



Title	サヴェジ基礎論における術語Worldについて(8)
Author(s)	園, 信太郎
Citation	経済学研究, 48(4), 186-211
Issue Date	1999-03
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/32153
Type	departmental bulletin paper
File Information	48(4)_P186-211.pdf



サヴェジ基礎論における術語worldについて(8)

園 信太郎

1. はじめに

この「基礎論」とは

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1954 (*Second Revised Edition*, Dover, New York, 1972)

でのサヴェジ氏の思索のことだが、筆者はこの紀要の1993年3月第42巻4号、頁は21(307)―47(333), 1993年9月 第43巻2号, 14(144)―37(167), 1994年9月 第44巻2号, 31(125)―59(153), 1995年3月第44巻第4号, 118(436)―146(464), 1996年3月第45巻第4号, 49(415)―68(434), 1997年3月第46巻第4号, 30(384)―54(408), 及び1998年3月第47巻第4号, 43(663)―67(687), において「基礎論」への注釈を試みたのであり、一方、副次的注釈, 「サヴェジ, レオナルド ジミィ, による1961年の講義における個人的確率について」, 1994年3月第43巻4号, 176(603)―187(613), 及び, 個人的効用の有界性に関する注釈, 「サヴェジ書第二版の80頁における脚註に現われる, 有界効用について」, 1990年12月 第40巻 第3号, 30(288)―40(298), を示した。

今回は, 「基礎論」の第6章 Observation を読み取ることとする。この部分では, 「観察」にかかわる個人論的議論がサヴェジ氏の立場から提示されているのである。なお, 今まで通り § x. y. z, はDover版の第x章第y節z頁を示す。

2. 第6章の冒頭の節でのサヴェジ氏の態度 § 6.1, 105, の冒頭の段落を引くと次である。

With the construction of utility, the theory of decision in the face of uncertainty is, in a sense, complete. I have no further postulates to propose, and those I have proposed have been shown to be equivalent to the assumption that the person always decides in favor of an act the expected utility of which is as large as possible, supposing for simplicity that only a finite number of acts are open to him. At the level of generality that has led to this conclusion there seems to be little or nothing left to say. To go further now means to go into more detail, to investigate special types of decision problems. One type of decision problem of central importance is that in which the person is called upon to make an observation and then to choose some act in the light of the outcome of the observation.

ここでサヴェジ氏は, 彼自身の個人論的見解からすれば「統計学の基礎づけ」にかかわる本質的な議論は前章までで終了していると, 読者に注意しているわけである。第5章までで, 「確率」及び「効用」に関する個人論的思索を通して七つの公準が提示されて, 個人的確率の「存在」及び一意性と, 個人的効用の「存在」及び実質的一意性とが証明されて, この「確率」とこの「効用」とに基づく個人的期待効用が, 「そ

の個人」の、選択の様式としての、「選好, preference」を表現することが示されているのである。つまり、「不確定性, uncertainty」に直面している、そしてまた選択肢としての幾つかの「行為」に直面している、サヴェジ氏の個人論の見解に従うという意味で合理的な「個人」は、自身にとっての期待効用が最大となる「行為」を選択せざるを得なくなるのであり、第5章までで、サヴェジ氏の流儀によって、きわめて一般的な状況において、「期待効用最大化の原理」が正当化されているのである。しかし、「統計学の基礎づけ」をサヴェジ氏は問題としているのであるから、彼は「観察」という事柄を問題とせざるを得ないはずなのであり、つまり、中心的な重要性を持っている、決定問題の一つのタイプとして、「その個人」が「観察」をなすことを要求され、さらにまた、その「観察」がもたらす結果を考慮して「行為」を選択することを要求されるという、一つの状況を問題とせざるを得ないはずなのである。

これに続く段落を引くと次である。

The consideration of such observational decision problems is a step toward those problems of great interest for statistics in which the person must decide what observation to make, that is, of course, what to look at, not what to see. They are the problems of designing experiments and other observational programs.

「個人」の判断の様式がその「個人」自身の期待効用のその「個人」自身による最大化としてとらえられるのであるから、いくつかの「実験」や、さらにはいくつかの「観察」から、自身にとっての期待効用という見地から最も「得な」ものを、その「個人」が選択するとしても、少なくともサヴェジ氏の個人論の見解からすれば、不合理ではないこととなるのである。つまり、「観察」にかかわるいくつかの可能な道筋

から、自身にとって最も「得な」道筋を、自身にとって「最適な」ものとして、「個人」は選択すべきであるという、「観察」の選択の基本的様式が正当化されるわけである。

この次の次の段落、つまり §6.1, 105, の四番目の段落を引くと次である。

Observation is a concept essential to the study of statistics proper, most of what has been said thus far being preliminary to, but not really part of, statistics; even after this chapter and the next one, on observation, there will still remain a major transition. One important feature of much of what is ordinarily called statistics is, according to my analysis, concerned with the behavior not of an isolated person, but of a group of persons acting, for example, in concert. In later chapters I will deal, so far as I am able, with the problem of group action, but preliminary considerations bearing on it will be made and pointed out from time to time in this chapter and the next.

ここでサヴェジ氏は、「観察」が「統計学固有, statistics proper」の研究にとって本質的な概念であることと、自身が展開した第5章までの議論の大部分が統計学の部分ではなく、言わばそのための準備であることとを認めているのである。また彼は、頻度論的流儀が大きな勢力を保っている当時の統計学を考慮した上で、通常統計学と呼ばれている事柄の多くは、孤立した一個人ではなく、コンサートにおいて振る舞う人々のような「個人」からなるグループの行動にかかわるものであると主張するのである。つまり、少なくともこの部分を執筆していた時のサヴェジ氏は、個人論的な流儀を徹底させて、「個人」の不確定性下の選好に関する議論が統計学の本来の課題なのだとする立場を採らずに、「グループ行為, group action」に注

目して当時の統計学を基礎づけようとしているのであり、彼は、頻度論的流儀がもたらした主要な手順が、「グループ行為」への個人論的な省察を通して的確に解釈されると期待していたわけである。

これに続く段落、つまり105頁から106頁にかけての段落を引くと次である。

Though the details of these two chapters may seem mathematically forbidding, drastic simplifying assumptions are made in them to keep extraneous difficulties to a minimum. These typically take the form of assuming that certain sets of acts, events, and values of random variables are finite. Even in elementary applications of the theory, these simplifying assumptions seldom actually hold. In some contexts, it is quite elementary to relax them sufficiently; in others, serious mathematical effort has been required; and some are still at the frontier of research. Relaxations of the assumptions will be touched on from time to time, sometimes explicitly but sometimes only implicitly in the choice of suggestive notation and nomenclature.

「観察」に関する議論を数学的に一般的かつ厳格に取り扱おうとするとかなり厄介な議論をしなければならず、「統計学の基礎づけ」という作業の本筋からかなりはずれた、しかも近づき難い議論にかかわることとなるので、本質的ではない困難な事柄を最小にするために、かなり思い切った仮定を導入することもあると、サヴェジ氏はことわるのである。またこの仮定というのは、「行為」、「事象」、そして確率変数の値のおのおのに対して、それらから成るあるいくつかの集合が「有限的, finite」であるというようなものなのである。サヴェジ氏は一貫して、自身が展開している議論の本質にかかわる部分に数学的技法上の困難が入り込むことによ

り読者の理解が妨げられることを、極力排除しようと努力しているわけだが、ここでもサヴェジ氏のこの態度が保たれているのである。なお、議論を単純化するためのこのような仮定が、より緩やかなものによって置き換えられるべき状況が実際にあることをサヴェジ氏は十分に承知しており、さらにまた仮定を緩和することが自然だが技術上容易でない場合でも、示唆的な表記法や術語を選ぶことでそのような緩和の可能性を暗黙の内に示すことを、彼は試みるのである。

3. 「観察」ということ(導出される決定問題)

第6章第2節の表題は What an observation is であり、この節では、統計学にとっての、つまり「その個人」にとっての、「観察」の役割を反省しているのである。106頁のこの節の冒頭の段落を引くと次である。

To begin with an informal survey of observation, consider a decision problem, that is, a person faced with a decision among several acts. Calling it the basic decision problem and the acts associated with it the basic acts, a new decision problem would arise, if the person were informed before he made his decision that a particular event, say B , obtained. The new decision problem is related to the basic decision problem in a simple way; for the acts associated with it are also the basic acts, and the decision is to be made by computing the expected utility given B of the basic acts and deciding on one that maximizes the conditional expected utility. The basic problem may be modified in still another, though closely related, way. Let the person say in advance, for each possible B_i , which of the basic acts he will decide on when he is informed, as he is to be, which

element B_i of a given partition obtains. This will be called the derived decision problem arising from the basic decision problem and the observation of i , and its acts will be called derived acts. Technically speaking, the derived acts are determined by arbitrarily assigning one basic act to each element of the partition. For any state s , the consequence of a derived act is the consequence for s of the basic act associated with the particular B_i in which s lies. The terms informally introduced in this paragraph are defined formally later in the section.

「観察」という事柄についてのインフォーマルな概観を得るために一つの決定問題を考察してみるのだが、個人論的な立場からすれば、これは、いくつかの「行為」の間での決定に直面している一人の「個人」を考えることにほかならない。この決定問題を基礎的決定問題と呼び、それに結びついている「行為」を基礎的行為と呼ぶことにしておく。すると、仮に、「その個人」が、自身の「その決定」をなす前に、「世界」において特定の「事象」 B が通用するというを知らされるとするのならば、一つの「新しい」決定問題が生じてくると見なして良いであろう。この「新しい」決定問題とは、「事象」 B が与えられている場合の「その個人」にとっての決定問題である。つまり、それにかかわる「行為」は基礎的行為のままなのだが、「その個人」は、 B が与えられている場合の条件つき期待効用を各「行為」に対して見積もり、最大の条件つき期待効用をもたらす「行為」へと決定を下すこととなるわけである。ここで、特定の「事象」 B が通用すると知らされるとするのではなく、「世界」に対する一つの分割が与えられていて、「その分割の各要素 B_i に対して、もし B_i が通用するのならばどの「行為」へと決定を下すのかを「その個人」があらかじめ述べる」という状況を想定するのならば、一つ

の決定問題がもたらされると見て良いであろう。これを、基礎的決定問題と分割の要素を指定する指標 i の「観察」とから「導出される, derived」決定問題と呼び、またそれに結びついている「行為」を「導出される行為」と呼ぶこととする。「導出される行為」とは、「世界」のその分割の各要素に対して基礎的行為を任意に配分することによって定まるものであり、「世界」の各「状態」 s に対して「導出される行為」がもたらす「結果」とは、 s が存在している（その分割の）要素 B_i に結びつけられている基礎的行為が、その s に対してもたらす「結果」にほかならない。

これに続く段落はただ一つの文であり、これを引くと次である。

A derived decision problem is not necessary different in kind from the basic problem; indeed it is quite possible that the basic problem can itself be viewed as derived from some other basic problem and observation.

