HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2007年度 混沌系工学特論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Description	http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/konton2007/konton2007.html
Issue Date	2007
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/32315
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	konton2007_2.pdf, 第2回講義ノート

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

混沌系工学特論 講義ノート #2

担当：井上 純一 (情報科学研究科棟 8-13)

URL：http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

平成 20 年 1 月 7 日

目 次

2 金融データと確率過程 **11**

2.1 確率モデルとその統計的性質 12

2.1.1 中心極限定理 — 正規分布への収束 — 14

2.2 安定分布 14

2.2.1 正規分布とローレンツ分布の安定性 16

2.2.2 レビ分布とレビ過程 17

2.2.3 カオス写像を用いたレビ分布からのサンプリング 18

2.3 ボラティリティ変動モデル 19

2.3.1 ARCH 過程 19

2.3.2 GARCH 過程 21

2 金融データと確率過程

ここでは為替レートなどの金融時系列データを確率過程として扱い, それを人工的に再現するような確率モデル, その確率モデルを特徴つける基本的な統計量について学ぶ. 前回のゲーム理論で述べたように, この種のレート変動をミクロな立場から説明することが我々の最終的な目標であるが, レート変動の時系列の統計的性質を詳細に調べることによっても有益なマクロ情報を得ることができる. 例えば, 図 6 はある確率モデルを用いて為替レート (例えば 1 ドル当たり何円になるかという値段) の時系列: X_t を計算機上で人工的に生成したものであるが, 具体的には, このレート変動が前回の講義でみたソニー銀行の円ドル為替レートの時系列をよく再現しているか否か, というのがここでの問題になる. その際, 我々が考えなければならないのは, 確率モデルの生成する時系列と実データの何を比較したらよいのか, その観点で両者の差が大きい場合には確率モデルの何を修正したらよいのか, またそのような確率モデルの適切な候補に対して, 工学的にどのような応用が考えられるかということなどである.

今回と次回 (1/21) の前半では, そうした金融データの確率モデル化を考える際に必要となる確率過程の復習をしておくことにする. その際, あまり数学的に厳密な議論に踏み込むことはせず, 主に計算機を用いた数値実験を通じて直観的な理解を深めることを目指す. 時間があれば各節で説明されている例を自分でプログラミングを行うことにより確認しながら読み進めていくと理解が深まるものと思われるし, そうされることを期待している.

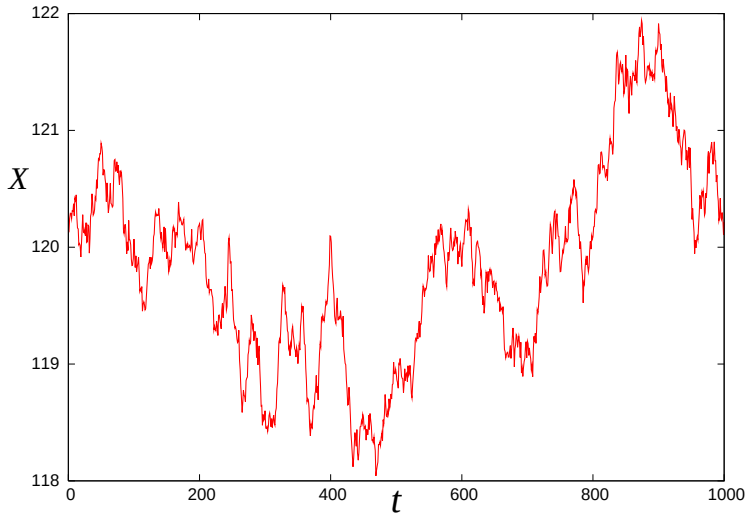


図 6: 確率モデルによって人工的に生成した為替レート変動

2.1 確率モデルとその統計的性質

さて, 図 6 に載せた為替レートがどのような確率モデルから生成されたものなのかを調べるために, 時刻 t でのレート X_t と次の時刻でのレート X_{t+1} の差を**リターン**として

$$Y_t \equiv X_{t+1} - X_t \tag{21}$$

で定義しよう. このとき, X_t が確率的に変動するならば, Y_t も確率変数であるはずなので, ここでのレート変動は (21) 式を書き直した漸化式: $X_{t+1} = X_t + Y_t$ で与えられ, 直前のレートの値に Y_t なる「ノイズ」が加わったものとして逐次生成されるものとする. 各時刻で直前のレート値に加わるノイズ Y_t が各時刻で独立に同一の確率分布から生成されているものと仮定すれば, Y_t の統計的性質を調べるにはこの量 Y_t を $t = 0$ から $t = 20000$ 程度まで観測し, そのヒストグラムを取ってみればよい. 具体的には図 6 を与えるデータ:

```
1 120.074612
2 120.178779
3 120.180312
4 120.130503
...........
.........
.......
```

