



# HOKKAIDO UNIVERSITY

|                  |                                                                                   |
|------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
| Title            | サヴェジ氏による1959年のレクチャーについて                                                           |
| Author(s)        | 園, 信太郎                                                                            |
| Citation         | 経済學研究, 50(4), 101-143                                                             |
| Issue Date       | 2001-03                                                                           |
| Doc URL          | <a href="https://hdl.handle.net/2115/32217">https://hdl.handle.net/2115/32217</a> |
| Type             | departmental bulletin paper                                                       |
| File Information | 50(4)_P101-143.pdf                                                                |



<研究ノート>

## サヴェジ氏による 1959 年のレクチャーについて

園 信太郎

### 1. はじめに

このサヴェジ氏とは、次の「基礎論」によって統計学の基礎づけに大きな貢献をした統計家である。

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1954, *Second Revised Edition*, Dover, New York, 1972.

彼は、1959年の夏に英国の London を訪れており、その際、the Joint Statistics Seminar of Birkbeck and Imperial Colleges で、主観確率の統計学への応用に関するレクチャーを行ったのであり、さらに同年の 7 月 27 日及び 28 日に Birkbeck College において、このサヴェジ氏のレクチャーに関して、簡潔な幾つかの論文が提出され、参加者の間でかなり活発な討論が展開されたのである。また、このレクチャー及び討論は、後に多少の補訂を受けて、次の冊子にまとめられている。

Savage, Leonard Jimmie, et al., *The Foundations of Statistical Inference: A Discussion*, Wiley, New York, 1962. 但し、London では、同年に同じ標題で、Methuen's Monographs on Applied Probability and Statistics の一冊として、Methuen から出版されている。

ところで、この冊子の構成だが、まず Part I として、“Subjective probability and statistical practice”という標題で、サヴェジ氏のレクチャーが、多少の内容の拡充を受けた上で、収録

されている。さらに、このサヴェジ氏のレクチャーに先立って準備された、五名の著者の各各による簡潔な論文が Part II として収められており、この五名の著者とは、順に、M. S. Bartlett, G. A. Barnard, D. R. Cox, E. S. Pearson, そして C. A. B. Smith である。なお実際には、D. V. Lindley も論文を提出しているのだが、これは内容が拡充された上で、*Proceedings of the Fourth [1960] Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume I*, edited by Jerzy Neyman and E. L. Scott, University of California Press, Berkeley, 1961, の 453 頁 から 468 頁にかけて、“The use of prior probability distributions in statistical inferences and decisions”という標題で公表されている。さらにまた Part III として、サヴェジ氏とこれら五名の著者以外にさらに八名の論者が加わって、かなり率直な討論が遂行されるのである。この八名の論者とは、順に、H. Ruben, I. J. Good, D. V. Lindley, P. Armitage, C. B. Winsten, R. Syski, E. D. Van Rest, G. M. Jenkins である。但し、Jenkins は、討論が行われた当日は休暇中であり、後に自身の見解を文書で提出しているのである。なお、サヴェジ氏はレクチャー以外にも、討論の冒頭で自身の見解を簡潔に述べており、またその末尾では、討論の全体を自身の立場から締めくくっているのである。また彼は、わざわざ英国式の綴りや表現を用いている。

ここでは主にサヴェジ氏のレクチャーを、統計学の基礎づけに対するサヴェジ氏の態度に着

眼しつつ読解するという作業に基づいて、サヴェジ氏の統計学に対する思索を読み取ることとする。

## 2. 時代の動き

サヴェジ氏はまず自身の「基礎論」について、次のように簡潔に言及しているのである。

My own attitude toward the movement has changed materially since I contributed to it a book called *The Foundations of Statistics* (Savage, 1954). Though this book emphasizes the merits of the concept of subjective (or personal) probability, it was not written in the anticipation of radical changes in statistical practice. The idea was, rather, that subjective probability would lead to a better justification of statistics as it was then taught and practised, without having any urgent practical consequences. However, it has since become more and more clear that the concept of subjective probability is capable of suggesting and unifying important advances in statistical practice.

ここで the movement というのは、いわゆる、但し、特に主観確率に基づく、「ベイズ統計学、Bayesian statistics」のかなり急激な活性化のことであるが、少なくとも「基礎論」執筆時のサヴェジ氏は、このようなベイズ統計学の活性化を十分に予期していたわけではなく、むしろ彼は、自身が基礎づけている個人的確率の概念によって、従来の統計学的手法の論理的な正当化がなされることを期待していたのである。だが、その後彼は、そのような正当化は無理であると判断し、さらに、従来の立場ではなしに、主観確率に基づくベイズ統計学の立場こそが、統計学的実践において統一的な進展をもたらすものであると、強く信じるようになるのであ

る。なお彼は、ここで、「主観確率, subjective probability」と「個人的確率, personal probability」とを取えて区別するようなことはしていないが、しかし、例えば Bruno de Finetti の「主観主義, subjectivism」と、サヴェジ氏の「個人論的見解, personalistic view」との間には多分無視し得ない差異があるはずである。

この後サヴェジ氏は、主観確率の統計学における役割は、統計学における主観的傾向を正に減少させる所にあるという、自身の見解を率直に述べるのだが、この段落を引くと次である。

It helps to emphasize at the outset that the role of subjective probability in statistics is, in a sense, to make statistics less subjective. We all know how much the activity of one who uses statistics depends on judgement, both in the planning of experiments and in the analysis of them. For example, we are often counselled by statistical theory to choose among the many operating characteristic functions that reflect the choice of an experiment and an analysis, or the choice of an analysis alone. This choice among available operating characteristics is recognized almost universally to be a subjective matter, depending on the judgement of the person, or of each person, concerned. The theory of subjective probability shows these necessarily subjective judgements to be far less arbitrary or free than they have heretofore superficially seemed, and therein lies much of the value of this concept for statistics.

つまり、従来の統計学的手法においては、例えば OC 曲線の選択に見られるように、実験を計画したりその結果を分析したりする「個人」の「主観的な」判断が、その判断に至る過程が明白な様式によって捕えられることなしに、しかもかなりの幅を持って介入することが、少な

くとも理論上は放任されてしまっているのであるが、しかし、主観確率に基づく統計学では、このような「主観的な」判断の幅が、フォーマルな議論によって、少なくとも理論上は、相当に狭められる傾向にあると言うのである。なおサヴェジ氏は、後で、二つの過誤の「確率」からなる対たちに対する「個人」の無差別性との関連で、この「主観的な」判断の幅の大幅な削減に言及することとなる。つまり、少なくともサヴェジ氏によれば、「客観的な」確率に基づく統計学よりも、「主観的な」確率に基づく統計学の方が、「個人」の「主観的な」判断の「インフォーマルな介入」の幅がより「狭い」のである。

ところでサヴェジ氏は、主観確率の概念が「基礎論」よりも前に、既に幾人かの研究者によって見出され、注目され、また議論されていることを、当然承知しているものであり、それらの研究者としては、Émile Borel, Frank Plumpton Ramsey, Bernard Osgood Koopman, そして(彼自身が深い影響を受けた、また年長だが親友である) de Finetti がいるのである。だが、これらの1920年から40年の始めにかけての先駆的業績が、直ちに統計学に対して大きな影響を与えたというわけでは決してなかったものであり、むしろ時代の主流は、「主観的な」確率の統計学への応用というような方向を拒否して、「客観的な」確率の、結局の所「頻度論的な」確率の、統計学への大規模な「当てはめ」へと向かっていたのである。しかし、やがて Irving John Good の1950年の著作や、サヴェジ氏の「基礎論」が現れ、さらには、ビジネスに関心のある学生を念頭に置いた、1959年の Robert Schlaifer による、主観確率を統計学のために活用することを極めて誠実に目指す、統計学の教科書が現れたのである。また、サヴェジ氏は、主観確率に基づくベイズ統計学のみでなく、Sir Harold Jeffreys の著作に見られるような、いわゆる「客観的ベイズ推論, objective Bayesian inference」の流れも決して無視しているわけで

はないのだが、しかし彼は、とにかく、「主観確率の応用」の実際上の重要性に着眼しているのである。

なおサヴェジ氏は、「推論, inference」という言葉について簡略な注意を行っている。つまり、「推論」を広く解釈すれば、「表出する行為の一つの基盤としてその新しい知識を利用するのか否か」という問い掛けへの返答がいかなるものであれ、それはとにかく、我々がいかにして諸事物を見出すに至るのかということに関っており、さらにそれは、証拠という事柄を考慮する場合において、いかにして我々が、しばしば、「実際上は同様なのだ」と見なし得る意見を獲得するに至るのか、ということに関っているのである。一方、「統計的推論, statistical inference」は、「推論」ではあってもかなり特殊なものなのであり、それは、例えば、探偵や歴史家、あるいは予想を行う数学者の推論や、さらには科学における賢明なる諸推論というようなものとは、通常はかなり異なるのである。しかし、統計的推論と他の諸推論との間に明確な境界を設定する事はかなり困難なのであり、結局、推論という事柄の一般的な状況を念頭に置きつつ、一方では、実際に研究を行っている統計家たちにとって適切であると思われる推論を考察して行くこととなるのである。

### 3. 主観確率

サヴェジ氏は主観確率の「定義」についてまず次のように述べるのである。

Subjective probability refers to the opinion of a person as reflected by his real or potential behaviour. This person is idealized; unlike you and me, he never makes mistakes, never gives thirteen pence for a shilling, or makes such a combination of bets that he is sure to lose no matter what happens. Though we are not quite like that person, we wish

we were, and it will be important for you to try to put yourself mentally in his place. To facilitate this identification, Good (1950) called him 'you', and I shall for the moment call him 'thou'. The probability that refers to thee is basically a probability measure in the usual sense of modern mathematics. It is a function  $\text{Pr}$  that assigns a real number to each of a reasonably large class of events  $A$ ,  $B$ , ..., including a universal event  $S$ , in such a way that if  $A$  and  $B$  have nothing in common,

$$\text{Pr}(A \text{ or } B) = \text{Pr}(A) + \text{Pr}(B),$$

$$\text{Pr}(A) \geq 0,$$

$$\text{Pr}(S) = 1.$$

The extra-mathematical thing, the thing of crucial importance, is that  $\text{Pr}$  is entirely determined in a certain way by potential behaviour. Specifically,  $\text{Pr}(A)$  is such that

$$\begin{aligned} \text{Pr}(A)/\text{Pr}(\text{not } A) \\ = \text{Pr}(A)/\{1 - \text{Pr}(A)\} \end{aligned}$$

is the odds that thou wouldst barely be willing to offer for  $A$  against not  $A$ .

主観確率とは、結局、「個人」の「意見」を表現するものののだが、ここでの「意見」とは、「個人」の現実の、あるいは「潜在的な」、行動へと映し出されるもののなのであり、また、ここでの「個人」とは、「あやまち」を犯さない言わば「理念化された」個人なのである。つまり、この「個人」は、12ペンスと等しい価値を持つ1シリングに対して、13ペンスを差し出すようなことはしないのであり、さらには、どの「できごと」が通用する場合でも「必ず自分が金銭を失うこととなっている「賭け」の組み合わせ」に、自分自身を関らせるようなことは、

決してしないのであり、従って、この「個人」にいわゆる Dutch book を仕掛けることはできないのである。ところで、サヴェジ氏を含めて現実の個人は、このような「個人」とは多分かなり隔たっているはずなのだが、しかし、現実の個人が、自身の「想像上の実験」の場において、このような「個人」の境地へと「自己」を近づけようと「努力する」ことは、恐らくは、不可能ではないのである。一方、実は、この「個人」の「意見」は、諸々の「できごと」に対する彼の行動様式に着眼して行く場合には、そして数学的には、事象たちからなる（ある幾つかの要請を満たす）クラスの上で定義されている、有限加法的な確率測度によって表現されることとなるのである。だが、ここで「極端に」重要なのは、事象  $A$  に対応する、 $A$  の「確率」と呼ばれる実数値  $\text{Pr}(A)$  の「数学外の事柄」、即ち、「意味」なのである。つまり、 $\text{Pr}(A)/\text{Pr}(\text{not } A)$  とは、「 $A$  が通用しない」という（「相手」が幾らかの金銭を差し出して支持している）事柄に対立して、「 $A$  が通用する」ことを支持するために、その「個人」が差し出し得るであろうぎりぎりの「賭け金」のその「額」と、「相手」のその金銭の「額」との、「比率、odds」である。従って、「相手」が正の金額  $b$  を「 $A$  は通用しない」のために差し出している場合に、その「個人」が、「 $A$  は通用する」のために、最大で金額  $a$  までを「賭ける」こととなるのならば、 $\text{Pr}(A)$  は値  $a/(a+b)$  によって与えられることとなるのである。この「定義」はかなり素朴だが、主観確率が、抽象的な概念の集積によってではなしに、「個人」の「その」行動様式によって「定められる」ことを簡潔に示しているのである。つまり、「確率」とは、「個人」の行動様式に他ならない。

さらにサヴェジ氏は次のように続けるのである。

The definition just given will not be altogether unfamiliar to you, and you will see

what it is driving at. Roughly speaking, it can be shown that such a probability structure  $Pr$ , and one only, exists for every person who behaves coherently in that he is not prepared to make a combination of bets that is sure to lose (de Finetti, 1937, pp. 6-9; Savage, 1954). This assertion is not quite correct in that a coherent person may justifiably vary his odds with the size of the bet. To use this definition effectively, you should try to think in terms of bets that are rather small but worth considering. The great advantage of this definition over more rigorous ones like the one borrowed from de Finetti (1937, pp. 4-5) for use in my book (Savage, 1954) is that the one in terms of odds seems much easier to apply introspectively. Without insisting on an axiomatic exploration today, please believe that there is considerable rationale behind the concept of subjective probability in the various references cited, make an introspective effort to apply the concept to yourself, and see with me what it leads to in a few statistical examples.

つまり、「賭けの勝ち目, odds」によって「確率」を「定義する」というやりかたは、主観確率という事柄を、「身近なもの」と感じさせることに役立つかもしれないのだが、さらに、このようなオッズによる「確率」への接近は、各人が「内省的な努力, introspective effort」によって、自身にとっての「確率」を見積る際に、多分有効なものとなり得るのである。なお、サヴェジ氏は、de Finetti の議論を読み取る一方で、自身の「基礎論」において、オッズによる接近よりも論理的により厳密な「確率」の規定を提示しているのだが、ここでは「オッズ」の有効性を認めているのである。しかし、その「個人」は、「相手」の差し出す金銭の額が変化する場合には、特にその「個人」にとって多額な

ものとなる場合には、「賭け」を成立させるためには、当然自身の賭け金を変化させるであろうが、その際オッズも変化し得るのであり、結局、このような状況では、オッズによる「確率」の「定義」がうまく機能しないのである。つまり、オッズによる接近には、「素朴な」良さと共に現実的な問題点があるのだが、このような問題点をなんとか回避するためには、「賭け金」が割と小額であり、しかし真剣な考察に一応は値する額であると、想定しておく必要があるのである。ところで、サヴェジ氏が「基礎論」で提示している理論的な枠組みによれば、その「個人」が、不確定性の下での決定に関する幾つかの「合理的な」公準を侵犯しないのならば、その「個人」の「確率」 $Pr$ が存在して、しかも一意的に定まることが、「証明される」のである。なお彼は、上の文章の末尾で、いわゆる公理的な議論に執着するよりも、むしろ、主観確率の概念の背後にはかなりの合理的な根拠があるのだということをひとまず信じて、この主観確率の概念を自分自身へと応用するための「内省的な努力」をぜひとも為すべきであると、各人に勧めているのだが、このような発言の根底には、自身が唱道している立場への、彼の深い自信があるはずである。

ところで、これに続いて次のような重要な指摘が為されている。

The concept of subjective probability has serious defects. These can be instructively appraised by exploring the close analogy between the odds that you would offer on an event, and the price at which you would buy or sell some valuable object. Both concepts are afflicted with vagueness and temptation to dishonesty. It might be hard for you to fix with precision the odds that you would offer that a particular keg of nails meets some specified industrial standard or that the moon is covered thickly with fine dust; in the same

way, it might be hard for you to specify the price at which you would sell your automobile or buy a specific piece of information about the aurora borealis. Again, if the facts about the nails or the moon should be disclosed to you, it may become even harder to say honestly what you would have bet; similarly, once highly satisfactory prices have been offered to you, it is even harder than before to say honestly what prices would have been just satisfactory.

つまり、サヴェジ氏は、主観確率の概念には深刻な欠点があるというのであり、この欠点は、無視し得ない価値を持つと(自身によって)判断されている特定の対象の値段を、(自身の立場から)見積る際に関ってくるある困難と、極めて類似しているのである。つまりオッズも「値段」も、自身がそれらを定めようとすると、「曖昧さ」や「自身に対する不誠実」といった事柄が絡んでくるのである。例えば、釘が詰まっている特定の小さな樽が、詳細に定められている工業上の規格に合致しているということについて、あるいは、月が微細な塵によって厚く覆われているということについて、「あなた」が精確にオッズを定めることは多分困難であるはずだが、さらに一方では、「あなた」が、自分の自動車を売ったり、あるいは、問題となっている aurora borealis に関する特定の情報を買ったりする際に、それらの「値段」を明確に定めようとするのならば、「あなた」は正に同様の困難に出合うはずなのである。だが、これらの「値踏み作業」にはさらに厄介な問題があるのであり、つまり、樽の中の釘の品質や月の有り様が、「あなた」に対して悉く明かされてしまうということが仮になされるのならば、その場合、「あなた」が、そのような暴露が為される「まえ」に、はたして自分はいかなる「賭け」を為したであろうかを「自身に対して誠実に」定めることは、より一層困難な作業となるはず

なのである。また、この困難さは、過大な値段が「あなた」に対してひとたび提示されてしまった「あと」で、そのような値段が提示される「まえ」において、自身が丁度満足できる「値段」がいかなるもので「あったであろうか」を、「自身に対して誠実に」定めようとする場合の困難さと、正に同様の性格を持つのである。

だが、サヴェジ氏は、次のように率直に自身の見解を述べるのである。

These difficulties are real, but they must not be allowed to frighten us of trying to use the concepts at all. We can, if we try, do quite a bit with them as they are, and we can mitigate some of their inadequacies by using common sense and ingenuity. There is the hope that distinct improvements will be made on such concepts some day, but it seems to me that they are, each in its own line, the best that we have today.

