績に目を向けることになった。彼は著書『心理物理学要論』(1860年)の第七章「心理物理学的計測の原理」の中で、こう述べている。

「同じ感覚の増加分をもたらすためには、刺激の増加分の大きさが、すでに存在する刺激とちょうど比例して増加しなければならないという、より厳密な定式化は、一般性を持った形で、E. H. ウェーバーによって初めて為されるとともに、彼の実験によって支持されたのである。私は、それゆえ、それをウェーバーの法則と呼んだのである。」(The more exact formulation stating that the magnitude of the stimulus increment must increase in precise proportion to the stimulus already present, in order to bring about an equal increase in sensation, was first made with some generality by E. H. Weber and supported by his experiments. I have therefore called it Weber's Law.)³⁷⁾

ここで、フェヒナーはウェーバーの法則を受け入れるに当たって、それに一つの新しい条件を付加していることに注意しよう。彼は、「同じ感覚の増加分をもたらすためには」(“in order to bring about an equal increase in sensation”), ウェーバー比 $\Delta S/S$ が一定でなくてはならないと述べているのである。すなわち、ある基準刺激の値 S_0 から新しい刺激の値 $S_0 + \Delta S_0$ に刺激の強度を増大させると、その結果として、感覚の強度は I_0 から I_1 に上昇するであろうが、その感覚の強度の増加分

37) Fechner, *Elements of Psychophysics*, Vol. I, p. 54.

$$\Delta I_0 = I_0 - I_1$$

が、それに続いて刺激の強度を増加させる次の段階の感覚の強度の増加分

$$\Delta I_1 = I_2 - I_1$$

と「同じ」(equal)であると述べているのである。ここで、 I_2 は、もちろん、次の基準刺激

$$S_1 = S_0 + \Delta S_0$$

に対してウェーバー比が一定になる ΔS_1 を加えた新しい刺激の強度の水準 $S_1 + \Delta S_1$ に対応する感覚の強度の水準である。

これらの ΔI_1 , ΔI_2 , ... といったような増加分を「同じ感覚の増加分」(equal increments in sensation)と見なすことによって、フェヒナーは、これらの増加分を感覚の強度を計測するための単位として採用したのである。もしも、これらの感覚の増加分が、すべて同じ大きさであるとしたならば、それらの単位を数え上げることによって、感覚の強度を計測することができるであろう。しかし、これらの感覚の強度の増加分が、すべて同じ大きさであるという保証はアプリオリには存在しない。その意味で、これはフェヒナーの仮説と見なすことができる。

フェヒナーが、この仮説に基づいて行った実験の結果は、外部的な刺激の強度(S)と内部的な感覚の強度(I)との間に対数関数で表される関係が成立することを示したのである。当時、天文学の世界では、光度計 (photometer) の開発により、古代ギリシャの天文学に由来する恒星の見掛けの明るさの6等級の区分を客観的な光度に照らして検討する試みが為されていたが、その結果、6等級区分の間隔が客観的な光度の対数関数で表されることが判明した。客観的な光度は天文観測者たちの視覚に対する外的な刺激を意味し、6等級区分の間隔は彼らの内的な視覚の強度を意味するから、このような天文学における成果はフェヒナーの仮説を支持す

る強力な証拠として受け取られた。こうして、フェヒナーの実験結果には、根強い批判者が存在したにもかかわらず、多数の支持者もいて、以来、心理物理学の標準的な学説として殆ど全ての教科書の中に解説されるようになったのである。そうして、今日でも、10月22日はフェヒナーの日 (Fechner Day) として心理物理学者たちの記念するところとなっている。

ところで、フェヒナーの実験方法は、二つの刺激に対応する感覚の差の判断 (the judgment of differences) に基づくものであった。これに対して、感覚の比率の判断 (the judgment of ratios) に基づく最初の実験が1888年にメルケル (Merkel) によって報告された³⁸⁾。すなわち、フェヒナーの方法が ΔI を実験によって推定するものであるのに対して、メルケルのそれは、二つの感覚の強度の比、

$$2:1 = I_1 : I_0$$

を推定するものであった。しかしながら、メルケルのこの試みは心理物理学者たちの注目するところとならず、たとえば、1920年代の実験心理学の権威者であったティチナー (Titchner) はメルケルの方法に対して極めて冷淡な見解を残している³⁹⁾。

メルケルの実験方法は金属球を黒檀の板の上に落下させて音響を発生させ、そうして、その落下距離を変化させることによって、音響の強度 (the sound intensity) をコントロールするものであったので、当然、そのコントロールの精度が非常に悪く、これが実験結果に大きな影響を及ぼしたのである。しかし、電話の発明に伴って生じた電気振動回路と受話器の開発が、精度の高い音響実験を可能にしたので、1930年

38) Merkel, J., "Die Abhängigkeit zwischen Reiz und Empfindung," *Phil. Stud.*, 1888, Vol. 4, pp. 541-594.

39) Titchner, E. B., *Experimental Psychology*, Vol. II, Part II (Instructor's manual), New York: Macmillan, 1923.