つまり、「導出される」決定問題が基礎的決定問題と質において異なるというわけでは必ずしもないのであり、実際、その基礎的問題自身も他の基礎的問題及び「観察」から「導出される」と見なし得るということは全く可能なのである。

この次の段落、つまり § 6.2, 107, の冒頭の段落を引くと次である。

Formidable though the description of a derived problem may seem at first reading, its solution is, in a sense, easy and has already almost been given; for it is clear that, if $P(B_i) > 0$, the person will decide to associate with B_i a basic act the expected utility of which given B_i is as high as possible, and, if $P(B_i) = 0$, it is immaterial to the person which basic act is associated with B_i .

「導出される」問題においては、問題となっている分割の各要素に対して任意の基礎的行為を対応させることによって「導出される行為」が得られるのであるから、基礎的行為の数と分割の（「確率」が正である）要素の数とが共に少なくともある程度の大きさであるのならば、問題となる「導出される行為」の数は少なくともかなりの大きさとなるであろう。つまり、「その個人」は、極めて多くの「導出される行為」から自身にとって「最も得な行為」を捜し出さなければならなくなる可能性がかなりあるのである。ところが、分割の（「確率」が正である）各要素 B_i に対して、 B_i が与えられている場合の条件つき期待効用を最大化する基礎的行為を対応させ、「確率」が零である各要素に対しては任意の基礎的行為を対応させるとするのならば、このようにして得られる「導出される行為」が、「その個人」にとって「最も得な行為」をもたらすはずである。つまり、「導出される」問題に対する解は、本質的には、特定の「事象」が与えられている場合の解と異ならないのである。なお、「「事象」の「確率」が零である」とは、「サヴェジ氏の個人論的見解において、その「事象」が「その個人」にとって「実際上不可能である、virtually impossible」」ということである。

これに続く段落を引くと次である。

It is almost obvious that the value of a derived problem cannot be less, and typically is greater, than the value of the basic problem from which it is derived. After all, any basic act is among the derived acts, so that any expected utility that can be attained by deciding on a basic act can be attained by deciding on the same basic act considered as a derived act. In short, the person is free to ignore the observation. That obvious fact is the theory's expression of the commonplace that knowl-

edge is not disadvantageous.

「導出される」問題の「価値」は、その問題がそこから導出される基礎的問題の「価値」よりも小にはならないし、通常はより大となるのである。つまり、任意の基礎的行為が与えられているとして、問題となっている（「世界」の）「分割」の各要素に対してその基礎的行為を対応させるのならば、このようにして得られる「導出される行為」はその基礎的行為と同一視できるのであり、結局、任意の基礎的行為によってもたらされる期待効用は、その「行為」を「導出される行為」と見なす場合の「行為」によって獲得できるのであり、従って、「導出される」問題の「価値」が基礎的問題の「価値」よりも小となることはあり得ないわけである。つまり簡潔に述べれば、「その個人」は自由に「その観察」を無視できるということであるが、これは、「知識が不利益をもたらすことはない」というありふれた主張に対する、個人論的な立場からの表現なのである。しかしサヴェジ氏は、この主張をすぐには受け入れずに、それをさらに分析することを試みるのである。

これに続く段落、つまり § 6.2, 107, の三番目の段落を引くと次である。

It sometimes happens that a real person avoids finding something out or that his friends feel duty bound to keep something from him, saying that what he doesn't know can't hurt him; the jealous spouse and the hypochondriac are familiar tragic examples. Such apparent exceptions to the principle that forewarned is forearmed call for analysis. At first sight, one might be inclined to say that the person who refuses freely proffered information is behaving irrationally and in violation of the postulates. But perhaps it is better to admit that information that *seems* free may prove expensive by doing psychological harm

to its recipient. Consider, for example, a sick person who is certain that he has the best of medical care and is in a position to find out whether his sickness is mortal. He may decide that his own personality is such that, though he can continue with some cheer to live in the fear that he may possibly die soon, what is left of his life would be agony, if he knew that death were imminent. Under such circumstances, far from calling him irrational, we might extol the person's rationality, if he abstained from the information. On the other hand, such an interpretation may seem forced. (Cf. Criticism (f) of § 5.6.)

「現実の個人」はある事柄の内容を見出すことをあえて避けたりもするというところにサヴェジ氏は注目するのである。また「その個人」の友人たちが、彼が知らないことによって彼が傷つくことはあり得ないという判断に従って、ある事柄を「その個人」から遠ざけておかざるを得ないという義務感のようなものを持つこともあり得るのである。サヴェジ氏はこのような「現実の個人」の例として「心気症の患者」や「嫉妬深い配偶者」があることを注意している。さらにまた彼は、「警戒は警備なり」という原則に少なくとも外見上はかなり明白に反しているように思われるこれらの例に対しては、ある種の個人論的分析が必要であると指摘するのである。つまり、無料で提供されている情報をあえて拒絶する「個人」はサヴェジ氏の公準系を侵犯していると思なせるのであるから不合理に行動しているのであると、個人論的見解を尊重するのならば、判断したくなるかもしれないのであるが、この一見すると正当なような判断は再考が必要だというわけである。そこでサヴェジ氏は、無料であるように「思われる」問題の情報が、それを受け取る者に対して無視できない心理的害をもたらし得るが故に、その受取人に

としては結局高価なものとなり得ると注意するのである。例えば、もし欲するのならば最良の医療を受けることができ、しかも自身の病が致命的なものか否かを知ることができる立場にある「病気の個人」を想定してみると、もし彼が、自分自身の性格をよく考慮した上で、問題の病が自身へとすぐにも死をもたらすものだと知るのであれば、自分にはただ苦悩のみが残されることになる判断して、自身の病気に関する問題の情報にかかわることをあえて差し控えるのならば、彼によるこの（情報への）拒絶を不合理であるとは呼び得ないことであろう。だが、このような（一見すると不合理であるような状況への）再解釈は、こじつけじみているようにも思われ得る。なおサヴェジ氏は、§ 5.6の100頁から101頁にかけての、批判(f)にかかわる部分を参照するように注意を促しているが、これは「一見するとサヴェジ氏の個人論的見解に反しているように思われる行動様式」を再解釈することにかかわるものであり、前回の注釈の第7節で既に言及している。

4. 「観察」ということ（「そのブドウ」の例）

§ 6.2, 107, の四番目の段落を引くと次である。

Examples of decisions based on observation are on every hand, but it will be worth while to examine one in some detail before undertaking an abstract mathematical analysis of such decisions. Any example would have to be highly idealized for simplicity, because the complexity of any real decision problem defies complete explicit description, but particular simplicity is in order here.

「観察」に基づく決定という事柄がかかわっていると見なせる例はあらゆる所にあるとサヴェジ氏は認めるのであるが、彼は、そのような決定問題に対する抽象的で数学的な分析にとり

かかる前に、一つの例をある程度まで詳しく調べてみることは価値あることであろうと主張するのである。つまりサヴェジ氏は、自身の思索の流儀である、数学的諸形式の天下り式導入をできる限り避けて、それらの諸形式が生じて来る状況を複雑ではない例によってなんとか明晰にとらえようとするやり方を、ここでもまた採用するのである。さらに彼は、ある程度の数学的抽象化に慣れてしまうと忘れてしまうような事実である、いかなる例であれ現実の(決定問題の)例はその複雑さゆえに完璧で明白な記述を拒絶するものなのであり、従って、議論を単純化することを欲するのならば、いかなる例であれ、きわめて理念化されなければならないことであろうという事柄へと、注意を促すのである。そこでサヴェジ氏は特別に単純化された例を持ち出すこととなるのである。

これに続く段落、つまり107頁から108頁にかけての段落を引くと次である。

The person in the example is considering whether to buy some of the grapes he sees in a grocery store and, if so, in what quantity. To his taste, the grapes may be of any of three qualities, poor, fair, and excellent. Call the qualities Q generically and 1, 2, and 3 individually. From what the person knows at the moment, including of course the appearance of the grapes, he cannot be certain of their quality, but he attaches personal probability to each of the three possibilities according to Table 1.

TABLE 1. $P(Q)$

Q (uality)	1	2	3
P (robability)	1/4	1/2	1/4

ここで問題とする「その個人」はある食料雑貨店でブドウを見ており、「そのブドウ」を買うか否か、また買うとすればどのくらいの分量を買うのかで、多少悩んでいるものとする。彼

の日頃の好みに従うのならば、「そのブドウ」は、「まずい」、「並である」、そして「卓越している」の三つの互いに排反な品質の内のどれか一つへと分類できるはずなのである。これらの品質を一般的には Q と呼び、個別的には1, 2, 及び3と呼ぶこととする。また「その個人」は、今の所知っている事柄からは、ただし当然「そのブドウ」の外観をも含むのだが、「そのブドウ」の品質が三つの内のどれなのかについて確信が持っていないのであり、しかし彼は、それら三つの可能な場合のおのおのに対して、表1に従って、彼自身の個人的な「確率」を付加することはできるのである。

この次の段落、つまり108頁の二番目の段落を引くと次である。

The person can decide to buy 0, 1, 2, or 3 pounds of grapes; these are the basic acts of the example. Taking one consideration with another, he finds the consequences of each act, measured in utiles, in each of the three possible events to be those given in the body of Table 2. The expected utilities in the right margin of Table 2 follow, of course, from Table 1 and the body of Table 2.

TABLE 2. UTILITY $f(Q)$ FOR EACH f AND EACH Q

f	Q			$E(f)$
	1	2	3	
0	0	0	0	0
1	-1	1	3	1
2	-3	0	5	1/2
3	-6	-2	6	-1

「その個人」は「そのブドウ」の内の0, 1, 2, あるいは3ポンドを買うことを決定できるものとする。この場合、これら四つの選択肢がこの例での基礎的行為となる。そこで「その個人」は、あれやこれやと考えて、「そのブドウ」の品質を表す三つの可能な「事象」のおのおの各「行為」とによって自身へともたらされる「結

果」を、自身の「効用」によって、つまり「ユーティル, *utile*」という単位によって、見積ることとなるのであり、また、この見積りの結果が表2の胴体部分で与えられるものとする。また、四つの「行為」に対する期待効用は、表1で定められている「確率」と表2の胴体部分の「効用」値とから得られるのであり、それらは表2の右の縁に示されているのである。

これに続く段落を引くと次である。

The entries in Table 2 have not been chosen haphazardly, but with an attempt at verisimilitude. Thus it is supposed that if the person buys grapes of poor quality his dissatisfaction with the bargain will accelerate rapidly with the amount bought, which seems reasonable, especially if the keeping quality of poor grapes is low. He is, of course, unaffected by the quality if he buys none. Again, buying a few fair grapes may be mildly desirable, but overbuying is not. Finally, excellent grapes are worth buying, even in large quantities, but the utility of the purchase increases less than proportionally to the amount bought.