つまり、「値」を見積るという作業に伴う「曖昧さ」や、「自身に対する不誠実」の混入という極めて現実的な困難があるにもかかわらず、このような困難に怖じけづいて、オッズとか「自身にとっての値段」というような(各人の人生にとって)極めて重要な概念の利用をついに放棄してしまう、などというようなことは決してあってはならないのであり、むしろ各人は、このような「値」の概念を、「不確定性に対する自身の態度」の基本的な表現として、積極的に活用することを心がけるべきなのである。またその際、コモンセンスやある種の技巧が役立ち得るのである。サヴェジ氏は、統計学においてこのような個人的な「値」の利用を拒否する流儀を厳しく退けて、そのような「値」を用いることが、現段階では、統計学にとって最善の策であると判断しているのである。

さらに彼は、次のように自身の見解を述べ続けるのである。

Most people tacitly accept, and I think justifiably, that the concept of (equilibrium) price cannot be altogether escaped by anyone who would think of his own or other people's economic behaviour. But statistical theory has for several decades been largely dedicated to trying, futilely, I would say, to escape altogether from the concept of acceptable odds, or subjective probability, at least where the analysis of data is concerned. In so far as we want to arrive at opinions on the basis of data, it seems inescapable that we should use, together with the data, the opinions that we had before it was gathered. And I believe that 'opinion', when analysed, is coterminous with 'odds'. We have had a slogan about letting the data speak for themselves, but when they do, they tell us only how to modify our opinions, not what opinion is justifiable. If my statement of these general principles is somewhat dogmatic and abrupt, it is because I trust that examples will show you better than abstract arguments how the ingenious attempts to build a statistical theory without subjective probability have fallen short and how the concept of subjective probability leads to substantial improvements.

とにかく、自分自身を含む誰の行動であれ、真剣に経済的行動を考察するつもりならば、「当人にとって「丁度釣り合う」価格」というような概念を避けて通ることなどはできないはずであり、つまり、表面上はどうであれ、この個人的「価格」の概念を、経済的行動に関する大部分の人人は、少なくとも暗黙の内に、受け入れざるを得ないはずなのである。だが、統計学における多数派は、少なくともデータの分析に関する限り、ここ数十年にわたって、「受け入れることができるオッズ」という概念を、即ち、主

観確率の概念を、なんとか回避しようと、実に多大な（そして多分無益な）努力をしてきたのである。しかし、データに基づいてある「意見」に到達することを各人が本当に欲するのならば、そのデータが集められる「まえ」に各人が保持していた「意見」を、そのデータと共に、各人が利用せざるをえないはずである。そして、この「意見」の性格を冷静に分析するのならば、それが実質において自身の「オッズ」と合致することを、結局、各人は認めざるを得ないことであろう。なるほど、統計学における多数派は、「データ自身に語らせる」という「客観的な」立場を唱道してきたのだが、しかしデータは、それが「何か」を語る場合には、いかなる「意見」が正当化され得るのかではなく、いかにして各人の「意見」を改めるべきなのかを告げてきたのである。とにかく、主観確率を排除して統計的な理論を構築して行こうという試みは、それがいかに非常な巧妙さで為されようとも、統計的な理論としての本質的な欠損を伴うのであり、一方、主観確率の概念は、従来の統計学の欠損を乗り越えるための、本質的な改善をもたらすのである。

さらにサヴェジ氏の見解が続く。

To my own mind, one of the most striking symptoms of the inadequacy of statistical theory without subjective probability is the lack of unity that such theory has had. I speak not only of such schisms as that between the adherents of R. A. Fisher and those of Neyman and Pearson, but also of the ununified, or opportunistic, structure of the theories proposed by both of these two schools.

主観確率の概念を組み込んでいない従来の統計的理論は、R. A. Fisher の流儀であれ、Neyman and Pearson の流儀であれ、理論としての統一性に欠損があり、結局、日和見的な性格を持っているのである。

さらにまたサヴェジ氏の見解が続く。

For example, according to the Neyman-Pearson school there are many different virtues that a system of confidence intervals might have. A user of statistics is supposed to try to achieve as many of these as possible, and then to choose among them when there is conflict. Typically, this theory leaves the user of statistics with a wide range of choices. He is supposed to survey the available operating characteristics and choose the one that he likes best among those that are at all reasonable (that is, admissible or nearly so). This choice is frankly subjective, but for certain historical reasons, the dominant school of statisticians has not seen that the idea of subjective probability makes the choice easier and more systematic than it would at first sight seem to be.

Neyman-Pearson 学派によれば、信頼区間と呼ばれる一連の区間からなるシステムは、多くの異なった性質を満たすことが望ましいとされているのだが、また一方、統計学の利用者は、それらの性質ができる限り多く満たされるように、一連の信頼区間を設定することを目指すべきであるとされるのだが、しかし、それらの性質の間で対立がある場合には、結局どの性質を選ぶのかについて、その利用者は、少なくとも原理上は、自分自身で決定を下さなければならないのである。通常、Neyman-Pearson の理論は、統計学の利用者に対して、かなり幅のある選択肢の間で選択を為すことを、暗黙の内に、言わば要請しているのである。つまり利用者は、自身にとって利用可能な OC 曲線を良く調べて、許容可能性やそれに近い性質を満たす一連の曲線の中から、少なくとも原理上は、自身にとって最善であると自身が判断する曲線を選ばなければ「ならない」のである。利用者が為

すこのような選択は、正に主観的なものである。だが、統計学において大きな勢力を保っている学派は、主観確率の概念が、利用者のこのような選択を、より容易に、そしてより組織的なものにすることを、認めようとはしてこなかったのである。利用者の「主観的な」選択を暗黙の内に要請する一方で、その「主観」性を冷静に表現することを避けようとするのは、実際上は、「客観」性を標榜するこの学派の態度の言わば分裂である。なお、the dominant school による、主観確率の重要性に対するこの執拗で独特な「無視」の根拠を、サヴェジ氏は歴史的な情勢に求めている。

サヴェジ氏の見解はさらに続く。

The recommendations of Fisher (1956) present a different kind of fragmentation. He counsels us to do one thing when we know 'nothing', a state of knowledge difficult, really impossible, to define, and to do another when initial probabilities, in some nonsubjectivistic sense, permit application of Bayes's theorem. Even when we know 'nothing', Fisher does not present us with a unified method, but tells us to use fiducial probability, when the 'fiducial argument', the meaning of which is still a little hazy, applies, and to do something quite different when it does not apply.

Sir Ronald Aylmer Fisher は、未知で固定されている母数に関する事前分布が、主観論的でないある意味において、ベイズの定理の応用を可能にする場合と、未知固定の母数について「我我は、何も知らない」場合とでは、別のやり方を採用した方が良いのだと主張しているようである。しかし、「我我は、何も知らない」というような「知識の状態」を（論理的に正当に）「定義」することは、かなり困難なのであり、さらには、現実の状況を考慮するのならば、そ

のような「定義」がまともにできるのだなどとは思われないのである。だが、Fisherは、「我我は、何も知らない」という（彼が想定している）状況においてさえも、統一的な方法を提示してはいないのであり、かわりに、内容が鮮明とは言い難い、いわゆる「フィドゥーシャルアーギュメント」を持ち出しており、しかも、このやり方にはかなりの制約が伴うのである。

さらにまたサヴェジ氏の見解は続く。

The fragmentation presented by these theories suggests, though it does not prove, that something important is missing, and the application of subjective probability does make for unity. The subjectivist too will of course exploit the advantages of special situations, but he sees these not isolated as islands but as interesting regions merging with the rest of the mainland.

統計学における多数派の分裂した状況は、多分、彼らの理論においては、何か重要な事柄が欠落していることを物語っているものであり、一方、主観確率の応用は、統計的な理論の統合へと貢献するものなのである。主観確率を利用する立場を取る者もまた、個々の特殊な状況を持つ（分析者にとって）有利な諸側面を、積極的に活用することを怠るわけでは決してないのだが、しかし、主観論者は、有利な諸側面を持つ個々の状況を、孤立している島のように扱うのではなく、本土である大陸に地続きである（分析者の）興味を引く領域として扱うのである。

サヴェジ氏はさらに議論を続ける。

It is sometimes alleged as a criticism of the concept of subjective probability that science must be objective, that right reason must lead from given evidence to one and only one right conclusion. This line of thinking does not appear to be valid, fruitful or practical;

see Bridgman (1940). Though it has, I think it fair to say, been expressed in some form by adherents of the school of Neyman and Pearson, it is certainly not essential to that school, which for the most part freely admits that the reaction to an experiment depends on subjective factors, like choice among operating characteristics. It seems to me that such 'objectivity' as we enjoy in practice stems from the tendency of diverse opinions to converge toward one another under the weight of evidence. It must be emphasized that this convergence is nonuniform, so it cannot be pretended that only a small sphere of opinions is left open after the accumulation of weighty evidence. In particular, I believe R. A. Fisher is mistaken when he argues thus: 'This property of increasingly large samples has been sometimes put forward as a reason for accepting the postulate of knowledge *a priori*. It appears, however, more natural to infer from it that it should be possible to draw valid conclusion from the data alone, and without *a priori* assumptions' (Fisher, 1934, p.287).

主観確率の概念に対して時時持ち出される非難として、「科学というものは客観的でなければならず、結局、正しい推論というものは、与えられている証拠に基づいて唯一の正しい結論に到達するものでなければならず、従って、主観確率に基づく推論を科学において利用することは不当である」というものがある。しかし、科学に対するこのような態度は、論理的に正当であるとは言い難く、しかも実際上は不毛である。Neyman-Pearson 学派に多分属している幾人かの論者がこのような「客観」性の主張をしたようだが、その学派が実際に提示している手法は、例えば OC 曲線の選択に見られるように、実験に対する分析者の反応が分析者の「主観的

な」判断に依存することを、広く受け入れているのである。また、我々が実践の場で受け入れている「客観」性というものは、「我々がもつ多様な「意見」が、「証拠」という荷重が加わることによって、互いに接近して行く傾向を示す」ということから、派生しているように思われるのである。だが、このような「意見の収束」は、「意見」を保持する人人に関して、一様なわけでは決してないのであり、従って、重く説得力のある証拠が集積していると思わせるような状況においても、人人における「意見」の幅が一般的にかなり狭まることとなるなどとは断定できないのである。なお、かつて Fisher は、「先験的な」知識の「存在」を仮定することに基づく、大きさが増大しつつある標本がもたらす「意見」の収束に言及して、「先験的な」知識の「存在」などは仮定せずに、ただデータのみに基づく妥当な結論の導出こそが考察すべき事柄なのだ、との趣旨の発言をしているのだが、サヴェジ氏の立場からすれば、「事前の意見」を冷静に考慮しかつ組み込むことを排除して、データのみに基づいて合意の形成を図るなどということは、論理的に正当とはいえないのである。

さらにサヴェジ氏は、主観確率に関する彼の見解を、ひとまず次のように締めくくっている。

It has sometimes been contended that there are two different kinds of statistical theory, one appropriate to economic contexts and another to pure science; see for example, Fisher (1955). In my own opinion, this dualistic view is incorrect. At any rate, the applications of subjective probability to be discussed today are equally available to economic and scientific applications of statistics. Except that subjective probability is defined as an economic concept, in terms of choice among gambles, this talk will scarcely refer

explicitly to decision, loss, or other economic concepts. When subjective probability is taken seriously these other concepts, though they remain important, become relatively uninteresting, because in principle the solution of every decision problem is simply to maximize expected income with respect to the subjective probability that applies at the moment of making the decision. This leaves us free, at least in today's talk, to emphasize the calculation of posterior, or final probabilities, though in more advanced applications the quality of certain approximations would have to be judged partly on the basis of possible losses.

ここでは、時時持ち出されるある種の二分法が言及されているのである。つまりこれは、統計的な理論を、「経済的な」状況にとって適切なものと、「純粋な」科学にとって適切なものとの二つに分割するというやり方であり、結局、主観確率は「経済的な」状況にとっては有用であるかもしれないが、「純粋な」科学にとっては、その適用に問題があるとする流儀なのである。当然ながら、サヴェジ氏は、このような見解を正当なものとは見なさないのであり、彼にとっての主観確率は、「経済的」であれ、「純粋に」科学的であれ、とにかく統計学における「確率」の利用に、十分に応えることができる「はず」なのである。つまり、主観確率は、「賭け」の間の選択という事柄を用いて、言わば「経済的な」概念として、「定義」されてはいるのだが、実際の「賭け」とか、実業家が下す「決定」とか、「決定」にともなう「損失」などという「経済上の」事柄にはほとんど煩わされることなしに、この「確率」を利用することができるのであり、実際、原理上は、「個人」にとっての決定問題というものは、問題の「決定」を正に下す際の「その個人」の主観確率に基づく、「その個人」にとっての期待される「収入」

を、「その個人」が直面している選択肢に関して最大化するという作業によって、「解かれる」のである。さらに、当然のことながら、主観確率は、データが入手される「まえ」の、「事前の」、あるいは「初期の」、「確率」を表現するのみでなく、そのデータを「その個人」が入手した「あと」の、「その個人」にとっての、「事後の」、あるいは「最終の」、「確率」を表現するためにも利用されるのである。

#### 4. ベイズの定理及び尤度原理

ベイズの定理をインフォーマルな雰囲気表現すると次のようになる。

$$\Pr(\lambda|x) \propto \Pr(x|\lambda) \Pr(\lambda).$$

ここで、左辺は、データ  $x$  が与えられている場合の、問題となっている未知固定のパラメータが値  $\lambda$  を取る「確率」であり、これは「最終」確率、つまり「事後」確率であり、右辺は、未知固定のパラメータの値  $\lambda$  が与えられている場合の、データ  $x$  が観察される「確率」に、値  $\lambda$  の「初期」確率、つまり「事前」確率を掛け合わせたものであり、この式は、左辺が右辺に「比例している」ことを示しているのだが、ここでは、 $x$  は固定されていると見なして、 $\lambda$  の関数の比例関係を問題としているのであり、比例定数は  $\lambda$  には依存しない  $x$  の関数である。実際には、しばしば、ここでの「確率」 $\Pr$  を確率密度に置き換えた式が利用されたりするのだが、しかし、上の式がベイズの定理を要領よく表現していると思えて、多分良いであろう。

ところで、統計学の通常の応用においては、「 $\lambda$  が与えられている場合の、 $x$  の確率」が、「客観」性なるものを満たしているのだと主張される傾向にあるようである。例えば、問題となっている実験に関っている各人が、データをもたらす変数  $x$  は、大きさ 1 の分散を伴って、未知固定である  $\lambda$  の周りに正規的に分布している

ということに合意するかもしれないし、あるいは、 $x$  は平均  $\lambda$  の Poisson 変数なのだと皆が判断するかもしれないし、あるいは、 $x$  は平均が  $\mu$  で分散が  $\sigma^2$  の正規分布に従うのだと、但し、ここで  $\lambda = (\mu, \sigma^2)$  と見なすのだが、一人一人が判断するかもしれないのである。だが、これらのいわゆる確率分布が、「客観的に」定まっているのだと思ふことには多分無理があり、それらの分布は各人の「意見」の表明であり、実際、多少の経験を積んだ統計家ならば、それらの既製品の分布がもたらす大まかな有用性には満足せずに、正に自身の経験に基づいて、問題の分布に対するより「現実的な」仮定を導入することを企図することであろう。

なお、サヴェジ氏は、「単純な」統計的模型を安直に採用してしまう流儀に対して、次のように簡潔に、しかし明瞭に、用心の必要性を強調している。

For example, if  $x$  is supposed to be 15 normally distributed physical measurements, there will probably be serious talk by all concerned about a spurious, or outlying, observation if the largest reading is separated from the second largest by as much as the second largest is from the least. This means that all concerned have (and therefore presumably always had latent) some doubts about the rigorous normality of the sample. Similarly, a sample in which the magnitude of the reading is nearly perfectly correlated with the order in which they were taken is sure to raise eyebrows. In short, simple models do not often fully represent our opinions about the possible outcomes of an experiment. Useful though such models are, the danger of accepting them literally cannot be overemphasized.

つまり、通常は正規分布に従うことが想定されているような、それ程多くはない物理的な測定

値において、最大の測定結果と二番目の測定結果とが、この二番目の測定結果と最小の測定結果との差と同じくらいに、隔たっていることが見出されるのならば、これらの測定値に関心を持っている人人は、多分通常は、他の測定値からかなり外れた値が混入していることを認めて、それらの値全体が一つの正規分布に従うという仮定に強い疑念を持つことであろう。このように、「仮定」に対する見方が「変化」し得るということは、その測定値に関心を持っている人人は、通常は、自身が持ち出している「その標本の正規性」という想定にある程度の疑念を持っているということなのであり、多分より精確に表現すれば、彼らは事実上常に「潜在的な、latent」疑念を保持しているということなのである。このような言わば「定石的な」想定に対する見方の「変化」は、測定結果とそれらの結果が得られた順序との間にほとんど完璧な相関が見出される場合にも、例えば「これらの測定値は独立で同一の分布に従う」という想定への、強い疑念の保持という形で、その一角が現れるのである。結局、このような實際上十分に起り得る見方の「変化」の存在を認めるのならば、「単純な」統計的模型が、実験の可能な結果に対する、我々の「意見」の大まかな表現ではあっても、その「意見」を十分に表現しているわけではないことを、多分誰であれ、承認せざるを得ないはずなのである。つまり、「単純な」統計的模型はある程度の有用性を持つてはいるのだが、その模型を「客観的な」事実なのだとして文字通りに受け入れてしまうことには、あるいは、その模型が「客観的な」事実を表現しているかのように装うことには、相当な問題があるのである。

しかし一方で、サヴェジ氏は、未知固定であると想定されている母数 $\lambda$ が与えられている場合の $x$ の条件つき確率と比較して、この母数 $\lambda$ に関する「確率」は、通常は、著しく「個人的」であり、しかも非常に漠然としていることを認めているのである。だが、サヴェジ氏の立場

からすれば、原理上は、例えば「そのビールの中を走るネオンライトの、その速度」という「未知固定の状態」に対する、自分自身の「確率」を、つまり正に「主観的な」確率を、自分自身が「いかに「賭ける」か」を自分自身に問い質すことによって、誰もが「抽出できる」はずなのである。しかし、「自分はそのような「確率」分布を相当な精度で定めることができるのだ」と、「冷静に」思える「個人」などは、現実には存在するわけがないのであり、まして、その「確率」分布が、異なる「個人」の間で密接に一致することを期待することなどは、到底無理なのである。つまり、主観確率のこのような性格が、多くの統計家が、ベイズの定理の有用性を過小評価する要因となっているのである。だが、サヴェジ氏は、自身の積重ねてきた「深い」経験に基づいて、このような過小評価は正当なものではなく、主観確率に伴う「困難」はしばしば克服できるのであり、さらにまた、「実験」が「結論」を正当化するような場合にはいつでも、「その正当化」は、ベイズの定理を利用することによって与えることができるのだと、強く主張するのである。なお、「深い」経験に基づく、サヴェジ氏のこの「信念」を表明する一文を引くと次である。

Not only are these difficulties often surmountable, but, in my experience, whenever an experiment justifies a conclusion the justification can always be given in terms of Bayes's theorem.