に対し, $Y_1 = 120.178779 - 120.074612 = -0.567341$ などを算出し[1], Y に関するヒストグラムを作成する. その結果を図 7 に載せよう. この図の実線がそのヒストグラムである. ただし, ここではこのヒストグラムを確率分布にするために適当な規格化を施していることに注意されたい. 一方, 図中の実線は標準偏差が $\sigma = 0.1$ の正規分布である. この図から明らかに両者は良く一致している

[1] このデータの第 1 列はレートが変動した時刻を表す. この場合, 一定間隔ごとにレートが変動するが, 実際の金融データではこの様にならない場合が多い.

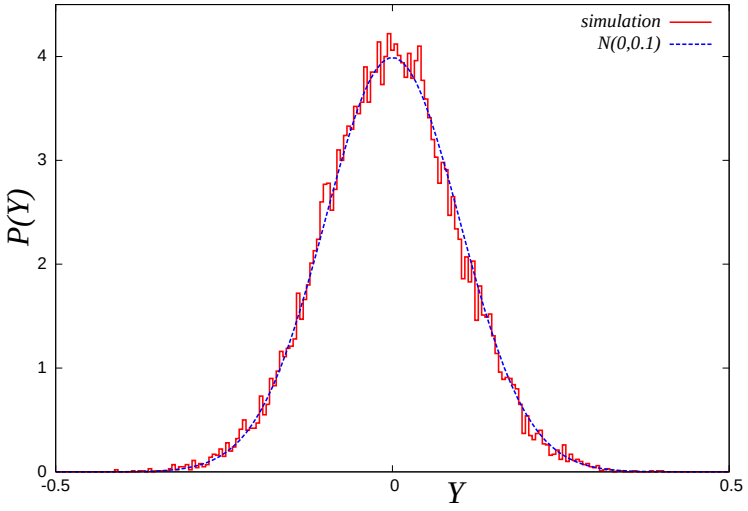


図 7: リターン Y のヒストグラム. 実線は標準偏差 $\sigma = 0.1$ の正規分布.

ことがわかる. 従って, 図 6 で人工的金融データ X_t は次の確率モデルから生成されたものであることがわかる[2]

$$X_{t+1} = X_t + Y_t, \quad P(Y_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{Y_t^2}{2\sigma^2}\right), \quad \sigma = 0.1 \text{ (時間によらない一定値)} \tag{22}$$

このとき (22) 式は N ステップ後のレートの値 X_N として次のように書き直すことができることに注意しょう.

$$X_N \quad = \quad \sum_{t=0}^{N-1} Y_t \tag{23}$$

ここで, 簡単のため, 初期条件として $X_0 = 0$ としたことに注意されたい. また, ここでの解 X_N 自身も確率変数になっていることも注意しなければならない. よって, 確率変数 X_N の統計的性質, つまり, X_N の従う分布がわかれば図 6 に示した人工的為替レートの様々な統計量を計算することができる. そこで, まずはこの X_N の平均値と分散を計算してみよう. まず平均値は

$$E[X_N] \quad = \quad E\left[\sum_{t=0}^{N} Y_t\right] = E[Y_0] + E[Y_1] + \cdots E[Y_{N-1}] = 0 \tag{24}$$

となる. ここに $E[\cdots]$ は確率変数 $\cdots$ の平均を意味する. また分散は平均値がゼロであったことを考慮すると

$$E[X_N^2] \quad = \quad E\left[\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l=0}^{N-1} Y_k Y_l\right] = \sum_{k=0}^{N-1} E[Y_k^2] + 2\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{l\neq k} E[Y_k]E[Y_l] = N\sigma^2 \equiv \sigma_N^2 \tag{25}$$

となる. 従って, 確率変数 X_N は平均ゼロ, 分散 $\sigma_N^2 = N\sigma^2$ を持つことになる. すなわち, X はその平均値からステップ数の平方根 $\sim \sqrt{N}$ で離れていくというランダムウォークとして良く知られた結果が得られる. ここで述べた確率過程 (特にその連続時間版) は**ウイナー過程**と呼ばれている.