代に入って、聴覚の強度の比を推計するメルケルの方法が復活することになったのである。その結果、音響の刺激(S)に対する聴覚の強度(I)の関係が、フェヒナーの対数関数ではなくて、

$$I = k S^a$$

のようなベキ関数でよりよく表されることが、多くの実験によって支持されるようになった。

なかでも、S. S. スティーヴンス (Stevens) は様々な聴覚強度比の推定結果を総合して、音響の大きさの主観的な尺度の単位《ソーン》(sone)を開発するに至ったのである⁴⁰⁾。スティーヴンスの研究はさらに進んで、1950年代に入ると、視覚の明度の主観的な尺度の単位《ブリル》(Bril)を設定し、これら二つの異なる感覚の尺度の比較(cross-modality comparison)によって、外的な刺激と内的な感覚の関係について、《対数法則》(the logarithmic law)よりも《ベキ法則》(the power law)のほうが妥当性が高いという判断を示すに至っている⁴¹⁾。

このようなスティーヴンスの到達点から心理物理学の歴史を振り返ると⁴²⁾、二人の数学者クラメルとベルヌーイの二つの異なる効用関数の形式は、その前史として位置付けられるのである。ペテルスブルク・ゲームの賞金としての貨幣量(w)は一種の外的な刺激と見なすことができ、そうして、その効用(U)は、その刺

激に対応する内的な感覚の強度と考えることができるであろう。そうして、K. メンガーの論文が発表された1934年は、心理物理学の動向が、ベルヌーイの対数関数を前史として持つ《対数法則》からクラメルとベキ関数に由来すると見なされる《ベキ法則》へと転じつつある時期なのであった。

スティーヴンスの見解について、経済学の立場からいまいっ注目すべき点は、彼の推定する感覚の強度の尺度(I)こそが《基数的効用》のそれに対応するものであって、フェヒナーの立場は《序数的効用論者》のそれであるということである。スティーヴンスは、そのような測定尺度を設定する試みの理論的基礎としての測定論を展開しているので、その概要を簡単に紹介しておこう⁴³⁾。

スティーヴンスは測定の基本原理は《対応づけの操作》(the matching operation)にあり、しかも、その操作の様態は一つではなく、当面少なくとも、4種の範疇があり得るという立場にたっている。それゆえ、測定の意味は、その測定に当たって行われる操作によって、異なり得ることになる。

第1の範疇は《名詞的尺度》(Nominal Scale)と呼ばれるもので、この場合、《同一であることを確認する》(Identify)操作と《分類する》(Classify)操作が行われる。その実例を挙げると、野球選手の背番号や機械などのモデル番号がある。幾つかの測定対象のそれぞれに番号を付けるということは、それらに名前を付けるということである。高校野球の場合、背番号は選手たちの守備位置を指示するものになっているから、番号は守備位置によって

40) Stevens, S. S., "On the Theory of Scales of Measurement of a Psychological Magnitude: Loudness," *Psychological Review*, 1936, Vol. 43, pp. 405-416.

41) Stevens, S. S., "Decibels of Light and Sound," *Physics Today*, 1955, Vol. 8, pp. 12-17.

42) Stevens, S. S., *Psychophysics: Introduction to Its Perceptual, Neural, and Social Prospects*, New York: John Wiley Sons, 1975, esp., Chapter 1: The Psychophysical Law, pp. 1-36, and Chapter 2: Sensation and Measurement, pp. 37-62.

43) *Ibid.*, pp. 37-62. その中でも、とりわけ、p. 49のTable 2に、以下の説明は依拠するところが大きい。その表はスティーヴンスの次の論文に基づくものである。

Stevens, S. S., "On the Theory of Scales of Measurement," *Science*, 1946, Vol. 103, pp. 677-680.

選手たちを《分類する》操作を通じて付けられるものと解釈することができる。1は投手, 2は捕手, 3は一塁手というように, 番号は普通名詞の役割を演じている。もっとも, この場合, 1が投手である必然性はなく, 新しい番号付けの約束が承認されさえすれば, 9が投手, 8が捕手, 7が一塁手とすることも考えられなくはない。したがって, 測定尺度の第1の範疇《名詞的尺度》の場合, 測定対象の《同一性を確認する》ことや, それらを《分類する》ことの妨げにならない限りにおいて, 尺度となる《数を別の数に代替すること》(substitution of any number for any other number) という《変換》(transformations) が許容されるのである。

第2の範疇は《序数的尺度》(Ordinal Scale) と呼ばれるもので, この場合には《順位付け》(Rank order) の操作が行われる。その実例として, 無差別曲線の順序付けを表す数としての序数的効用や, 以前に紹介した鉱物の硬度を表すモースの硬度計の尺度⁴⁴⁾, そうして, 上に触れた恒星の明るさを表す等級などが挙げられるであろう。最後の例では1等星が最も明るく, 6等星が最も暗いという逆進的な順序になっているので, そうでないモースの尺度について考えると, 1度, 2度, 3度, ..., 10度と次第に硬度が増加する順序が変わりさえしなければ, それらの番号になる数は何であってよいわけである。したがって, この場合, その尺度の《順序を保存する変換》(any transformation which preserves order) なら, どのような変換でも許容されることになる。