なお、この問題の「 $\lambda$ の「初期」確率」がうまく定められないとすると、ベイズの定理によれば、多分、 $x$ が与えられている場合の $\lambda$ の確率、つまり、「 $\lambda$ の「最終」確率」もうまく定められないこととなり、主観確率に基づく推論が遂行できないように思われるかもしれないのだが、実際には、サヴェジ氏が後で説明している「精密測定、precise measurement」あるい

は「安定推定, stable estimation」の原理によって、「初期」確率がかなり曖昧であっても、「最終」確率の形状をかなり明瞭に捕えることができる場合がかなりあるのであり、つまり、「事前」分布が「主観的に」うまく特定できないことを理由にして、直ちにベイズの定理の適用を退けるやりかたには、少なくとも論理上は、問題があるのである。

ところで、主観確率に関するベイズの定理との関連で、いわゆる「尤度原理, likelihood principle」がほとんど必然的に浮き出てくるのである。つまり、ベイズの定理によれば、 $\lambda$ の関数としての  $\Pr(x | \lambda)$  は、「その実験」がもたらす証拠の全体を構成しているものであり、つまりこの関数は、「その実験」が（「結果」の分析を行う者に対して）告げなければならない全ての事柄を、告げているのである。このことをより精確に表現してみると、「他の実験」のデータ  $y$  が与えられたとして、たまたま、 $\Pr(x | \lambda)$  と  $\Pr(y | \lambda)$  とが  $\lambda$  の関数として比例しているのならば、つまり、 $x$  及び  $y$  に依存し得る「定数」を無視することによって一致するのならば、二つのデータ  $x$  及び  $y$  の各々は、未知固定の母数  $\lambda$  が取り得る値について告げるべき、正確に「同じ」事柄を保持している、ということになるのである。例えば、ある一つの種類のハエから成る母集団を研究者が考察しているものとして、その研究者が、「問題の母集団から100匹のハエを無作為に抽出して、赤色眼を持つ個体の数  $x$  を数え上げる」という実験と、「問題の母集団から無作為にハエを抽出して、全部で6匹の赤色眼の個体が得られるまでこの抽出を続けて、抽出された個体の総数  $y$  を記録する」という実験とを行うことで、その母集団における赤色眼の個体の比率  $\lambda$  を推測しようとしていると想定するのである。この場合、「たまたま」、前者の実験で赤色眼の個体が6匹得られ、一方、後者の実験では、抽出された個体の総数が100匹であったとすると、 $\Pr(x | \lambda)$  と  $\Pr(y | \lambda)$  とは、 $\lambda$  の関数としては、共に  $\lambda^6(1-\lambda)^{94}$  に比例すること

となり、これらの実験がもたらした「それらのデータ」が未知固定の  $\lambda$  に関して告げている事柄は、「それらのデータ」に関する限り、「全く」一致することとなるのである。従って、主観確率に基づくベイズの定理によれば、「それらのデータ」に基づく統計的推論が、標本抽出の様式が異なっているにもかかわらず、「全く」一致したとしても、それは「なんら」不思議ではないのである。なお、ここで基本的な役割を演じている「 $\lambda$ の関数としての  $\Pr(x | \lambda)$ 」は、より精確には、「 $\Pr(x | \lambda)$ 」に、 $x$  に依存し得る正の定数を掛けることによって選られる  $\lambda$  の関数」の各々は、尤度関数と呼ばれ、ここでの、「その実験が、そのデータに基づいて告げなければならないことの全てを、正にその尤度関数が告げているのである」という「原理」は、「尤度原理」と呼ばれているのである。

ところで、この「尤度原理」は、主観確率の概念とベイズの定理とによって、「直接的に」従うのだが、サヴェジ氏は、「尤度原理」が当然のこのように従うというこの「事実」から、逆に、主観確率に基づく（ベイズの定理を利用する）統計的推論の遂行という方針への信頼を、より高めているようなのである。彼は、Barnard 及び Fisher が、主観確率に基づく統計学とは別の観点から、「尤度原理」の重要性に既に気づいていたことを当然認めるのだが、主観確率に基づく統計学が、ほとんど「自動的に」この「原理」を満たしてしまう「事実」を、非常に重視しているようである。彼は、この「原理」は、それについて考え、それを批判することを試み、それに対する反例を捜し求める、という作業を続けなければならないほど、ますますそれに対する賛同を勝ち得るものなのだと見なしているようである。

だが、「尤度原理」は、伝統的な統計学の多くの重要な概念と衝突するのである。つまり、伝統的な見方では、「100個体の内の6個体が赤色眼である」というデータの「内容」は、そのデータをもたらす実験が、100個体を観察する

ように計画されているのか、それとも6個体の赤色眼を観察するように計画されているのかに依存して変化すると見なされるのである。一方、例えば、推定量が不偏であるか否かということは、( $\lambda$ のみでなく)  $x$  の関数としての  $\Pr(x \mid \lambda)$  に当然依存するのだが、すると、一方の問題の実験に対して不偏な推定量は、他方の問題の実験に対しては不偏ではないのであり、そこで通常は、問題のデータに対する(不偏推定量に基づく)推定の結果は異なってくるのである。つまり、推定量の不偏性を重視する限り、「尤度原理」は棄てざるを得ないはずなのである。また、同様の方法的な衝突が、有意水準を用いる仮説の検定や信頼区間による推定などでも生じてくるのである。実は、サヴェジ氏自身も、二項的なデータによる不偏な推定について理論的な考察を行ったことがあるのだが、その後、統計学の基礎に関する自身の思索を深めるに従って、かつて自分が提示した議論を厳しく批判的に眺めるようになったのである。

さらに述べれば、「尤度原理」は、標本抽出作業の「任意停止, optional stopping」の問題に対して、重要な帰結をもたらすのである。例えば、標本抽出を行っている研究者が、自身が既に抽出した標本を眺めて、100個体の内6個体が赤色眼であることを確認して、問題の母集団における赤色眼の比率はほぼ1パーセントであるという通説を否定し去るに十分なデータが得られたと判断して、自身の標本抽出作業を打ち切ったとする。この場合、伝統的な枠組みでは、「100個体の内6個体が赤色眼である」というデータに対する「解釈」は、標本の抽出作業を打ち切ったその研究者の「意図」に依存するのである。なぜならば、伝統的な枠組みでは、標本抽出作業に対する研究者の「計画」が持つ性質を無視してしまうのならば、問題となっているいわゆる帰無仮説が実際上真ではあっても、また、設定されているいわゆる有意水準が正のいかなる小さな値ではあっても、その問題となっている帰無仮説を(少なくとも表面上

は)棄却「できる」データを獲得することを「意図」して、(その帰無仮説をなんとか棄却しようとしている実験家の存在を想定した上でだが)ある種の執拗な抽出実験が(少なくとも原理上は)遂行され得るからなのである。つまり、そのような「意図」的で「仕組まれた」棄却は、帰無仮説に対立する現実的な証拠というわけではないのである。だが、問題の「執拗な」実験家に対して(有意水準を利用する)仮説の検定がうまく機能しない恐れがあるという事実に基づいて、その「執拗な」実験家が得たデータに対して、価値がないものであるとか、少なくとも特別な解釈が必要なのだとかいうような判断を下すことは、言わば早計である。つまり、「尤度原理」によれば、問題の帰無仮説をあくまでも棄却しようとする「執拗な」実験家の「意図」が、その実験家自身が得た「経験」の「内容」を変化させることなどはないからなのである。むしろ、このような「任意停止」にからむ問題は、いわゆる有意水準が、「データが持つ「意味」の程度, degree of import」としての「意義の水準, level of significance」の役割を、結局の所果たしていないことを示しているのであり、さらにまた、「データが持つ「意味」の程度」は、そのデータが与えられている場合の尤度関数のみに依存しているのである。

ここでサヴェジ氏は、伝統的な枠組みではその解決が極めて困難だが、「尤度原理」の観点によって、その本質が簡明に捕えられるように(少なくともサヴェジ氏には)思われる、保険数理に関する問題に言及するのである。つまり、ある深刻な病に罹患した子供たちが多様な期間にわたってある医院に診察を受けに来るのだが、彼らの各各はある期間内は医院側の観察下にあるが、自身の死や、両親側の勝手な都合というような、それぞれの多様な事情で医院を去って行くのであり、あるいは、その深刻な病に罹患しているにもかかわらず、5年にわたって生き続けるのである。そこで問題となるのが、5年にわたって生き続けることの「確率」を推定

することなのである。このような状況から得られるデータの性格は相当に複雑であり、例えば、子供たちがその医院に連れて来られたり、またそこから去って行く、その時期というものが、その病の進行状況と連関しているであろうというような、実際上の当然考慮すべき事柄が多数存在しているはずなのである。しかも、これらの実際上考慮すべき事柄を思い切って捨象して、不偏推定や信頼区間というような客観論的な諸概念に基づいて、統計的な分析を行おうとしても、なお状況は複雑であり、実際、「患者たちを、医者が診療できる状況へと連れて行き、そしてそこから連れ去る」と見なせるメカニズムに対する stochastic models は、極めて多様なものである。だが、「尤度原理」に従うのならば、このメカニズムは、患者にのしかかる死亡率に関する、特に、患者が5年にわたって生き続ける「確率」に関する、そのデータの「内容」には、何ら関りがないのである。(なお、サヴェジ氏は、このような生存「確率」の問題に関する鍵となる論文として、Elveback(1958)及び Kaplan and Meier(1958)に言及している。)

そこで、「尤度原理」がもたらす帰結を大まかに見てみるのだが、まず、問題の5年間の短い区間へと分割して、第*i*番目の区間の始めまで生き残って、しかも医院を去ることがなかった総数 $x_i$ 人の子供たちの内で、 $y_i$ 人が、その第*i*番目の区間の終わりまで生き残るものと、さらに、「一人の」子供がその第*i*番目の区間を生き続ける「確率」を $p_i$ とする。すると、「一人の」子供が問題の5年間で生き続ける「確率」 $p$ は、 $p = \prod p_i$ によって与えられることとなるであろう。ここで、各区間の冒頭の子供の数 $x_i$ を定めるメカニズムを、パラメータ $\xi$ によって象徴しておく、

$$\begin{aligned} & \Pr(x_1, \dots; y_1, \dots \mid p_1, \dots; \xi) \\ &= \Pr(x_1 \mid \xi) \Pr(y_1 \mid p_1, x_1) \Pr(x_2 \mid x_1, \xi) \\ & \Pr(y_2 \mid p_2, x_2) \dots \end{aligned}$$

$$= f(x_1, \dots; \xi) \prod p_i^{y_i} (1-p_i)^{x_i-y_i},$$

という式が得られる。ここで、「確率」の系列 $p_i$ に対する尤度関数の値、つまり「尤度」を考えてみると、「確率」の系列に対する「尤度」の相対的な位置関係は、つまり比率は、 $\xi$ の内訳には依存していないことがわかる。従って、「尤度原理」によれば、データが系列 $p_i$ に関して告げている事柄は $\xi$ には依存しないのであり、結局、 $p$ に関する統計的推論には、観察値の系列 $x_i$ が関わってくるのだが、それらの観察値を「もたらす」メカニズム $\xi$ は関りがなくなることとなるのである。このように、「尤度原理」を肯定する統計学は、伝統的な流儀とはかなり異なった、少なくとも原理上は、かなり単純な様式を示すのである。

なお、サヴェジ氏は、「補助統計量, ancillary statistic」にも簡略に言及している。この概念はFisherが導入したのだが、その概念規定は明確とは言い難いものであった。しかし、サヴェジ氏は、「尤度原理」がこの概念の理解への鍵となると判断しているようであり、典型的な補助統計量の例を示すために、二変量正規分布からの無作為な標本抽出によって得られる、観察値の対から成る系列 $(x_i, y_i)$ を取り上げている。ここで、 $y$ の $x$ への回帰を調べるのだが、この回帰直線を問題とする限りでは、観察値の系列 $x_i$ が無作為な標本抽出によって得られた値であることを考慮する必要などはなく、結局、もとの実験が、「与えられている」各 $x_i$ に対して各観察値 $y_i$ を抽出するものであったかのよう、考察を進めても、全く合法的なはずである。この場合、系列 $x_i$ をもたらす統計量は補助統計量と呼ばれるのだが、しかし、「尤度原理」によれば、たまたま観察値の系列 $x_i$ をもたらすこととなったそのメカニズムが、回帰係数などに関する推論に関りがなく、かなり明白なのである。ところで、このような議論には、正規的な変量に限らず、 $x_i$ が抽出される分布に関する「完全な」知識などというものは、

$y$  の  $x$  への回帰の係数などに関する結論を引き出す際には、ほとんど役には立たないのだという判断が、(暗黙の内に) 先行しているようなのだが、このような判断は実際には「主観的な」事柄なのであり、その内訳は、問題から問題へと、そして個人から個人へと、変化し得るものなのである。つまり例えば、ある研究者は、自身が直面するであろうデータに対して、 $x_i$  が比較的広い範囲にわたって、あるいはかなり狭い範囲に限定されて、分布するのであれば、「問題の回帰係数は大きくなる傾向を示すであろう」という信念を支持する特別な根拠を持つかもしれないのである。

なお、サヴェジ氏は、補助統計量に基づく結論が説得力を持つ場合には、それは常に「尤度原理」によって支持されていると注意を促し、さらに、補助統計量を見出すやり方が明確でないことと比較して、「尤度原理」は、ほとんど自動的に議論の単純化に貢献していると、強調するのである。なお、問題となっている状況において、複数の補助統計量が存在し得るのであり、このような場合には補助統計量の選択の問題が生じてくるのである。例えば、変数  $x$  及び  $y$  は各平均 0 で分散 1 の正規分布に従い、しかも相関係数が  $\rho$  である場合には、 $x$  及び  $y$  の各々の分布は  $\rho$  と無縁であり、各々は  $(x, y)$  に対する補助統計量となっているのである。

## 5. 精密測定について

次に、サヴェジ氏は、主観確率に基づく統計学での注目すべき「原理」として、「精密測定」(あるいは「安定推定」)の「原理」を簡潔に説明することとなるのである。つまり、いわゆる「精密な」測定が関る状況においては、即ち、問題のデータが、研究者の「初期の意見」を圧倒する程に鋭敏である状況においては、かなりの多様性を保っている幾つかの「現実的な初期の意見」が、そのデータを考慮することによって、「實際上同一と見なせる結論」へと変化する

るのである。このような「意見の安定化」は、ある一つの nougat の「その」重さや、「この」地球の重量や、新しく合成された物質の「その」融点や、戦後のドイツにおいて生まれてきた子供たちの「その」性比というような、但し、この性比の例では、標本から得られる推定値の頻度論的分布が、観察される個体数  $N$  に対して、分散が  $(1/4)N^{-1}$  である正規分布に類似するであろうことがかなり期待されるのであり、「精密な」測定の良い例になっているのだが、これらの多様な事柄との連関で起り得るのである。(なお、サヴェジ氏は、the theory of precise measurement という表現を用いているのだが、別の論文では principle of stable estimation と表現しており、またここでは、主観確率に基づく統計的推論の基本的な思考様式が問題となっているので、以下では内容の方を尊重して、「理論」ではなく「原理」を用いて、「精密測定の原理」と表現することとする。)

そこでサヴェジ氏は、深刻な例ではなく、一つのジャガイモの「その」重さを用いて、「精密測定」の話を進めるのである。つまり、とにかく「あなた」が一個のジャガイモを握っているとするのである。このジャガイモは他のかなり不規則な形をした物体であってもかまわないのだが、ひとまずジャガイモとしておくのであり、しかも「あなた」は、その重さについてある程度の事柄を知ることとしているのである。ここで、主観確率を基礎づける「原理」をあくまでも尊重するのならば、原理上は、「あなた」は、そのジャガイモのその未知の重さに対する「あなた」自身の「初期の」確率密度  $\alpha(\lambda)$  を抽出できる「はず」なのである。だが、実際には、「確率」を定めるための「あなた」による「あなた」自身への尋問が、非常にうまく行くことなどはないであろうし、結局、「あなた」は、「あなた」自身が定めるべき確率密度  $\alpha(\lambda)$  に対して、非常に漠然とした態度を取らざるを得ないことであろう。このような場合、自分自身に対する行動的尋問による「確率」の評価と

いう作業をあきらめてしまって、関数  $\alpha(\lambda)$  によって表現される「確率」などは元来「存在」しないのだとか、このジャガイモの重さについて自分は「何も」知らないのだ、とかいう態度を「あなた」は取りたくなくなってしまうかもしれないのである。しかし、実際の所は、「何も知らない、know nothing」というような誘惑的言い回しに対して、満足できる「定義」を与えることなどはどうも不可能なのであり、さらには、これは重要なことなのだが、そのジャガイモの重さに関する自分自身の「意見」について、「あなた」はかなりのことを知っているはずなのであり、しかもこの「意見」は、 $\alpha(\lambda)$  の形状に関する部分的な明確化という作業を通して、かなりうまく表現できるはずなのである。実際、例えば、問題のジャガイモを重さを量ることなしに郵便で送る必要性に「あなた」が迫られているとしてみよう。すると「あなた」は、そのジャガイモが送り返されたり、あるいは適正な料金の5倍もの金額を余計に払ってしまうというようなことがないように、なんとかうまく料金を払おうとするであろうし、また多分、そうすることができるであろう。つまり、「その」料金を「なんとかうまく払えるであろう」ならば、「あなた」は、「その」 $\alpha(\lambda)$  について、少なくとも「ある程度の知識」は持っている「はず」なのである。

しかし、「あなた」はなるほど  $\alpha(\lambda)$  について「ある程度の知識」は持っているであろうが、「その」知識を明白な形式によって表現することなどは、実際上は無理であろう。だが、非常に重要なことなのだが、「あなた」がそのジャガイモの重さを、良質な「はかり」によって測定する機会を「仮に」持ったとするのならば、この多少曖昧な「知識」が、かなり有用なものとなり得るのである。例えば、ある実験の結果として、そのジャガイモの（最も近いグラムで表される）重さが、146g か147g かのいずれかであることを、「あなた」が見出したと想定してみよう。このような場合、賭けの枠組み

においては、146g か147g のいずれか一方を支持して、1対1から極めてわずかに大き目のオッズをもたらしような賭けを、多分「あなた」は受け入れることとなるのではなかろうか。このことは、結局、「あなた」にとっては、146の近くでの  $\alpha(\lambda)$  の平均的な値が、147の近くでの  $\alpha(\lambda)$  の平均的な値と、ほとんど同じであることを意味していると解釈され得るであろう。このような議論を続けるのならば、関数  $\alpha(\lambda)$  の値は、例えば、100g から300g の間で、10g の幅を持つ任意の区間においてわずかなパーセントでしか変化しないのだと、「あなた」は判断するに至るかもしれないのである。そしてさらに「あなた」は、 $\alpha(\lambda)$  の値は、100g から300g までという区間において、その最小値の例えば1000倍もの大きさになることなどは決してないのだと、判断するかもしれないのである。このように、「想像上の実験」を通して、「あなた」は、 $\alpha(\lambda)$  の大まかではあっても重要な性質を、なんとか表現し得るのである。

