



Title	スイッチ付きロックアウト・オプションの数値的価格評価
Author(s)	花田, 邦生
Citation	経済學研究, 49(3), 124-139
Issue Date	1999-12
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/32175
Type	departmental bulletin paper
File Information	49(3)_P124-139.pdf



スイッチ付きノックアウト・オプションの数値的価格評価

花 田 邦 生

1 序論

通常のヨーロピアン・タイプのオプション契約においては、満期時点のペイオフは権利行使価格および満期時点の原資産価格のみにより決定され、原資産価格が満期以前にどのような経路をとるかには依存しない。一方、原資産価格の過去の履歴にも依存して満期時点のペイオフが決定されるオプションも現実には取り引きされており、このようなオプションは経路依存型オプション(path-dependent options)と呼ばれている。経路依存型オプションの代表例として、原資産価格がある境界値を越える場合に契約が消滅するノックアウト・オプション(knockout options)がある。本論文では、このノックアウト・オプションに焦点を当て、数値的に価格評価を行う。なお、以下では、記述を簡潔にするため、オプション契約が消滅する境界のことを消滅境界と呼ぶことにする。

ノックアウト・オプションは消滅境界と評価時点の原資産価格との位置関係で2種類に大別され、評価時点の原資産価格よりも上方に消滅境界があるものをup-and-out、下方にあるものをdown-and-outと呼ぶ。さらに両者に関してそれぞれコール・オプションとプット・オプションがあるため、ノックアウト・オプションはup-and-out call, down-and-out call, up-and-out put, down-and-out putの4種類に分類されることになる。ノックアウト・オプションに関する研究を最初に行ったのはMerton[10]で、消滅境界の形状が時間に関する指数関数としたモデルを用いて、down-and-out callの価格評

価式を閉じた形で導出している。Cox and Rubinstein [3]は、契約消滅が生じた場合には満期時点においてリベートが受けられるタイプのノックアウト・オプションについて定式化を行い、消滅境界が一定値のケースについて、down-and-out callの価格評価を行っている。その後、down-and-out call以外のタイプのオプション、すなわちup-and-out call, down-and-out put, up-and-out putに関する研究も進められ、Rubinstein and Reiner[13]およびRich[12]は、消滅境界が一定値の場合について、上記の全タイプのノックアウト・オプションの価格評価式を閉じた形で導出している。さらにRichはそれらに関する比較静学も行っている。また、消滅境界が一般関数の場合の研究も行われており、花田[5]は一般消滅境界をもつノックアウト・オプションの近似価格評価式を閉じた形で導出している。

ノックアウト・オプションについては、その他にも様々な拡張が試みられている。Kunitomo and Ikeda[8]やGeman and Yor[4]は、評価時点の原資産価格の上方と下方の両側に消滅境界がある場合の価格評価を行っている。また、Roberts and Shortland[14]は原資産価格過程のドリフトとボラティリティが時間に依存する場合についての考察を行っている。さらに、原資産価格が消滅境界に達してもすぐには権利が消滅しないタイプのノックアウト・オプションも提案されている(Linetsky[9])。

このように、ノックアウト・オプションに関する先行研究は豊富にあるが、従来の研究には共通した制約がある。それは、消滅境界が評価

時点から満期時点までの全ての区間において存在する、という制約である。ノックアウト・オプションは相対で契約されるケースが多く、そのため金融機関（オプション発行者）と顧客（オプション購入者）のニーズによって、契約の形態には様々なバリエーションが考えられる。そこで、本論文では、消滅境界が評価時点から満期時点までの区間の一部のみで定義されるノックアウト・オプションを提案する。この新しいタイプのオプションを、本論文ではスイッチ付きノックアウト・オプション（switched knock-out options）と呼ぶ。

本論文の構成は以下の通りである。考察対象となるのは up-and-out call, down-and-out call, up-and-out put, down-and-out put の 4 パターンのスイッチ付きノックアウト・オプションで、いずれも満期前の権利行使が認められないヨーロピアン・タイプとする。それらの価格評価に必要な数学的枠組みを第2節で構築する。第3節ではスイッチ付きノックアウト・オプションの価格について様々な角度から数値的検証を行い、このオプション価格の基本的性質を解明する。最後に第4節で結論を述べる。

2 スwitch付きノックアウト・オプションの定式化

定式化に先立って、まず、前節で述べたスイッチ付きノックアウト・オプションに関する厳密な定義を行う。

定義 2.1 評価時点から満期時点までの区間の一部または全部に消滅境界が存在するノックアウト・オプションをスイッチ付きノックアウト・オプションと呼ぶ。

定義から明らかなように、通常のノックアウト・オプションはスイッチ付きノックアウト・オプションの特殊例となる。

通常のノックアウト・オプションとスイッチ付きノックアウト・オプションの相違点を検証する。図1は、横軸に時間を、縦軸に原資産価格をとって、原資産価格のサンプル・パスと消滅境界を示したものである。評価時点を0、満期を1としている。通常のノックアウト・オプションの例として、時点0から時点1までの全区間に、一定値140をとる消滅境界（図1中の

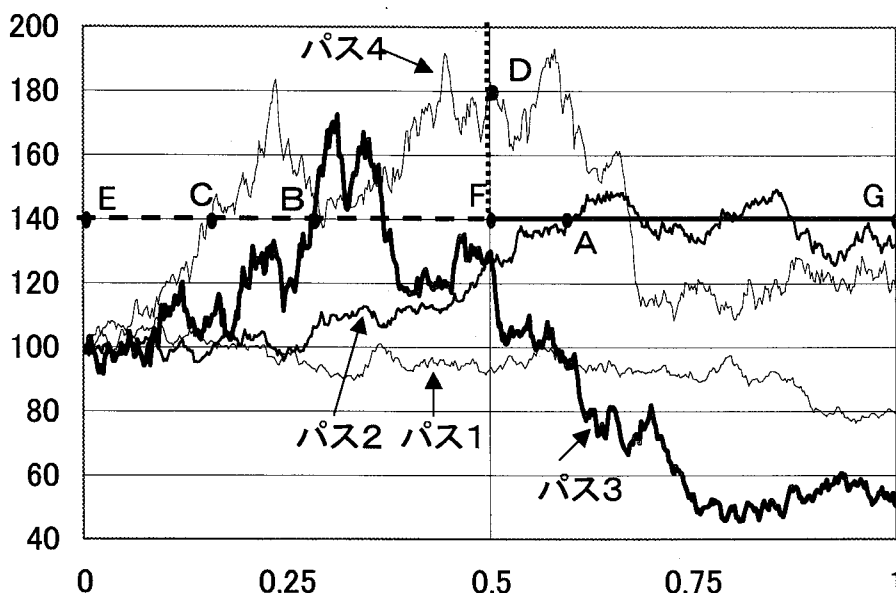


図1 消滅境界と原資産価格のサンプル・パス

線分 EG) が存在する場合を考えよう。表現を簡潔にするため、線分 EG 上およびそれよりも上の領域を消滅領域 $\mathcal{D}_1$ と呼ぶ。この場合、原資産価格が消滅領域 $\mathcal{D}_1$ に入った瞬間にオプション契約は消滅する。よって、パス 1 の場合は満期時点まで契約が残存するが、パス 2 の場合は点 A で、パス 3 の場合は点 B で、パス 4 の場合は点 C で、それぞれ契約が消滅する。