第3の範疇は《距離的尺度》(Interval Scale) と呼ばれるもので, この場合, 測定対象の間の《距離, あるいは, 差を見出す》(Find distances or differences) 操作が行われるのである。その実例としては, 二つの効用水準の間の

距離, あるいは, 差に基づいて定義される《限界効用》という概念を承認する《基数的効用》に加えて, 摂氏および華氏で表示される温度, あるいは, 暦として表現される時間(calendar time)などを挙げることができるであろう。この場合, 距離の大きさの順序を保存する《線形変換》が許容される。《線形変換》は, 《定数を乗じること》(multiplication by a constant) と《定数を加算すること》(addition of a constant) という二つの操作が合成された複合的操作である。

最後に, 第4の範疇は《比率的尺度》(Ratio Scale) と呼ばれるもので, この場合, 《比率, 分数, あるいは, 乗数を発見する》(find ratios, fractions, or multiples) 操作が行われる。その実例を挙げると, 長さ(length), 重量(weight), 多数さ(numerosity), 持続期間(duration), および, その他たいていの物理的尺度(physical scales)がある。スティーヴンスは, 更に, 絶対温度(Temperature Kelvin)とゾーン(sone) で計った音響の大きさ(loudness)を挙げている。この範疇が第3の範疇《距離的尺度》と異なる点は, その尺度の中に始発点となる0点がある, 絶対的に存在することである。たとえば, 《距離的尺度》に属する「暦の対象とされる時間」(calendar time)には, 特定の暦法の中には0点が存在するけれども, 別の暦法を採れば, それは0点でなくなるという意味でその始発点は絶対的な意味での0点ではない。言い換えると, 「暦として表現される時間」には絶対的な0点は存在しないのである。それに対して, 《比率的尺度》の「持続期間」には絶対的な始発点が存在する。このような尺度に対しては, 《定数を加算する》という操作は0点を移動させるから許容できなくて, 《定数を乗じる》という操作だけが許容されるのである。

スティーヴンスの測定尺度を四つの範疇に分けるこのような試みは, 見方を変えると, 数の体系を四つの範疇に分類したものと考えること

44) 拙稿「賃金基金説の系譜について(28)」, 本誌, 第43巻, 第1号, (1993年6月), p. 129を見よ。

ができるであろう。

数学における数体系の諸範疇が《自然数》, 《整数》, 《有理数》, 《実数》, 《複素数》, ...の諸体系へと次第に拡張されることはよく知られるところであるが, その拡張の基本原理は, それぞれの数体系の中で, どのような《数学的演算》(mathematical operations)が閉じているかということである。たとえば, 自然数体系の中では, その諸要素について《加法》(addition)の演算は閉じているけれども, その逆演算である《減法》(subtraction)の演算は閉じていない。《減法》の演算を閉じるようにするためには, 自然数にゼロとマイナスの整数を付加して, 整数体系とする必要があるがゆえに, 新たに整数体系が設定されたのである。

数学における数体系の諸範疇が数学の諸演算(operations)に基づいて分類されるように, スティーヴンスの数体系の4範疇は心理物理学の実験で用いられた操作(operations)に基づいて分類されている。たとえば, 第1の範疇《名詞的尺度》は, 同じ音響を認知して, 異なる音響を分類するという心理物理学の操作に基づいて考案された範疇なのである。そのような作業を行う過程で, 同じ音響とされるものにも幾つかの属性(attributes), あるいは, 次元(dimensions)があって, 音響が同じとされるときに, 一部の次元の相違は無視されていることが判明したのである。すべての次元を考えると, 殆どすべての音響に対する感覚は, それぞれ異質で比較の対象にはならないという主張によって, 心理物理学の存立の基盤が危うくされるかもしれない。音響に対する感覚については, 少なくとも, 音量(volume), 高低(pitch), 密度(density), 響き(loudness)という四つの属性が区別されることがスティーヴンスによって指摘されている⁴⁵⁾。一般に, 外的な刺激は, このように幾つもの属性の複合体で多次元性

(multidimensionality)を有するが, それらの属性を分析して, どれか一つの次元に的を絞ると, 当初は質的に異なるとして比較の対象として受け取られなかった刺激も比較可能になることがあるのである。

スティーヴンスの第2の範疇《序数的尺度》は, たとえば, 音響の一つの属性である《響き》(loudness)について大小, あるいは, 強弱の順序付けを被験者に求めるための操作に基づいて設定されたものである。さらに, 第3の範疇の《距離的尺度》と第4の範疇の《比率的尺度》の基礎となる心理物理学的操作が, それぞれ, フェヒナーの《差の判断》(the judgment of differences), および, メルケルの《比率の判断》(the judgment of ratios)という操作であることは, すでに述べたところから明らかであろう。