表2の効用値は偶然的に選ばれたものではなく、もっともらしく見えるように設定されているのだとサヴェジ氏は注意するのである。つまり、「その個人」が「まずい」ブドウを買ってしまうのならば、この買物によってもたらされる彼の不満度は、買う量が増大するに従って、加速されるようにして急激に増加するのである。またこのようなことは、特に「そのブドウ」の日もちが悪いのならばよくあてはまることとなるであろう。なお当然「その個人」は、もし何も買わないのならば、「そのブドウ」のその品質から何か影響を受けるというようなことはないのである。さらにまた、「並」のブドウを少量買うことは、「その個人」にとっては、ゆ

るやかに望ましいこととはなり得るが、しかし、買い過ぎは損なのである。そして「卓越している」ブドウは、3ポンドという多い量ではあっても、「その個人」にとっては買うに価するのではあるが、買う量に比例するよりもより少ない程度で(それを買うことがもたらす)「効用」が増加するのである。なおサヴェジ氏は説明を単純化するためには例が理念化されなければならないことを認めてはいるが、しかしこの例に見られるように、非現実的な程に理念化されてしまうことは回避しようとするのである。

これに続く段落はただ一つの文であり、これを引くと次である。

The correct solution of the basic decision problem is to buy 1 pound of grapes; for that act has, according to the right margin of Table 2, an expected utility of 1, which is the largest that can be attained.

基礎的決定問題の「正しい, *correct*」解は「「そのブドウ」を1ポンド買う」ということとなるが、これは、表2の右の縁に各「行為」に対応する(「その個人」にとっての)期待効用が表示されており、その内での最大の期待効用である1ユーティルをもたらす(「その個人」にとっての)「行為」が「「そのブドウ」を1ポンド買う」であることより従うのである。ここで「正しい」解と表現されているが、「その個人」の判断とは分離された様式において「正しい」というのではなく、サヴェジ氏の個人論的見解に従うと想定されている「その個人」自身が定める「確率」及び「効用」に基づくのならば、「その個人」自身は「その行為」を選ばざるを得ないという様式における、「その行為」を、「正しい」解とサヴェジ氏は呼んでいるわけである。

これに続く段落、つまり108頁から109頁にかけての段落を引くと次である。

Now, suppose the person is free to make an observation, that is, a new observation in addition to those that may have contributed to the determination of the probabilities in the basic problem. It may be, for example, that the grocer invites him to eat a few of the grapes or that the person is going to ask the woman beside him how they look to her. Let there be five possible outcomes of his observation; call them x generically and 1, 2, 3, 4, and 5 individually. I assume, though this feature is rather incidental to the example, that low values of x tend to be suggestive of low quality. The joint distribution of x and Q , that is, the probability that x and Q simultaneously have any given pair of values, is of central technical importance. Those probabilities, each multiplied by 128 for simplicity of presentation, are given in the body of Table 3. The right-hand and bottom margins of the table give, also multiplied by 128, the probability of each value of x and each value of Q . The marginal entries are, of course, obtained by adding rows and columns. As indicated in the lower right-hand corner of the table, the probabilities assumed do indeed add up to 1, and the bottom margin recapitulates Table 1.

TABLE 3. $128P(x \cap Q)$

x	Q			$128P(x)$
	1	2	3	
1	15	5	1	21
2	10	15	2	27
3	4	24	4	32
4	2	15	10	27
5	1	5	15	21
	32	64	32	128
	$128P(Q)$			

「そのブドウ」に直面している「その個人」は自由に「観察」ができるのだとしてみよう。

ただし、この「観察」とは、基礎的決定問題における（「その個人」にとっての）「確率」を定める際に寄与するであろうような「観察」に対して、さらに加えられることとなる「新しい」ものであるとするのである。例えば、その食料雑貨店の主人が、「その個人」に対して、「そのブドウ」を少しだけ味見するように勧めるかもしれないし、また「その個人」が、かたわらの女性に対して、「そのブドウ」は彼女にはどのように見えるのかを尋ねようとするかもしれないのである。ここでは、「その個人」による「観察」の可能な結果が全部で五つあるものとして、それらを、一般には x 、個別的には1, 2, 3, 4, 及び5と呼ぶこととする。また、 x の値が低くなるということは「そのブドウ」の品質が低いものであるだろうという傾向を示すものとする。そこで、 x 及び Q の結合分布を考えるのだが、これは、 x 及び Q が任意に与えられている（値からなる）対を値として取ることの「確率」を考えるということであり、これらの「確率」は、サヴェジ氏の個人論的見解に従うと想定されている「その個人」によって定められるのである。そこで、これらの「確率」は、表3の胴体部分で与えられるとする。ただしこの表3では、表示の様式を簡明にするために、「確率」の各値に対して $128(=2^7)$ がかけられているのである。また、この表の右側及び底の縁には、おのおの、 x 及び Q の値に対する「確率」が表示されているのだが、これらも本来の「確率」値に128をかけたものである。なお、これらの周辺の「確率」値は、それが記入されている箇所に対応する行あるいは列における全要素をたし合わせた値と一致していなければならないのである。なお、この表の下のほうの右側の角の値が示しているように、この表の胴体部分で導入されている「確率」値をすべてたし合わせると1となるのであり、また、この表の底の縁の部分は左から右へと、 $32(=2^5)$ 、 $64(=2^6)$ 、及び $32(=2^5)$ という値を示しているが、これは表1の内容を反復しているのである。

これに続く段落、つまり §6.2, 109, の二番目の段落を引くと次である。

Conditional probabilities can easily be read from Table 3. Thus, for example, the conditional probability that x is 2, given that Q is 3, is $2/32$, and the conditional probability that Q is 2, given that x is 4, is $15/27$. It will be seen in later sections that the distribution of x given Q is, in a sense, even more fundamental than the joint distribution of x and Q .

いくつかの「条件つき確率」が表3から容易に読み取ることができることは注意すべきである。例えば、「 Q は3である」という条件が与えられている場合の、「 x は2である」ということの「条件つき確率」は、「 Q は3である」ということの「確率」を分母とし、「 Q は3であり、かつ x は2である」ということの「確率」を分子とする、分数によって表されるが、これは $2/32$ に等しくなるのであり、また、「 x は4である」という条件が与えられている場合の、「 Q は2である」ということの「条件つき確率」は、「 x は4である」ということの「確率」を分母とし、「 x は4であり、かつ Q は2である」ということの「確率」を分子とする、分数によって表されるが、これは $15/27$ に等しくなるのである。ところで、「 Q が与えられている場合の、 x に関する条件つき分布」が、ある意味において、より基礎的な重要性を持つこととなると、サヴェジ氏はあえて示唆しているが、これは、頻度論的流儀においては、 Q はいわゆる母数を表し、この条件つき分布はいわゆる母集団にかかわる分布の候補者なのであるから、彼のこの示唆は頻度論的流儀に逆らうものではないわけである。少なくともこの箇所では、本来の統計学的議論においては、「 x 及び Q の結合分布」よりもこの条件つき分布の方がより基礎的であると、サヴェジ氏は判断しているのであ

る。

これに続く段落、つまり109頁から110頁にかけての段落を引くと次である。

There are $4^5=1,024$ derived acts, since one of the four basic acts can be assigned arbitrarily to each of the five possible outcomes of the observation. It is an easy exercise, using Tables 2 and 3, to verify Table 4, which shows the conditional expectation of the utility of each basic act given each possible outcome of the observation. For each x , the highest expected utility, given that value of x , has been italicized. Thus, for example, only if x is 1 will the person refrain from buying grapes altogether, and only if x is 5 will he risk buying 3 pounds. In full, the best derived act, call it g , is to buy 0, 1, 1, 2, or 3 pounds, if x is 1, 2, 3, 4, or 5, respectively. The value of the derived problem is the expected value of g , which is computed thus:

$$\begin{aligned} (1) \quad E(g) &= \sum_x E(g|x) P(x) \\ &= (0 + 11 + 32 + 44 + 74)/128 \\ &= 161/128 \approx 1.26 \text{ utiles.} \end{aligned}$$

Since the value of the basic problem is 1 utile, the envisaged observation is worth 0.26 utile; that is, the person would if necessary pay up to 0.26 utile for the observation.

「その観察」の五つの可能な結果のおのおの

TABLE 4. $E(f | x)$

f	x				
	1	2	3	4	5
0	<i>0/21</i>	0/27	0/32	0/27	0/21
1	-7/21	<i>11/27</i>	<i>32/32</i>	43/27	49/21
2	-40/21	-20/27	8/32	<i>44/27</i>	72/21
3	-94/21	-78/27	-48/32	18/27	<i>74/21</i>

に対して、四つの基礎的行為の内の一つを任意に配分することができるのであるから、「導出される行為」は全部で $4^5=1,024$ 個存在することとなる。しかし、これらすべてを調べなければならぬというわけでは全然ない。「その観察」の可能な結果のおのおのが与えられている場合の、各基礎的行為に関する「効用」の、条件つき期待値を示す表4が、表2及び表3を用いて、容易に構成できるのである。またこの表4では、各 x に対して、 x のその値が与えられている場合の最大の条件つき期待効用を、イタリック体で表示しておくこととする。従って、例えば、 x の値が1となる場合に限って、「その個人」は、「そのブドウ」を買うことをまったく差し控えることとなるのであり、そして、 x の値が5となる場合に限って、彼は「そのブドウ」を3ポンド買うということのリスクを担うこととなるのである。完全に表現するのならば、最良の「導出される行為」は、ここではそれを g と表記するのだが、 x が値1, 2, 3, 4, 5を取るに従って、おのおの、0, 1, 1, 2, 3ポンドを買うということとなるのである。ところで、導出される問題の「その個人」にとっての「価値」は g の個人的期待値 $E(g)$ で表現されるのであり、それは上の式(1)のように計算できて、値は約1.26ユーティルとなる。基礎的問題の「価値」は1ユーティルであるのだから、ここで想定されている「その観察」は、「その個人」にとっては、0.26ユーティルに相当する「価値」を持つと見なされるのであり、これは即ち、「その個人」は、もし支払うことが必要ならば、「その観察」のために0.26ユーティルまでは支払うことであろうということなのである。

なおサヴェジ氏はこの段落に続いて次のようなただ一つの演習問題を掲示しているのである。(原文では冒頭に番号1が打たれているが必要がないので省略する。)

serve the quality of the grapes. Show that his best derived act would then yield 2 utiles, and show that it could not possibly lead him to buy 2 pounds of the grapes.