一方、スイッチ付きロックアウト・オプションの場合は、消滅境界が全区間に存在するわけではない。例として、時点 0.5 から時点 1 までの区間にのみ、一定値 140 をとる消滅境界 (図 1 中の線分 FG) が存在する場合を考えよう。表現を簡潔にするため、線分 FG 上と半直線 FD 上およびそれらよりも右上の領域を消滅領域 $\mathcal{D}_2$ と呼ぶ。この場合、原資産価格が消滅領域 $\mathcal{D}_2$ に入った瞬間にオプション契約は消滅する。よって、パス 1 とパス 2 の場合は通常のロックアウト・オプションのケースと同じでそれぞれ契約残存、点 A で契約消滅となるが、パス 3 の場合は途中消滅を起こさずに満期時点まで契約残存、パス 4 の場合は点 C ではなく点 D で初めて契約消滅が発生する。このように、消滅境界が全区間にあるか、一部区間にしかないかによって、結果は相当に異なることがわかる。当然、この違いはオプション価格にも影響するはずである。以下では、スイッチ付きロックアウト・オプションの性質を検証する上で必要な定式化を行う。

オプション価格評価を行うに当たっては、Black and Scholes [1] と同様の仮定をおく。すなわち、原資産価格過程 $\{S(t); 0 \leq t \leq T\}$ がしたがう確率微分方程式、および安全資産価格過程 $\{\rho(t); 0 \leq t \leq T\}$ がしたがう常微分方程式が、それぞれ

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t), \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.1)$$

$$\frac{d\rho(t)}{\rho(t)} = r dt, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.2)$$

で与えられるとする。ここで、 T はオプションの満期、 μ は原資産価格のドリフト、 σ は原資産価格のボラティリティ、 r は安全資産の連続複利ベースの利子率で、これらはいずれも正の定数とする。なお、 $\{W(t); 0 \leq t \leq T\}$ は標準ブラウン運動を示す。また、摩擦の無い市場を想定する、したがって、各資産の売買は空売りを含めてコストをかけずに実行することができ、各資産の取引単位を無限に細かくすることが可能である、等の条件が満たされているものとする。また、時点 $t = 0$ における原資産価格 $S(0)$ は正とする。このとき、確率微分方程式 (2.1) の解

$$S(t) = S(0)e^{\left(\mu - \frac{\sigma^2}{2}\right)t + \sigma W(t)}, \quad 0 \leq t \leq T$$

から明らかなように、任意時点 $t \in [0, T]$ において $S(t) > 0$ が成立する。以下では、 $S(t)$ に関する式は全て $S(t) > 0$ において定義されるものとする。

$S(\cdot)$ 上に書かれたオプションの時点 $t \in [0, T]$ における価格が、 $S(t)$ および t の関数として

$$V = V(S(t), t), \quad S(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.3)$$

と表されると仮定する。

以上の仮定の下で無裁定条件を適用すると、オプション価格が満たすべき条件として、よく知られた偏微分方程式

$$\frac{1}{2}\sigma^2 S(t)^2 \frac{\partial^2 V(S(t), t)}{\partial S(t)^2} + rS(t) \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial S(t)} - rV(S(t), t) + \frac{\partial V(S(t), t)}{\partial t} = 0,$$

$$S(t) > 0, \quad 0 \leq t \leq T \quad (2.4)$$

が得られる。(2.4) の導出に関しては Black and Scholes [1] あるいは Merton [10] を、無裁定条件の詳細については Harrison and Pliska

[6], Øksendal[11,chapter12] を参照のこと。

次に、境界条件の設定を行う。境界条件は対象としているノックアウト・オプションがup/down, call/put によってそれぞれ異なるが、ここではコール・オプションかプット・オプションかで大別して境界条件設定を行う。なお、本論文ではヨーロピアン・タイプのオプションを想定しているため、境界条件の設定もそれに即した形で行われる。

最初にコール・オプションを考察する。時間 t に関する境界条件は、満期時点 $t = T$ のペイオフ条件だけを考慮すればいいので、権利行使価格を K とすると、

$$V(S(T), T) = \max(S(T) - K, 0) \quad (2.5)$$

と表される。また、状態 $S(\cdot)$ に関する境界条件は任意時点 t に対して

$$\lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{V(\xi, t)}{\xi - Ke^{-r(T-t)}} = 1, \quad (2.6)$$

$$\lim_{\xi \rightarrow 0} V(\xi, t) = 0 \quad (2.7)$$

で与えられる。さらに、契約消滅の条件を付加しなければならないが、それにあたっては up-and-out と down-and-out とで場合分けが必要となる。以下では、消滅境界がある区間を $\mathcal{I}^+$ 、消滅境界が無い区間を $\mathcal{I}^- \triangleq [0, T] \setminus \mathcal{I}^+$ で表す。また、時点 t における消滅境界を $B(t)$ で表し、基本的に $B(t)$ の関数形は任意に設定可能とする。このとき状態 $S(\cdot)$ に関する境界条件は、up-and-out call の場合は、

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{V(\xi, t)}{\xi - Ke^{-r(T-t)}} &= 1, \quad t \in \mathcal{I}^-, \\ V(\xi, t) &= 0, \quad (t, \xi) \in \mathcal{I}^+ \times [B(t), \infty], \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} V(\xi, t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (2.8)$$

down-and-out call の場合は

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} \frac{V(\xi, t)}{\xi - Ke^{-r(T-t)}} &= 1, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} V(\xi, t) &= 0, \quad t \in \mathcal{I}^-, \\ V(\xi, t) &= 0, \quad (t, \xi) \in \mathcal{I}^+ \times [B(t), 0] \end{aligned} \quad (2.9)$$

となる。スイッチ付きノックアウト・コール・オプションの価格は、偏微分方程式 (2.4) を時間に関する境界条件 (2.5)、状態に関する境界条件 (2.8) あるいは (2.9) の下で解くことにより得られる。

プット・オプションに関しても同様の考察から境界条件を設定する。時間 t に関する境界条件は

$$V(S(T), T) = \max(K - S(T), 0) \quad (2.10)$$

である。状態 $S(\cdot)$ に関する境界条件は、up-and-out put の場合

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} V(\xi, t) &= 0, \quad t \in \mathcal{I}^-, \\ V(\xi, t) &= 0, \quad (t, \xi) \in \mathcal{I}^+ \times [B(t), \infty], \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} V(\xi, t) &= Ke^{-r(T-t)}, \quad 0 \leq t \leq T \end{aligned} \quad (2.11)$$

down-and-out put の場合

$$\begin{aligned} \lim_{\xi \rightarrow \infty} V(\xi, t) &= 0, \quad 0 \leq t \leq T, \\ \lim_{\xi \rightarrow 0} V(\xi, t) &= Ke^{-r(T-t)}, \quad t \in \mathcal{I}^-, \\ V(\xi, t) &= 0, \quad (t, \xi) \in \mathcal{I}^+ \times [B(t), 0] \end{aligned} \quad (2.12)$$

である。スイッチ付きノックアウト・プット・オプションの価格は、偏微分方程式 (2.4) を時間に関する境界条件 (2.10)、状態に関する境界条件 (2.11) あるいは (2.12) の下で解くことにより得られる。

最後に、消滅境界 $B(t)$ の関数形および $\mathcal{I}^+$ に関する追加的な考察を行う。最初に $\mathcal{I}^+$ に関する考察を行う。数学的な観点からは $\mathcal{I}^+$ はど

のように設定しても問題は生じない。例えば、評価時点と満期時点の間を6等分して、2番目と5番目の区間にのみ消滅境界があるような設定方法や、もっと数学的に複雑なケースを考えても、定式化自体には問題は生じない。しかし、あまり現実離れした設定は除外すべきだろう。