さて, ここで経済学に戻ろう。われわれが消費者の効用について《基数的効用》の数体系と《序数的効用》の数体系とを区別するのは, 限界効用という概念を受け入れるか否かにかかっている。その限りにおいて, われわれの視野に入っている数体系の範疇は, スティーヴンスの第2と第3の範疇だけに過ぎず, 第1と第4の範疇に議論が及ぶことは殆どない。

しかし, 第1の《名詞的尺度》について考えるべきことがないわけでは, 決してない。経済学で取り上げる《効用》, あるいは, 満足の状態に対応する内的感覚も, 心理物理学のそれと同様に, 《多次元性》(multidimensionality)を有する複合体であるからである。たとえば, ある財を消費, ないし, 使用することがら生じる満足と, その財を保有することによって, 将来の不測の事態に対処できるという安心感に基づく満足は, 同一の効用指数では表現できないに違いない。かつて, 消費者選択理論の効用関数の中に, 当該期間中に消費される財, および, サービスの諸変数とともに, 将来に向けて保有される貨幣のストックを導入して, 貨幣に対する需要を消費者選択理論によって説明しよう

45) Stevens, *Psychophysics*, pp. 56-58.

とする試みが行われたことがあったが、これは上に述べた効用の多次元性を無視した暴挙と言うべきであろう。それは、われわれが経済主体の選好表の推定に先立って、選好の同一性の確認と、分類の手続きを着実に踏まなかった結果に外ならない。

第4の《比率的尺度》についても考えるべきことは多い。仮に《基数的効用》の立場に立つにしても、その効用に線形変換を許容する数体系を考えているのか、あるいは、任意の定数を乗じるという変換だけを許容する数体系を考えるのかという区別は、計量的研究の結果に無視することのできない影響を及ぼすであろう。たとえば、エンゲル係数のように、比率にしたときに初めて法則性が姿を現すことは古くから知られていることである。次に引用するリカードの述懐は、ケインズが『一般理論』の第2章の冒頭に引用したことによって、広く知られるところとなっている。

「数量にかんしては法則を立てることができないけれども、割合にかんしてなら、かなり正しい法則を立てることができる。前者の研究は無益で、ごまかしであり、そうして、後者こそが経済学の本当の目的であると、私は日ごとに確信を深めています。」(No law can be laid down respecting quantity, but a tolerably correct one can be laid down respecting proportions. Every day I am satisfied that the former enquiry is vain and delusive, and the latter only the true objects of the science.”⁴⁶⁾ (1820年10月9日付、マルサス宛の書簡より)

ところで、J. ヒックスが主著『価値と資本』の冒頭で基数的効用に基づく諸概念を消費者選択理論の中から追放して、序数的効用のみに基づく理論を確立したのは、予算制約式の右辺で

予算を縛る総支出額（ヒックスの言葉で言えば、所得 M ）を所与と想定したことに決定的に依存するのである。しかし、現実には、この総支出額もまた家計の意思決定の結果として定まる変数であることは否定し難いであろう。それは、たとえば、現在と将来の何期間かにわたって生じる各期の総支出額の限界効用の現在価値が均等化するような形で決定される変数でなくてはならない。とするならば、総支出（あるいは、所得）の《限界効用》という基数的効用に基づく概念を追放することはついにできず、基数的効用は経済理論の中に復活させられなければならないであろう。その暁には、われわれの基数的効用が、スティーブンスの言う《距離的尺度》であるのか、あるいは、《比率的尺度》であるのかという問題が発生することもあり得ないことではないであろう。

CXLXII

われわれはK.メンガーの論文「価値理論における不確実要素：いわゆるペテルスブルク・ゲームに関連する考察」の第5節「限定されない評価関数による解決」を紹介する過程で、そのパラグラフ(14)の最初の文章に付けられた脚注に対する注釈から心理物理学の歴史に深入りしてしまった。ここで、メンガーの論文のパラグラフ(15)に目を戻すことにしよう。

(15)「主観的評価の対数公式をペテルスブルク問題に導入すると次のような結果になる[Führt man diese logarithmische Formel subjektiver Bewertung ins Petersburg Problem ein, so ergibt sich:]. 数 $n=1, 2, 3, \dots$ のそれぞれについて確率 $1/2^n$ があり、それらの確率にでもって、 B は記号 v で現される彼の当初の財産について増加分 2^n を取得し、そうして、この金額は B にとって

$$C \log \frac{v+2^n}{v}$$

46) Keynes, J. M., *The General Theory of Employment, Interest, and Money*, London: Macmillan, 1936, p. 4n.