「その個人」が「そのブドウ」の品質を直接的に「観察」できるのだと、仮にはあるが、想定してみるのである。すると、彼にとっての最良な「導出される行為」は2ユーティルの(彼にとっての)「価値」を持つこととなり、またこの「行為」によれば、彼が「そのブドウ」を2ポンド買うことは起り得なくなるのである。実際、この言わば「理想的な観察」に対しては、表2によれば、「まずい」が「観察」されるのならば、「そのブドウ」を買わないのみが「その個人」にとっての最良の「行為」であり、これによって0ユーティルが「その個人」へもたらされ、「並である」が「観察」されるのならば、「それを1ポンド買う」のみが最良であり、これによって1ユーティルがもたらされ、また「卓越している」が「観察」されるのならば、「それを3ポンド買う」のみが最良であり、これによって6ユーティルがもたらされる、ということが従うのであり、また、表1で示されている(「そのブドウ」の品質に対する)「その個人」の「確率」を利用すれば、 $0 \times 1/4 + 1 \times 1/2 + 6 \times 1/4 = 2$ ユーティルがその最良の「行為」の「その個人」にとっての期待効用となることが知れるのである。なお、この唯一の最良な「行為」が、「それを2ポンド買う」という指示を出すことはあり得ないのである。ところで、基礎的決定問題の「その個人」にとっての「価値」は1ユーティルであるから、無料の「理想的な観察」によって、決定問題の「価値」が倍になることとなり、この「理想的な観察」の「その個人」にとっての言わば値段は、1ユーティルになるのである。

Suppose that the person could directly ob-

5. 観察ということ(定式化)

§6.2, 110, の演習問題の下の方の五つの段落を引くと次である。

The notion of a decision problem based on an observation will now be formally described, with special reference to mathematical notation and other technical details.

1. There is a set of **basic acts**, $\mathbf{F}$ with elements $\mathbf{f}, \mathbf{f}'$, etc.

In the example of the grapes $\mathbf{F}$ consisted of the four envisaged acts of buying 0, 1, 2, or 3 pounds of grapes.

The convention laid down at the end of §5.4, requiring that the consequences of acts be measured in utiles, will be adhered to, and it will be supposed that $v(\mathbf{F})$ is finite.

2. The **observation** is a (not necessarily real) random variable $\mathbf{x}$ associating with each state s an **observed value** $x(s)$ in some set X of possible observed values x, x' , etc.

数学的な表記法や他の技術的な事柄を利用して、「観察」に基づく決定問題」という概念をフォーマルに記述してみようというわけである。そこでまず、基礎的行為の全体としての集合 $\mathbf{F}$ を導入し、この集合の要素である「行為」を $\mathbf{f}, \mathbf{f}'$, などと表記することとする。「そのブドウ」の例では、 $\mathbf{F}$ は、「そのブドウ」を0, 1, 2, あるいは3ポンド買うという四つの想定されている「行為」から成り立っているのである。ここで、一般に「行為」がもたらす「結果」は「効用」によって測定されるのであるから、「効用」値を取る「行為」のみを考えることとし、また、 $\mathbf{F}$ の「価値」 $v(\mathbf{F})$ は有限であるとする。なお、§5.4, 82, で導入されているように、 $v(\mathbf{F})$ は $\mathbf{F}$ に属する「行為」の期待効用の上限であり、

$$v(\mathbf{F}) = \sup\{E(\mathbf{f}) \mid \mathbf{f} \in \mathbf{F}\}$$

によって定義される。ところで「観察」は、 x, x' , などの可能な「観察」値の全体 X の要素を「世界」の各「状態」 s に対応させる関数のことであり、この関数を x と表記すると、各「状態」 s に対して「観察」値 $x(s)$ に対応させる（必ずしも実数値を取るとは限らない）確率変数を「観察」と呼ぶこととするのである。つまり、可能な「観察」値の全体 X が与えられている場合には、この X がいかなるものであれ、 X の要素を値として取る、「世界」 S 上で定義されている関数を、その関数がいかなるものであれ、「観察」と呼ぶのである。

これに続く段落、つまり110頁の末尾の段落を引くと次である。

In the example of the grapes, the states s (of which the postulates require that there be an infinite number) were never fully described, and consequently the random variable $\mathbf{x}$ was not fully described either. In the same sense it may be said that the basic acts, which are also really random variables, were not fully described either. All that is really important, however, is to know the simultaneous distribution of the consequences of the acts in $\mathbf{F}$ and of the values of $\mathbf{x}$. In the example of the grapes that information was implicit in Tables 2 and 3.

「世界」 S の「状態」 s は、サヴェジ氏の個人論的見解に従うのならば、無限個存在していることとなるのだが、例えば「そのブドウ」の例において、この「状態」なるものをとことん完全に記述することは不可能なのであり、つまり、各 s に対して、その内容をとことん表現しつくすことは不可能なのであり、従って、 s に依存して値が変動する（「観察」としての）確率変数 $\mathbf{x}$ を完全に記述することは一般にはできないのである。また同様に、実際に確率変数で

もある基礎的行為を完全に記述することは一般には無理なのである。しかしながら、現実において重要なのは、 $\mathbf{F}$ における「行為」の「結果」と $\mathbf{x}$ の値とにかかわる同時分布を知ることにはかならない。「そのブドウ」の例では、この同時分布に関する情報が、表2及び表3に暗に含まれているのである。

これに続く段落、つまり111頁の冒頭の段落を引くと次である。

For mathematical simplicity in the formal work to follow, it will generally be assumed that X has only a finite number of elements, though the assumption can and must be relaxed in many practical situations. When X is assumed finite, the random variable $\mathbf{x}$ is, for all purposes of the present context, simply a partition of S , namely, the partition into the sets on which $\mathbf{x}$ is constant. Indeed, earlier in this section, the notion of observation was described in terms of a partition, but the description in terms of a random variable is more familiar in statistics and may have technical advantages, especially when the restriction that X be finite is relaxed.

サヴェジ氏は、フォーマルな作業の単純さをなんとか保つために、また彼の議論の本筋をわかりやすくするために、可能な「観察」値の全体である X を有限であると、つまり有限個の要素のみを持つと、一般に仮定しておくという流儀を採用するのである。しかし当然のことながら、彼は、多くの実際的な状況において、この有限性の仮定が緩められるべきであることを承知しているのである。だが、 X が有限であると仮定される場合には、その値を取る確率変数 $\mathbf{x}$ を考察するということは、「世界」 S の分割を考察するというにほかならない。つまり、 $\mathbf{x}$ がその上では定数となる集合からなる(S に対する)分割を考えればよいのである。なお、

この§6.2の始めの方の、「導出される決定問題」を導入する所では、「観察」の概念は「世界」の分割としてとらえられているのである。しかし、確率変数による「観察」概念の記述は、統計学においてよりなじみのあるやりかたであり、また特に有限性の仮定を緩める際には、技術的な利点を持ち得ると、サヴェジ氏は注意するのである。

これに続く二つの段落を引くと次である。

3. The set of *strategy functions* is the set of all functions associating an element of $\mathbf{F}$ with each element x of X . Let the values of the generic strategy function be denoted by $\mathbf{f}(x)$ and the function itself by $\mathbf{f}(\mathbf{x})$.

The notion of strategy function was not introduced in the informal description of observation, nor in the example of the grapes, because it is but a mathematical intermediary to the definition of derived acts and did not seem to call for explicit expression in the less formal contexts.

サヴェジ氏はここで「戦略関数, strategy function」という言葉を導入しているのだが、これは、 X の各要素 x に対して $\mathbf{F}$ の要素を一つずつ対応させる、 X から $\mathbf{F}$ への関数のことなのであり、彼は、このような関数の全体としての集合を意識しているのである。また彼は、一般的な戦略関数の値を $\mathbf{f}(x)$ というように、そしてその関数自身を $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ というように表記すると注意している。しかし、この(戦略関数の)概念は「観察」に関するインフォーマルな記述においては、そして「そのブドウ」の例においても、明白には導入されていないのである。つまり、この概念は、「導出される行為」に対するフォーマルな定義を行うための言わば数学的な媒介物にほかならないのであり、数学的形式性の程度がより少ない文脈においては、この概念を明白な様式で表現することは必要でないように思

われるのである。

これに続く二つの段落を引くと次である。

4. To each strategy function $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ corresponds a **derived act** $\mathbf{g}$, in the set of all derived acts $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, defined by

$$(2) \quad g(s) = f(s; x(s)) \quad \text{for all } s \in S.$$

It was explained that in the example of the grapes there are 4^5 derived acts. In the same way, it can be seen in general that if X has ξ and $\mathbf{F}$ has ϕ elements there are ϕ^ξ derived acts.

各戦略関数に対応して、自然に、「導出される行為」を定めることができるのである。つまり、 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ を任意の戦略関数とすると、「世界」 S の任意の「状態」 s に対して、確率変数 $\mathbf{x}$ の値 $x(s)$ が定まり、さらにこの $x(s)$ に対して（その戦略関数によって定まる）「行為」 $\mathbf{f}(x(s))$ が定まり、さらにまたこの「行為」によって（ s に対応する）「結果」 $\mathbf{f}(x(s))(s)$ が定まり、結局、「世界」の各状態 s に対して「結果」 $\mathbf{f}(x(s))(s)$ を対応させる「行為」が定義されるのであり、このようにして定義される「行為」を「導出される行為」と呼ぶこととするのである。なおサヴェジ氏は、「結果」 $\mathbf{f}(x(s))(s)$ のことを、上の式(2)においては、 $f(s; x(s))$ と表記しているが、これを用いると、「世界」上の関数 $\mathbf{g}$ が基礎的行為の全体 $\mathbf{F}$ 及び「観察」 $\mathbf{x}$ から導出される「行為」であるとは、ある戦略関数 $\mathbf{f}(\mathbf{x})$ が存在して、「世界」の各「状態」 s に対して $g(s) = f(s; x(s))$ ，ということであると定義される。またサヴェジ氏は、このような「導出される行為」の全体を $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ と表記している。ところで、「そのブドウ」の例では $4^5 (= 1,024)$ 個の「導出される行為」があるのであった。一般には、同様の考察によれば、可能な「観察」値の全体 X が ξ 個の要素を持ち、基礎的行為の全

体 $\mathbf{F}$ が ϕ 個の要素を持つのならば、「導出される行為」の全体は ϕ^ξ 個の要素からなるのである。

これに続く二つの段落を、これは§6.2の末尾だが、引くと次である。

5. The **value of $\mathbf{F}$ given x** ,

$$(3) \quad v(\mathbf{F} | x) =_{\text{df}} \sup_{\mathbf{f} \in \mathbf{F}} E(\mathbf{f} | x).$$

This is the function of x indicated, for the example of the grapes, by italics in Table 4.