そこで、このような「事前の」知識を準備した上でだが、標準偏差が1gで誤差が事実上正規分布に従うことが知られている試験済みの信頼できる「はかり」で、そのジャガイモの重さを量った「あと」では、はたして「あなた」は、「その」重さについていかなる結論を下し得るのかが問題となってくるのである。はお、この場合、ベイズの定理は次のように書くことができる。

$$\alpha(\lambda | x) \propto \phi(x - \lambda) \alpha(\lambda),$$

ここで、

$$\phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-z^2/2).$$

だが、「事前の」知識は「ある」とはいつても明確に指定できるというわけではないから、この式の  $\alpha(\lambda)$  は特定できないのであり、従って、一見すると、この式は使い物にならないような

のである。しかし、ここで例えば、 $x=174.3$ という値が得られたとすると、 $\lambda$ の関数  $\phi(174.3-\lambda)$  は、 $174.3 \pm 5$  を端点とする区間の外側においては、「ほとんど」零であると見なせるはずであり、一方、関数  $\alpha(\lambda)$  は、この区間の内側ではわずかなパーセントでしか変化しないのであり、しかも、この区間の内側の値と比較して、その外側では、(相対的な意味で) より巨大な値を取るなどということは「決して」ありえないのである。すると、上の比例式の右辺は、実際上は、

$$\phi(174.3-\lambda) \alpha(174.3)$$

によってうまく「近似」されると見なして良いであろう。従って、左辺の「事後の」確率密度は、尤度関数  $\phi(174.3-\lambda)$  に「ほぼ」比例することとなる。つまり一般には、データ  $x$  が与えられているとすると、「事後の」確率密度  $\alpha(\lambda|x)$  は尤度関数  $\phi(x-\lambda)$  に ( $x$  に依存し得る) 正の定数を掛けたものによって「近似」されることとなるのだが、ここでは、 $\phi(x-\lambda)$  を  $\lambda$  に関して (実数全域にわたって) 積分すると 1 になるので、 $\alpha(\lambda|x)$  は正に  $\phi(x-\lambda)$  自身によって「近似」されることとなるのである。従って、特に  $x=174.3$  という測定値を得た場合には、重さを量った「あと」の  $\lambda$  に関する「あなた」の「意見」は、「 $\lambda$  の値は、標準偏差 1 を伴って 174.3g の周りに正規的に分布している」というように「近似」的に表現されることとなるのである。なお、伝統的な枠組みにおいては、未知固定の母数に関する「あなた」自身の「意見」を、例えば今述べたように、正規分布によって「近似」するなどということは、全くの論外なのだが、しかし、「あなた」自身の「初期の」主観確率に関する (合理的な根拠を持っている) ある仮定が存在するのならば、測定値が得られた「あと」の「あなた」自身の「意見」を表す主観確率が、尤度関数によって「近似」されることは、紛れもなく真実なのである。(なお、この「精密測

定の原理」あるいは「安定推定の原理」に対する、より精確な古典的議論として、Edwards, Lindman, and Savage(1963)がある。)

ここで注意すべきことは、上で述べた議論は、関数  $\alpha(\lambda)$  が、観察された値  $x$  の「近く」ではほとんど定数的であり、しかも、その値からかなり離れた所では相対的に穏当に振る舞うという、二つの仮定に依存しているということなのである。これらの仮定は、つまり、「近似的定数性, near-constancy」と「相対的穏当性, relative moderateness」とは、 $\alpha(\lambda)$  の性質に関するものだが、それらは当然、「あなた」と「そのジャガイモ」とに関する経験的事実に言及しているのである。例えば、仮にだが、「あなた」が昨日「ある一つの」ジャガイモの重さを量ったのだとして、しかも、「あなた」が今日重さを量っている「その」ジャガイモは、昨日の「その」ジャガイモと「同じ」ものののだと、「あなた」がほとんど確信し得るとするのならば、関数  $\alpha(\lambda)$  はかなり鋭敏なピークを持つこととなるであろう。もし、この「初期の」ピークが、今日の測定値  $x$  の「近く」に存在しているのならば、 $x$  の「近く」で  $\alpha(\lambda)$  は「ほとんど」一様であるという仮定は侵犯されるのである。またもし、 $x$  から 4g か 5g も離れた所にこのピークがあるのならば、そしてさらに、「あなた」が、「この」ジャガイモは紛れもなく「あなた」自身が昨日量ったものののだと、ほとんど「確信する」のならば、その場合には、 $x$  から離れた所では  $\alpha(\lambda)$  は「程程に」振る舞うという仮定は、結局成立しなくなるのである。

なおサヴェジ氏は、この「精密測定の原理」に関する議論が Jeffreys によって既に実質的に与えられていることを明確に認めているのだが、しかし Jeffreys は、主観確率に基づく統計学の基礎づけよりも、むしろ、「もし「あなた」が、その未知固定の母数について「何も知らない」のならば」という仮定を導入して、「事前の」確率密度  $\alpha(\lambda)$  の形状を「定める」作業を遂行し、それによって「定まる」 $\alpha(\lambda)$  を利用

して、彼自身の立場からの統計的推論を議論しているようなのである。例えば、Jeffreys の立場からは、「もし「あなた」が、そのジャガイモの重さについて「何も知らない」のならば」、問題の  $\alpha(\lambda)$  を実数軸上で常に正の定数を取るように「定める」こととなるのだが、しかし当然、そのような  $\alpha(\lambda)$  は本来の「確率」密度にはなり得ないのである。しかも、このような「変格的な」一様分布は、「実際の誰か」によって保持される「初期の」意見を表現しているわけではないのであり、さらには、「そのジャガイモ」の重さは紛れもなく正の値を取るという我々の「確実な」知識を脇に置くとしても、それが、「誰によっても」保持されるべきある「意見」を表しているわけでは決していないのである。(なお、サヴェジ氏は、この「変格的な」一様分布が本来の「確率」密度ではないという事実について、直線の全域にわたる一様分布という概念に対応する「有限加法的な」確率測度が存在するので、あまり深刻に考える必要はないとしているようだが、この「有限加法的な」確率測度がはたして「まとも」な代物なのか否かについては、多分議論が分かれるであろう。)

しかしサヴェジ氏は、当然ながら、Jeffreys による統計的推論への貢献を高く評価しており、実質的には Jeffreys が導いているのだとして良い諸結果を、簡潔に紹介しているのである。つまり、実際、伝統的な枠組みでの古典的状况に対応する諸結果が、「そのジャガイモ」の例と同様の精神において、得られるのである。そこで例えば、正規母集団からの大きさ  $n$  の無作為抽出標本に基づいて、母平均  $\mu$  及び母分散  $\sigma^2$  に関する統計的推論を行うという状況を想定してみよう。 $\mu$  が既知であるのならば、 $\sigma^2$  は、通常は、自由度が  $n$  の標本分散の値  $s^2$  によって評価されることであろうが、一方、「精密測定の実理」が成立すると見なせるある種の状況においては、 $\sigma^2$  の「あなた」にとっての「最終の」、つまり「事後の」、分布は、 $\chi^2_\nu$  を自由度  $n$  のカイ自乗分布に従う変量とすると、 $n$

及び  $s^2$  は当然固定されているのだが、 $ns^2/\chi^2_\nu$  によって「近似」されるのである。またこのような結果は、多変量正規分布の分散共分散行列に対しても Wishart 分布を使って拡張できるのである。また、 $\mu$  及び  $\sigma^2$  が共に未知固定である場合には、通常は、大きさ  $n$  の標本に基づく標本平均  $\bar{x}$  と（自由度が  $n-1$  である）不偏分散  $s^2$  とによって推定が行われるのだが、「精密測定の実理」が成立すると見なせるある種の状況においては、 $\sigma^2$  の「あなた」にとっての「事後の」分布は、 $\mu$  が既知の場合の分布の  $n$  を  $n-1$  で置き換えた分布によって「近似」され、しかも、 $\mu$  の、 $\sigma$  が与えられている場合の、「あなた」にとっての「事後の」分布は、平均が  $\bar{x}$  で分散が  $\sigma^2/n$  の正規分布によって「近似」され、これらによって、 $\mu$  の「あなた」にとっての「最終の」分布が、自由度  $n-1$  の  $t$  分布に従う変量  $t_{n-1}$  を使って、但し、 $\bar{x}$ 、 $n$ 、及び  $s$  は既に固定されているのだが、 $\bar{x} + n^{-1/2} s t_{n-1}$  によって「近似」されることとなるのである。さらに、このような考察は、伝統的な理論と見掛け上は「似ている」結果を伴っている、回帰の理論や分散分析などにも一般化されるのだが、しかし、「似て」はいても、その知的内容は相違するのである。なお、例えば、二つの未知の分散の比率の分布との連関で  $F$  分布が現れ、Bernoullian data からの頻度の推定との連関でベータ分布が現れ、Poisson 分布の母数の推定と関連してガンマ分布が現れるのである。

さらにまた、二つの未知の正規母集団のそれらの母平均の差の検定などに関る、いわゆる Behrens-Fisher 問題に対して、但し、この問題は伝統的な枠組みでは「解く」ことが困難な問題なのだが、「精密測定の実理」は、ある明快な指針をもたらすのである。つまり、二つの母平均及び二つの母分散の全てに関して、「あなた」が相当に未知な状況にあるのならば、二つの母平均の差に関するある量の「あなた」にとっての「最終の」分布は、独立な二つの  $t$  変量のある線形的な結合の分布によって、「近似的

に」表現されるのである。この「近似的な」分布は Behrens-Fisher 分布と呼ばれるものだが、このような結果は、事実上、Jeffreys が既示したものである。また一方 Fisher は、この Behrens-Fisher 分布を、彼が唱えている fiducial probability なるものに基づいて、但し、この probability は、彼自身の議論からはその概念としての規定が明瞭であるとは言い難いのだが、とにかく導いており、しかもそれを擁護しているのである。だが、主観確率に基づく「精密測定」からすれば、この「分布」は、「あなた」がある状況下にある場合の、「あなた」の「事後の」確率分布に対する「近似」なのであり、「客観的に正確な」分布などという代物ではないのである。しかも、「精密測定」は、特殊な十分統計量の存在などには依存していない、また、離散的なデータに対しても当然あてはまる、主観確率に関する極めて一般的な「原理」なのである。さらにまた、 $\bar{x}_1$ ,  $\bar{x}_2$ , 及び  $s$  というような形式を持つデータから、二つの母平均の比率  $\mu_1/\mu_2$  を推定する問題や、あるいは、ベクトル  $(\mu_1, \mu_2)$  の方向を推定する問題に対しても、「精密測定」は、分析者に対して、良質な洞察をもたらす「近似的な」解をもたらすのである。また、この「近似的な」解に相当するものが、いわゆる fiducial argument によっても得られるようなのだが、この fiducial argument なるものが、主観確率に基づく「精密測定」よりもその性格が明瞭なのだとは言い難いのである。

さらにこの「原理」は、Poisson 分布の母数(あるいは分散)の差を推定するというような問題にも貢献し得るのであり、そこでは、ガンマ分布の「たたみ込み」が利用されるのである。だが、このような問題においては、問題となっている差が正の値を取るということがしばしば知られているのであり、この「事前の」知識は、「精密測定」をあてはめる際の「あなた」の「初期の」分布は穏当に振る舞う」という前提と、当然衝突し得るのである。このよう

な場合には、問題の全体を改めて考察し直すことが必要であり、しかも、「精密測定の原理」がもたらす全ての利点を期待するわけには行かないことであろう。だが、サヴェジ氏は、「危険が生じてくる上側の限界を、全く安全な状況にある記録から推測する」というような問題と取り組んだ経験に基づいて、このような不満な状況においても、「あなた」の「最終の」分布に関する幾つかの有用な不等式があるはずだと判断するのである。

なおサヴェジ氏は、「精密測定の原理」の説明の末尾で非常に基本的な注意を行っているのである。つまり、完璧な、しかし「近似的な」、「最終的な」分布が得られないとしても、それは、主観確率に基づく統計的推論の「欠陥」を物語るものではなく、問題となっている事柄に対する表現の様式が、「精密な」結論を正当化するものではないということを示しているであり、さらにまた、「正確な」解が正当化できないような状況において、そのような「解」をもたらすような雰囲気装っている、いわゆる信頼区間や、fiducial probability や、logical probabilities というような事柄に関する理論は、それがいかなるものであれ、自身にとっての本来の統計的推論を行おうとする「あなた」にとっては、「偽りのサーヴァント、a false servant」なのである。

## 6. 「初期」及び「最終」精度

次にサヴェジ氏は、「初期精度、initial precision」及び「最終精度、final precision」の議論を始めるのであり、またこれらは、各各、「事前の」及び「事後の」精度と表現してもかまわないものである。つまり、特に伝統的な枠組みにおいては、「実験」が「これから」いかなる成果をもたらすこととなるのかということへの強い「期待」が、より具体的には、その「実験」はいかなる OC 曲線を持っているのかということへの強い関心が、「実験」が遂行される「ま

え」においてその「実験」に対して「期待」される「精度」と、「実験」が遂行された「あと」においてその「実験」が実際にもたらす「精度」との間の、その区別を、「実験」に関っている者たちに忘れさせる傾向にあるようなのである。これらの「精度」の混同は、ある種のなじみのある「実験」においては、問題の区別が見掛け上は消滅するように見えるということによって、さらに一層強化されてきたようなのである。このような、二つの「精度」の間の区別を「見えない」ようにしてしまおうとする傾向は、データを分析する者の「最終の」あるいは「終端の」意見を議論することを、「公的には」拒絶しようとする「客観論的な」理論にとっては、特に「自然な」ことなのである。だが、それにもかかわらず客観論者たちは、ある種の状況においては、問題の区別を自ら指摘したりもしてきたのであり、実際、時々議論されてきた顕著な例として、既知の範囲を持つ一様分布の中央値に対する推定問題があるのである。

ところで我々には、「比較的小さな平均自乗誤差を持つ推定量を利用することによって得られる推定値は、「ある意味で」信頼できるであろう」と思うような習慣があるかもしれないのだが、しかし、このようなことは一般には真ではない。通常は信頼できる推定量の例として、単位の分散を持つ正規分布からの無作為抽出標本に基づく算術平均がある。このような標本がもたらす観察は、既に上で議論したように、通常は、問題の分布の未知固定平均に対する「精密な測定」をもたらすのであり、従って、「真の」平均  $\mu$  が標本平均  $\bar{x}$  の「近く」に存在するということを想定するための、かなり強い論理的根拠があるのである。また、このような正規分布の族に関する無作為抽出標本は、 $\bar{x}$  の観察値を通してのみ、データを分析する者の「最終の」意見に影響を与えるのである。

だが別の例として、単位の長さの範囲を持つ一様分布の中央値に対する自然な推定量として、その一様分布からの無作為抽出標本におけ

る最大及び最小の値の算術平均を、つまり「範囲中央, mid-range」を取る場合がある。この推定量は、標本の大きさ  $n$  が大である場合には、約  $(1/2)n^{-2}$  という、非常に小さな平均自乗誤差を持つのであり、通常の「初期の」意見の下では、最良の可能な推定量であると主張してもかまわないものなのである。しかし、「たまたま」、標本がもたらす最小値と最大値との間が非常に狭い場合には、その標本は、母集団分布の中央値の位置に対する深刻な疑念を残したままとなるのである。実際、そのような観察の「あと」の「最終の」分布は、観察の最大値から  $1/2$  を引き去ったものと、その最小値に  $1/2$  を加えたものによって定まる区間へと切断された、「初期の」分布にすぎないのである。仮に、例えば、観察の最大値が  $3 + (1/4)$  であり、その最小値が  $2 + (1/2)$  であるとする、単位の長さの範囲を持つ一様分布の中央値は、 $3 + (1/4) - (1/2) = 2 + (3/4)$  から  $2 + (1/2) + (1/2) = 3$  までのいずれかの値でなければならないのであり、また、尤度関数を調べることによって、このことが、中央値の位置について問題の標本が伝えなければならない事柄の全てであることがわかるのである。さらにこの場合、「初期の」分布が十分に散漫であるのならば、「最終の」分布は、標本の大きさがいかに大であろうとも、 $2 + (3/4)$  から  $3$  に至る区間においてほとんど一様なのである。つまり、範囲中央推定量の平均自乗誤差が小であるという事実は、ほとんど一様な不確定性を示す「最終の」区間がほとんど常に小さいという事実に対応しているのだが、しかし、この区間は、「時たま」、単位の長さに近い幅を持ち得るのであり、その場合、問題の標本はかなりの「失敗」なのである。

多くの他の「移動的な分布族, translation families」も、正に同様の現象を示すのである。例えば、実数軸上で  $(1/2)\exp(-|x-\mu|)$  という密度関数を持つ、二重指数 (あるいは Laplace) 分布を考えることができるのである。この母数  $\mu$  に対する最尤推定量は標本の中央

値だが、標本の大きさ  $n$  が大であると、この推定量の平均自乗誤差は  $1/n$  にほとんど比例して減少するのであり、さらにまた、Pitman(1939)による推定量は、それよりもわずかに小さい平均自乗誤差をもたらすのである。だがこのことは、この分布に関する（大きさが大である標本の）観察が、「必然的に」、中央値  $\mu$  の位置づけに対する鋭敏な指示を与えるに至るのだということ、を、意味しているわけではないのである。例えば、仮に、200個の観察値の内100個が-1よりも小であり、残りの100個が+1よりも大であるのならば、このデータがもたらす尤度関数は-1から+1に至る区間上で定数となるであろうし、また、そのデータは、未知固定の母数  $\mu$  の真の値が、小さい方から100番目及び101番目の観察値の間のどこかにあるということへのかなり強い証拠を提示しているのだが、しかし、そのデータは、 $\mu$  が結局その区間のどこにあるのかについては、解決の糸口を何ら与えていないのである。また、奇数個の観察値に対する同様に人目を引く例が、Fisher(1934)によって与えられている。なお、Cauchy分布もこれと似た現象をもたらす得るのであり、実際、Cauchy分布に対する多量の観察が、極めて「まれ」にはあるが、（互いに遠く離れた二つの箇所で極大値を取る）鋭い二つの頂を持つ「最終の」分布を、我々にもたらすのである。

ところでこのような例は、いわゆる信頼区間に関するある種の現象と密接に関連するのであり、またそのような現象を使って表現し直すことができるのである。例えば、一様分布に対してだが、検定の理論と信頼区間に関する議論との間の通常の類推によれば、正の定数  $\varepsilon_n$  を「適切に」選んだ上でだが、標本の範囲中央の左右に  $\varepsilon_n$  の幅を持たせることによって、母集団分布の中央値  $\mu$  に対する「良い」信頼区間が得られるはずなのであり、実際、このような区間は信頼区間なのである。しかしこの区間は、「苦悩をもたらす」性質を持っているのである。仮に、問題の標本の範囲が  $1-2\varepsilon_n$  を超えるのな