という主観的価値を有する [Es besteht für jede der Zahlen $n=1, 2, 3, \dots$ die Wahrscheinlichkeit $1/2^n$ dafür, daß B zu seinem Anfangsvermögen, welches v heißen möge, den Zuwachs 2^n gewinnt, und dieser Betrag besitzt für B den subjektiven Wert

$$C \log \frac{v+2^n}{v}.]$$

それゆえ、これらを全部合計すると、彼の主観的期待値は

$$\begin{aligned} & \frac{C}{2} \log \frac{v+1}{v} \\ & + \frac{C}{4} \log \frac{v+2}{v} \\ & + \frac{C}{8} \log \frac{v+4}{v} + \dots \\ & \dots + \frac{C}{2^n} \log \frac{v+2^{n-1}}{v} + \dots \end{aligned}$$

に達する [Insgesamt beträgt also seine subjektive Hoffnung

$$\begin{aligned} & \frac{C}{2} \log \frac{v+1}{v} \\ & + \frac{C}{4} \log \frac{v+2}{v} \\ & + \frac{C}{8} \log \frac{v+4}{v} + \dots \\ & \dots + \frac{C}{2^n} \log \frac{v+2^{n-1}}{v} + \dots]. \end{aligned}$$

この級数は、容易に分かるように、 $v > 0$ のとき、すなわち、 B がこのゲームに、ある一定の財産を持って参加しようとするときに収束するので、したがって、 B の主観的期待値は有限値になる [Da diese Reihe, wie man leicht sieht, wenn $v > 0$ ist, d. h. wenn B mit irgendeinem Vermögen an das Spiel herantritt, konvergiert, so ist B 's subjektive Hoffnung endlich.].⁴⁷⁾

(16) 「この解決策の基本的な考え方、すなわ

ち、財産の増加分の価値が、たんに、その増加分の大きさのみならず、評価されている財産にも依存するという考え方は、それ自体としては極めて適切であり、主観的価値学説の創始者による新発見以来、この考え方が理論経済学において演じてきた役割は非常に大きい [So treffend der Grundgedanke dieses Lösungsversuches, daß nämlich der Wert eines Vermögenszuwachses nicht nur von dessen Höhe, sondern auch vom Vermögen des Bewertenden abhängt, an sich ist, so groß die Rolle ist, die er seit seiner Neuentdeckung durch die Begründer der subjektiven Wertlehre in der theoretischen Ökonomie spielt] しかしながら、数学的期待値と賭けゲームに立ち向かう正常な人間の現実の行動との間の隔たりを説明するためには、以下で示されるように、この考え方では不十分なのである [—zur Erklärung der Diskrepanz von mathematischer Hoffnung und tatsächlichem Verhalten normaler Menschen gegenüber Glücksspielen ist dieser Gedanke, wie im folgenden gezeigt werden soll, unzureichend.].⁴⁸⁾

(17) 「われわれは、まず次の証明から始める、すなわち、主観的価値のための上述の対数形の公式を通じてペテルスブルクのパラドックスを解決する方法は(確率計算にかんする最良の教科書における100年を越える伝統に反して)形式的手続き上の理由から不満足な点がある [Wir beginnen mit dem Nachweise, daß die Lösung des Petersburger Paradoxons durch die angegebene logarithmische Formel für den subjektiven Wert (entgegen der mehr als hundertjährigen Tradition in den besten Lehrbüchern des Wahrscheinlichkeitsrechnung) schon aus formalen Gründen unbefriedigend ist.]. (正常な人間の現実の価値評価を表現するのに、この対数形の評価の公式が適当である

47) Menger, *op. cit.*, p. 466.

48) *Ibid.*, pp. 466—7.

かどうかという問題に対しても、同じく、異議が唱えられたままであり、それに対する検討は全く行われていない [Ob diese logarithmische Bewertungsformel zur Beschreibung der tatsächlichen Bewertungen normaler Menschen geeignet sei, wogegen sich gleichfalls Bedenken erheben lassen, bleibe dabei ganz unerörtert.]。この公式が、そのパラドックスの解明をもたらさないということは、この解決法のアドホックな性格から極めて簡単に読み取れるだろう [Daß die Formel keine Aufklärung der Paradoxie mit sich bringt, geht wohl am einfachsten aus dem ad-hoc-Charakter der Lösung hervor:]。確かに、財産 v に対する増加分 w は、

$$C \log \frac{v+w}{v}$$

という主観的価値を有するという仮定から、ペテルスブルクのゲームの場合の主観的な期待値に対して有限の金額が推論される [Zwar folgt aus der Annahme, daß der Zuwachs w zum Vermögen v den subjektiven Wert

$$C \log \frac{v+w}{v}$$

habe, ein endlicher Betrag für die subjektive Hoffnung beim Petersburger Spiel.]。しかし、このゲームのルールを軽微に修正することによって、それに類似したゲームをこしらえることができるが、そのゲームの場合には、数学的期待値のみならず、主観的期待値も、また、対数形式の評価公式に基づいて無限大になるのであるが、それにもかかわらず、かなりの賭け金になると、それをリスクに賭ける者など誰もいなくなるであろう [Aber durch ganz leichte Abänderung der Angaben dieses Spieles läßt sich ein ähnliches Spiel konstruieren, bei welchem nicht nur die mathematische, sondern auch die subjektive Hoffnung unter Zugrundeleg-