「「観察」値 x が与えられている場合の、行為集合 $\mathbf{F}$ の価値」は、「観察」値が与えられている場合の（「その個人」にとっての）条件つき期待値を利用して、上の式(3)によって定義されるのである。行為集合 $\mathbf{F}$ の「価値」 $v(\mathbf{F})$ は、この節の冒頭で引用した箇所ですでに言及されているが、「観察」値が与えられている場合の（「その個人」にとっての）条件つき「確率」を考慮するのならば、上の(3)による定義は当然である。また、この条件つきの「価値」は x の関数と見なすことができるのであり、この関数は、「そのブドウ」の例では、表4においてイタリック体で示されているのである。

6. 多重観察と、「観察」及び行為集合の拡張

§6.3の111頁から112頁にかけての段落を引くと次である。

If several random variables $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$, associating elements of S with elements of sets $X_1, \dots, X_n$, are simultaneously under discussion, it is natural to form the new random variable, denoted $\mathbf{x} = \{\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n\}$, that associates with each element of S an ordered n -tuple of elements of $X_1, \dots, X_n$, respectively. If the context is such that $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$ are thought of as observations, then $\mathbf{x}$ can also

be thought of as an observation and will sometimes be called a **multiple observation**—to emphasize the manner of its formation. To illustrate, any item such as profession or body temperature that might be entered on a patient's history can be thought of as an observation; but the whole history, or a filing cabinet of histories, can also be thought of as an observation, the history being a multiple observation of items, and the cabinet a multiple observation of histories.

いくつかの同時に考察される確率変数 x_i , $i = 1, \dots, n$, があり, 各 x_i は集合 X_i の要素を「世界」 S の各要素に結びつけるものであるとすると, $X_1, \dots, X_n$ の要素からなる順序づけられた n 重対を S の各要素に結びつける, $\mathbf{x} = \{x_1, \dots, x_n\}$ と表記される, 新しい確率変数 $\mathbf{x}$ を形成することは自然なことである。ここで, 各 x_i が一つの「観察」であると考えられているのなら $\mathbf{x}$ もまた一つの「観察」であると考え得るであろうが, このような「観察」を, その形成のされかたを強調して, 「多重観察, multiple observation」と呼ぶこととしておくのである。例をあげるのならば, 患者の病歴へと記入され得る「職業」とか「体温」とかというような項目は, おのおの一つの「観察」であると考え得るが, しかし病歴の全体とか, いろいろな病歴を整理して並べてある陳列用ガラス戸棚なども, 一つの「観察」であると見なし得るのであり, つまり, 各病歴はいくつかの記入される項目からなる一つの多重観察であり, その陳列用ガラス戸棚はいろいろな病歴からなる一つの多重観察と見なせるのである。なお上の引用の冒頭でのelements of S とelements of sets $X_1, \dots, X_n$ とは, 多分場所を入れ替えるべきである。

これに続く段落, つまり §6.3, 112, の二番目の段落を引くと次である。

Consider two observations $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$. It is an

interesting possibility that $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are so related to each other that knowledge of the value of $\mathbf{x}$ would (almost certainly) imply (almost certain) knowledge of $\mathbf{y}$. In that case, observation of $\mathbf{x}$ implies essentially the observation of $\mathbf{y}$ and generally something besides, which suggests the following three definitions.

二つの「観察」 $\mathbf{x}$ 及び $\mathbf{y}$ を考える場合に, $\mathbf{x}$ の値に関する知識が, ほとんど確定的に, $\mathbf{y}$ に関するほとんど確定的な知識をもたらすという, 人の関心を引くであろうような状況が起り得るのである。二つの「観察」がこのような関係にある場合には, $\mathbf{x}$ に関する「観察」は $\mathbf{y}$ に関する「観察」を本質的に含んでおり, 通常は, $\mathbf{x}$ は $\mathbf{y}$ よりもさらに何かをもたらすのである。なおサヴェジ氏はalmost certainlyという表現を用いているが, これは彼が重視している個人的確率の概念を念頭に置いた上での言葉使いであり, だが, この「確率」が, 「事象」に関するなんらかしらかの制約の下で, 完全加法的となるとは想定されてはいないのである。

これに続く段落は次である。

If and only if $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are observations such that, for all s and s' in some B of probability one, $x(s) = x(s')$ implies $y(s) = y(s')$; then $\mathbf{x}$ is an **extension** of $\mathbf{y}$, and $\mathbf{y}$ is a **contraction** of $\mathbf{x}$. If $\mathbf{x}$ is an extension of $\mathbf{y}$, and $\mathbf{y}$ is an extension of $\mathbf{x}$, $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are **equivalent**.

ここでは, 「拡張」, 「縮約」, 及び「同等」という(二つの「観察」の間での)三つの関係が導入されている。つまり, $\mathbf{x}$ 及び $\mathbf{y}$ を「その個人」にとっての「観察」とする場合, 「その個人」にとっての「確率」が1となるある「事象」 B が存在して, B に属する任意の要素 s 及び s' に対して, $x(s) = x(s')$ ならば $y(s) = y(s')$

ということ、 $\mathbf{x}$ は $\mathbf{y}$ の拡張である」と、また「 $\mathbf{y}$ は $\mathbf{x}$ の縮約である」と、表現するのであり、さらに、「 $\mathbf{x}$ は $\mathbf{y}$ の拡張であり、かつ $\mathbf{y}$ は $\mathbf{x}$ の拡張である」ということを「 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とは同等である」と表現するのである。ここで B の「確率」が1であるとは、サヴェジ氏の個人論的見解に従うのならば、「 B にはあらず」という「事象」が「その個人」にとっては「実際上不可能である、virtually impossible」ということである。

これに続く段落、つまり§6.3, 112, の四番目の段落を引くと次である。

Strictly speaking, one should say not that $\mathbf{x}$ and $\mathbf{y}$ are equivalent, but rather that they are equivalent regarded as observations, for this would not be a good concept of equivalence to apply to random variables regarded as such. For example, a pair of equivalent observations can obviously be a pair of real random variables with different expected values. Some properties of the relations of extension, contraction, and equivalence between observations are given by the following easy but important exercises. Throughout this set of exercises it is unnecessary to suppose the observations confined to a finite set of values; in the case of Exercise 3b, it is impossible to do so.

本来は、「 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とは同等である」と言うのではなく、「 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ とは、それらを「観察」と見なすのならば、同等である」と表現すべきなのである。実際、「観察」と呼ぶとしても $\mathbf{x}$ 及び $\mathbf{y}$ は確率変数にほかならず、それらが「観察」として「同等である」としても、確率変数としては、当然、異なった個人的期待値を持つ実数値を取る確率変数となり得るのである。

なおサヴェジ氏は、これに続いて11個の演習問題を掲示しており、その内で3aという順番がつけられている問題で「零観察, null observa-

tion」という言葉を導入しているのであるが、これはある一つの値のみを「確率」1で取る「観察」のことであり、つまり、「 $\mathbf{y}$ は(「その個人」にとって) 零観察である」とは、「ある値 y_0 が存在して、「その個人」の「確率」 P に対して、 $P(\mathbf{y}=y_0)=1$ 」ということなのである。また、任意の「観察」は「零観察」の拡張であり、「零観察」は互いに同等であり、結局、「零観察」は、「何も観察しない」と言うことと同等である。

この演習問題の後の113頁の段落では、「行為」からなる集合の間での同様な三つの関係が導入されているのである。つまり、 $\mathbf{F}$ 及び $\mathbf{G}$ を「行為」からなる集合とする場合、「その個人」にとって「確率」が1となるある「事象」 B が存在して、 $\mathbf{G}$ に属する各 $\mathbf{g}$ に対して $\mathbf{F}$ に属するある $\mathbf{f}$ が存在して、 B に属する全ての s に対して、 $g(s)=f(s)$ ということ、 $\mathbf{F}$ は $\mathbf{G}$ の拡張である」と、また「 $\mathbf{G}$ は $\mathbf{F}$ の縮約である」と、表現するのであり、また、「 $\mathbf{F}$ は $\mathbf{G}$ の拡張であり、かつ $\mathbf{G}$ は $\mathbf{F}$ の拡張である」ということを、「 $\mathbf{F}$ と $\mathbf{G}$ とは同等である」と表現するのである。なお原文では $\mathbf{F}$ 及び $\mathbf{G}$ は共に「空ではない」と仮定されているのだが、「少なくとも一方が空である」という場合を含めても別に不都合はないようである。

この後サヴェジ氏は113頁から114頁にかけてさらに10個の演習問題を追加しているが、12という順番がつけられている問いは四つの問題から成り立っているのである。そこでは、「観察」 $\mathbf{x}$ に関して行為集合 $\mathbf{F}$ から導出される行為集合が $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ と、二重的観察 $\{\mathbf{x}, \mathbf{y}\}$ に関して $\mathbf{F}$ から導出される行為集合が $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と、「観察」 $\mathbf{y}$ に関して $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ から導出される行為集合が $\mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ と、表記されており、冒頭の問題では、 $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と $\mathbf{F}(\mathbf{x}; \mathbf{y})$ とが同等であることが主張されているが、それよりも先に $\mathbf{F}(\mathbf{x}, \mathbf{y})$ と $\mathbf{F}(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ とが同等であることを、明白ではあっても、注意すべきであろう。また末尾から二番目の(番号14の)問いは、「行為集合 $\mathbf{F}$ が行為集合

$\mathbf{G}$ の拡張であるのならば、任意の「観察」 $\mathbf{x}$ に対して $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ は $\mathbf{G}(\mathbf{x})$ の拡張である」と主張している。また末尾の問いは、これで§6.3が終わるのだが、

$$v(\mathbf{F}(\mathbf{x})) = E[v(\mathbf{F} | \mathbf{x})]$$

$$= \int v(\mathbf{F} | x(s)) dP(s) \geq v(\mathbf{F}),$$

という等式及び不等式を示すことである。なおサヴェジ氏は言及していないのだが、「可能な観察値の全体は有限的である」という仮定を持ち出さないのならば、これらの問いに答える際には選択公理がからんでくることだろう。

7. 優越性及び許容可能性

§6.4, 114, の冒頭の段落を引くと次である。

According to Exercise 3.14, if one set of acts, regarded as basic, extends another, the first is at least as valuable as the second in the light of any observation whatever. This section explores a relation, dominance, which has the same property but is not so strict as extension. Dominance is of some importance for the theory of personal probability as it has been developed thus far. But its importance will be even greater in the study of statistics proper, where interpersonal agreement is of particular interest; for, as the definition shortly to be given will make clear, two people having different personal probabilities will agree as to whether one of two sets of acts dominates another, if only they agree which events have probability zero—a condition generally met in practice, and one that could if desired be dispensed with by a slight change in the definition of dominance.

行為集合を考える場合に、一方が他方の拡張であるとする、いかなる「観察」に対してで

あれ、その「観察」に関してその「一方」から導出される行為集合もその同じ「観察」に関してその「他方」から導出される行為集合の拡張である、ということは、既に演習問題において注意されているが、これから導入される「優越性, dominance」と呼ばれる関係は、この「拡張」という関係よりもゆるやかであり、しかも、「観察」に関する同様の性質を持っているのである。なおサヴェジ氏は、「優越性」は彼の個人的確率にとってもある程度の重要性を持っているが、それは、個人間の合意形成に特にかかわる統計学固有に対してより大きな重要性を持つことになるであろうと述べ、異なった個人的確率を持つ二人の個人が二つの行為集合の間の「優越性」に関して合意することが、多分あるであろうと注意するのである。

これに続く段落を引くと次である。

It will be seen that dominance and notions related to it are intimately associated with the sure-thing principle. Indeed, probability being taken for granted, the basic facts about dominance seem to give a complete expression of the sure-thing principle. Dominance and related concepts were much stressed by Wald, in [W3] for example.