[2] ここでは人工的にそのような確率モデルでレート変動を生成したので, この一致は当然である. 実際の金融データでは, 後にみるように (21) 式の妥当性, 各時刻での分布の独立性, 同一性などを吟味しながら実データを説明する確率モデルを組み立てなければならない.

2.1.1 中心極限定理 — 正規分布への収束 —

中心極限定理によれば, 確率変数 X_N をここで得られた標準偏差 σ_N で割ったもの

$$Z_N \equiv \frac{X_N}{\sigma_N} = \frac{Y_0 + Y_1 + \cdots + Y_{N-1}}{\sqrt{N}\sigma} \tag{26}$$

は $N \to \infty$ で平均ゼロ, 分散 1 の正規分布 $\mathcal{N}(0,1)$ に従う. つまり,

$$P_G(Z_\infty) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{Z_\infty^2}{2}\right) \tag{27}$$

である. ここで N を「ステップ数」とみなすと, 確率変数 Z_N の従う分布はステップ数とともに

$$P(Z_1) \to P(Z_2) \to P(Z_3) \to \cdots \to P(Z_N) \to \cdots \to P_G(Z_\infty) \tag{28}$$

のように正規分布に収束する. ここで考えた例では (26) 式右辺の和を構成する各 Y_t の従う分布は平均ゼロ, 分散標準偏差 σ の正規分布であったが, 中心極限定理によれば, Y_t が有限の分散を持つならば, (26) 式で定義される確率変数 Z_N は $N \to \infty$ の極限で正規分布へと収束することが知られている.

例えば, Y_t の従う分布を定数 c を有限値として

$$P(Y_t) = \frac{1}{2}\delta(Y_t - c) + \frac{1}{2}\delta(Y_t + c) \tag{29}$$

と置けば, この確率変数の平均はゼロ. 分散を評価すると

$$E[Y_t^2] = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(Y_t - c)\, Y_t^2 dY_t + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} \delta(Y_t + c)\, Y_t^2 dY_t = c^2 < \infty \tag{30}$$

であるから有限値を持つ. よって, この Y_t による確率変数 Z_N は N の増加とともに平均値ゼロ, 分散 1 の正規分布 $\mathcal{N}(0,1)$ へと近づいていくはずである. これを実際に計算機による数値実験で確かめてみよう. 図 8 より, 明らかに N の増加とともに Z_N の従う分布は正規分布 $\mathcal{N}(0,1)$ に近づいていくことがわかる. また, これをもう少し明示的に見るために, 分布の「時間発展」の様子を 3 次元的にプロットしたものを図 8(下図) に載せておく.

2.2 安定分布

前節では有限分散を持つ確率変数の和が要素数の増加とともに $P(Z_1)\cdots P_G(Z_\infty)$ のように正規分布に収束することをみた. この考察を拡張して, ある確率分布 (分散が有限とは限らない) に従う確率変数の和の従う確率分布を考えてみる.

例えば, $x = X_1$ と $x = X_2$ の従う確率分布をそれぞれ $f(x)$, $g(x)$ とすると, この確率変数 X_1, X_2 の和 $X = X_1 + X_2$ の従う分布は

$$P_2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} dt f(X - t)g(t) = f * g \tag{31}$$

のように関数の畳み込みの形で書ける. よって, 畳み込み積分のフーリエ変換はそれぞれの関数のフーリエ変換の積で書けたことを思い出すと, (31) 式両辺にフーリエ変換を施すことで