らば、我々は、問題の信頼区間が  $\mu$  の真の値を確実に含むことを知るに至るのだが、このような事態は言わば望外のものである。一方、仮に、標本の範囲が異常な程に小さいのならば、問題の信頼区間が真の  $\mu$  を覆っていないのだということへのかなりの「証拠」があると見て良いであろう。しかも、このような「証拠」は、Neyman-Pearson学派に属するような客観論者にとってさえも、意義を持ち得るものなのであり、実際、標本の範囲が異常な程小さいという条件の下で、問題の信頼区間が真の値を捕え損ねるのならば、その場合には、19対1の（自身と相手とが差し出す）賭け金の比率で、（この条件付きの賭けにおいて）相手へと金銭を支払うこととなっている個人は、それが誰であれ、相手との比較において金銭を失いやすい傾向にあるのであり、つまり、19対1という賭け金の比率はその個人にとっては「条件つきで、割に合わない」ことが、容易に算出できるのである。さらにまた、Welch(1939)で示されているように、一様分布の中央値に対するいわゆる帰無仮説についての最良不偏検定に基づく、信頼区間のシステムもまた、同様の「不合理な」性質を持つのである。

ところで、通常信頼区間と呼ばれているものに関る、つまり、言わば「条件づけされていない」信頼区間に関するこの種の現象については、大部分は客観論の見解からだが、幾つかの考察が為されているのであり、例えば、幾つかの参考文献に通じるものとして、Wallace(1959)がある。また、移動的な分布族に関する限りでは、Pitman(1939)によって提案されている信頼区間が問題の状況に対処しており、事実、それらの信頼区間は、「精密測定の実理」を利用することを前提とした上で、近似的な「最終の」分布の中央部分から特定されている「確率」値を持つ区間を取り出すことによって、生成されるであろうような区間に表面上は一致するのである。

さらに、これはLindley(1958)において指摘

されているのだが、Neyman-Pearson 学派の見解が、本来は区別しなければならないはずの「予期されている」精度と「実際にもたらされている」精度との相違を、終に無視するに至ることを示す顕著な例が、Stein(1945)での「二標本手順, two-sample procedure」なのである。この手順は、未知固定の平均及び分散を伴った正規分布に関して、その未知の平均に対する、例えば長さ1というような、固定されている長さを持つ信頼区間を生み出すためのものなのだが、その大体の考え方は、標本平均  $\bar{x}$  及び標本標準偏差  $s'$  を持つ pilot sample を利用することによって、要求されている精度を保証するためには十分な大きさであると期待される全標本の大きさ  $N$  を定める、というようなものである。この場合、 $\bar{x}$  を全標本の平均とすると、わずかな差を無視すれば、大体、 $\bar{x}$  の左右に1/2の幅を持つ区間が要求されている信頼水準を持つ信頼区間となり、問題はフォーマルに解かれるのである。さらに Stein は、整数値が離散的であることや、始めに取られる標本が既に十分過ぎるものである可能性を考慮するための、ある種の精密化を実際に提案しているのだが、これらの精密化は、Stein 自身が指摘しているように、事前の要求よりも高い精度を持つ結論に到達することを回避するために、データを敢えて浪費するというような、実際上は誤った方向へと踏み出す恐れがあるのである。ところで、もしこの Stein の手順が実行されるのならば、しかも、全標本の標準偏差  $s$  が  $s'$  よりも非常に大であるという、時時起り得るような事態が、実際に起るのならば、その場合には、 $\bar{x}$  の左右に1/2の幅を持つ区間がその的を失ってしまうということへのかなりの証拠があるのである。1945年当時の統計学的状況において、広く喝采をもって受け入れられたはずの巧みな手順が、その後、その手順の提唱者自身を含む頻度論者たちによって、そしてまた、個人論的見解を保持する者たちによって、深刻な「欠陥」を持つと見なされるようになったのである。

ところで、主観確率の立場からすれば、「精密測定」の考え方が、この Stein の問題を引き起こすような実際上の状況に対する「良い」解を、すぐにも提示し得るのである。例えば、「あなた」が、相当に未知の標準偏差を持つ「はかり」を用いて、問題のジャガイモの真の重さ  $\mu$  が長さ0.1gのある区間に入ることへと、99対1のオッズで、十分にしばしば、正当に「賭ける」ことができるというように、その問題のジャガイモの重さを量りたいと欲しているとするとすれば、「あなた」は、「あなた」の「最終の」(あるいはより良く表現すれば、「中間的な」)分布の中央部分の99パーセントが長さ0.1gの区間の上に乗ることを見出すに至るまで、そのジャガイモをただ単に繰り返し測定すれば良いのである。なおここで、最初の4, 5回の測定の後には、「あなた」の「中間的な」分布は、自由度  $n-1$  の  $t$  分布を利用することによって、通常はうまく近似されるはずであるから、主観確率に基づくこの手順は実際的といえて良いであろう。なお、この種の手順やそれに関係する幾つかの方法についての興味ある「客観論的な」議論が Anscombe(1954)に与えられている。

## 7. 鋭敏な帰無仮説

ここでサヴェジ氏は、「精密測定の原理」以外の主観確率の応用を述べようとするのだが、それは、「鋭敏な, sharp」帰無仮説に対する検定に関するものである。つまり、サヴェジ氏の観察によれば、帰無仮説の検定という名称の下で、少なくとも三つの異なった状況(場合によっては Bahadur and Robbins(1950)におけるような状況も加わって)、粗野な Procrustean bed に押し込められているのである。また、これらの三つの状況は本来は区別されるべきであろうが、伝統的な枠組みにおいては、実際には、かなり曖昧に取り扱われているのであり、しかも、それらの状況の現実上の違いとも

いべきものは、主観的な「初期の」確率の違いに広く依存しているものであり、しかしながら、このような「初期の」確率について議論するには、客観論者たちは十分な「言葉」をなんら持っていないのである。そこでサヴェジ氏は、Hiero 王の王冠の話を持ち出して、なんとかこの「三つの違い」を説明して見せようと試みるのである。

この Hiero 王の話しには三通りあるのだが、どの場合でも王は、彼の金細工師が新しい王冠に混ぜ物をしたことを「知っている」か、あるいはそのことを「疑っている」のである。ところでかの Archimedes は、正に歓喜に満ちた瞬間に恵まれて、問題の王冠と純金でできた見本とを空気中及び水中で（その重さを）測定することによって、その問題の王冠の密度を決定するというアイデアを思いついたのであった。なお、Archimedes は、結局の所、平均  $\lambda$  と標準偏差  $\sigma$  とを持つ正規分布に従う測定誤差を伴って、未知固定の数  $\lambda$  を測定したのであると想定したとしても、この物語をひどく損なうわけでは決してないであろう。そこでここでは、 $\lambda = 0$ ,  $\lambda > 0$ , あるいは  $\lambda < 0$  に従って、その王冠は、混ぜ物をされていないのか、純金よりも密度が高いのか、あるいは純金よりも密度が低いのかの、いずれかであるとするのである。実は、混ぜ物としては銀が使われているようなのだが、そして銀の混ぜ物は（見本と大きさが同じ場合には）王冠を軽くするのだが、また、この「銀であろう」という推測はいわゆる片側検定へと通じるであろうが、しかしここでは、混ぜ物が銀であるだろうとのこの推測を「忘れておく」とする。

さらにまた、Archimedes と Hiero 王とが母数  $\sigma$  を知っているであろうとすることは、想像することが不可能であるとまでは行かないとしても、多少奇妙なことなのだが、しかし、このような想定は、この物語を本質的な事柄へと限定するために役立つのである。また、Archimedes は、問題の王冠に関する多くの測定値とそれら

の算術平均とを実際に獲得できるはずであり、また、彼がなぜそれだけの回数に至るまで測定を行ったのかについては、別の逸話が必要であろうが、しかし、ひとたび彼が測定を止めれば、得られるその平均が、結局、ここでの議論で前提とされる唯一の測定値となるのである。

ところで Hiero 王は、自身が保持している情報と自身の目的とによって、とりわけ、以下のような三つの「初期の」態度の内の一つを持っているかもしれないのである。

第 1 の場合。Hiero 王は、金細工師らによる欺きが為され続けてきたことを確信しているのであり、その欺きの程度に対する王の意見は、Archimedes の測定値と比較して散漫なものである。また、王は、その王冠が純金よりも密度が高いのか低いのかについて決定を下すことを望んでいるではあるが、しかし、測定値によってもたらされる証拠が決定的でないのならば、自身の決定を、進んでしかも自由に、差し控える覚悟がある。

第 2 の場合。Hiero 王は、欺瞞が為され続けてきたことについて確信しているのだが、彼の意見は散漫ではなく、むしろ、 $|\lambda| < 2\sigma$  となることに対してかなりの信念を感じている。この場合もまた、王は、問題の王冠の密度が純金よりも高いか低いかにについて、できれば決定したいと思っていることであろう。また、このような状況は、現実の統計的な実践及び考察においては、最も困難で、非常に顕著な性格を持つものである。

第 3 の場合。Hiero 王は、なんの欺きも存在しない、つまり  $\lambda = 0$  ということの可能性に対して、多少の差はあっても、ある程度の自身の信用を付加しており、また、なんらかの欺瞞があるのだという条件の下では、欺きの程度に関する王の意見は、Archimedes の測定値と比較して散漫なのである。ここで王は、金細工師らが結局の所有罪であるのならば、彼らを絞首刑にすることを欲しているのだが、しかし、そう

でなければ処刑などはしたくないのである。

多くの「客観論的な」教科書の流儀に従うのならば、 $\lambda$ の測定値  $x$  に対する Hiero 王の反応は、三つの場合の全てにおいて、ほとんど同じものとなるはずなのである。王は、それらの教科書に従うのならば、0.05, 0.01, あるいは 0.001 というような、ある「小さな」確率値  $\alpha$  を、自身の裁量で選ぶこととなるであろう。その後王は、測定値をもたらすと想定されている変量  $\bar{x}/\sigma$  の絶対値がその変量の観察された値  $t$  の絶対値以上となる「確率」を、「仮に  $\lambda$  が 0 であるのならば」という条件の下で計算することとなるであろうが、この「確率」は、標準正規分布の密度関数  $\phi(z)$  を  $-|t| \leq z \leq |t|$  という区間上で積分した値を、1 から引き去ったものに等しく、それは、標準正規分布の累積分布関数を  $\Phi$  とすると、 $2\Phi(-|t|)$  によって与えられるのである。そこで、もしこの値が王自身が定めた値  $\alpha$  よりも小であるのならば、王は、問題の帰無仮説 ( $\lambda=0$ ) を棄却すべきであり、そうでなければ、その仮説を採択すべきなのである。ここで、第 1 及び第 2 の場合には、帰無仮説を棄却するということは、変量  $\bar{x}$  が取る値を、 $\lambda$  の符号を指し示すものとして真剣に取り扱うことを意味しているのであり、一方、第 3 の場合には、それは、金細工師らを絞首刑にすることを意味するのである。

なお、上のやり方とは別の（しかし、やはり教科書的な）流儀があるのであり、それは、固定されている値  $\alpha$  に関して「棄却」を行うのではなく、 $\alpha(t) = 2 - 2\Phi(|t|)$  という  $t$  に依存して定まる値を、「Hiero 王が仮に問題の帰無仮説を棄却することとなるのならば、王自身がその仮説に対して持つであろう疑念の、その程度を表すある種の尺度」と見なす、という流儀なのである。しかし、以下で説明するように、これらの「客観的な」流儀は、第 1 の場合に対して不適切であり、さらに特に、第 2 及び第 3 の場合に対して不適切なのであり、結局、これらの

流儀がうまく当てはまる状況があるとは、どうも思われないのである。

第 1 の場合においては、Hiero 王は、測定を為す「まえ」において、 $\lambda$  の符号について實際上明瞭な情報を自分は獲得するであろうということを、かなり確信しているのであり、このような情報は、この場合に、王が知ること欲している事柄なのである。例えば、王は、 $|x|$  が  $4\sigma$  を超える値として観察できるであろうということに関して、100対1の賭け金の比率で進んで「かけ」を為そうとするかもしれない。もし  $|x|$  が、実際、この大きさであるのならば、「精密測定の原理」は、王に対しては、 $\lambda$  の符号についてほとんど疑念をもたすことはないであろう。但し、ここで、このような（ $\lambda$  の符号が  $x$  のものとは異なるかもしれないという）「わずかな疑念」を、大まかな上側の限界を使うよりも精密なやり方で測ってしまおうと試みることは、通常状況においては、「精密測定の原理」の濫用となるであろうことを用心しておく必要がある。しかし一方、 $x$  の値が、0 から、例えば、 $3\sigma$  とか  $4\sigma$  の範囲内に「たまたま」落ちるのならば、王は、ある適切な状況の下で、 $\lambda$  の符号が  $x$  のものとは異なるということの自身にとっての（測定の「あと」での）「確率」が、ほぼ  $\Phi(-|t|)$  であることを、見出し得るのである。だが、我々は、この  $\Phi(-|t|)$  が、 $\alpha(t)$  ではなく  $(1/2)\alpha(t)$  であることに注意しなければならないのである。つまり、いずれの「教科書的な」流儀も、この第 1 の場合には不適切なのである。

第 2 の場合においては、Hiero 王は、0 から  $2\sigma$  の範囲内に  $x$  の値を見出すことをかなり期待しているのである。このようなことが正に実際に起るのならば、 $\lambda$  に関する王の「終端の」分布は、そして特に、 $\lambda$  が正であることの王にとっての「終端の」確率は、値 0 の近くでの  $\lambda$  に関する王の「初期の」分布の挙動に、極めて敏感に依存するのである。この「初期の」分布は、ここでの問題を記述する際に、十分に明確に述

べられているわけでは決してなく、特にその分布は、非常に非対称なものとなり得るのである。さらにその上に、王は、 $\lambda$  に関する「初期の」分布の挙動を十分に明確に指定できる程には、自分自身の「心、mind」を良く知っていないかもしれないのである。このような場合、問題の実験は、王を不可避免的に板挟みの状況に置くことであろう。従って、このような（いづれにして良いのか決めかねるという）板挟み的な状況を越えた事柄を為し得るのだと装う、つまり、王の「初期の」意見を使うことなしに  $\lambda$  の符号についての結論に到達してしまおうとする、なんらかの理論は、それがいかなるものであれ、言わば「やり過ぎている」のである。また、ここで「冷静に」望み得る事柄とは、「初期の」意見の曖昧さを考慮した上での、「終端の」意見に対する有用な幾つかの不等式というようなものなのである。

ところで第3の場合については、Jeffreys が、特別な幾つかの場合に対する議論と一般的な理論とを、既に提示しているのである。Lindley もまた、何年か前に、この場合に関するさらに一般化された理論を見出しているのである。そこで、これらの議論の要点を簡略に述べておく。（なお、Lindley の議論については、Lindley (1961)がある。）

$\lambda=0$  という陳述に対する Hiero 王の「初期の」確率を  $I$  とする。また、 $\lambda \neq 0$  という条件が与えられている場合の、王の、 $\lambda$  に関する（散漫であると仮定されている）「初期の」密度関数を、 $\pi(\lambda)$  とする。また、これらに対応する「最終の」確率及び密度関数を、各各、 $I'$  及び  $\pi'(\lambda)$  とすると、これらはベイズの定理によって次のように定まる。

$$(1) \quad I' = \frac{C}{\sigma} \phi(x/\sigma) I = \frac{C}{\sigma} \phi(t) I,$$

$$(2) \quad I' \pi'(\lambda) = \frac{C}{\sigma} \phi\left(\frac{x-\lambda}{\sigma}\right) I \pi(\lambda)$$

$\pi$  は  $\phi$  との比較において「散漫である」という

仮定に注意して、(2)の両辺を実数全体にわたって積分すると、但し、 $\pi$  との比較において値  $x$  に集中していると見なせる正規曲線を考慮して、次の近似式が得られる。

$$(3) \quad I' \approx C \pi(x) \bar{I}.$$

なお(3)では、 $t=x/\sigma$  は巨大なものではないと仮定しておく。もし  $t$  が巨大であると、金細工師らが「有罪」であることの強い証拠が存在することとなり、しかもその証拠の程度が、この近似式ではうまく測定されないこととなる。

(1)を(3)で割ることによって、 $\lambda=0$  という陳述を、つまり「無罪」であることを、指示する「最終の」オッズに対する近似式が得られるのであり、それは次の(4)である。

$$(4) \quad \frac{I'}{\bar{I}} \approx \frac{\phi(t)}{\sigma} \cdot \frac{1}{\pi(x)} \cdot \frac{I}{\bar{I}}.$$

(4)において、「終端の」オッズが「初期の」オッズにある係数を掛け合わせたもので表現されることが示されているが、これは、少なくとも理論的な洞察のためには、実に喜ばしいことである。この(4)の右辺を見ればわかるように、「終端の」意見へと関わっている（「初期の」オッズ以外の） $\lambda$  に関する Hiero 王の「初期の」意見には、 $\pi(x)$  がある。一方、教科書での「客観論的な」流儀に忠実であるのなら、王の決定のために為される測定の内で重要なものは、いわゆる double tail-area である  $\alpha(t)$  のみであるはずなのだが、しかし実際には、(4)において示されているように、 $t$  は、 $\alpha(t)$  ではなく、密度  $\phi(t)$  を通して「終端の」意見に関っており、しかも  $t$  と同様に、 $\sigma$  もある役割を演じているのである。また、ここで見られるような  $\sigma$  の重要性は、客観論者たちの文献のどこかで多分に指摘されていることではあろうが、しかし大体の所では、(4)で簡潔かつ明瞭に示されている事柄は、「客観論的な」流儀とはかなり対照的なものである。

ところでHiero王は、「終端の」オッズである  $I'/I'$  が「十分に」大であるのならば、金細工師らを絞首刑にするであろう。そこで王は、どの程度の大きさが「十分に」大であるのかを自分自身に告げることを、あるいは、「個人的な」因子である  $I/(\pi(x)I)$  を見積ることを、厳しく自分自身に求めることとなるであろう。結局、「自分自身に関する知識」の欠如が王を板挟みの状況に置くこととなるのだが、しかし、 $t$  及び  $\sigma$  は、しばしば、「個人的な」因子と（判断の分れ目となる）オッズとの非常に大まかな値だけでも十分に役立ち得るくらいに、明瞭に求められるのである。また現実には、王は、判断上の疑念がある場合には新しい測定を為し得るかもしれないのであり、また、「軽い」有罪を、あまり重要ではないのだとして、見逃してしまうリスクを受け入れたり、他にも、自身のジレンマの程度を軽減するような事柄をなんとか為し得るかもしれないのである。

Jeffreys 及び Lindley は、第3の場合に類似する状況に対して一般的な理論を展開しているのだが、それは、「局外母数, nuisance parameters」を取り扱う際にも十分なものである。なお、単純二分岐的な分類が二重に関っている問題は多様に存在するのだが、それらは、今日では、通常自由度1の  $\chi^2$  分布によって取り扱われており、これらの問題は Jeffreys 及び Lindley の理論を試すための良い基盤を提供するのである。また、このような問題に対するある考察が、Jeffreys の二つの著作において既に為されている。

なおサヴェジ氏は、この仮説検定に関する「わかりやすい」解説をここで終了しているのである。彼は、今日流布している仮説検定の理論というものが主観確率によって考察される場合において、その理論の身の上といった何が起るのかということを、とにかく典型的な例によって明瞭に示しておきたかったのである。だが、仮説検定の理論全般にわたって主観確率による省察を徹底して行うなどということは、仮にス