次に、消滅境界 $B(t)$ の関数形について考察する。先に、消滅境界 $B(t)$ の関数形は基本的には任意に設定可能であると述べた。すなわち、 $B(t)$ は一定値、線形関数、指数関数、多項式関数、階段関数など、どのような関数でもかまわない。しかし、オプションがオプションとしての意味を為さなくなるような設定方法は除外する必要がある。例を用いてこの点を説明する。評価時点を $t=0$ とし、定数 $\alpha \in [0, S(0)]$ に対して消滅境界を

$$B(t) = \frac{TS(0)}{T-t} - \alpha, \quad (2.13)$$

で定義する。(2.13) に $t=0$ を代入すると $B(0) = S(0) - \alpha < S(0)$ となり down-and-out タイプの消滅境界であることがわかる。一方、 $t \rightarrow T$ とすると $B(t) \rightarrow +\infty$ なので、原資産価格過程が有限である限り、満期時点 $t=T$ に達する前に少なくとも1回は $S(t) < B(t)$ となる。すなわち、このオプション契約は必ず消滅することになる。明らかに、(2.13) の下ではオプションがオプションとしての意味を為していない。このような関数形は除外しなければならない。

3 数値検証

3.1 準備

本節ではスイッチ付きノックアウト・オプション価格がもつ性質を検証する。前節で行った定式化では、状態に関する境界条件にかなりの自由度が残されている。一般に、偏微分方程式が解析的に解けるかどうかは偏微分方程式および境界条件の形による。本論文で提案しているス

イッチ付きノックアウト・オプションの場合も例外ではなく、境界条件をどのように設定するかによって、解析解が得られるか否かが決まる。解析解が得られるものについて深く探求するのも研究の一つの方向性だが、本論文の目的は一部の限定された場合についての解析解を導出することではなく、新しく提案したスイッチ付きノックアウト・オプションについて全体的かつ基本的な性質を検証することにある。そのため、解析解が得られるか否かに関わらずに結果を得ることができる数値的手法によって、オプション価格評価を行う。

価格評価にあたっては、解の正確性を重視する観点から、有限差分法の中でも精度が良いとされる Crank-Nicolson 法を用いる。Crank-Nicolson 法をオプション価格評価に用いる具体的な方法およびその近似精度については Courtadon [2] を参照のこと。また、有限差分法の一般論およびオプション価格評価への応用全般については Schwartz [15], Hull [7], Wilmott et al. [16] を参照のこと。

これ以降は、オプション価格評価時点 $t=t_0=0$ 、満期時点 $t=T=1$ として議論を進める。計算は以下の要領で行われる。偏微分方程式 (2.4) に対しては変数変換は一切行わず、そのまま差分法して Crank-Nicolson 法を適用する。状態 $S(\cdot)$ のとりうる区間を $[0, S_{\max}] \equiv [0, 1000]$ としてこれを10000分割する。時間については、時間 t のとりうる区間 $[0, 1]$ を500分割する。なお、状態に関しても時間に関しても、分割の方法は等分割を採用する。また、コール・オプションおよびプット・オプションの状態 $S(\cdot)$ に関する境界条件 (2.8), (2.9), (2.11), (2.12) の $\xi \rightarrow \infty$ は全て $\xi \rightarrow S_{\max}$ で置き換える。特に、コール・オプションの状態 $S(\cdot)$ に関する上方の境界条件 (2.6) は $V(S_{\max}, t) = S_{\max} - Ke^{-r(T-t)}$ となり、(2.8), (2.9) の対応する箇所も同様に表現されることに留意しよう。行使価格は $K=100$ 、安全利子率は $r=0.05$ とし、原資産価格のボ

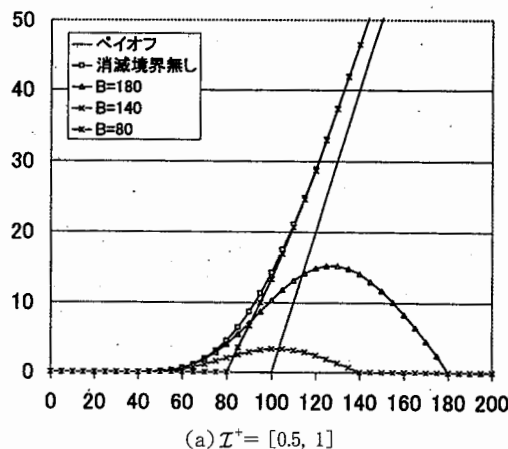
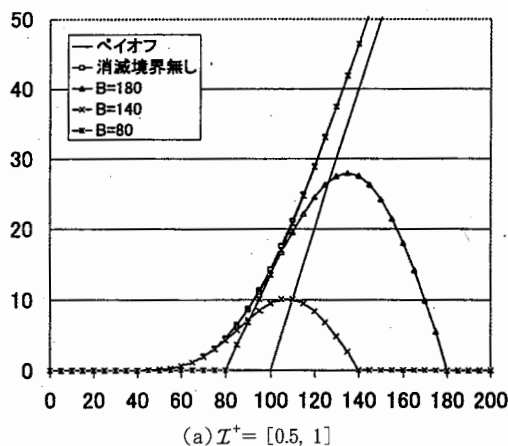
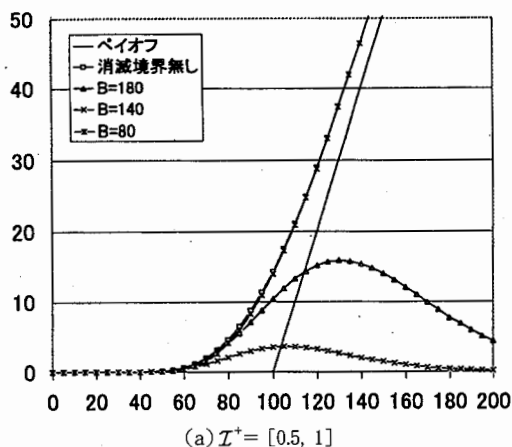


図2 消滅境界の高さとオプション価格
(call, $\sigma = 0.3$, $r = 0.05$, $K = 100$, $T = 1$)

ラティリティは一部を除いて $\sigma = 0.3$ を用いる。

分析対象は以下の基準で選定した。まず、消滅境界の関数形は $B(t) = B$ ($B > 0$ は定数), すなわち一定値とする。次に $\mathcal{I}^+$ については, $\mathcal{I}^+ = [0.25, 1]$, $[0.5, 1]$, $[0.75, 1]$, $[0, 0.25]$, $[0, 0.5]$, $[0, 0.75]$ の6種類を分析対象とする。時間の単位を年とすると, これは1年間の契約期間の前半あるいは後半に3ヶ月を一区切りとして1~3区画にまたがる消滅境界を設定することに該当する。なお, 比較のため, 全区間に消滅境界がある通常のノックアウト・オプション ($\mathcal{I}^+ = [0, 1]$) と, 消滅境界が存在しない通常のオプション ($\mathcal{I}^+ = \emptyset$) も分析対象に含める。

具体的な検証作業に入る前に, 検証の際に用いる指標をここで定義しておく。評価時点における, 消滅境界をもたない通常のオプション価格を $\hat{V}$, スwitch付きノックアウト・オプション価格を V として,

$$\nu = \frac{V}{\hat{V}} \quad (3.14)$$

を定義する。本論文ではこの指標を ν 値と呼ぶことにする。 ν 値は, 消滅境界を付加することによって価格がどれだけの割合で変化するかを示す無次元の指標である。消滅境界の存在はオプション価格を減価させるので $0 \leq \nu < 1$ である。