$$\phi_2(q) = \hat{f}(q)\hat{g}(q) \tag{32}$$

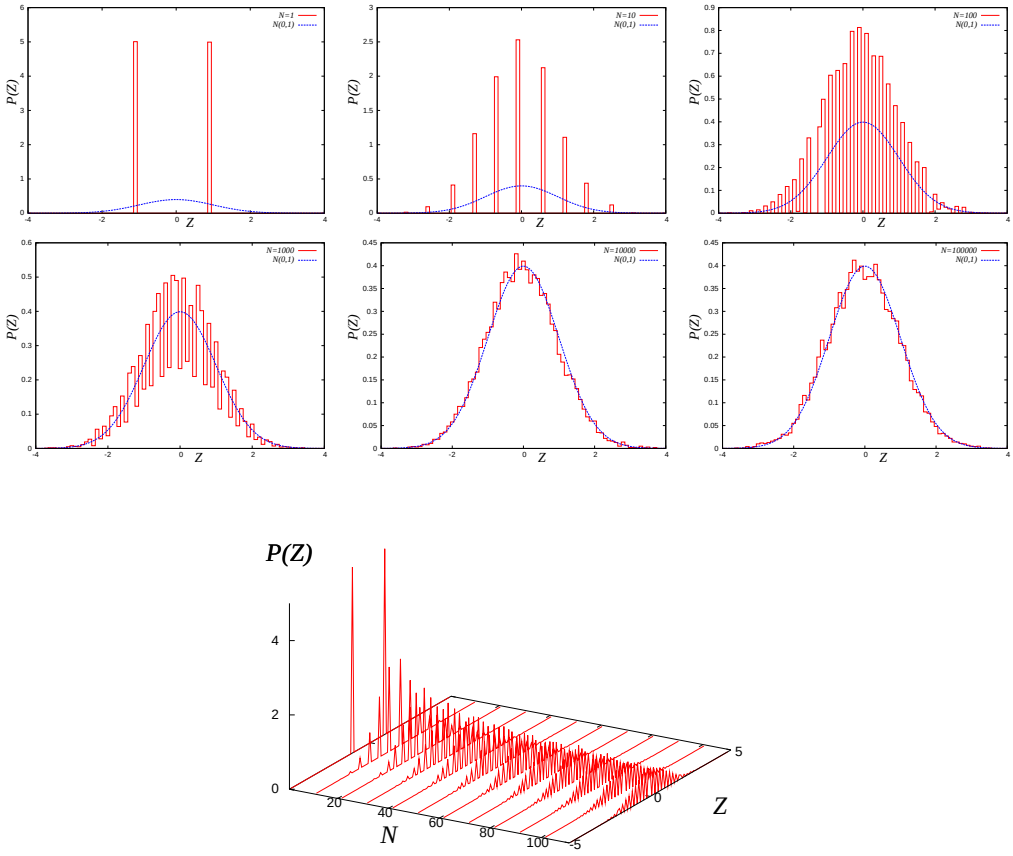


図 8: $P(Y_t) = (1/2)\,\delta(Y_t - c) + (1/2)\,\delta(Y_t + c)$ に従う確率変数 Y_t で構成された Z_N の従う分布が N の増加とともに正規分布 $\mathcal{N}(0,1)$ へと近づく様子. ここでは $c = 0.01$ に選んでおり, ヒストグラムの作成では各 10000 回のサンプリングを行っている. $N = 10000$ と $N = 100000$ のヒストグラムがほとんど変わらないのは $N = 10000$ 程度で実質的に正規分布へと収束したため. 下は確率分布 $P(Z_N)$ の「時間発展」の様子.

が得られる. ここに

$$\phi_2(q) = \int_{-\infty}^{\infty} P_2(X)\,\mathrm{e}^{-iqX} dX \tag{33}$$

$$\hat{f}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\mathrm{e}^{-iqx} dx, \quad \hat{g}(q) = \int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,\mathrm{e}^{-iqx} dx \tag{34}$$

と定義したことに注意されたい. 従って, X_1, X_2 の従う確率分布が同一の $P(x)$ であるならば, つまり, 定義域全体で $f(x) = g(x) = P(x)$ ならば, 式 (32) を

$$\phi_2(q) = \{\phi(q)\}^2, \quad \phi(q) = \int_{-\infty}^{\infty} P(x)\mathrm{e}^{-iqx} dx \tag{35}$$

と書き直すことができる. これを一般化し, 確率変数 $X_1, X_2, \cdots, X_N$ の従う分布が同一の $P(x)$ であるならば, $X = X_1 + X_2 + \cdots + X_N$ の従う分布 $P_N(X)$ のフーリエ変換 $\phi_N(q)$ は $P(x)$ のフーリエ変換 $\phi(q)$ と

$$\phi_N(q) = \{\phi(q)\}^N \tag{36}$$

の関係で結ばれることになる. このとき, ϕ_N の逆フーリエ変換:

$$P_N(X) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\phi_N(q)\,\mathrm{e}^{-iqX}dq \tag{37}$$

によって得られる分布 $P_N(X)$ の関数形が $P(x)$ と同一の場合, この分布 $P(x)$ を**安定分布**と呼ぶ.