ung der logarithmischen Bewertungsformel unendlich ist und bei welchem dennoch niemand einen beträchtlichen Einsatz riskieren würde.]。次のように修正されたペテルスブルクのゲームを検討することにしよう [Man betrachte nämlich folgendes modifizierte Petersburger Spiel:]。すなわち、1個の硬貨が、初めて表が出るまで投げられる [Eine Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Male Kopf fällt.]。第 n 回目の試行に入ると、 B の当初の財産を記号 v で表示すると、 B は A から

$$v \cdot e^{2^n} - v$$

の金額を受け取る [Tritt dies beim n -ten Wurf ein, so erhält B von A , wenn v das Anfangsvermögen des B bezeichnet, den Betrag von

$$v \cdot e^{2^n} - v]$$

(一般に、そうして、少なくとも、大きな n について、 2^{n-1} という金額よりも多い金額が、ペテルスブルクのゲームの場合には、 B に与えられる [was in allgemeinen und jedenfalls für großes n mehr ist als der Betrag 2^{n-1} , den B beim Petersburger Spiel erhalten würde])。この修正されたペテルスブルクのゲームにおける B の数学的期待値は、彼が $n = 1, 2, \dots$ から無限に至る、それぞれの数 n について、

$$v \cdot e^{2^n} - v$$

という金額を獲得するための確率が $1/2^n$ であるとする、

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (v \cdot e^2 - v) + \frac{1}{4} (v \cdot e^4 - v) \\ & + \frac{1}{8} (v \cdot e^8 - v) + \dots \\ & \dots + \frac{1}{2^n} (v \cdot e^{2^n} - v) + \dots \end{aligned}$$

という大きさ、すなわち、無限大になる [Die

mathematische Hoffnung des B bei diesem modifizierten Petersburger Spiel beträgt, da er für jede Zahl $n=1, 2, \dots$ ad inf. die Wahrscheinlichkeit $1/2^n$ hat, den Betrag

$$v \cdot e^{2^n} - v$$

zu gewinnen,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} (v \cdot e^2 - v) + \frac{1}{4} (v \cdot e^4 - v) \\ & + \frac{1}{8} (v \cdot e^8 - v) + \dots \\ & \dots + \frac{1}{2^n} (v \cdot e^{2^n} - v) + \dots \end{aligned}$$

d. i. unendlich.]. いま B の主観的期待値を対数形式の評価公式に基づいて算定すると, 次のような結果が生じる [Berechnen wir nun die subjektive Hoffnung des B unter Zugrundelegung der logarithmischen Bewertungsformel, so ergibt sich:]. すなわち, B は, すべての n について, 彼の財産 v に対する増加分

$$v \cdot e^{2^n} - v$$

に伴う確率 $1/2^n$ を持ち, そうして, その主観的価値である

$$\begin{aligned} C \log \frac{v + v \cdot e^{2^n} - v}{v} \\ = C \log e^{2^n} \\ = C \cdot 2^n \end{aligned}$$

は, すべての数 n の各々について, 彼の主観的価値に対して

$$\frac{1}{2^n} \cdot C \cdot 2^n = C$$

という金額をもたらすものになっている [B hat für jede ganze Zahl n die Wahrscheinlichkeit $1/2^n$ auf den Zuwachs

$$v \cdot e^{2^n} - v$$

zu seinem Vermögen v , dessen subjektiver

Wert

$$\begin{aligned} C \log \frac{v + v \cdot e^{2^n} - v}{v} \\ = C \log e^{2^n} \\ = C \cdot 2^n \end{aligned}$$

ist, was für jede ganze Zahl n den Beitrag

$$\frac{1}{2^n} \cdot C \cdot 2^n = C$$

zu seiner subjektiven Hoffnung liefert.]. したがって, それを合計すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot C \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot C \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot C \cdot 8 + \dots \\ = C + C + C + \dots \end{aligned}$$

すなわち, 無限大になる [Insgesamt ist dieselbe demnach

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \cdot C \cdot 2 + \frac{1}{4} \cdot C \cdot 4 + \frac{1}{8} \cdot C \cdot 8 + \dots \\ = C + C + C \dots \end{aligned}$$

d. i. unendlich.]. それゆえ, 次のことが分かる [Wir sehen also:], すなわち, 多少とも修正されたペテルスブルクのゲームにおいて, B は, たんに数学的期待値のみならず, 対数形式の評価公式に基づく主観的期待値もまた無限大になるのである [In einem etwas modifizierten Petersburger Spiel hat B nicht nur die mathematische, sondern unter Zugrundelegung der logarithmischen Bewertungsformel auch die subjektive Hoffnung unendlich.]. 他方で, それにもかかわらず, この修正されたペテルスブルクのゲームにおいて, 正常な人間はなら誰も賭け金よりも大きい金額, あるいは彼の全財産, を危険にさらしたりしないことは明らかである [Andererseits ist dabei klar, daß auch beim modifizierten Petersburger Spiel kein normaler Mensch einen größeren Betrag oder gar sein Vermögen als Einsatz riskieren wird.] したがって, 主観的評価のための対数

形式の公式の助けを借りて、ペテルスブルクのゲームに関する諸問題を解くことは、単なる見せ掛けのものに過ぎないのである [Die Lösung des auf das Petersburger Spiel bezüglichen Problems mit Hilfe der logarithmischen Formel für subjektive Bewertung ist also bloß eine scheinbare.].⁴⁹⁾