3.2 コール・オプション

最初にコール・オプションに関する分析を行う。図2は, 縦軸に評価時点 $t = 0$ におけるオプション価格 $V(S(0), 0)$ を, 横軸に評価時点 $t = 0$ における原資産価格 $S(0)$ をとり, $\mathcal{I}^+ = [0.5, 1]$, $\mathcal{I}^+ = [0, 0.5]$, $\mathcal{I}^+ = [0, 1]$ の3つの場合について, 消滅境界値とオプション価格の関係を示したものである。比較のために, 消滅境界の無い通常のコール・オプション価格も示してある。なお, 表記を簡潔にするため, 混乱が生じない範囲で, 図2-(a)を簡単に (a)

あるいは図 (a) と表現し、他についても同様とする。

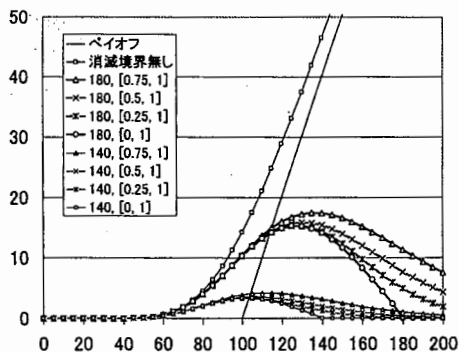
ここで、例えば、評価時点 $t = 0$ における原資産価格 $S(0)$ が権利行使価格と同じ100だとすると、 $B = 140, 180$ は up-and-out call に、 $B = 80$ は down-and-out call に対応する。通常の取引では評価時点の原資産価格と権利行使価格が極端に乖離するケースはまれで、 $S(0)$ と K は近接した水準にあることが多い。ここでは $S(0) = 100 = K$ を基準に up/down の区別を行い、以下の議論でも同様とする。なお、数値を示す場合は、オプション価格および ν 値は小数点以下第3桁まで表示する。また、これ以降に参照する図は全て、縦軸には評価時点 $t = 0$ におけるオプション価格 $V(S(0), 0)$ あるいはそれに対応する ν 値を、横軸には評価時点 $t = 0$ における原資産価格 $S(0)$ をとったものなので、誤解を生じない範囲で軸の説明は省略する。

図2で up-and-out call の場合、すなわち $B = 180$ と $B = 140$ の場合のオプション価格と、消滅境界が無い場合の価格を比較してみよう。価格の特性を読みとるという観点から見ると、 $B = 180$ の (a) - (c) および $B = 140$ の (b) のオプション価格は十分な大きさをもっているが、 $B = 140$ の (a), (c) のオプション価格はかなり小さいといえる。図2に対応する具体的な数字を表1に挙げる。表1から、例として (c) に関する数字を見てみると、 $B = 140, 130, 120, 110$ のときのオプション価格は、 $S(0) = 100$ のケースで順に3.338, 1.619, 0.486, 0.047, ν 値は順に0.235, 0.114, 0.034, 0.003となり、 $B = 140$ を下回ると非常に小さい値になっていることがわかる。価格がそのように小さいレベルでは特性検証は困難なため、以降は up-and-out call の分析は $B \geq 140$ の場合について行う。また、down-and-out call については $B \geq 80$ の場合は消滅境界の無い場合とある場合の価格に

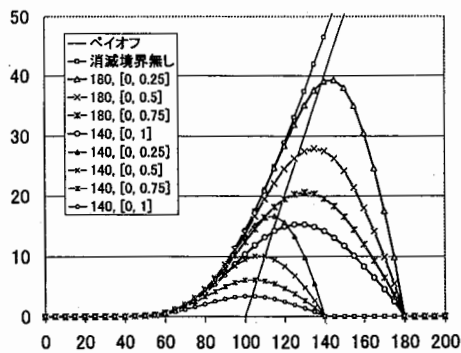
表1 消滅境界値とオプション価格
(call, $S(0) = 100$, $\sigma = 0.3$, $r = 0.05$, $K = 100$, $T = 1$)

	(a) $\mathcal{I}^+ = [0.5, 1]$		(b) $\mathcal{I}^+ = [0, 0.5]$		(c) $\mathcal{I}^+ = [0, 1]$	
	価格	ν 値	価格	ν 値	価格	ν 値
$B = 180$	10.338	0.726	13.796	0.969	10.318	0.725
$B = 170$	8.971	0.630	13.379	0.940	8.932	0.628
$B = 160$	7.309	0.514	12.629	0.887	7.239	0.509
$B = 150$	5.425	0.381	11.371	0.799	5.313	0.373
$B = 140$	3.491	0.245	9.453	0.664	3.338	0.235
$B = 130$	1.785	0.125	6.877	0.483	1.619	0.114
$B = 120$	0.606	0.043	3.984	0.280	0.486	0.034
$B = 110$	0.082	0.006	1.480	0.104	0.047	0.003
$B = 90$	12.831	0.902	10.000	0.703	9.732	0.684
$B = 80$	13.919	0.978	13.442	0.945	13.334	0.937
$B = 70$	14.200	0.998	14.164	0.995	14.149	0.994
$B = 60$	14.230	1.000	14.229	1.000	14.229	1.000
$B = 50$	14.231	1.000	14.231	1.000	14.231	1.000
$B = 40$	14.231	1.000	14.231	1.000	14.231	1.000
$B = 30$	14.231	1.000	14.231	1.000	14.231	1.000
$B = 20$	14.231	1.000	14.231	1.000	14.231	1.000

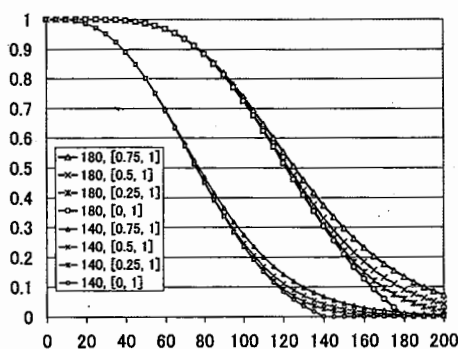
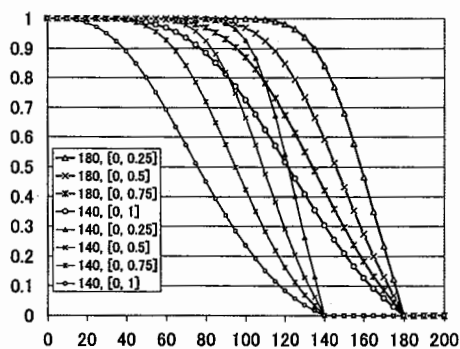
消滅境界無しの際の価格 : 14.231



(a) 後半ケースのオプション価格



(c) 後半ケースのオプション価格

(b) 後半ケースの ρ 値(d) 後半ケースの ρ 値図3 消滅境界の位置とオプション価格および ρ 値(up-and-out call, $\sigma = 0.3$, $r = 0.05$, $K = 100$, $T = 1$)

ほとんど差が出ず、図の上で差異を確認することが困難になるため、 $B \geq 80$ の場合について分析を行う。なお、オプション価格の特性を把握しやすくするため、一部を除いて基本的には図のみを示し、特に数値が必要な場合は本文中で適宜示すことにする。

3.2.1 up-and-out コール・オプション

まず、up-and-out callに関する分析を行う。図3は $B = 180$ と $B = 140$ について、消滅境界の存在する区間を変化させた場合のオプション価格および ρ 値である。(a)と(b)は $I^+ = \emptyset, [0.75, 1], [0.5, 1], [0.25, 1], [0, 1]$ と変化したときのオプション価格と ρ 値である。比較対象として示した消滅境界無し($I^+ = \emptyset$)および $I^+ = [0, 1]$ 以外はいずれ