2.2.1 正規分布とローレンツ分布の安定性

以下ではいくつかの安定分布について見ていく.

(1) $P(x)$ **が正規分布の場合**

これは前節で見たように有限の分散を持つ確率分布であるから, ウイナー過程の N ステップ後の確率変数 $X = X_1 + \cdots + X_N$ の従う確率分布 $P_N(X)$ も同じ正規分布を持つはずであり, 安定分布であることがわかる. しかし, 以下では本節での議論に従い, この事実を明示的に示してみる. 正規分布 $\mathcal{N}(0,\sigma)$ のフーリエ変換は $\gamma \equiv \sigma^2/2$ として

$$\phi(q) = \int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{2\pi}}\,\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}\,\mathrm{e}^{iqx} = \mathrm{e}^{-\gamma q^2} \tag{38}$$

で与えられる. 従って, $\phi_N(q) = \{\phi(q)\}^N = \mathrm{e}^{-N\gamma q^2}$ であるから, この逆フーリエ変換は

$$P_N(X) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-N\gamma q^2}\,\mathrm{e}^{-iqX}dq = \frac{1}{\sqrt{2\pi N}\sigma}\exp\left(-\frac{X^2}{4N\sigma^2}\right) \tag{39}$$

となる. よって, $P_N(X)$ の関数形は $P(x)$ と同じガウス関数であるから正規分布は安定分布であることがわかる.

(2) $P(x)$ **がローレンツ分布の場合**

和 $X = X_1 + \cdots + X_N$ の各要素: $X_1, X_2, \cdots, X_N$ の従う分布 $P(x)$ が

$$P(x) = \frac{\gamma}{\pi}\frac{1}{\gamma^2 + x^2} \tag{40}$$

で定義されるローレンツ分布の場合, そのフーリエ変換は

$$\phi(q) = \frac{\gamma}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\mathrm{e}^{iqx}}{\gamma^2 + x^2}dx = \mathrm{e}^{-\gamma|q|} \tag{41}$$

となる[3]. 従って, $\phi_N(q) = \mathrm{e}^{-N\gamma|q|}$ であるから, これの逆フーリエ変換を計算してみると

$$P_N(X) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{e}^{-N\gamma|q|}\,\mathrm{e}^{-iqX}dq = \frac{N\gamma}{\pi}\frac{1}{(N\gamma)^2 + X^2} \tag{42}$$

が得られる[4]. 明らかにこれは $P(x)$ と同じローレンツ関数である. よって, ローレンツ分布は安定分布であることがわかる.

---

[3] 応用数学の復習になると思うが, この場合には複素数に拡張して積分すると良い. 被積分関数: $\mathrm{e}^{iqz}/(z+i\gamma)(z-i\gamma)$ の特異点が $z = \pm i\gamma$ であるから, そのうちの一つ $i\gamma$ を含む複素平面上の半径 R の半円と実軸上の $[-R, R]$ をつなげた経路でこの関数を積分すると, この経路内の留数が $\mathrm{Res}(i\gamma) = \lim_{z\to i\gamma}(z-i\gamma)\mathrm{e}^{iqz}/(z+i\gamma)(z-i\gamma) = \mathrm{e}^{-\gamma|q|}/2i\gamma$ となるから, コーシーの積分定理を使って $\phi(q) = (\gamma/\pi)2\pi i\,\mathrm{Res}(i\gamma) = \mathrm{e}^{-\gamma|q|}$ が得られる.

[4] $\mathrm{e}^{-iqX} = \cos(qX) - i\sin(qX)$ と展開して各々部分積分.