「優越性」とそれにかかわるいくつかの概念は「商量の原理, sure-thing principle」に密接に結びつけられるように見えるのだが、実際、「確率」という事柄の内容を真剣に問題とすることを避けて、利用して当然の事柄のように定量的確率を取り扱うこととするのならば、「優越性」に関するいくつかの基礎的事実は、「商量の原理」に対する完璧な表現を与えているように思われてしまうのである。だが少なくともサヴェジ氏の立場からすれば、統計学の基礎づけを真剣に問うのなら、「確率」の内訳をほとんど自明視するなど言うことは許されないのである。なお彼は、「優越性」とそれにかか

わるいくつかの概念が Wald, Abraham, によって非常に強調されたことを注意しており、また、[W 3] は1950年に出版された、Waldによる、統計的決定関数を問題としている例の有名な書物である。

これに続く段落、つまり § 6.4, 115, の冒頭の段落を引くと次である。

Two or three notions, the logical connections among them, and those between them and extension, are to be treated. The logical connections being many but simple, I think that the material lends itself better to formal than to expository treatment, for in such a context the reader who looks for the motivating ideas sees them himself more easily than he comprehends someone else's verbalization of them. This section will therefore consist primarily of a group of formal definitions and several exercises.

ここでサヴェジ氏は自身の論述様式にあえて言及しているのである。つまり、「優越性」とそれにかかわる概念や行為集合の拡張などを議論する際に現れる（考え方の）様式に対する動機づけが、サヴェジ氏の流儀からすれば、当然問題となるわけだが、ここの「優越性」にかかわる議論では、その議論を通常の言語で説明的に表現するよりも、むしろそれを数学的な形式を積極的に使って表現するほうが、問題の動機づけがより見出しやすくなるであろうというのである。つまり、ここの議論では、数学的諸形式が生じてくる状況を誰かが言葉によって説明するのを理解するよりも、それらの諸形式を見て自分でそれらが生じてくる状況を推察することのほうが容易であるというのである。

これに続く段落を引くと次である。

If and only if $P(f(s) \geq g(s)) = 1$, **f dominates g**. If and only if some (every)

element of **F** dominates (is dominated by) **g**, **F dominates (is dominated by) g**. If and only if **F** dominates every element of **G**, **F dominates G**. If and only if **f** dominates **g**, but **g** does not dominate **f**, **f strictly dominates g**. If and only if $f \in F$, and **f** is not strictly dominated by any element of **F**, **f** is **admissible** (with respect to **F**).

「**f**は**g**に対して優越する」とは、 $P(\{s \in S | g(s) \leq f(s)\}) = 1$ ということである。「行為集合**F**は**g**に対して優越する」とは、「**F**のある要素が**g**に対して優越する」ということである。「**g**は**F**に対して優越する」とは、「**g**は**F**の各要素に対して優越する」ということである。「**F**は**G**に対して優越する」とは、「**F**は**G**の各要素に対して優越する」ということである。「**f**は**g**に対して狭義に優越する」とは、「**f**は**g**に対して優越し、かつ**g**は**f**に対して優越しない」ということである。「**f**は**F**に関して許容可能である」とは、「 $f \in F$ かつ**f**は**F**のいかなる要素によっても「狭義に優越」されない」ということである。

これに続く段落を引くと次である。

Involving as they do acts as well as sets of acts, the definitions, strictly speaking, introduce four different kinds of dominance. However, this complexity can be alleviated, with a slight lapse of logic, by identifying each act **f** with the set of acts of which **f** is the only element, for it is easily seen that this identification is in such harmony with the definition that, once it is made, the four kinds of dominance collapse into one.

「一方」は「他方」に対して優越する」という関係を「行為」及び行為集合に対して導入するのであり、「一方」及び「他方」は「行為」及び行為集合となり得るのであるから、「優越性」に関する四つの異なった定義が導入される

こととなるのである。しかし、一つの「行為」 f をただそれだけからなる集合 $\{f\}$ と、一時的にだが、同一視することにしておけば、これら四つは、行為集合間の「優越性」の定義というただ一つの定義にまともになってしまうのである。つまり、「 F は G に対して優越する」とは、「 G の各要素 g に対して F のある要素 f が存在して、 $P(\{s \in S \mid g(s) \leq f(s)\}) = 1$ 」ということであると、定義しておけば良いのである。

この後サヴェジ氏は115頁から116頁にかけて(「優越性」及び許容可能性にかかわる)演習問題として14の問いを掲げているが、その3b, 3d, 3eと順番がつけられている三つの問いでは、行為集合が有有限であることと許容可能性とのかかわりが言及されている。3bは、「 F から任意の、ただし有限個の、非許容可能な要素を除去する場合、 F に対して優越している(F の)任意の部分集合の(この除去を行った後の)残りもまた、 F に対して優越している」という主張であり、3dは、「 F が有限集合であるのなら、この集合に関して許容可能である要素の全体は、 F に対して優越している」という主張である。また3eは、3b及び3dにおける「有有限」ということの役割」を問うものであり、つまり有有限性の仮定がないのなら、3b及び3dの主張は共に反例を持つのである。また、5、6と順番がつけられている末尾の二つの問いだが、5は、「 F が G に対して優越するのなら、 $v(G) \leq v(F)$ 」という主張であり、6は、「 F が G に対して優越するのなら、任意の「観察」 x に対して、 $F(x)$ は $G(x)$ に対して優越する」という主張である。前者は「優越性」と行為集合の「価値」とにかかわるものであり、後者は「優越性」と「観察によって導出される行為」とにかかわるものである。

Often, especially in statistics, a decision problem can be seen as the problem of deciding which of several experiments—or which of several observational programs, if that is really a more general term—to undertake.

統計学に特にかかわりのある決定問題の様式として、いくつかある「実験」の内のどれへと、あるいは、「観察」という言葉が「実験」という言葉よりも仮に現実により一般的であるのなら、いくつかある「観察」の内のどれへと、着手するのかを決定するという問題の様式があるのである。なおここでサヴェジ氏は、「実験」よりも「観察」のほうがより一般的な言葉なのだとすぐに断定することを避けているのである。

これに続く段落を引くと次である。

In this section the notion of the decision problem derived from a basic decision problem and an observation must be elaborated a little, because, as derived acts have been treated thus far, they correspond to the possibility of making an observation free of charge. Though observations are sometimes free, there is typically a cost associated with making them; information must typically be bought either from other people or, more often from nature, so to speak. The cost of information may be money, trouble, one's own life, that of another, or any of innumerable possibilities, but all can in principle be measured in terms of utility. The cost of an observation in utility may be negative as well as zero or positive; witness the cook that tastes the broth.

8. 「実験」及び「観察」にかかわるある議論 § 6.5, 116, の冒頭の段落を引くと次である。

ここでサヴェジ氏は、「基礎的決定問題と「観察」とから導出される決定問題」という概念を、いままでよりも少しより詳しく述べる必要があ

ると注意するのであるが、なぜかという、いままで議論してきた「導出される行為」というのは「無料の観察」をなすことができるという可能性に依存しているのであり、「観察」は時は無料となるではあろうが、しかし通常は、「観察」をなすことへと結びついているコストというものが存在しているからなのである。つまり情報というものは、通常は、他の人から、あるいはよりしばしば自然界から、言わば買われなければならないのである。情報を得るためのコストは金銭であったり、いざこざ、自分自身の生命、他の人の命、あるいは無数の可能な事柄の内の任意のものであったりするであろうが、しかしすべてのコストはそれがいかなるものであれ、原理上は、「効用」を利用して測定できるのである。また、「効用」を利用して表現される（「観察」の）コストは、うす味のスープを味見する料理人に注目すればわかるように、（零や正の値を取るのと同様に）負の値をも取り得るのである。なお、ここの料理人の例であるが、「その料理人がその自作のうす味のスープを味見する」という「その料理人」による「観察」を想定する場合、「そのスープ」の出来が良いのならば、「その料理人」は「これはうまい」というふうに報われることとなり、言わば「負のコストを支払う」のである。

これに続く段落、つまり § 6.5, 116, の末尾の段落を引くと次である。

In principle, if a number of experiments are available to a person, he has but to choose one whose set of derived acts has the greatest value to him, due account being taken of the cost of observation. That simple formulation, like some others in this book, is, in a sense, oversimple; it abstracts from the enormous variety of considerations that enter into the careful design of any experiment. The possibility of so abstracting from variety does not remove the ultimate necessity of studying

some aspects of that variety in detail. R. A. Fisher's *The Design of Experiments* [F4], for example, is concerned almost exclusively with experiments based on a special technique called the analysis of variance, and it is but an introduction to even that important facet of statistics. Again, there is a growing literature (in which the work of A. Wald is outstanding) on sequential analysis, which is concerned in principle with all experiments in which later parts of the experiment are conducted in the light of what happens in earlier parts; but this literature has, by necessity, been confined to a relatively tiny part of that domain.

いくつかの「実験」が「個人」にとって利用可能である場合、原理上は、「その個人」は、「観察」にかかわるそのコストに対して当然払うべき考慮を払った上で、自身にとって最も「価値」のある行為集合をもたらすこととなる一つの「実験」をただ選択しさえすれば良いのである。「実験」の選択という事柄に対する（個人的期待効用に基づく）この定式化は、ほかのいくつかの（やはりサヴェジ氏による）定式化と同様にある意味で単純すぎるのであり、そのような定式化は、「実験」を注意深く計画するという作業へと入り込んでくるととても多様な考慮すべき事柄から、言わば抽象されたものである。また、「実験」の計画にかかわる多様な事柄に対してそのような抽象を行うことができるということが、その多様な事柄のいくつかの側面を詳しく研究するということの究極的必要性を除去するというわけではないのである。なおサヴェジ氏は、実験計画に関する Fisher, Ronald Aylmer, による著名な業績に言及し、その業績が、実験計画の多様性の重要な側面にかかわる、分散分析という特別な技法を取り扱っていることを注意している。また彼は、Waldの業績などで知られる逐次分析にも

言及している。この逐次分析は、原理上は、「実験」の「まえ」の部分を検討しながらその「実験」の「あと」の部分で管理運営するという様式を持つすべての「実験」にかかわるはずなのだが、実際になされている議論の内容に対しては、サヴェジ氏は不満を持っているようである。

これに続く段落を引くと次である。

Before turning to a more formal recapitulation of the outline of the design of experiments, this may be a good place for a few speculative words about the difference, if any, between experiment and observation.