ペースがあったとしても容易ではないのである。(なおサヴェジ氏は、shotgun tests に対して明確な分析を提示することはやり甲斐のある仕事であろうと述べているのだが、小生には、この shotgun tests なるものの中身が良くわからないのである。) ところで、上の寓話的な説明における「第3の場合」だが、現実の生活において、このような状況が生じてくるとはまず思われないのである。そこでサヴェジ氏は、いわゆる仮説検定なるものは、(日々の決まりきった仕事のように) 統計的手法を使っている実に多くの人人が思っているかもしれない程には、広範囲にわたる適用領域などは持っていないのだと、判断するのである。

## 8. レクチャーの結論

サヴェジ氏は自身のレクチャーをひとまず締め括ることとなるのだが、少なくとも彼自身にとっては、統計学におけるいかなる話題も、主観確率による省察を経なければならないはずなのであり、またそうすることで、「本来の」合理性を備えた手法の姿がなんとか明らかになるはずなのである。そこで彼は、主観確率による省察が行われるべきである、しかも広い範囲にわたって影響力を持つ、幾つかの問題に敢えて言及するのである。

まず、「精密測定の原理」があてはまる状況に「似た」多くの状況があるのであり、そこでは、無限に多くの(あるいは少なくとも、個数に上限を設定できない)母数に関っているのであり、通常我々は、それらの母数の全てを精密に測定するための十分な情報を保持することではなく、無限に多くの母数についての少数の関数を精密に測定することだけに関する十分な情報を保持することを、なんとか期待するのである。上の「尤度原理」の所で言及した、「5年にわたって生き続ける」ことの「確率」に関する問題などは、正にこの「個数に限りがない」母数の問題に関っているのである。また、ノン

パラメトリックな議論に関るこれとは別の例としては、その特性が広範囲にわたって未知である分布関数の中央値や他のパーセント点を測定する問題がある。さらに、Whittle(1957, 1958)では、曲線のあてはめや確率過程の自己相関関数の推定に対して、主観確率が応用されているのであり、これらの問題もまた、「個数に限りがない」未知の母数に関する問題なのである。(なお、サヴェジ氏は、Whittle が示した方向がさらに追求されることを望んでいるのである。)

ところで、統計的な手法を利用している人人の内の多くが、 $F$  検定や  $\chi^2$  検定のような伝統的な検定をあてはめることを正に要求するような状況が存在することを、「直感している」ようなのである。だが、このような「直感」が正当化される場所が仮にあるとすれば、主観確率の概念から隔たった所にそのような正当化を見出すことは、多分無理であるだろう。(なお、サヴェジ氏は、このようなある種の「直感」が正当化されるような状況が、適切に分析されかつ考究されているとは思っていなかったようである。また、主観確率を無視してそのような正当化ができるとは、少しも信じていなかったようである。)

次にサヴェジ氏は、いわゆる「無作為化, randomization」の問題に言及するのである。無作為化と呼ばれる作業が(広く世間において)重要視されているという事実を、彼はまず認めるのだが、しかし、主観確率の理論が、我々の多くが多分あまり良く理解していない(無作為化という作業の)問題点を、我々に思い出させるのだと、彼は注意するのである。例えば、「もし「あなた」がここで無作為化を行うのならば、「あなた」が過ちを犯すことはほとんどあり得ないのだ」などと主張することは、十分に論理的な根拠があるのだなどとは言い難いのである。実際、問題の無作為化が為される際に、その無作為化に関っている実験家が自身が「過ち」を犯していることに気づくということが、つまり、問題の無作為化によってもたらされる

実験が不適切なものであると気づくということが、たまたま起り得るのである。実は、このような問題点は、多分自分自身を客観論者であると考えている幾人かの人人によって、考察されてきたのである。(なおサヴェジ氏は、Grundy and Healy(1950), Jones(1958), Yates(1951a,b)に言及している。)特に、無作為化の作業は、層化やそれに類似する技法によっては制御できなかった変数を、実験のための何らかの処理と(たまたま)密接に相関させ得るのである。例えば、実験農場を斜めに走る規則的に引かれている幾つかの直線に沿って特定の実験的処理を指示するあるラテン方阵が、「無作為に, at random」, 「たまたま, accidentally」選ばれるということがあり得るかもしれないのである。もし、実験的処理が土地の肥沃さの(起り得る)勾配ときわめて高く相関しているというような、言わば「悪い」実験計画を、その実験計画が「無作為に」生じたのだというただそれだけの理由で採用し、それに基づいて実験を遂行してしまおうとするのならば、このような行為は、通常は極めて無思慮なものだとされるであろう。

無作為化というアイデアを分析するというような問題は、客観論者よりも主観論者に対する場合において、より鋭敏な意味を持っているのであり、しかも現在の所、主観論者の方をより強く困惑させる性格を持っているのである。実際、「理想的な」主観論者は無作為化なるものを決して必要とはしないであろうから、つまり、「理想的な」主観論者は、自分自身に対して最も多くのことを告げる「見込み」がある「その」特定の(実験計画の)レイアウトをただ「単純に」選ばば良いのであるから、そこで、「理想」を目指している「はず」の「現実の」主観論者は、無作為化なるものが持っていると言われる(しかも多分自分自身も利用している)「常識的な」有用性に対して、いかなる態度をとれば良いのか「困惑する」こととなるわけである。このような無作為化の必要性というものは、恐

らくは、「実際の」人人の「不完全さ, the imperfection」に依存しているものであり、そして多分、通常は一個人よりも多くの人人が研究というものに関っているのだという「事実, the fact」に依るのである。「現実の」人人の主観確率に関する不完全さとは、結局、既に述べたことだが、「曖昧さ, vagueness」と「自己に対する欺き, self-deception」への「誘惑」とであろうし、無作為化するものが適切に利用されるのならば、これらの「欠陥, defects」は、多分、軽減され得るのである。

「自己に対する抑制, self-discipline」に関してのように思われる他の問題として、一般的に言って、中心から遠く離れた所にある観察値の処理に関するものや、経験上は驚くべきことであると見なされてしまうような事柄の取り扱いに関するものがあるのである。このような場合でもまた、主観確率は、「原理上は」ということだが、一つの単純な「解」を与えるのである。例えば、一つの観察値は、それが多分甚だしい「誤り」によってもたらされたのだということを経験の定理が我々に告げる場合、またその場合に限って、甚だしい「誤り」によるものだと見なされるべきなのである。だが、主観確率に対する我々の「曖昧さ」や「自己に対する欺き」への「誘惑」が、主観確率に基づくベイズの定理がもたらすこの単純なマキシムを我々に対して適用することを、特に困難なものとしているのである。さらにまた、問題となっているデータを分析するための幾つかの「着想, ideas」を得るためにそのデータのある部分を利用し、その残りの部分をそれらの「着想」を検証するために利用するというような場合には、データの分析者に対して、しばしば「自己に対する抑制」が厳しく求められるのである。（実際、データに基づいてある種の「着想」を得て、その「同じ」データによってその「着想」を検証するというようなことは、その「着想」と両立することがあらかじめ大体分かっているデータによって、その「着想」を検証するとい

うことになりかねないのであり、本来の「検証」からすれば、このようなやり方は合法的ではないのである。だがさらに分析者には、「この「着想」は、このデータを観察する「まえ」から既に自分が得ていたものなのだ」というような「自己に対する欺き」への「誘惑」に捕えられる危険があるのであり、そこでぜひとも、「自己に対する抑制」が要求されるのである。）ところで、データに基づく「着想」の設定と、そのデータに基づくその「着想」の検証とに関する、このプロセスは、それを理解することもまたその価値を見積ることも、決して容易ではないのである。特に、問題のデータのいかなる割合を「着想」の探求に利用し、いかなる割合を検証のために利用するのか、ということについては、説得力のある助言はほとんどないように思われるのである。例えば、データを半半にして利用するというようなことがしばしば提唱されるが、しかし、何か特別に良い論拠があるのだというわけではないのである。なお、このようなデータを得た「あと」の考察に関する問題について、Simon(1953)で興味ある議論が為されている。

サヴェジ氏は、このレクチャーでは、「初期の」確率に関する多くの「細かい」事柄に敏感には依存しない主観確率の応用を強調してきたのである。このような「初期の」確率の形状に関する「頑健性, robustness」は、それが起る場合には重要なのだが、しかし、この意味での「頑健性」を持たないと思われる多くの問題が統計学には存在しているのである。実際、標本の大きさやその他の（実験計画のための）幾つかのパラメータを選択する問題などは、特に目立ったそのような例なのである。だが、このような場合においてさえも、「フォーマルには表現されていない「直観」なるものによって、by unformalized intuition」必要な選択を為すことを試みるというような、伝統的な枠組みで当然のここのように採用されている流儀に従うよりは、「我々の諸々の思考を秩序づけるために、to

order our thoughts」主観確率の概念を利用することの方が「一層より優れているのだ, far better」と、サヴェジ氏は自身の信念を表明するのである。

このレクチャーにおいてサヴェジ氏は、熱心に、主観確率の概念の統計学における重要性を主張しているのであり、とにかく彼は、理論的な方面に限らず、教育やデータの分析に関するコンサルティングというような実践的な分野に至るまで、主観確率の概念は広く深い影響をもたらすことだろうと、強く信じているのである。

## 9. その他の議論

サヴェジ氏のレクチャーが終了した後で幾人かの論者が自身の見解を述べて、さらにその他の論者も加わり討論が行われたのだが、そこでもサヴェジ氏は、自身の考察を端的に述べているのである。(なお彼は、通常 the Neyman-Pearson view などと呼ばれている(世間に流布しているように思われる)見解は、Neyman や E. S. Pearson が実際に主張していたものなどでは決してなく、むしろこの見解の典型は Lehmann (1959) において明確に述べられているのであると、わざわざ周囲に注意を促している。)

また彼は、教科書的な仮説検定の理論で実にしばしば持ち出されている「単純二分岐的状况, simple dichotomy」を取り上げて、いわゆる Lindley-Savage argument に言及しているのである。つまりこれは、検定仮説と対立仮説との間の二者択一的な状況において、伝統的な枠組みにおいては、いわゆる「二つの過誤」と(各仮説の下での)「過誤が生じる「確率」」とが問題となるのだが、この「二つの「確率」」からなる「「確率」の対」の全体における、より精確には、そのような「「確率」の対」となり得ると(その仮説の検定のその当事者が)判断する「非負の実数から成る対」の全体における、

検定の当事者の無差別曲線が、実は無差別「直線」となり、結局その当事者は、自身の検定を遂行する際には、その平行に走る「直線」群の「その」勾配をあらかじめ選択することとなる「はず」である、という議論なのである。だが、ここで注意すべきなのは、その検定の当事者が仮に「客観」論者であり、「主観」確率の「存在」と問題の検定との関りを(少なくとも表面上は)「見たがらない」としても、問題の無差別「直線」の「その」勾配は、実は、二つの仮説に対するその当事者自身の(事前の)「主観」確率によって「直接的に」定まるのであり、結局その当事者は、「実質的には」自身の「主観」確率に基づいてその検定を遂行することとなるということなのである。つまり、「客観」論者であるはずの検定遂行者の判断様式を「主観」確率の枠組みから冷静に捕えてみると、実は彼は、「主観」確率への道を「明白には意識せずに」歩んでいるのである。従って、このような議論からすれば、「客観」論的見解の「自然な」帰結として「主観」確率がもたらされるのだと敢えて主張したとしても、決して「不自然」ではないであろうし、さらには、極端に多様な様式を持つ可能な無差別曲線群から、「一つ」の無差別曲線群を「選択する」ことを検定遂行者に要請することとなる「客観」論的な流儀よりも、唯一の「その」勾配を選択することのみを要請する「主観」確率の枠組みの方が、より「客観」的なのだと主張し得ることであろう。(なお、この Lindley-Savage argument は Savage (1962) で非常に明瞭に言及されており、また、多分より「分かり易い」解説として、園(1994)がある。)

またサヴェジ氏は、未知固定の母数が与えられている場合の観察値の「確率」(あるいは「確率」密度)が、しばしば明確で「公的な」性格を持つことを認めてはいるのだが、しかも、このような「公的な」性格を持つ「確率」を model probability などと呼んでみてはどうかなどとも言っているのだが、しかし、このような「確率」

が、より曖昧で「個人的な」確率とは原理上異なるものなのだとしてしまうやり方を、明白に拒否しているのである。つまり、彼にとって「確率」とは、実際上の「明確さ」において程度の差があっても、またその「差」がいかに巨大ではあっても、「個人的な」確率以外の何者でもないのである。さらに彼は、今日の確率論における「交換可能性, exchangeability」に関する de Finetti (1937) による古典的な業績に言及して、実に多くの教科書において二項分布との連関で導入される「未知ではあるが固定されている「確率」」という概念に対して、de Finetti の表現定理を利用することで、主観確率の立場から極めて明晰な分析が為されていることを、改めて注意しているのである。つまり、例えば、「かなり歪んでいるかもしれないその一枚の硬貨を、限りなく投げ続ける」というような想像上の「実験」との連関で「自然に」導入されてしまうかもしれない「未知固定の「確率」」という「客観」的な「存在」は、少なくとも主観確率の立場からは、本来は必要がないものなのであり、また、そのような「未知固定の「確率」」への「自然な」需要が「存在」している「であろう」ことに基づいて、「未知固定の「確率」」の「存在」そのものを正式にはなんら認めないこととなっている主観確率の立場を、「統計学の基礎づけ」のためには不適切なものであるとして論難することは、結局、正当ではないのである。(なお、この「未知固定の「確率」」に関する解説としては、「基礎論」、つまり Savage (1954) の、第3章第7節が簡潔でしかも極めて優れている。また、このサヴェジ氏の解説に対する注釈として園 (1992) の第5節がある。)

さらに彼らは(標本抽出の)「任意停止の問題」について意見をかわすこととなる。つまり、観察値を得た「あと」で、問題となっている未知固定の母数についてその観察値が分析者へと伝えようとするその「内容」は、いわゆる尤度関数によって「全て」表現されているのだと主張する「尤度原理」によれば、統計的推論と

いうものは、観察の結果としてもたらされる(その分析者の)尤度関数には依存するが、「標本抽出を停止する際の動機づけ」には一切依存しないこととなるのであり、従って、標本抽出の停止は全くの「任意, optional」であっても一切かまわないのであり、言わば、「任意停止無縁の原則」というようなものが成り立つはずなのである。だが、この「原則」は、伝統的な枠組みとは、特に仮説検定の流儀とは、両立し難いのである。この問題について、しぶとい論客である Barnard とサヴェジ氏との間で緊迫した議論の応酬がなされているのである。Barnard は、事実上、「尤度原理」の唱道者の一人であったはずなのであり、従って、Barnard 自身が言及している Barnard (1947a,b) によれば、「任意停止無縁の原則」の支持者であったはずなのである。しかし Barnard は、その後、Bartlett との議論などを経て、この「無縁の原則」はある種の状況においてのみ適用すると見なすようになったのであり、結局、Barnard は、対立仮説が明確な様式において指定されている場合においては「無縁の原則」を認めるが、対立仮説に相当するものが漠然としている場合には、この「原則」の適用には無理があると判断するに至ったのである。しかしサヴェジ氏は、主観確率の立場からすれば「尤度原理」は「一般に」従うのであるから、「任意停止の無縁性」も当然「一般に」成立するはずだと判断しており、Barnard の態度の変化に不信感を多分持っているのであり、さらにサヴェジ氏は、Barnard がかつて提示した(「任意停止の無縁性」のための)簡潔な論拠を提示して、Barnard 自身に確認を迫るのである。つまり、その論拠とは、「標本を次々と抽出して行く様式を持つ(いわゆる逐次的な)実験の計画というものは、その性格を真剣に追求するのならば、結局は、その実験を行う者が実際に正に為そうと「意図している」その事柄に依存するのであり、しかも、実験遂行者のこの「意図」は、彼自身の「頭の中」に閉じ込められているのであり、その実験の「内

容」に対して判断を下さなければならない他の分析者たちにとっては、本来知ることのできないものなのであり、さらにまた、このような「意図」が、その実験の「結果」がもたらす「内容」に影響を及ぼすことなどはあり得ない」というもので、これは、もし実験結果が意味する本来の「内容」を真剣に問うのならば、その「内容」は実験の「その」結果には当然依存するが、実験遂行者の「意図」などには依存しないはずだ、という見解である。実は、サヴェジ氏は、実験遂行者の「頭の中」だけにある「意図」というようなものを持ち出すこの議論を、多分好きにはなれず、自分自身の議論として採用することなどはしていないのだが、しかし、「任意停止の無縁性」を支持する一つの論拠としては、多分容認しているのである。だが、サヴェジ氏のこの「詰問」に対して、Barnardは、自身の立場を譲ってはいないのである。(なお、この緊迫したやりとりにおいて、E.S.P.の、つまり extrasensory perception の、「存在」に関する検定が言及されている。)

さらにその後、Barnardとサヴェジ氏との間で、対立仮説の「全て」が明確な様式において指定されているとは限らない場合の主観確率及びベイズの定理の応用可能性について、緊迫した議論がかわされているのである。サヴェジ氏は、対立仮説の「全て」を列挙したいのならば、「その他の場合、something else」という（列挙されていない「仮説」の「全て」を捕える、catch-all）「仮説」を導入すれば良いのだと主張して、主観確率に基づく推論が、通常は「「その他の場合」が通用しないとするのならば」という「条件つき」で為されている様子を、簡潔に例示するのである。つまり、例えば、「californiumの融点はいかなるものか」という問いを考えてみると、この「問い」は、可能な「仮説」の「全て」が、（融点となり得る）温度を一つづつ指定することによって、尽くされる「はず」だという「想定」に基づいているで「あろう」が、しかし実際には、例えば、「californiumの

いかなる同位体を問題にしているのか」とか、「いかなる気圧の下で問題の融点を求めようとしているのか」という問いを持ち出してみればわかるように、始めの「問い」は、多くの「仮説」を暗黙の内に隠蔽しているのである。だがさらに、californiumは融解することなしに昇華するかもしれないのであり、あるいはガラスのように振る舞うかもしれないのである。このように、何か別の「仮説」を誰かが敢えて口に出すことの可能性を否定することなどは、実際にはできないのであり、さらには、我我は、但し、我我に何か新しい事柄を発見する傾向が多少なりともあるのだとした上でだが、問題の「融点」をなんとか測定しようとする試みを通して、californiumに対しては結局「融点」という概念が直接には当てはまらないのだということを「示す」と「見なせる」ような、かなりの「証拠」に到達するかもしれないのである。だが、ベイズの定理は、「「融点」に対応している温度が現実には「存在」している」という「条件」が与えられているとした上で、この「条件」が与えられている場合の事前分布と、（温度計がもたらす）観測値が与えられている場合の（可能な「融点」の関数としての）尤度関数とに基づいて、この「条件」が与えられている場合の（未知固定の「融点」に対する）事後分布を、もたらすことであろう。しかもこの際注意すべきことは、「「融点」に相当するものはなんら「存在」しない」という「仮説」に対する事前確率も、「「融点」が「存在」する」という「仮説」とは両立しない「仮説」の関数としての（温度計がもたらす観測値に対する）尤度関数も、このベイズの定理による計算には「直接には」入ってこないということなのである。しかし、Barnardは、サヴェジ氏のこのような議論に決して満足していないのであり、ベイズの定理の応用可能性に対する不信感を保持しているのである。