(18) 「しかし、さらに、われわれは次のことを示そう [Wir zeigen aber weiter:], すなわち、財産の増加分の評価は、その大きさのみならず評価される財産にも依存するという、それ自体としては正しい考え方が適用不可能であることは、賭けゲームにおける数学的期待値と現実の行動との間の不一致を解明するために、対数形式の公式によって、考察を特殊な仕方でも明確化すること (あるいは、むしろ増加分の主観的価値は、それ自体の大きさに比例し、そうして、財産の大きさに反比例するという明確化のための仮定) から生じたのではないということがそれである [Die Unverwendbarkeit des ansichzutreffenden Gedankens, daß die Bewertung eines Vermögenszuwachses nicht nur von seiner Höhe, sondern auch von dem Vermögen des Bewertenden abhängt, für die Aufklärung der Diskrepanz zwischen mathematischer Hoffnung und tatsächlichem Verhalten bei Glücksspielen rührt nicht etwa von der speziellen Präzisierung des Gedankens durch die logarithmische Formel (bzw. von der zu dieser Präzisierung führenden Annahme, daß der subjektive Wert des Zuwachses der Größe desselben proportional und der Größe des Vermögens umgekehrt proportional sei).].
むしろ、かなり一般的に言えば、われわれは、ある特定の人間 B が財産の増加分 w に帰着させる主観的価値 $f(w)$ を観察するのであるが、ここで関数 $f(w)$ は B の財産と、そうして、

場合によっては、他の事情とに依存する関数なのである [Wir betrachten vielmehr ganz allgemein den subjektiven Wert $f(w)$, welchen ein bestimmter Mensch B einem Vermögenszuwachs w zuschreibt, wobei $f(w)$ irgendeine vom Vermögen des B und eventuell noch anderen Umständen abhängige unbeschränkte Funktion sei.], すなわち、それは、十分に大きな w の値に対して任意の大きさの値をとる、ある関数であって、たとえば、

$$\sqrt{w}, \text{あるいは}, C \log \log \frac{v+w}{v}$$

のような諸関数、さらに、たとえば、

$$C \cdot w + d, \text{ただし}, C > 0$$

という関数、および、

$$C \log \frac{v+w}{v}$$

という関数は、この事例である [d. h. eine funktion, welche für hinreichend große Werte von w beliebig große Funktionswerte annimmt, so wie dies z. B. für die Funktionen

$$\sqrt{w}, C \log \log \frac{v+w}{v},$$

aber auch z. B. für die Funktionen

$$C \cdot w + d \text{ mit } C > 0$$

und die Funktion

$$C \log \frac{v+w}{v}$$

der Fall ist.]. さらに、われわれは次の一般的な定理を証明する [Wir beweisen dann folgenden allgemeinen Satz:].⁵⁰⁾

(19) 「ある限定されない関数 $f(w)$ を通じて

49) Ibid., pp. 467-8.

50) Ibid., p. 468.

行われる財産の増加の評価に対して、ペテルスブルクのゲームに類似した一つの賭けゲームが存在し、そこではゲームの子の主観的な評価関数 $f(w)$ に基礎付けられる主観的期待値が無限大になる [Für jede durch eine unbeschränkte Funktion $f(w)$ erfolgende Bewertung von Vermögenszuwachsen gibt es ein dem Petersburger Spiel verwandtes Glücksspiel, bei welchem die subjektive Hoffnung des Spielnehmers unter Zugrundelegung der subjektiven Bewertungsfunktion $f(w)$ unendlich ist.]. 事実, w_1 を一つの増加分であるとする, その主観的価値 $f(w_1)$ は, 少なくとも, $2^0=1$ ドゥカーテンであり, w_2 を, いま一つの増加分とすると, その主観的価値 $f(w_2)$ は少なくとも $2^1=2$ ドゥカーテンであり, そうして, すべての大きな数 n について w_n も一つの増加分であるとする, その主観的価値 $f(w_n)$ は, 少なくとも, 2^{n-1} である [In der Tat, sei w_1 ein Zuwachs, dessen subjektiver Wert $f(w_1)$ mindestens $2^0=1$ Dukaten ist, w_2 ein Zuwachs, dessen subjektiver Wert $f(w_2)$ mindestens $2^1=2$ Dukaten ist, und so sei w für jede ganze Zahl n ein Zuwachs, dessen subjektiver Wert $f(w_n)$ mindestens 2^{n-1} ist.]. このような増加分 w_n の存在は, 極めて大きな n のすべてに対して, 関数 $f(w)$ について前提された無制限性からの結果なのである [Das Vorhandensein eines solchen Zuwachses w_n ergibt sich für jedes noch so große n aus der vorausgesetzten Unbeschränktheit der Funktion $f(w)$.]. われわれは, 大きな数 n のすべてに対して, このような増加分 w_n が一定であると考え, そうして, 次のように修正されたペテルスブルクのゲームを考察する [Wir denken nun für jede ganze Zahl n einen solchen Zuwachs w_n bestimmt und betrachten folgendes modifizierte Petersburger Spiel:]. 1個の硬貨が初めて表が出る回まで投げられる [Eine Münze wird so lange geworfen, bis zum ersten Male Kopf