も、評価時点から満期時点までの区間のうち、前半には消滅境界が無く、後半には消滅境界がある場合である。このような場合を、後半に消滅境界があるという意味で「後半ケース」と呼ぶことにする。一方、(c)と(d)は $I^+ = \emptyset [0, 0.25], [0, 0.5], [0, 0.75], [0, 1]$ と変化したときのオプション価格と ρ 値である。このような場合を、先程と同様の考察から「前半ケース」と呼ぶことにする。

後半ケースと前半ケースを比較すると2つの点で相違が見られる。第1の相違点を観察するため、後半ケースと前半ケースで、消滅境界値が等しくてかつ境界の長さが等しいもの同士の比較を行う。 $B = 180$ の場合で、消滅境界の長さが0.25、すなわち $I^+ = [0.75, 1]$ (後半ケース)と $I^+ = [0, 0.25]$ (前半ケース)のときの

オプション価格を比較してみよう。図 (a), (c) で、横軸 $S(0)$ の値が小さい方から大きい方へ向かってオプション価格を観察してみると、図 (a) の後半ケースの場合は $S(0) = 80$ 付近から消滅境界の影響が出始めて（消滅境界が無い場合と比べて）勾配が小さくなり、その後しばらくして下り勾配に転じている。厳密な数字を見てみると、オプション価格が最大値を取るのは $S(0) = 135$ のときで、そのときの値は 17.428 である。その後はなだらかにオプション価格が減少していく。一方、図 (c) の前半ケースの場合は、消滅境界の影響が出始めるのは $S(0) = 125$ 付近、下り勾配に転じるのは $S(0) = 145$ で、そのときにオプション価格は最大値 39.305 をとる。その後、オプション価格は急速に減少する。

この性質は ν 値からも観察できる。引き続き、 $B = 180$ で消滅境界の長さが 0.25 ($\mathcal{I}^+ = [0.75, 1]$, $\mathcal{I}^+ = [0, 0.25]$) の場合を用いる。このとき、例えば、オプション価格に対する消滅境界の影響が 10% を越える（すなわち $\nu < 0.9$ ）となる $S(0)$ の値を見てみると、図 (b) の後半ケースの場合は $S(0) = 80$ だが、図 (d) の前半ケースの場合は $S(0) = 135$ である。また、 ν 値は前半ケースの方が高い値が出ている。境界値付近では、後半ケースの場合はなだらかに ν 値が減少するが、前半ケースの場合は急速に ν 値が減少する。

これらの結果からわかることをまとめておこう。後半ケースは、消滅境界の影響が早い段階で現れ、オプション価格は低めに押さえられ、なだらかにオプション価格が減価する。一方、前半ケースでは、消滅境界の影響が現れるのは遅く、オプション価格は高めの値を取り、その後急速にオプション価格が減価する。本論文の分析では原資産価格過程を幾何ブラウン運動としているため、この結果は直感と合致している。なお、ここでは $B = 180$ かつ消滅境界の長さが 0.25 の場合で比較を行ったが、その他の場合でもこの性質は観察される。図 3 には、 $B =$

180, 140, 消滅境界の長さが 0.25, 0.5, 0.75 の場合が示されているが、いずれの場合もこの性質が観察できる。

第 2 の相違点は、消滅境界付近の価格の動きである。後半ケースの場合、比較対象の $\mathcal{I}^+ = [0, 1]$ を除いて、評価時点 $t = 0$ においては消滅境界は存在しない。そのため、 $S(0)$ が消滅境界値よりも大きい場合でもオプション価格は 0 にはならない。一方、前半ケースでは、評価時点 $t = 0$ で消滅境界が存在するため、それよりも、 $S(0)$ が大きい場合はオプション価格は必ず 0 になっている。

次に、ボラティリティの変化について分析する。図 4 はボラティリティ σ を変化させた場合のオプション価格を示したもので、(a) は消滅境界が無い場合のオプション価格、(b) は $\mathcal{I}^+ = [0.5, 1]$, (c) は $\mathcal{I}^+ = [0, 0.5]$, (d) は $\mathcal{I}^+ = [0, 1]$ に $B = 180, 140$ の消滅境界が存在する場合のオプション価格を示している。図 (a) は消滅境界の無い通常のコール・オプションの場合に、オプション価格がボラティリティの増加関数になることを示しているが、これはよく知られた事実である。一方、図 (b)-(d) ではそれとは明らかに異なった動きが観察される。図 (b)-(d) で共通していえることは、 $S(0)$ が小さい値の場合はオプション価格はボラティリティの増加関数になっているが、 $S(0)$ が消滅境界値 B に近づく途中でそれが逆転し、オプション価格がボラティリティの減少関数になっているということである。ただし、逆転が生じる位置は場合によって異なっている。この結果は、up-and-out タイプのスイッチ付きノックアウト・コール・オプションを用いたヘッジ戦略は通常よりも複雑なものになることを示唆している。

3.2.2 down-and-out コール・オプション

次に、down-and-out call に関する分析を行う。up-and-out call の場合と同様に、まず後半ケースと前半ケースの分析を行う。図 5 は

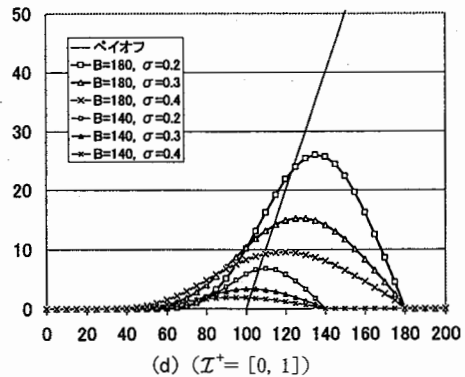
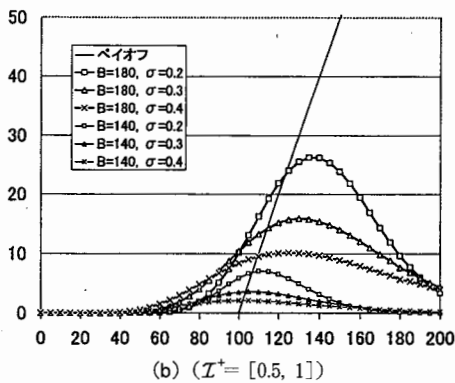
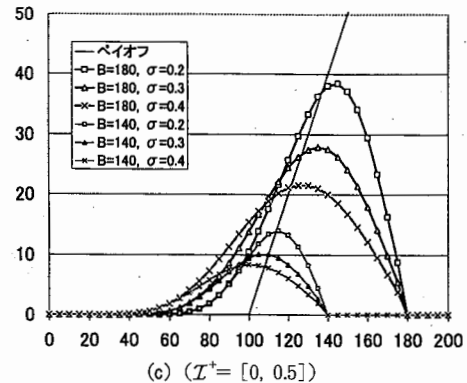
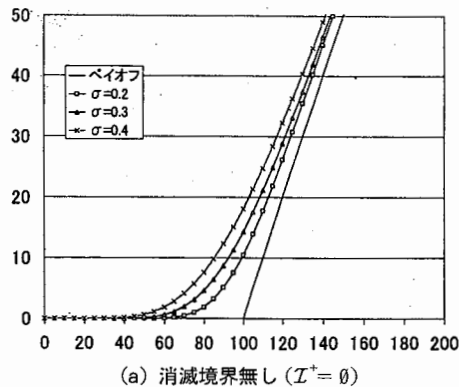


図4 ボラティリティの大きさとオプション価格
(up-and-out call, $r = 0.05$, $K = 100$, $T = 1$)