さらにまたサヴェジ氏は、確率測度の完全加法性を公理として要請する立場を退けて「原理

上は「全て」の事象に対して「確率」が付加できるのだ」とする、de Finite の見解を支持する発言をしているのだが、これに対して Barnard は、Borel(1926)に言及しつつ、三次元空間における「球面の分割」(即ち、二次元球面の分割)に関する Felix Hausdorff(1914)の古典的な例を引用して、de Finetti の見解を「実行する」ことが見掛けほど容易ではないことを「確認」しているのである。

さらに続いて、討論者の間で「無作為化の問題」が議論されている。つまり、(主観確率の概念に基づく)狭義の Bayesian point of view からすれば、無作為化という作業を論理的に正当化することは困難なのだが、「常識的には」、無作為化は、その実験を行う者のみならず他の人人に対しても、その実験から得られるデータを十分に説得力のあるものにするために役立つはずであり、さらには、実験の過程に混入するかもしれない(例えば、実験の遂行者による無意識的な「好み」による)「思いもよらない」偏りを除去することによって、その実験の精度を増加させ得る「はず」なのである。だが、このような「常識的な」見解に対して、サヴェジ氏は、レクチャーでも言及しているように、率直な疑念を持つようになったのである。彼は、Cox による(「常識的な」見解に基づく)問いかけに対して、自身のこのような疑念が最初に「結晶化した、crystallized」のは、1952年の夏の Sir Ronald Fisher との会話においてであったと述べている。そこでサヴェジ氏は、実験計画においてラテン方陣を「無作為に」抽出する際に、Knut-Vik square (つまり、各行において各数字を二こまずつ先へと進める操作を、冒頭の行から反復して行うことによって形成される方陣)が「たまたま」得られたならば、あなたはどうするのかと、Sir Ronald に聞いたのだが、Sir Ronald の答えは、方陣の無作為抽出をやり直すこととなるであろうが、理念的には、極端に規則的な配列を持つ方陣を排除するような理論が求められるべきである、というもので

あった。その後サヴェジ氏は、伝統的な枠組みにおいてこの無作為化の問題点を考察している統計家たちがいることに気づくのだが、しかし、無作為化に対する彼の疑念が弱まることはなかったのである。

さらにまた、無作為化は、実験の「計画」において「有用である」とされているのだが、しかし、実験結果を「分析する」ための方法を選択する際には、通常は、利用されないのである。このことについて、サヴェジ氏は Cox と議論したのだが、結局これは、誰にとっても「ほとんど」適切のように思われるであろうような「妥協的な」分析方法を見出すために、敢えて「チャンスに訴える」ということが、通常は、必要とされないからなのであり、つまり原理上は、各各の分析者が、「これが最善である」と自身が判断する分析方法を自身で選択して、問題の分析を行えば良い「はず」なのであり、さらには、分析方法で他者との「妥協」が試みられるのならば、実験によってせっかく得た知識の幾らかを失うこととなってしまうかもしれないのである。ところで、「主観論者から見た無作為化の目的というのは、既に得られている証拠の幾らかを、分析方法を単純化するために意図的に捨て去ることなのだ」という Good の見解に対して、サヴェジ氏はほとんど「本能的に」、That is a terrible crime, to throw away evidence., と答えている。また、さらに彼は、「小さな」しかも「種々の性質の個体から成る」(実験動物などの)グループに基づく実験を行うなどということは、そのようなグループを選ぶことが實際上困難なので、現実には不可能であるだろうと指摘して、このような「小」標本の場合に、いわゆる信頼区間によって説得力のある測定値を獲得することなどはまず無理であると、注意を促しているのである。

## 10. 討論のまとめ

ところでサヴェジ氏は、この討論を締め括る

ように促されて、ここでの幾つかの論点のわかりやすい要約を行っている。つまりまず彼は、「正に自分自身の「事前の」確率が良くわからないのだ」という苦情に対して、「事前の」個人的確率が、現実には、漠然としたものであることを認めた上で、従って、彼が唱道している個人的確率の理論が、実際上は、問題があることを認めた上で、しかし、この個人的確率の理論を、我我は、用心深く、しばしばコンセンスによってチェックしつつ、とにかく利用して行くべきなのであるという、自身の見解を述べるのである。そして、標本の大きさが「小さすぎる」場合には、実験というものが（その実験結果の）分析者たちを板挟みの状況に置くことも当然起り得るのであり、従って、我我は、自分自身がそのような状況に置かれることを覚悟しなければならないのであり、いかなる結論を下せば良いのかが自分たちにはよくわからないという状況は、いわゆる「正確な、exact」理論や規則を採用することによっては逃れることができない、紛れもない一個の現実なのであると、警告するのである。なお、このような発言に見られるように、サヴェジ氏は、いわゆる小標本理論の有用性のその根拠に対して、「常識的な」不信感を保持しているのである。

次に、「バイズ統計学というものは、幾つかの問題を取り扱う際には適切であるかもしれないのだが、他の問題に対しては適用すべきではないのではなかろうか」という疑念に対して、彼は、人人を引きつける力を持続的に保持している一方で、個人的確率とそれに基づくバイズの定理とを利用することによって（これらの利用を拒絶する場合と比較して）より良く理解されることがあり得ない、というような統計的手法に自分はいまだに出会ったことがないのであり、それ故に、統計学に関する事柄を、Bayesian view が適合する領域とそうではない領域とに分割して考えるなどというやり方が必要であるとは思われないと、率直に述べるのである。ま

た、さらに彼は、「主観的な」方法が満足な答えを与えることができないような状況が現れて、結局、質的に異なる二つの統計的状況が存在するようになったとしても、「主観的な」方法に替わり得るものが存在するとは、もはや自分は信じていないのだと、断言するのである。そして、ある広く知られている幾つかのノンパラメトリックな手法が「当てはまる」状況において、正に尤度関数の概念がうまく機能しないことを十分に承知した上で、自分は、これらの手法の各々が、Bayesian validation を持つこととなるか、あるいは結局の所、統計的推論のための方法としては illusory value を持つに過ぎないことがわかるはずだと、結局期待するようになったのだと、彼は言い切るのである。

なおサヴェジ氏は、このような強靱な信念を語った後に、伝統的な枠組みでのいわゆる信頼区間を利用する方法が、区間による推定という問題を真剣に取り扱うのならば、「主観的な」方法に取って代わるものなどではないことを敢えて注意するのである。つまり、「事後の」主観確率に基づく推論においては、状況が適切であるのならば、（未知で固定されている）母数が（与えられている）区間に属する「主観的な」確率をかなり鋭敏に定めることができるのだが、状況が適切というわけではない場合には、例えば、未知固定の分散を推定する際に1か2の自由度のみしか利用できない場合には、「主観的な」方法は、我我に対して、（与えられている）区間にいかなる「主観的な」確率を結びつけるべきなのかについて、通常は、鋭敏な結論を提示することにはならないのであり、これは結局、非常に粗い測定は、その推論に関っている者たちの間の「意見」の相違というものを、通常は、「圧倒する」には至らないということなのである。しかし一方、伝統的な枠組みでの信頼区間の方法は（そしてフィドゥーシャル区間も同様だが）、フォーマルには、自由度1の状況ではあっても、（未知固定の）分散に対する95%の信頼区間を平然と提示するのであり、

しかも、この方法においては、各標本に対して問題の区間を構成する機械的な手順が指定されており、この機械的な手順を繰り返し利用することを前提とすれば、同様の標本抽出が反復されるで「あろう」ような場合に得られるで「あろう」ような、区間から成る系列において、(未知固定の)問題の分散を含むこととなる区間の比率が0.95に「限りなく近づく」ということが、ある数学的な様式において「保証」されているのである。だがしかし、この信頼区間の方法というものは、測定値に結びつけられている特定の信頼区間が問題の真の母数を含むということを支持して、但し、その測定値を観察した「あと」で、「あなた」は、19対1の賭け金の割合で進んで賭けを為すことだろう、などということとはなんら意味していないのである。例えば、Meccaへの巡礼者の中から「無作為に」二人を抽出する場合に、「たまたま」、身長が0.01mmしか異ならない巡礼者の対が得られたとしてみよう。この場合、Meccaへの巡礼者の身長全体に対する標準偏差を推定するために、自由度1の $\chi^2$ 分布を利用して、信頼係数が95%である(但し、下側の限界が0である)信頼区間の上側の限界を求めると、0.113mmとなるのだが、しかし「あなた」は、Meccaへの巡礼者の身長の標準偏差が0.113mm以下であることを支持して、19対1の割合で賭けをするなどということとはしないであろうし、さらには、「1対1の割合であってさえもその賭けには応じない」という「あなた」の態度によって示されるように、「あなた」は、その信頼区間を「信頼」などしないであろう。だが、信頼区間を利用することの「要点」は、本来は、得られる区間に対して「あなた」がなんらかの「信頼」の程度を結びつけて、それを解釈する所にあるはずである。このような信頼区間による方法が「まともに」正当化できないとすれば、「主観的な」方法が明確な結論には到達できないような状況において、信頼区間による手法が解法を提示するのだなどと主張することは、恐らくは中身の無いこ

とであろう。

さらに次に、「主観的な」方法は、結局「何を」公表することを、その方法の利用者に求めているのか」という「当然の」疑念に、サヴェジ氏は答えなければならないのであり、つまり彼は、「主観的な」方法を唱える者たちは、人人に対して、結局、「経験的な」研究の分析結果として(データが「語る」ことではなしに)各自の「意見」を公表することを奨励しているのではないのか、という「誤解」に答えなければ「ならない」のである。(なお彼は、このような「誤解」の例として、van Dantzig(1957)に言及している。)

例えば、(統計的な方法について相談を引き受けている)統計家と(彼に相談事を持って来る)クライアントとを想定してみると、「主観論者は、クライアントが公表しようとしている「科学的な」論述に対して、その統計家が自分自身の「意見」を書き込むことを、その統計家に対して奨励しているのだ」という「誤解」が持ち出されたりするのだが、サヴェジ氏はこの「誤解」に対して、統計家とクライアントの役割を「分離する」というやり方は、「現実の」生活がもたらした「偶然的な」瑣事なのであり、このような「分離」は本来は克服されるべきなのだと、まず自身の「意見」を述べるのである。つまり、サヴェジ氏の立場からすれば、「仮に」クライアントに、十分な時間、精力、及び才能があるとすれば、彼は自分自身にとっての統計家になり得る「はず」なのであり、さらには、理論的研究なるものの第一の目的は、一般に、十分な統計学的素養を身につけている研究者になることの「はず」なのである。だが一方でサヴェジ氏は、実際上は、相談を引き受ける統計家というのは、自身の能力をとことんまで尽くして、自身の心をクライアントの気持ちに合わせるようにして、自身とクライアントとを一体化するように努力すべきなのだと、説くのである。(なお、ここで注意すべきことは、サヴ

エジ氏が、現実には、統計的な方法に関する実に多様な相談事に誠実に応じてきたということなのであり、しかも彼は、自身のフィロソフィーに忠実であって、既成の「便利な」伝統的手法を要領よく当てはめることなどは勧めたりせずに、正にその問題となっている状況に対するオーダーメイドの助言やアイデアを提示するように、真摯に努力し続けたのである。）

さらにまた、「主観的な」方法を唱える者たちは、たとえ「科学的な」定説ではあってもそれは可能な幾つかの「意見」の内の一つなのだという態度を取るのだが、しかし、自身の研究結果を公表しようとしている科学者が何よりも優先して為すべきことは、「結局、自身は何を観察したのか」を、率直に告げることなのであり、主観論者も当然このことをわきまえているはずなのである。またさらに述べれば、その科学者は、少なくとも原理上は、「他の研究者たちが、仮に問題の実験を彼ら自身で行ったとするのなら何が起るのかを、自身と同様に知るにいたるであろうように」、自身の観察結果を告げるべきなのである。当然、このような研究報告は、実際には到底達成され得ない理念的なものではあろうが、しかし、このような理念に近づこうとする態度は、真剣な研究報告の核心となるべきである。また特に、数値的なデータというものは、できるかぎり実際のやり方で報告されるべきなのであり、ここで、データに対する多分許容されるであろう典型的な省略法は、十分統計量を用いてそのデータを縮約することである。しかし、「便利な」十分統計量は、想定されている統計的モデルを文字通りに受け入れてしまう場合においてのみ「十分」ではあっても、データを統計量によって縮約してしまう際に、想定されているモデルに対して深刻な疑念を提示し得る、一見すると「瑣細な」、(データの)傾向が失われてしまうことも当然起り得るのであり、従って、このような場合には、「便利な」十分統計量による縮約は(データの分析において深刻な損失をもたらし得るので)

回避されるべきなのである。

なお、科学者は、原理上本質的であるからというのではなく、しかし多分実際上の必要性から、そして儀礼上から、ある程度は公的な性格を持つことであろうと自身が望んでいる「意見」を、提示し得るのだが、このような科学者の議論は、「主観的な」見解を考慮すれば、(実際には、以下のように明白に述べることはないかもしれないが)次のような様式を取ることであろう。つまり、「あなたがた」は、私と同様に、我々の「事前の」意見に関する「これこれ」という側面と問題の実験に対する「これこれ」というモデルとについて同意することであろうと、私は想定している。また、ベイズの定理に従うのならば、我々は今や、「これこれ」という「意見」を全員が「近似的に」共有しているのであり、さらにまた、我々の内の誰かがこの「意見」を改訂するための基礎となるさらなるデータを保持するに至るまでは、この「意見」の共有は続くことであろう」、というものである。ここで、単純な例として、「今までの所かなり粗略に定められているある物理定数について、自分は五つの測定値を得たのだと「誰か」が報告し、しかもその「誰か」は、それらの測定値の平均 $\bar{x}$ 及び(不偏分散に基づく)標準偏差 $s$ を与えている」、という状況を考えてみよう。すると、問題の物理定数について、さらには問題の実験方法の精度について、誰も「「鋭敏な」事前の意見」などは保持していないであろうから、「仮に」問題の測定値に「偏り」が混入する可能性を無視するのならば、それらの測定値に関心を持つ誰もが、自身の「事後の」分布として、中心が $\bar{x}$ で尺度パラメータが $s/\sqrt{5}$ である自由度4の $t$ 分布に「近い」(と自身が判断する)分布を持つに至るであろうし、また、誰もがこの分布に満足することであろう。だが、当然ながら、測定値に「偏り」が混入することの可能性は実際上は無視できないのであり、このような「偏り」は、問題となっている実験の取り扱い方に重大な影響をもたらし得る

のである。つまり、「偏り」の混入の可能性が、たとえ「最善の」実験ではあっても、教科書的な議論においてはあまり考慮されていない試論的性格を、その実験に付与することとなるのである。(恐らくサヴェジ氏はここで、「これは「決定的な」実験結果なのだ」と言いたくなってしまうかもしれない人の性に対して、警告を発したかったのであろう。)

さらにサヴェジ氏は次のように注意するのである。つまり、研究者というものは、自身の現在の確信を支える「公的な」基盤というものをなんら所有することなしに、自身のいわば「直感」によって感じ取った事柄の内の幾らかを自身の同僚たちに告げる、ということを選択し得るのであり、しかもこのようなことは、しばしば為されており、また、当然のことながら、幾つかの実際的な目的に役立つのである。だが、「主観的な」方法が、つまり、ここで問題となっているベイズ統計学というものが、実験家が自分自身の「個人的な」意見を公表することを、中心的な理論的重要性を持つ行為であると見なしているのだと想像することは、全くの「誤解」なのである。むしろ実験家というものは、できれば、読者の各々が自分自身の「個人的な」意見を「最善の」状況で形成できるように、自身の実験に関する事柄を率直に公表すべきなのである。(なおサヴェジ氏は、多分、幾つかの「誤解」を解こうとしているのだが、しかし、「基礎論」における議論によって、これらの「誤解」が不合理なものとして「排除される」というわけではないのであり、また、これらの「誤解」は、紛れもなく「個人的な」意見となり得るのである。)

さらに次に、「統計的な推論というものが、他の一般に推論と呼ばれている事柄と、いかなる様式において異なるのか」という問いが問題となるのである。まずサヴェジ氏は、「統計的な推論というものは実はかなり特殊なものであり、統計学の外側ではそもそも不可能である

か、あるいは少なくとも普通ではないとされるような、ある状況を想定した上で、数学的な理論がそれに対して当てはめられているのである」という、Bartlett の強調に同意することを率直に述べたあとで、しかし、このような通常の推論と統計的な推論との差異が「どこに」存在しているのかについては、まだ議論の余地があると注意を促すのである。つまり彼は、統計学に関する数学的な理論の際だった特性は、特定されているモデルの、即ち、ここでの議論では  $\Pr(x | \lambda)$  と表記されている特定の関数の、その役割にあるのだと(ひとまずは多数派的に)判断するのである。また、このモデルは、通常は、母数  $\lambda$  が与えられている場合のデータ  $x$  の「確率」を  $\lambda$  の関数として表現したものであると、解釈されるのであり、少なくとも伝統的な枠組みにおいては、このモデルは、「公的な」合意を反映していると期待されているのである。(なお、このような状況設定は、いわゆるノンパラメトリックな場合にも当てはまるのである。)

しかし、「良く定義されている「公的な」モデル, a well-defined public model」というものが、統計的な推論の数学的理論における特性だとしても、それがどの程度まで統計学の実践にとって本質的なのかとか、それがどの程度まで習慣や慣例によって誘導されているのかという問い掛けへの答えが、明白であるというわけではないのである。例えば、「あなた」が「尤度原理」を受け入れるのならば、「あなた」の統計的な推論において「実際に」必要なのは、「 $\lambda$  が与えられている場合の  $x$  の「確率」ではなく、 $x$  が与えられている場合の、母数  $\lambda$  の尤度関数」であるはずである。さらにまた、実際上は、モデルというものは試論的な近似物として取り扱われるのが普通なのであり、従って、「公的で厳正な存在」などではなく、さらにまた我々は、いつの日か、このような「便利な」近似物の利用という段階を乗り越えて、我我自身をより精確にしかもより満足できる程度

に表現するための方法を、学ぶに至るかもしれないのである。

ところで、現実的なモデルの「公的な」性格は、少なくとも時々、多数回にわたる試行や混沌の中から立ち現れ得る統計的な秩序というものに、関りを持っているのである。しかし、試行の結果を生み出す際に利用される器具や装置が持つ「対称的である」と呼びたくなるような仕組みが、多数回にわたる試行というようなものを持ち出すことなしに、「公的な」合意を引き起こすこともあり得るのである。