「実験」と「観察」との間に仮に概念としての差が本当にあるのなら、それはいかなるものであるのか多少思索してみようというのである。実はサヴェジ氏は、「実験」及び「観察」という言葉を適度に使い分けることの日常的な便利さを否定しているわけではないのだが、しかし、「実験」と多分呼ばれるであろう事柄と、「観察」とだけ多分呼ばれるであろう事柄との間に、フォーマルな境界を引くことは結局困難であろうと判断しているのである。

これに続く段落、つまり §6.5, 117, の二番目の段落を引くと次である。

Some sciences are commonly called experimental as opposed to others that are called observational. Aerodynamics, the psychology of rote learning, and the genetics of fruit flies would typically be called experimental sciences; and, to take parallel examples, meteorology, the psychology of dreams, and human genetics would be called observational. But it is widely agreed, and the most casual consideration makes it clear, that any basic difference that may really be present resides not in the sciences themselves but in the

methods typical of each. To illustrate the role of observation in sciences ordinarily considered experimental and vice versa, observations of wild populations of fruit flies have been useful in the study of the genetics of fruit flies; the effects of fatigue, for example, on dream content may well be the subject of an experiment; and, except for the atom, no topic in science is more popular today than experimental rain making. The illustrations could be extended indefinitely, and there is also a less direct sort exemplified by the discipline called experimental medicine, which typically studies experiments on animals with the hope, often justified, that the findings thus obtained can be extrapolated to humans.

観察的と呼ばれるいくつかの科学に対比して他のいくつかの科学は普通は実験的と呼ばれているという現実がある。例えば、空気力学、機械的反復による学習の心理学、そしてショウジョウバエの遺伝学などは、通常は、実験的な科学と呼ばれることであろうし、さらにまたこれらと平行的に類似する例を取り上げるのならば、気象学、夢の心理学、そして人類遺伝学などは観察的と呼ばれることであろう。しかし、きわめてありふれた考察によって明らかとなるように、そして広い範囲にわたって合意されるように、現実に存在しているかのような（それらの科学の間の）基本的差異は、それらの科学そのものに存するのではなく、おのおのの科学において典型的な諸方法に存するのである。通常は実験的だと考えられている科学における「観察の役割」と、逆の状況での「実験の役割」とを、例示することを試みるのなら、ショウジョウバエの野生の集団に対する諸観察は、その遺伝学の研究にとって有用であり続けているのであり、また例えば夢の内容への疲労の影響は当然実験の課題となり得るのであり、さらにまた原子力のことを除けば、実験的に雨を降ら

せることよりも世間で話題となっていることは今日の科学においてははないのである。このような例示ははてしなく展開でき得るではあろうが、動物に対する実験を、それらの実験によって得られる発見はヒトに対してもあてはめることができるであろうという（しばしば正当化される）希望をともなって、通常研究している、実験医学と呼ばれる分野による、ここでの議論への直接性の程度がより少ない例示もあるのである。

これに続く段落を引くと次である。

The problem, then, is to distinguish *an* experiment from *an* observation. Except for brevity, it might be better to say mere observation, for, in genereal usage, an experiment would be considered a special sort of observation.

「観察」と呼ばれる事柄から特に「実験」と呼ばれる事柄をいかにして区別するのが問題なのだと、サヴェジ氏は注意するのである。また彼は、一般的な用語法においては「実験」というものは「観察」の内の特別なものであると考えられているようなので、ただ単に「観察」とだけいうことのほうが得策であるかもしれないと、述べるのである。なお、「表現の簡潔さを別にすれば」ということわりは、experimentが10文字でobservationが11文字であることを考慮したのであろう。また一方、「観察」及び「実験」の画数はおのおの32及び26である。しかしサヴェジ氏は、このような日常的な言葉の使い方と安直には妥協せずに、それへの簡潔な省察を試みるのである。

これに続く段落、つまり § 6.5, 117, の四番目の段落を引くと次である。

The first apparent contrast that comes to mind is that experimentation is generally thought of as active and observation as pas-

sive. But, upon examination, it is seen that observation is also active, for observations are typically made by going somewhere to observe, or waiting attentively till something happens. Often it is not only the observer himself who must be transported and put in readiness to make an observation, but also a considerable body of apparatus. What demands more activity than the modern observation of solar eclipse?

心に思い浮かぶであろう最初の明白なような違いは、「実験を行う」ということは一般には能動的なことのようになっているが、一方、「観察」は受動的である、ということである。しかし、冷静に調べてみるのならば、「観察」もまた能動的であることがわかるのであり、というのも、「観察」というものは、通常は、それをなすためにどこかへとでかけることによって、あるいはまたあることが起るまで注意深く待つことによって、成り立っているからなのである。またしばしば、「観察」をなすために、運ばれて準備状態に置かれなければならないのは、観察者自身のみではなく、非常な量の器具一式もまたそうされなければならないのである。なおサヴェジ氏は、日食に対する現代の「観察」よりもより多くの能動性を要求される事柄がほかにあるであろうかと、注意を促しているのである。

これに続く段落を引くと次である。

Another apparent contrast is that the experimenter acts on the thing he observes, whereas the observer acts only on himself and on instruments of observation that may be regarded as extensions of his own sense organs. If this criterion were accepted altogether naively, there would be no such thing as a physiological experiment on one's self; even sophisticated interpretations might find it

difficult to embrace psychological experiments on one's self.

さらにまた別の明白なような違いは、実験者というものは自分が「観察」している対象へと働きかけるが、一方観察者は、自分自身と、自分自身の感覚器官の拡張であると見なし得る（「観察」のための）道具とに対してのみ、働きかけるのである、ということである。もし仮に、このような判別の規準がまったく素朴に受け入れられるとするのなら、自分自身への生理学的な「実験」というような事柄は存在しないこととなるであろうし、さらにはある種の凝った解釈によって、自分自身への心理学的な「実験」というようなものは、了解することさえ困難であると思えるかもしれないのである。実際、「現在の自分自身の映像」というようなものは「観察」できるかもしれないが、そのような「映像」ではなしに、まさに「自分自身」を「観察」するということはできないはずだからである。

これに続く段落、つまり117頁から118頁にかけての段落を引くと次である。

Finally, experiments as opposed to observations are commonly supposed to be characterized by reproducibility and repeatability. But the observation of the angle between two stars is easily repeatable and with highly reproducible results in double contrast to an experiment to determine the effect of exploding an atomic bomb near a battleship. All in all, however useful the distinction between observation and experiment may be in ordinary practice, I do not yet see that it admits of any solid analysis. At any rate, no formal use of the distinction will be attempted in this book.

さらにまた、「観察」という事柄と対比され

るものとしての「実験」は、結果の再生可能性と試行の反復可能性とによって特徴づけられるのだと、普通は思われているようである。しかし、二つの星の間の角度に対する「観察」は容易に繰り返しができて、しかもきわめて再生可能な結果をもたらすのであり、しかもそれは、一隻の軍艦の近くで原子爆弾を爆発させることの効果を決定するという「実験」と、反復可能性及び再生可能性において、二重に対比できるのである。結局のところサヴェジ氏は、通常の実践の場において「観察」と「実験」とを区別することがいかに有用となり得ようとも、そのような区別がなんらかしらかの強固な分析を受け入れるものであるとはいまだに自分には思えないと、判断を下すのであり、また彼は、そのような区別をフォーマルな様式で利用することは、少なくとも彼の「基礎論」においては、試みられることはないであろうとことわるのである。

これに続く段落、つまり §6.5, 118, の二番目の段落を引くと次である。

Return now to the notion of observation subject to cost. It may be that the value of the random variable $\mathbf{x}$ is observable but only at a cost $\mathbf{c}$, a real-valued random variable measured in utiles. If, as heretofore, $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ denotes the set of acts derived from $\mathbf{F}$ on cost-free observation of $\mathbf{x}$, let $\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}$ denote the set of derived acts subject to the random cost $\mathbf{c}$. This notation is interpreted to mean that, if $\mathbf{f}$ is the generic element of $\mathbf{F}(\mathbf{x})$, then $\mathbf{f} - \mathbf{c}$ (which, being a utility-valued function of s , is an act) is the generic act of the set $\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}$. Very often the cost of an observation is independent of s , but not, for example, for him that tests the sharpness of a thorn with his finger. Since observations are typically paid for before, or simultaneously with, making the observation, the cost

is typically observed along with the observation proper. Put differently, the cost c is typically a contraction of the observation x . Thus, if in some special context any advantage were to be gained by so doing, it would not be drastic to assume the cost of observing x to be a function of the form $c'(x)$; but, as a matter of fact, no such advantage has come to my attention. It is not difficult to think of experiments to which the assumption does not apply. For example, in the present state of uncertainty about the long-term effects of x-rays, anyone conducting a short-term experiment in which young human beings were subjected to large doses of x-radiation would risk costs that might not overtly manifest themselves for half a century, or even for generations.

ここでは「コストに従う観察」という概念へと議論がもどっているのである。つまり、確率変数 x の値が、(その値がユーティルを単位として測られる)実数値確率変数であるコスト c をともなつてのみ、観察可能であるという状況は当然起り得るのである。今までのように、 $F(x)$ によって、 x に対する「コストがかからない観察」によって行為集合 F から導出される行為集合を表記するものとしておいて、ランダムコスト c に従う「導出される行為」からなるその集合を、 $F(x)-c$ と表記することとしよう。この表記法は、 f を $F(x)$ の一般的な要素とすると、 $f-c$ は、ただしこれは「世界」の「状態」 s の「効用」値関数であるから一つの「行為」なのだが、集合 $F(x)-c$ に属する一般的な「行為」である、ということを意味すると解釈されるのである。また非常にしばしば、「観察」のコストは「世界」の「状態」 s には依存しないと見なされたりもするのだが、しかし、例えば、自身の指でとげの鋭さを試してみようとする「個人」にとっては、この非依存性は成立

しないこととなるであろう。ところで「観察」の費用というものは、通常は、「観察」をなす前やそれと同時に支払われるのであるから、そのコストは、通常は、本来の「観察」に沿った様式で観察されるのである。このことを言い換えると、コスト c は、通常は、「観察」 x の縮約であるとなる。従つて、仮に、少なくともある特別な状況において、そのような仮定をなすことによってなんらかの利益が得られることとなるのだとすれば、 x を「観察」することのコストが $c'(x)$ という様式を持つ関数であると仮定することは、激しい仮定だとはならないことであろう。しかしサヴェジ氏には、そのような利益は、なんら思い当たらなかったのである。なお、コストが「観察」の縮約であるという仮定があてはまらないような「実験」を思いつくことは、それほど困難というわけではないのである。例えば、 x 線が引き起す長期にわたる影響ということに関する(知識の)不確かさの現状を考慮するのならば、若い人人を多量の x 線の照射へとさらすという短期的な「実験」を管理運営する誰もが、半世紀の間、あるいは何世代にわたってさえも、その姿を明白に表すということがないかもしれないコストにかかわるという危険を、冒すこととなるであろう。

これに続く段落、つまり118頁から119頁にかけての段落を引くと次である。

Much that would ordinarily be called observation cannot be described by saying that the random cost is simply to be subtracted from each derived act of the corresponding observation thought of as free of cost. Allowing that it may be legendary, the form of trial by ordeal in which the guilty floated safely to be hanged and the innocent drowned to be exonerated epitomizes such a situation; except in point of absurdity, ordinary industrial destructive testing of electric fuses and other products is much the same. Strictly speaking,

discrepancy occurs even in the ordinary context in which the cost of observation is a fixed sum of money; for the utility of money is not strictly linear, so the cost of observation typically affects different derived acts somewhat differently. This sort of situation is indeed so common as to introduce at least a slight error into almost every application of the notion of cost as a subtractive term. It would therefore be desirable to extend considerably the notion of cost of observation, but, thus far, I see no way to do so that does not destroy the mathematical advantage of singling problems of observation out of the class of decision problems generally.