$B = 80$ の後半ケースについて、消滅境界の存在する区間を変化させた場合のオプション価格および ρ 値である。図5からまず言えることは、up-and-out callの場合と異なり、後半ケースのdown-and-out callの価格は通常のコール・オプションの価格と類似した動きをするということである。また、オプション価格で見ると、消滅境界の存在によってそれほど価格変化が起こっていないようにも見える。しかし、この点に関しては注意が必要である。図(b)の ρ 値を見てみると、 $I^+ = [0.75, 1]$, $[0.5, 1]$, $[0.25, 1]$, $[0, 1]$ の順に、 $S(0) = 90$ の場合で0.992, 0.950, 0.866, 0.774, $S(0) = 80$ の場合で0.984, 0.889, 0.687, 0.000となり、10%以上の価格変化を起こしている例が8例中5例もある。10%以上の価格変化は無視できないレベルの変

化である。

一方、 $B = 80$ の前半ケースについては $I^+ = [0, 0.25]$, $[0, 0.5]$, $[0, 0.75]$, $[0, 1]$ の価格を計算したところ、例えば $S(0) = 90$ のときで順に、7.140, 6.783, 6.706, 6.700となるなど、 $I^+ = [0, 0.25]$, $[0, 0.5]$, $[0, 0.75]$ の場合の価格が $I^+ = [0, 1]$ の場合の価格とほとんど変わらない値として得られた。図も作成してみたが、各曲線がほとんど重なってしまい、識別不能になった。 ρ 値についても同様だった。

以上をまとめておこう。後半ケースでは、価格は消滅境界の無い通常のコール・オプション価格と類似した動きをし、価格の変化はそれほど大きくないが、無視できるレベルでもない。前半ケースでは、価格は消滅境界が全区間にある通常のノックアウト・オプションとほぼ同じ

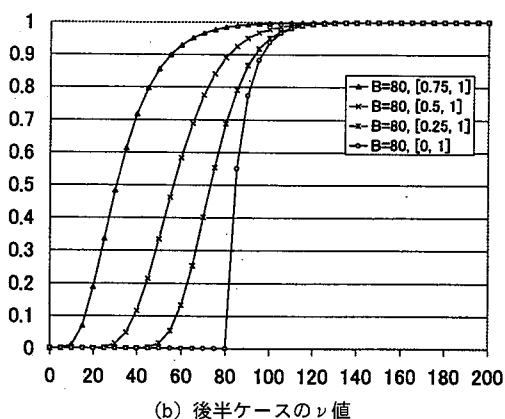
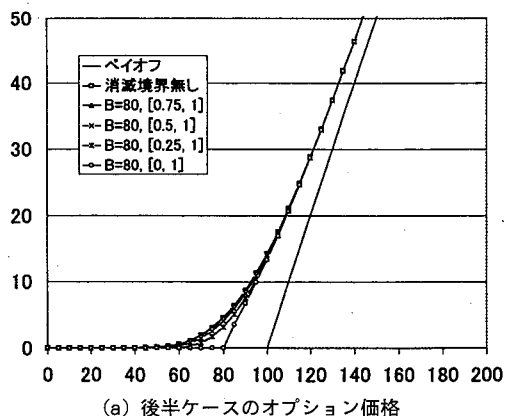


図5 消滅境界の位置とオプション価格および
(down-and-out call, $\sigma = 0.3$, $r = 0.05$, $K = 100$, $T = 1$)

動きをし、価格の違いは無視できるレベルにある。

次に、ボラティリティの変化について分析する。図6はボラティリティ σ を変化させた場合のオプション価格を示したもので、(a)が $X^+ = [0.5, 1]$ 、(b)が $X^+ = [0, 0.5]$ の図とともに $B = 80$ である。なお、消滅境界が無い場合の図は(a)と、 $X^+ = [0, 1]$ の場合の図は(b)と、それぞれほぼ重なってしまうため省略した。全体的に言えることは、up-and-out callの場合に見られた逆転現象は見られず、通常のコール・オプションと同様に、オプション価格がボラティリティの増加関数になっているということである。

3.3 プット・オプション

次に、プット・オプションに関する分析を行う。図7は $X^+ = [0.5, 1]$ $X^+ = [0, 0.5]$ 、 $X^+ = [0, 1]$ の3つの場合について消滅境界値とオプション価格の関係を示したもので、コール・オプションの場合の図2に対応している。図2と同様、比較のために、消滅境界の無い通常のプット・オプション価格も示してある。コール・オプションの場合と同様の考察から、down-and-out putの分析対象は $20 \leq B \leq 70$ 、up-and-out putの分析対象は $B \leq 120$ とする。

一般に、通常のコール・オプションと通常のプット・オプションの価格を示す曲線は細かい点を除けば左右対称になる。プット・オプション

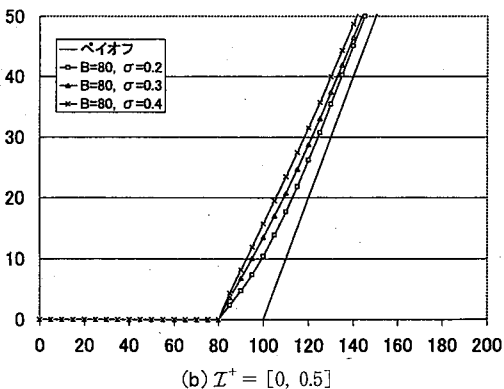
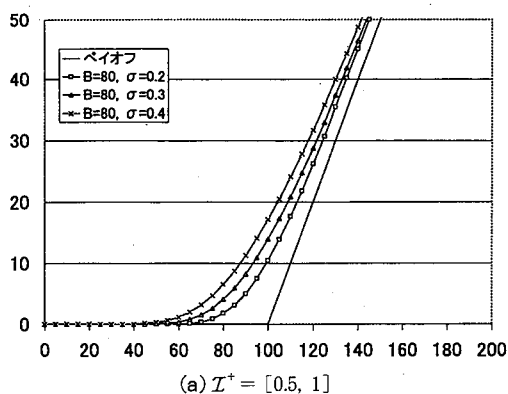


図6 ボラティリティの大きさとオプション価格
(down-and-out call, $r = 0.05$, $K = 100$, $T = 1$)

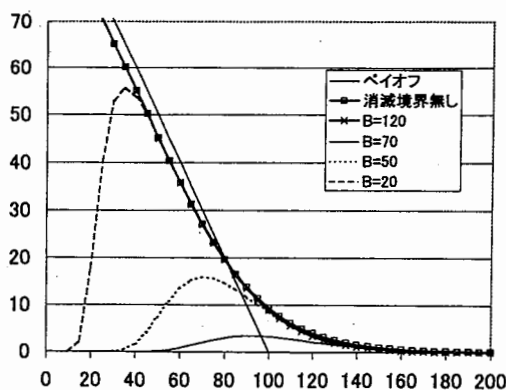
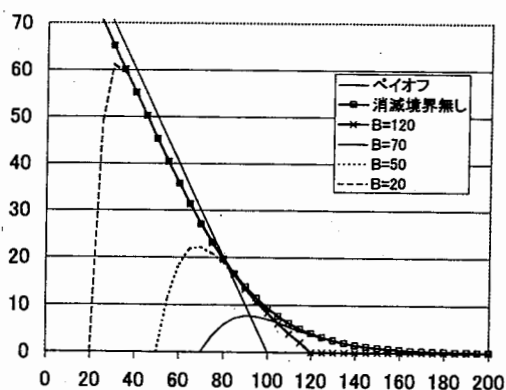
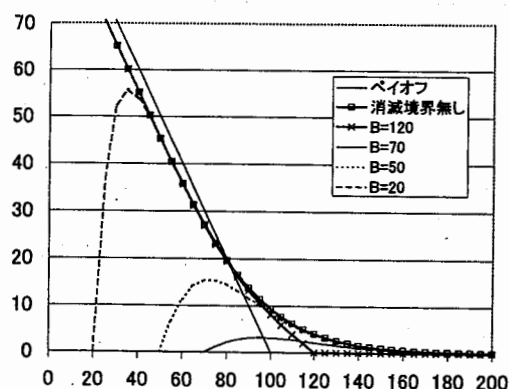
(a) $\mathcal{I}^+ = [0.5, 1]$ (b) $\mathcal{I}^+ = [0, 0.5]$ (c) $\mathcal{I}^+ = [0, 1]$