そこで、「多数回にわたる試行との関りにおいてのみモデルを議論する」という立場から距離を置くとすれば、一枚のペニー硬貨を三回投げ上げることによってその硬貨の「ゆがみ」に関する事柄を推論するという問題は、統計的推論の問題であるように思われることだろう。いわゆる小標本法が高高と掲げられていた頃には、このような問題や、自由度が1や2の場合に分散を推定する問題が、統計的な問題なのだという主張に対して、敢えて疑問を呈することは、ほとんど不可能であったことだろう。だが、多分今日では、極端に「小さな」標本に基づく諸問題というのは、なるほどそれらは、徐々に標本の大きさを増加させるに従って、「十分な」大きさの標本に関する問題へと変化することではあろうが、統計学の主要な道筋に属するものなどではないのだと「感じる」人人が、サヴェジ氏自身を含めて、少なからず存在しているはずなのである。このようにサヴェジ氏は、「精密測定の実理」を考慮した上で、いわゆる小標本法の（方法としての）基盤に対して、かなり厳しい態度をとっているのである。

一方、「精密測定の実理」が当てはまるような諸問題は、極端に重要な性質を持っているのであり、つまり、そのような諸問題は、実際上は、個人に依存する差異がほとんどないような、つまりほとんど「同じ」、「事後の」意見へと通じているのであり、いわば「公的な」合意が成立するのである。また、いわゆる「検定」

に関する諸問題においても「公的な」合意が成立し得るのだが、その「合意」の様式は、「精密測定の実理」が関る場合程には微妙なものではないのである。つまり、「検定」というものは、「仮説」を支持する、あるいはそれに対立する、「圧倒的な」実証的証拠を提示し得るのだが、しかし、その「検定」に関する人人を、ほとんど同じ「事後の」オッズを持つような状況に置くというような代物ではないのである。さらにまた、「ある幾つかの実験が、実際上の「公的な」合意を誘導する」という場合に利用される「精度」という事柄は、しばしば、大数の法則やその類似物にその存立の源を持っているのであり、しかも多分、論理的な分析をとことん進めるのならば、このような「精度」というものの淵源は他には存在しないはずである。だがしかし、あくまでも原理上はということだが、高い「精度」を持つことが既に知られている器具による「ただ一度」の測定が、「各人」に対して「同じ」正規的な「事後の」分布を誘導することとなるということは、ここで注意しておくだけの重要性があるように思われるのである。（なお、「高い」精度を持つということを「保証」するためには、実際には、極めて「多数の」実験が為されなければならないはずである。）

さらに次に、「ビジネスに関する問題を取り扱う際に都合が良いかもしれない統計的な方法と、科学にとって適切である統計的な方法とが存在しており、それらが質的に異なるのだとしてもかまわない」という見解や、「推論の問題と決定の問題とを、明白に「分離」して取り扱うべきなのだ」という主張があるのであり、サヴェジ氏は、このような言わば二分法的な流儀に対しては、不信感を持っているのである。例えば、（主観確率に基づく理論というような）ある種の統計的な理論はビジネスにとってはうまく当てはまるかもしれないが、しかし（「客観」的な厳密性が追求されるべき）科学と呼ばれる領域にはふさわしくないのだ、という言い

分があるのである。しかし、諸諸の実務的な事柄に対して（少なくともフィロソフィカルな意味で）正当なある統計的理論が、科学にとっては不適切なのだ、というようなことを示す証拠は、いまだに持ち出されてはいないようなのであり、逆の場合も同様なのである。また実際の所、高邁な志を保持している実験室においても、ビジネス的と言ってよい多くの種類の考察すべき事柄が、例えば、（多様な諸問題に対して）その実験室の時間や資金をどのように配分すべきなのか、というような事柄が、問題となり得るのであり、さらには、その実験室の関係者たちは、このような「ビジネス的な」事柄を真面目な考察の対象から「はずす」べきではないのである。結局、「現実」なるものへの「冷静な」対応の重要性を考慮すれば、少なくともフィロソフィーのレベルにおいては、ビジネスと科学との相違にこだわった（統計的理論に対する）「区別」の導入には、かなりの無理があるようである。

また、「推論, inference」と「決定, decision」との「区別」についてだが、ここで問題としている「主観的な」方法を唱える者にとっても、つまり狭い意味での Bayesian にとっても、このような「区別」は意味を持つのであり、実際、「推論」とは「事後の」確率に到達するための「アート, art」であり、一方、「決定」は、直接的に「行為, action」に関するものである。だが、「この二つの概念が「調和」することなどはあり得ないのだ」、というわけでは決していないのであり、つまり、「推論」は「決定」を行う際に有用であり、また、「推論」において重要な役割を演じている「事後の」確率は、全ての「確率」がそうなのだが、原理上は、（自身が差し出す「賭け金」を決めるとか、自身にとっての「値段」を定めるとかいうように）「為され得る」決定によって「定義」されているのである。（なお、サヴェジ氏の思索には、「当たり前」のように持ち出される二分法的な枠組みを、冷静にしかも厳しく、論理的に検討し直すという傾

向があるように（小生には）思われるのである。）

そして最後にサヴェジ氏は、「「確率」を幾つかの種類に類別して使い分ければそれで良いのだ」という流儀に対して、「そのような「使い分け」は本来必要がないはずだ」という自身の持論を率直に確認するのである。つまり彼にとっては、主観確率こそが、より精確には「基礎論」において提示されている「個人的確率, personal probability」こそが、（「合理性」の試練に耐えられる）「厳密な」意味を持つ、唯一の「確率」なのである。

Keynes 卿や Sir Harold Jeffreys が議論している「確率」に関する「必要性的見解, necessary views」は、しばしば、なんらかの対称性に注目して、さらにはなんらかの変換群に関して不変な測度を利用して、「確率」を定めようとしたり、あるいは、「何も知らない状態」というような「もの」を「客観的に」表現しようとしたりするのだが、しかし、このような見解が論理的な検討に耐えられるとは思われないのであり、この見解に基づく「確率」を擁護する議論で、明晰な理解をとにかく欲している者を満足させ得る程のものは、いまだに現れていないのである。（だが、一方でサヴェジ氏は、Jeffreys が統計学の基礎づけに対して大きな貢献をしたことを、十分に認めているのである。）

また、いわゆる「頻度論的な」確率の「存在」を拒否することは、「世間的な」常識に反しているように思われるかもしれないが、しかし、「物事の本質を見事に突いている」フィロソフィーというものは、少なくとも時々、「世間的な」常識に反するものなのであり、さらには、既に de Finetti が、我がが通常頻度というものに基づいて「確率」を語りたくなってしまうような状況に対して、正に「主観論的な」分析を、注意深く成し遂げているのである。つまり、「主観論的な」見解によれば、頻度に基づいて「確率」を「定義」しようとする営みの背後にある

「真理」は、主観確率を用いて明晰に説明できる一つの「現象」なのである。また一方、「必要性的見解」によってなんとか「確率」を「定義」しようとする営みの背後にあるであろう「真理」への洞察を、「個人的確率」が与え得るのだと、主観論者らは信じるのである。

「主観的な」理論というものが、「確率」概念を明白な形式によって捕えようとする他の試みを理解しかつ利用する力を持っているという事実が、この理論が正しい道筋にあることの恐らくは証拠なのだとしても、多分誤りではあるまい。

## 11. おわりに

サヴェジ氏が41年前に行ったレクチャーの読み取りを以上で終わるのだが、このレクチャーは今日でもなお十分に通用する問題提起を行っているのである。当時「世間の」常識であった「伝統的な」流儀は、今日でもなお「世間の」常識であると言って良からうし、一方、ベイズ統計学の方法が、既知の手法として広く利用されることとなったのも事実である。だが、サヴェジ氏が議論している「統計学の基礎づけ」に関する幾つかの事柄は、今日でもなお真剣に議論されるべきであると小生は考える。サヴェジ氏は、個人論的見解と言うコモンセンスによって個人的確率を導入したのだが、このコモンセンスの産物が、「世間の」常識と堂堂と拮抗するのである。サヴェジ氏の深い思索は、今日でもなお生きている。

2000年12月22日(金)

## 参考文献

- Anscombe, F. J., "Fixed-sample-size analysis of sequential observations," *Biometrics*, 10, 89-100, 1954.
- Bahadur, R. R., and H. Robbins, "The problem of the greater mean," *Annals of Mathematical Statistics*, 21, 469-487, 1950.
- Barnard, George A., "A review of *Sequential Analysis* by Abraham Wald," *Journal of the American Statistical Association*, 42, 658-669, 1947a.
- Barnard, George A., "The meaning of a significance level," *Biometrika*, 34, 179-182, 1947b.
- Borel, Émile, "À propos d'un traité de probabilités," *Revue Philosophique*, 98, 321-336, 1924; reprinted in *Pratique et Philosophie des Probabilités* by Borel, Gauthier-Villars, Paris, 1939; translated in Kyburg and Smokler (1964). これは Keynes (1921) に対する論評であり、サヴェジ氏によれば、個人的確率の現代的概念に関する最も初期の説明になっているとのことである。なお、これは Kyburg and Smokler (1980) には入っていない。
- Borel, Émile, *Traité du Calcul des Probabilités*, Tome II, Fasc. 1—*Applications à l'Arithmétique*, Gauthier-Villars, Paris, 1926.
- Borel, Émile, *Les paradoxes de l'Infini*, Gallimard, Paris, 1946. ここでも「二次元球面の分割」に関する Hausdorff (1914) の古典的な例と「確率」とが議論されている。さらに 労作 Czyż (1994) に注意すべきであろう。
- Bridgman, P. W., "Science: public or private," *Philosophy of Science*, 7, 36-48, 1940.
- Czyż, Janusz, *Paradoxes of Measures and Dimensions Originating in Felix Hausdorff's Ideas*, World Scientific Publishing Co., River Edge, NJ, 1994. この書物の第1章は The paradox of the sphere であり、その第1節で、Hausdorff's decomposition of the sphere が議論されている。なお、著者の Czyż 氏は、Mathematical Institute, Polish Academy of Science, Warsaw, に所属している。
- de Finetti, Bruno, "La prévision: ses lois logiques, ses

sources subjectives," *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 7, 1-68, 1937. Translated in Kyburg and Smokler (1964).

Edwards, Ward, Harold Lindman, and Leonard Jimmie Savage, "Bayesian statistical inference for psychological research," *Psychological Review*, 70, 193-242, 1963. ここでは principle of stable estimation が議論されている。

Elveback, L., "Actuarial estimation of survivorship in chronic disease," *Journal of the American Statistical Association*, 53, 420-440, 1958.

Fisher, Ronald Aylmer, "Two new properties of mathematical likelihood," *Proceedings of the Royal Society, Series A*, 144, 285-307, 1934. これは Fisher(1950) の Paper 24 である。

Fisher, Ronald Aylmer, *Contributions to Mathematical Statistics*, Wiley, New York, 1950. これは Fisher 自身が選びかつ注釈している論文集であり, P. C. Mahalanobis による Fisher の伝記が収められている。また, この論文集への論評として Neyman(1951)がある。

Fisher, Ronald Aylmer, "Statistical methods and scientific induction," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 17, 69-78, 1955.

Fisher, Ronald Aylmer, *Statistical Methods and Scientific Inference*, Hafner, New York, 1956. これには次の邦訳がある。フィシャー, R. A., 著, 渋谷 政昭, 竹内 啓 訳, 『統計的方法と科学的推論』, 岩波書店, 東京, 1962。

Good, Irving John, *Probability and the Weighing of Evidence*, Charles Griffin and Co., London, and Hafner Publishing Co., New York, 1950.

Grundy, P. M., and M. J. R. Healy, "Restricted

randomization and quasi-Latin squares," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 12, 286-291, 1950.

Hausdorff, Felix, *Grundzüge der Mengenlehre*, de Gruyter, Leipzig, 1914. さらに労作 Czyż (1994) に注意すべきである。

Jeffreys, Harold, *Scientific Inference*, Cambridge University Press, 1931; *Second Edition*, 1957; *Third Edition*, 1973.

Jeffreys, Harold, *Theory of Probability*, The Clarendon Press, Oxford, 1939; *Second Edition*, 1948; *Third Edition*, 1961.

Jones, H. L., "Inadmissible samples and confidence limits," *Journal of the American Statistical Association*, 53, 482-490, 1958.

Kaplan, E. L., and P. Meier, "Non-parametric estimation from incomplete observations," *Journal of the American Statistical Association*, 53, 457-481, 1958.

Keynes, John Maynard, *A Treatise on Probability*, Macmillan, London, 1921; *Second Edition*, 1929; reprinted in 1962, Harper & Row, New York.

Koopman, Bernard Osgood, "The axioms and algebra of intuitive probability," *Annals of Mathematics, Series 2*, 41, 269-292, 1940a.

Koopman, Bernard Osgood, "The bases of probability," *Bulletin of the American Mathematical Society*, 46, 763-774, 1940b. これは Kyburg and Smokler(1964, 1980)に収められている。

Koopman, Bernard Osgood, "Intuitive probabilities and sequences," *Annals of Mathematics, Series 2*, 42, 169-187, 1941.

Kyburg, Henry E., Jr., and Howard E. Smokler (eds.), *Studies in Subjective Probability*, Wiley, New York, 1964.

Kyburg, Henry E., Jr., and Howard E. Smokler (eds.), *Studies in Subjective Probability*, Krieger, New York, 1980. この Krieger 版は Wiley 版とはかなり内容が相違するが, de Finetti(1937)の英訳は引き続き収められており, またサヴェジ氏の急逝後に公表された Savage(1971)が新たに収録されている。なお, これら二つの論文は, 確率概念に対する古典的傑作である。

Lehmann, Erich Leo, *Testing Statistical Hypotheses*, Wiley, New York, 1959. これには次の邦訳がある。レーマン, E. L., 著, 渋谷 政昭, 竹内 啓 訳, 『統計的検定論』, 岩波書店, 東京, 1969。

Lindley, Dennis Victor, "Professor Hogben's 'Crisis'—A survey of the foundations of statistics," *Applied Statistics* (これは後に *Journal of the Royal Statistical Society, Series C*, となる), 7, 186-198, 1958.

Lindley, Dennis Victor, "The use of prior probability distributions in statistical inferences and decisions," *Proceedings of the Fourth [1960] Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability, Volume I*, edited by Jerzy Neyman and E. L. Scott, 453-468, University of California Press, Berkeley, 1961.

Neyman, Jerzy, "Fisher's collected papers," *Scientific Monthly*, 42, 406-408, 1951.

Pitman, E. J. G., "The estimation of the location and scale parameters of a continuous population of any given form," *Biometrika*, 30, 391-421, 1939.

Ramsey, Frank Plumpton, "Truth and Probability" (1926), and "Further considerations" (1928), in *The Foundations of Mathematics and Other Logical Essays*,

edited by R. B. Braithwaite, The Humanities Press, New York, 1950. 1926年のこの古典的論述は Kyburg and Smokler(1964, 1980)に収録されている。

Savage, Leonard Jimmie, *The Foundations of Statistics*, Wiley, New York, 1954. *Second Revised Edition*, Dover, New York, 1972. これは「基礎論」であり, 統計学へのサヴェジ氏の偉大な貢献である。なお, 園(2000年6月)にサヴェジ氏の略伝がある。

Savage, Leonard Jimmie, "Bayesian statistics," pp. 161-194 in *Recent Developments in Decision and Information Processes*, edited by Robert E. Machol and Paul Gray, Macmillan Co., New York, 1962. ここでは Lindley-Savage argument が紹介されている。また, この講義は Savage(1981)に収められている。なお, 園(1994年3月)を参照して頂ければ幸いである。

Savage, Leonard Jimmie, "Elicitation of personal probabilities and expectations," *Journal of the American Statistical Association*, 66, 783-801, 1971. 当然 Savage(1981)に収録されている。

Savage, Leonard Jimmie, *The Writings of Leonard Jimmie Savage—A Memorial Selection*, The American Statistical Association and The Institute of Mathematical Statistics, Washington, D. C., 1981.

Savage, Leonard Jimmie, et al., *The Foundations of Statistical Inference: A Discussion*, Wiley, New York, 1962. 多様な論者が自身の意見を率直に言い合っている。ここで問題とした1959年のサヴェジ氏のレクチャーはこの冊子の冒頭に収められている。

Schlaifer, Robert, *Probability and Statistics for Business Decisions*, McGraw-Hill, New York, 1959.

Simon, Herbert Alexander, "Prediction and hindsight as confirmatory evidence," *Philosophy of Science*, 22, 227-230, 1953.

Stein, Charles, "A two-sample test for a linear hypothesis whose power is independent of the variance," *Annals of Mathematical Statistics*, 16, 243-259, 1945.

van Dantzig, David, "Statistical priesthood: Savage on personal probabilities," *Statistica Neerlandica*, 11, 1-16, 1957.

Wallace, D. L., "Conditional confidence level properties," *Annals of Mathematical Statistics*, 30, 864-876, 1959.

Welch, B. L., "On confidence limits and sufficiency with particular reference to parameters of location," *Annals of Mathematical Statistics*, 10, 58-69, 1939.

Whittle, P., "Curve and periodogram smoothing," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 19, 38-47, 1957.

Whittle, P., "On the smoothing of probability density function," *Journal of the Royal Statistical Society, Series B*, 20, 334-343, 1958.

Yates, F., "Bases logiques de la planification des expériences," *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 12, 97-112, 1951a.

Yates, F., "Quelques développements modernes dans la planification des expériences," *Annales de l'Institut Henri Poincaré*, 12, 113-130, 1951b.

園 信太郎, 「サヴェジ書における objectivistic views 批判について」, 『経済学研究』(北海道大学), 第41巻第4号, 1(287)-21(307), 1992年3月。

園 信太郎, 「サヴェジ, レオナルド ジミィ, による1961年の講義における個人的確率について」, 『経済学研究』(北海道大学), 第43巻第4号, 176(603)-187(613), 1994年3月。なお, この講義の内容は Savage(1962)として公表されている。

園 信太郎, 「サヴェジ氏の略伝」, 『経済学研究』(北海道大学), 第50巻第1号, 164(164)-180(180), 2000年6月。

園 信太郎, 「客観論的見解の三つの問題点」, 『経済学研究』(北海道大学), 第50巻第2号, 99(279)-105(285), 2000年9月。

園 信太郎, 「サヴェジ氏の未公表の後書について」, 『経済学研究』(北海道大学), 第50巻第3号, 32(384)-55(407), 2000年12月。この拙論の文献表は, ここで読み取ったサヴェジ氏のレクチャーにも関りがあると思われる。

ラムジー, F. P., 著, D. H. メラー編, 伊藤 邦武, 橋本 康二 訳, 『ラムジー哲学論集』, 勁草書房, 東京, 1996年5月15日。この書物は, Ramsey, F. P., *Philosophical Papers*, edited by D. H. Mellor, Cambridge University Press, 1990, の全訳であり, Ramsey (1926, 1928)の訳が収められている。