通常「観察」と呼ばれるであろう多くの事柄は、コスト無縁であると考えられる(その「観察」に対応する)「観察」に関するおのおの「導出される行為」からランダムコストをただ引き去るだけであるというようにして、記述できるわけではない。伝説上のことであるだろうということを認めた上でだが、有罪の者は安全に浮き上がることとなっており、その者は絞首刑となり、無罪の者は溺れてしまうこととなっており、その者は無罪放免となる、という(古代の試罪法である)オーディールによって表される裁判様式は、「観察」コストの定式化に関する困難な状況をうまく要約しているのであるが、オーディールの愚かしい点を除けば、電気ヒューズや他の製造物に対する通常の工業的破壊検査は、このオーディールとまさに同じ性格を持っているのである。また厳格に述べるとすれば、「観察」のコストが金銭のある固定された額で表されるというような通常の状態においてさえも、コストを引き去るという定式化と実際の状況との間に、無視できない食い違いが生じていると言い得るのであり、というのも、金銭の「効用」は厳格に線形的であるというわけではないのであり、そこで、「観察」のコスト

は、通常は、幾分か異なった様式で異なった「導出される行為」へと影響をもたらすこととなるのである。このような定額コストの状況は、引き去られる項としてのコストという概念にかかわるほとんどすべての応用に対して、少なくとも軽い誤差を持ち込むほどに、実際あまりにもありふれているのである。それゆえに、「観察」のコストという概念を顕著に拡張することが強く望まれることとなるではあろうが、しかし、今までのところ、決定問題のクラスから「観察」に関する問題を一般に分離するということの数学的利点を破壊することがない、そのような拡張をなすやりかたを、なんら自分は見出していないと、サヴェジ氏はことわるのである。

これに続く段落、つまり §6.5, 119, の二番目の段落を引くと次である。

It is convenient now to analyze the appropriateness of regarding the number $v(\mathbf{F})$ as a measure of the value of $\mathbf{F}$. As must already be clear to the reader, if a person is to make a preliminary decision limiting his next decision to one or another of several sets of acts, say, $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, and $\mathbf{H}$, then his preliminary decision will select a set that has the highest value of v , and the preliminary and secondary decisions, regarded as a single grand decision, amount to the problem of deciding on an act from $\mathbf{F} \cup \mathbf{G} \cup \mathbf{H}$. So far as this use of v is concerned, any increasing monotonic function of v such as v^3 or 3^v would be equally satisfactory, but v has an advantage in arithmetic simplicity when costs of observation are involved. Consider, for example, the problem of whether to make a particular observation at the random cost $\mathbf{c}$ or to make no observation at all. The two sets of acts involved may then be symbolized by $(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{c})$ and $\mathbf{F}$, respectively. The peculiar simplicity of v as a measure of the value of

a set of acts, in this context, is exhibited by the almost obvious fact that $v(\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}) = v(\mathbf{F}(\mathbf{x})) - E(\mathbf{c})$. It may be remarked in passing that v is a particularly good measure in any problem where $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, or $\mathbf{H}$ is, so to speak, made available by lot, a possibility realized in (7.3.2), for example.

数値 $v(\mathbf{F}) = \sup\{E(\mathbf{f}) \mid \mathbf{f} \in \mathbf{F}\}$ を行為集合 $\mathbf{F}$ の(「その個人」にとつての)「価値」を表す尺度と見なすことの適切さについて少しだけ考えてみるとしても無駄ではないであろう。既に明らかであるに違いないように、もし「個人」が彼の「次の」決定をいくつかの行為集合の内の、例えば、 $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, 及び $\mathbf{H}$ の内の、どれか一つへとあらかじめ限定するための「予備的な」決定をなそうとするのならば、その場合彼の「予備的な」決定は、 v の値が最高となる行為集合を選ぶこととなるであろうし、そしてまた、「予備的な」及び「次の」決定を結びつけて一つの決定と見なすのならば、この一つのより大きな決定をなすという問題は、 $\mathbf{F} \cup \mathbf{G} \cup \mathbf{H}$ から(「その個人」にとって最も「価値」のある)一つの「行為」を選択するという決定問題と同等となるのである。 v に関するこのような利用法に関する限りでは、 v^2 やあるいは 3^v というような v に関するいかなる単調に増加する関数でも、原理上は、どれも同等に役に立つことであろうが、しかし、「観察」のコストがかかわる場合には、算術的な単純さにかかわるある利点を v は持っているのである。例えば、ランダムコスト $\mathbf{c}$ をともなつて一つの特定の「観察」をなすか、あるいは結局なんの「観察」も行わないのか、という問題を考えてみよう。この場合かわりのある二つの行為集合は、おのおの、 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}$ (原文では上に示してあるようにこの行為集合を丸括弧でくくってあるが、この一対の括弧は取りはずすべきであろう) 及び $\mathbf{F}$ によって記号的に表現され得るのである。このような状況においては、行為集合の「価値」を表す一つ

の尺度としての v が持つ独特の単純さが、「 $\mathbf{F}(\mathbf{x}) - \mathbf{c}$ 」の v による「価値」は、「 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ 」の v による「価値」から $\mathbf{c}$ の個人的期待値を差し引いたものに等しい」というほとんど明白な事実によって、はっきりと示されるのである。なおサヴェジ氏は、 $\mathbf{F}$, $\mathbf{G}$, $\mathbf{H}$ が「くじ」によって利用可能となる状況において v は特別に良い尺度となると、注意している。

これに続く段落、つまり §6.5 の末尾の段落を引くと次である。

Finally, if one among several observations is to be chosen, each with its own random cost (possibly including the null observation), the person will choose an observation for which $v(\mathbf{F}(\mathbf{x})) - E(\mathbf{c})$ is as large as possible. If the number of observations among which decision is to be made is infinite, that function may not attain a maximum value, but the value of the situation to the person can reasonably be regarded as the supremum of the function; there are, of course, observations among those available for which the supremum is arbitrarily nearly attained.

「個人」がいくつかの「観察」からどれか一つを選択するという状況に直面しているのならば、ただし各「観察」はそれ自身のランダムコストをともなっており、何も「観察」しないということと同等な「観察」、つまり「零観察」も含まれ得るとするのだが、彼は、 $v(\mathbf{F}(\mathbf{x})) - E(\mathbf{c})$ を可能な限り大とする「観察」を選ぶこととなるであろう。だが、決定の対象となる「観察」の個数が無限大となるように数学的定式化がなされるのならば、「観察」の「価値」を表すこの関数が最大値を取らないことも起り得るのである。しかし、その状況の「その個人」にとつての「価値」は、問題の関数の上限であると合理的に見なし得るであろうし、また当然のことながら、そのような状況では、その上限に

任意に近い値を取る利用可能な諸「観察」が存在するのである。

9. 補遺—「行為」の有限列と最適な導出される「行為」—

空でない「行為」の有限列 $a(1), a(2), \dots, a(M)$ を考える。また X を有限個の値のみを取る「観察」とし、 $X(s)=x$ をみたす(「世界」 S の)「状態」 s の全体を $\{X=x\}$ と表記し、「確率」 P に関して $P(\{X=x\}) > 0$ となる x の全体を R とする。さらにまた、 X が取り得る値の全体が R に一致すると仮定する。任意の $x \in R$ に対して、 $E(a(m)|\{X=x\})$ を最大とする $m \in \{1, 2, \dots, M\}$ の内での最小なものを $m^*(x)$ と表記するとして、 $m^*(x)$ を $x \in R$ の関数と見なすこととする。 $E(a(m)|\{X=x\})$, $m \in \{1, 2, \dots, M\}$, は、少なくとも $m=m^*(x)$ の場合に、最大値 $E(a(m^*(x))|\{X=x\})$ を取るようになる。従って、「確率」 P を「世界」に対する自身の「態度」とする「その個人」に対して、 X の「観察」値 $x \in R$ を得た「後の」最適な「行為」の一つが、 $a(m^*(x))$ によって与えられる。

一方、 $m(\cdot)$ を R から $\{1, 2, \dots, M\}$ への任意の関数として、合成関数 $a(m(X))$ を考える。各「状態」 s に対して「結果」 $a(m(X(s)))(s)$ を対応させる関数は X から導出される「行為」にはかならないが、これを $a(m(X(\cdot)))(\cdot)$ と表記する。また、「事象」 A の指示関数を $I(\cdot; A)$ と表

記する。つまり、 $I(s; A)$ は、 $s \in A$ の場合には値1を、 $s \notin A$ ではない場合には値0を、取るようになる。

任意の $x \in R$ に対して、

$$\begin{aligned} & E(a(m(X(\cdot)))(\cdot)|\{X=x\}) \\ &= \int_S a(m(X(s)))(s) \cdot I(s; \{X=x\}) \frac{P(ds)}{P(\{X=x\})} \\ &= \int_S a(m(x))(s) \cdot I(s; \{X=x\}) \frac{P(ds)}{P(\{X=x\})} \\ &= E(a(m(x))|\{X=x\}) \\ &\leq E(a(m^*(x))|\{X=x\}) \\ &= E(a(m^*(X(\cdot)))(\cdot)|\{X=x\}). \end{aligned}$$

ゆえに、

$$\begin{aligned} E(a(m(X(\cdot)))(\cdot)) &= \\ & \sum_{x \in R} E(a(m(X(\cdot)))(\cdot)|\{X=x\}) \cdot P(\{X=x\}) \\ & \leq E(a(m^*(X(\cdot)))(\cdot)). \end{aligned}$$

従って、 $a(m^*(X(\cdot)))(\cdot)$ は最適な導出される「行為」である。なお、合成関数 $a(m^*(X))$ の X を $x \in R$ で置き換えて得られる $a(m^*(x))$ は、既に述べたように、「観察」 X の値 x が得られた「後の」、最適な「行為」である。

1998年10月24日(土)