図7 消滅境界の高さとオプション価格
(put, $\sigma = 0.3$, $r = 0.05$, $K = 100$, $T = 1$)

ンに関する図7とコール・オプションに関する図2で、消滅境界が無い場合のオプション価格を見てみると、コールの場合はペイオフ線と交わらないがプットの場合は交わるという相違点はあるものの、基本的には左右対称になっている。両図で消滅境界がある場合の曲線を比べればわかるように、この左右対称性はスイッチ付きノックアウト・オプションの場合にも観察される。なお、コールで $B = 180$ の場合とプットで $B = 20$ の場合を比べると、消滅境界付近でのオプション価格の減り方はプットの方が急速になっているが、原資産価格過程に幾何ブラウン運動を仮定していることを考えると、これは自然な結果と言えるだろう。

以上のように、プット・オプションの価格は基本的にコール・オプション価格と対称性をもっているため、その性質も類似している。そのため、プット・オプションの分析は、対応するコール・オプションとの比較を行う形で進める。

3.3.1 down-and-out プット・オプション

計算の結果、down-and-out put の価格は up-and-out call の価格と対称性をもっていることがわかった。後半ケースと前半ケースの比較を行うと、up-and-out call の場合と同様の結果が得られた。すなわち、後半ケースでは消滅境界の影響が早い段階で現れ、オプション価格は低めに押さえられ、なだらかにオプション価格が減価する一方で、前半ケースでは消滅境界の影響が現れるのは遅く、オプション価格は高めの値を取り、その後急速にオプション価格が減価することがわかった。ボラティリティとの関係でも、up-and-out call の場合と同様の結果が得られている。すなわち、消滅境界の無い通常のプット・オプションの場合はオプション価格はボラティリティの増加関数になるが、スイッチ付きノックアウト・オプションの場合は途中で逆転現象が発生する。図8は $B = 60$ と $B = 30$ について後半ケースと前半ケースのオプション価格を示したものである。図9はボラティリ

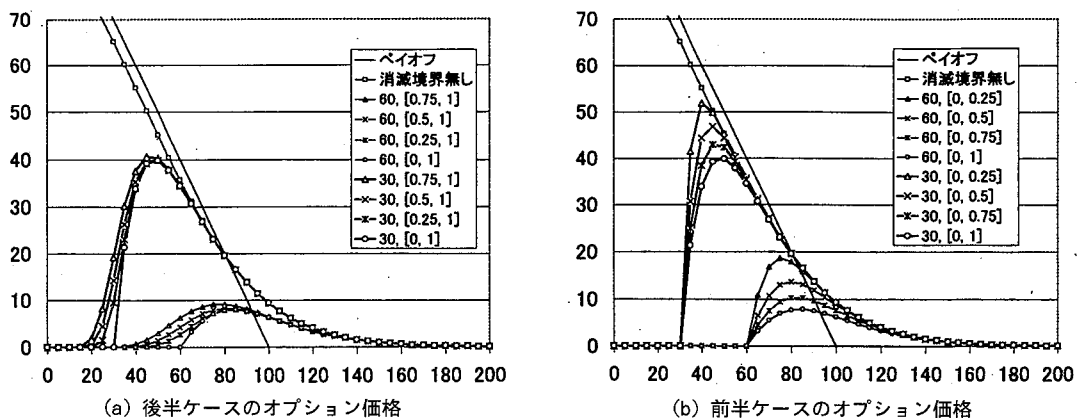


図8 消滅境界の位置とオプション価格
(down-and-out call, $\sigma = 0.3$, $r = 0.05$, $K = 100$, $T = 1$)

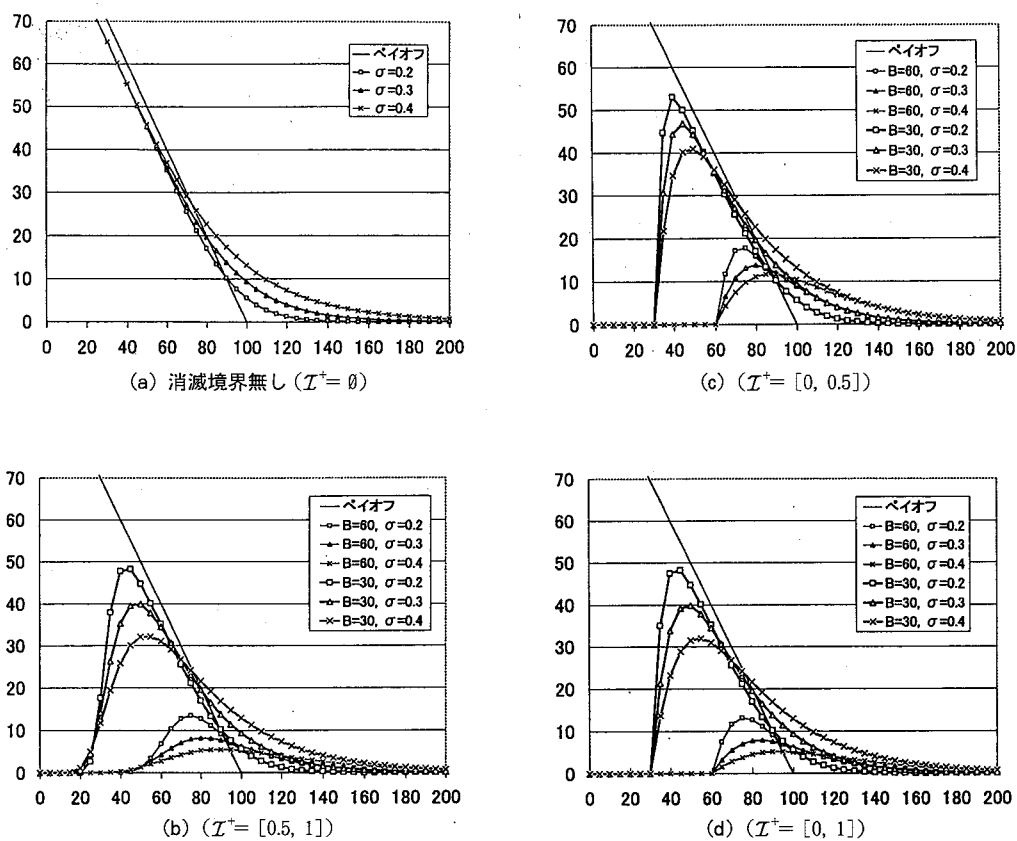


図9 ボラティリティの大きさとオプション価格
(down-and-out put, $r = 0.05$, $K = 100$, $T = 1$)