fällt;]. それが第 n 回目の試行に入っているとしたなら, B は A から w_n 貨幣単位の金額を受け取り, そうして, このゲームは終了する [tritt dies beim n -ten Wurf ein, so erhält B von A den Betrag von w_n Geldeinheiten und das Spiel ist beendet.]. 評価関数 $f(w)$ に基づく場合の B の主観的期待値は, 明らかに,

$$\frac{1}{2} f(w_1) + \frac{1}{4} f(w_2) + \frac{1}{8} f(w_3) + \dots,$$

であり, したがって, 少なくとも,

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \dots,$$

に等しいか, それよりも大きい, すなわち, 無限大である [Die subjektive Hoffnung des B bei Zugrundelegung der Bewertungsfunktion $f(w)$ ist dann offenbar

$$\frac{1}{2} f(w_1) + \frac{1}{4} f(w_2) + \frac{1}{8} f(w_3) + \dots,$$

also mindestens gleich

$$\frac{1}{2} \cdot 1 + \frac{1}{4} \cdot 2 + \frac{1}{8} \cdot 4 + \dots,$$

d. h. unendlich.]。]⁵¹⁾

(20) 「したがって, ペテルスブルク問題は, 第2節で詳しく述べられたように, たんに, 無限大の期待値を有限の金額で埋め合わせるのではないということは全く別として, 上に証明された定理から次のことが判明する, すなわち, 評価関数の導入によって, 上の場合に限らず, 現実の行動と期待される行動との間の不一致を排除することができるのである [Ganz abgesehen davon, daß, wie in Abschnitt 2 ausgeführt wurde, das Petersburger Problem nicht led-

51) *Ibid.*, pp. 468-9.

iglich in der Ersetzung unendlicher Hoffnungen durch endliche Beträge besteht, geht also aus dem bewiesenen Satz hervor, daß durch Einführung irgendwelcher unbeschränkter Bewertungsfunktionen nicht einmal dieser Fall der Diskrepanz von tatsächlichem und errechnetem Verhalten beseitigt werden kann.」⁵²⁾

われわれはフォンノイマンとモルゲンシュテルンの言う「ダニエル・ベルヌーイの有名な示唆」の具体的な内容を見るためにメンガーの論文の第5節「限定されない評価関数による解決」の全文を紹介したのである。その目的のためには、しかしながら、上掲のパラグラフ(15)を示すだけで十分であるにもかかわらず、ベルヌーイの解決に対するメンガーのコメントが述べられているパラグラフ(16)～(20)までも、ついでに、紹介することになった。

クラーメルとダニエル・ベルヌーイの着想であるペテルスブルク・ゲームの子の《主観的期待値》が有限値に収束するか、あるいは、それが、従来の《数学的期待値》と同様に、無限大に発散するか、を規制する要因は三つある。第1の要因は、試行が回を重ねるにつれて、硬貨の表が出る確立が次第に逓減していく割合であり、第2の要因は、硬貨の表が出たときに与えられる賞金の額が、試行の回が重なるにつれて、次第に逓増していく割合であり、そうして、第3の要因は、クラーメルとベルヌーイによって導入された《主観的評価関数》で示される賞金の限界効用が、手持ち財産の増大とともに次第

に逓減していく割合である。

いま、第1の要因は所与として、第2の要因と第3の要因とのバランスを考えると、本来のペテルスブルク・ゲームの場合、第 n 回の試行における賞金が 2^{n-1} ドゥカーテンへと逓増するという第2の要因よりも、ベルヌーイの対数形式の《主観的評価関数》の示す限界効用逓減の割合である第3の要因のほうが優勢になるから、この場合の《主観的期待値》は有限値に収束するのである。しかし、たとえば、メンガーのパラグラフ(17)に述べられていたように、第2の要因、すなわち、賞金の逓増する割合を強化するようにゲームのルールを変更するならば、ベルヌーイの対数形式の《主観的評価関数》に基づいて計算される《主観的期待値》は、《数学的期待値》と同様に、無限大に発散するのである。

このように、《主観的期待値》が収束するか、あるいは、発散するかは、《評価関数》だけによって規制されるものではなく、従って、《評価関数》の形式がベルヌーイの対数形式に限られる格別の理由はないというのが、メンガーのコメントの要旨なのである。

以上で、フォン・ノイマンとモルゲンシュテルンのパラグラフ(119)に付けられている脚注²に関する解説を打ち切ることにする。これで、彼らの著書の第1章の第3節「効用の概念」のサブセクション3.7「諸公理にかんする一般的注釈」のパート3.7.1を構成するすべてのパラグラフを読み終わったことになる。続くパート3.7.2、および、3.7.3の紹介は次稿に委ねられるであろう。

52) Ibid., p. 469.