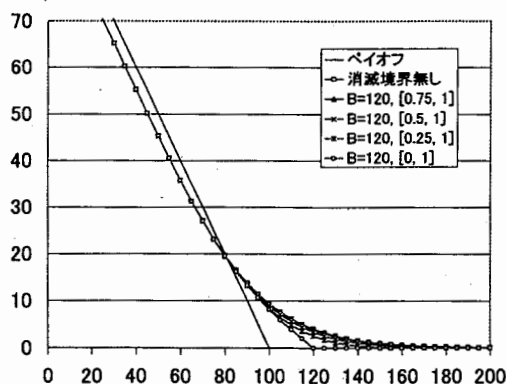
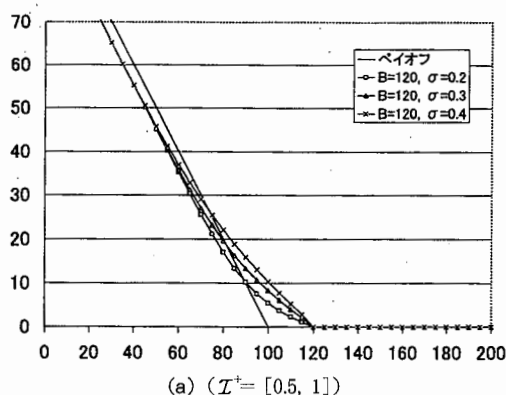


図10 消滅境界の位置とオプション価格および ν 値
(up-and-out put, $\sigma = 0.3$, $r = 0.05$, $K = 100$, $T = 1$)
(後半ケースのオプション価格)

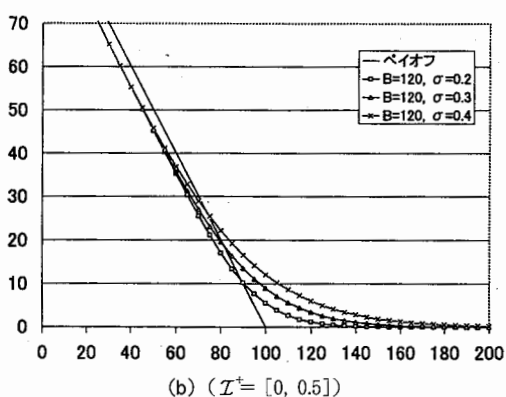
ティ σ を変化させたときのオプション価格を $\mathcal{I}^+ = \emptyset, [0.5, 1], [0, 0.5], [0, 1]$ の場合について示したものである。図8, 図9とともに up-and-out call との対称性が確認できる。

3.3.2 up-and-out プット・オプション

同様に, up-and-out put の価格には down-and-out call との対称性が観察された。後半ケースと前半ケースの比較を行うと down-and-out call 同様の結果が得られた。すなわち, 後半ケースでは価格は消滅境界の無い通常のプット・オプション価格と類似した動きをし, 価格の変化はそれほど大きくないが, 無視できるレベルでもない。前半ケースでは, 価格は消滅境界が全区間にある通常のノックアウト・オプションとほぼ同じ動きをし, 価格の違いは無視できるレベルにある。ボラティリティとの関係も down-and-out call と同様で, 通常のプット・オプションと同様に, オプション価格がボラティリティの増加関数になっており, 逆転現象は発生しなかった。図10は $B = 120$ の後半ケースについて, 消滅境界の存在する区間を変化させた場合のオプション価格である。 $\mathcal{I}^+ = [0, 0.25], [0, 0.5], [0, 0.75]$ の場合の価格は $\mathcal{I}^+ = [0, 1]$ の場合の価格とほぼ同じで, 図の上ではほとんど重なってしまうため, 前半ケースに関する図は省略した。図11はボラティリティ σ を変化さ



(a) ($\mathcal{I}^+ = [0.5, 1]$)



(b) ($\mathcal{I}^+ = [0, 0.5]$)

図11 ボラティリティの大きさとオプション価格
(up-and-out put, $r = 0.05$, $K = 100$, $T = 1$)

せた場合のオプション価格を示したもので, (a) が $\mathcal{I}^+ = [0.5, 1]$, (b) が $\mathcal{I}^+ = [0, 0.5]$ の図とともに $B = 120$ である。なお, 消滅境界が無い場合の図は (a) と, $\mathcal{I}^+ = [0, 1]$ の場合の図は (b) と, それぞれほぼ重なってしまうため省略した。図10, 図11ともに down-and-out call との対称性が確認できる。

4 結論

本論文では新しいタイプのオプションとしてスイッチ付きノックアウト・オプションを提案し, その定式化を行い, 数値実験を通して性質の検証を行ってきた。スイッチ付きノックアウト

ト・オプションの価格のもつ性質をまとめると以下のようになる。

- up-and-out call と down-and-out put に関してはオプション価格に対称性があり、そのもつ性質には類似性が認められる。両者とも、消滅境界が無い場合の価格とは異なった性質をもつ。
- down-and-out call と up-and-out put に関してもオプション価格に対称性があり、そのもつ性質にはやはり類似性が認められる。両者とも消滅境界が無い場合の価格とほぼ同様の性質を持つ。
- 後半ケースと前半ケースでは価格の動きに大きな相違点がある。
- 消滅境界が存在することにより、オプション価格とボラティリティの関係が変化する。評価時点の原資産価格の値によってはオプション価格がボラティリティの減少関数になることがある。

今回の検証では、消滅境界が非常に簡単な形状の場合に限定して分析が行われた。当然、他のケースについても検証を行う必要はあるだろう。今後の課題としては、

- 消滅境界が前半と後半で異なる位置にある場合の検証
- 消滅境界が上方と下方の2方向にある場合の検証
- 消滅境界が一定値以外のケースの検証

などが挙げられる。また、数値的価格評価に加えて、解析的近似による明示的な近似価格評価式の導出なども今後の検討課題といえる。

謝辞

本論文の執筆にあたっては北海道大学経済学部木村俊一教授の御指導を賜った。深く感謝申し上げたい。また、本論文を査読していただいたレフリーには本論文執筆の最終段階で貴重なコメントを頂いた。記して感謝申し上げます。

参考文献

- [1] Black, F. and Scholes, M., "The pricing of options and corporate liabilities," *Journal of Political Economy*, 81(1973)637-654.
- [2] Courtadon, G., "A more accurate finite difference approximation for the valuation of options," *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 17(1982)697-703.
- [3] Cox, J.C. and Rubinstein, M., *Options Markets*, Prentice Hall, 1985.
- [4] Geman, H. and Yor, M., "Pricing and hedging double-barrier options: A probabilistic approach," *Mathematical Finance*, 6(1996)365-378.
- [5] 花田邦生, "一般境界ノックアウトオプションの近似価格評価," 北海道大学大学院経済学研究科修士論文 (1999).
- [6] Harrison, J.M. and Pliska, S.R., "Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading," *Stochastic Processes and their Applications*, 11(1981)215-260.
- [7] Hull, J.C., *Options, Futures, and Other Derivative Securities*, 2nd ed., Prentice Hall, 1993.
- [8] Kunitomo, N. and Ikeda, M., "Pricing options with curved boundaries," *Mathematical Finance*, 2(1992)257-297.
- [9] Linetsky, V., "Step Options," *Mathematical Finance*, 9(1999)55-96.
- [10] Merton, R., "The theory of rational option pricing" *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1973)141-183.
- [11] Øksendal, B., *Stochastic Differential Equations: An Introduction with Applications*, 5th

ed., Springer, 1998.

- [12] Rich, D.R., "The mathematical foundations of barrier option-pricing theory," *Advances in Futures and Options Research*, 7(1994)267-311.

- [13] Rubinstein, M. and Reiner, E., "Breaking down the barriers," *Risk*, 4(1991)28-35.

- [14] Roberts, G. O. and Shortland, C.F., "Pricing

barrier options with time-dependent coefficients," *Mathematical Finance*, 7(1997)83-93.

- [15] Schwartz, E. S., "The valuation of warrants: Implementing a new approach," *Journal of Financial Economics*, 4(1977)79-93.

- [16] Wilmott, P., Dewynne, J. and Howison, S., *Option Pricing*, Oxford Financial Press, 1993.