2.2.2　レビ分布とレビ過程

正規分布とローレンツ分布がともに安定分布であることがわかった．また, それぞれの分布のフーリエ変換　— **特性関数** — は $\mathrm{e}^{-\gamma q^2}, \mathrm{e}^{-\gamma|q|}$ で与えられた．このとき, 一変数 α を用いて正規, ローレンツの両者を含む形でこれらの特性関数を拡張した

$$\phi(q) \quad = \quad \mathrm{e}^{-\gamma|q|^\alpha} \tag{43}$$

を考えてみたい．ここで, $\alpha = 2$ で正規分布, $\alpha = 1$ でローレンツ分布が復元できることに注意しよう．このとき, この特性関数が与える分布 $P_L(X)$ がどのような分布であるかを見るために, この特性関数の逆フーリエ変換を求めてみると

$$P_L(X) \quad = \quad \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} dq\, \mathrm{e}^{-\gamma|q|^\alpha}\, \mathrm{e}^{-iqX} = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} dq\, \mathrm{e}^{-\gamma|q|^\alpha}\cos(qX) \tag{44}$$

が得られる．この分布を $\alpha = 1.5$ に対してプロットしたものを図 9 に載せよう．この図 9(左) 中

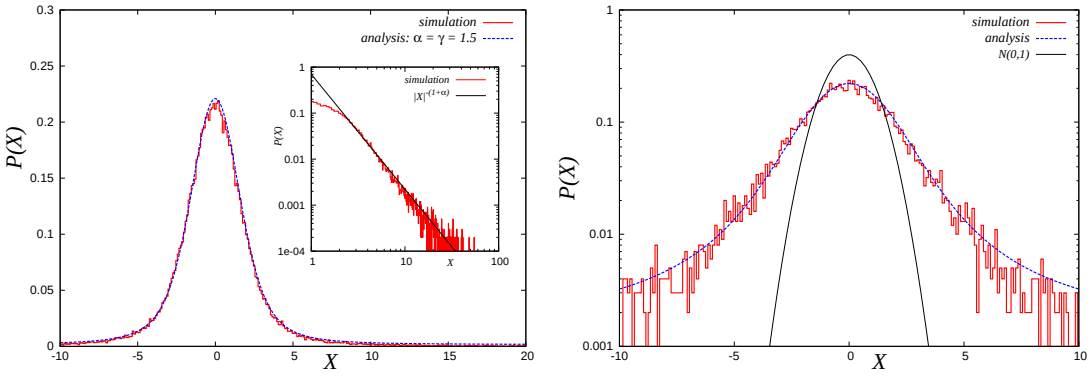


図 9: $\alpha = 1.5$ に対する $P_L(X)$．実線は計算機上で人工的に作成したヒストグラム．破線は (44) を数値的に積分することで得られる解析解．組み込み図はこの分布の「すそ」の様子を表す両対数プロット．右図では縦軸を対数目盛りに変えてプロットしたものを比較のために正規分布とともに示した．

の組み込み図には分布の「すそ」の部分の両対数プロットを示す．この組み込み図より, この分布 $P_L(X)$ は X の大きな領域では正規分布における「平均」や「分散」, 指数分布における「緩和時間」のような特徴的なスケールを持たない冪分布に従うことがわかる．実際, (44) 式を $|X| \gg 1$ に対して展開してみると

$$P_L(X) \quad \sim \quad |X|^{-(\alpha+1)} \tag{45}$$

のような冪則に従うことがわかる．この分布 $P_L(X)$ を**レビ分布**と呼ぶ．レビ分布は安定分布である．図 9(右) に示したように, 正規分布と比べてレビ分布は「すそ広がり」な分布である．従って, 金融データの確率モデルとして $X_{t+1} = X_t + Y_t$ を選び, Y_t をレビ分布から生成すると, レートが大きく変動するチャンスは Y_t を正規分布に選んだウイナー過程と比べて大きくなる．このような確率過程を**レビ過程**と呼ぶ．また, ウイナー過程と比べ, レート自体が大きくジャンプするチャンスが多いことから**レビ・フライト (Lévy flight)** と呼ばれることも多い．

金融データの再現, モデル化において, このような大きなレート変動のジャンプの生じる頻度の高い確率過程が適切なのか, あるいはウイナー過程でよいのかは, もちろん扱う金融データに依存する．従って一見すると地味な作業であるデータ解析, 統計解析も適切な確率モデルを構築する上では重要なプロセスである．

2.2.3　カオス写像を用いたレビ分布からのサンプリング

計算機上で人工的にレビ過程を生成させる場合, レビ分布 (44) からのデータ・サンプリングが必要になる. この際, 一様乱数を用いて (44) 式に比例するようにデータ点を生成させることもできるが, ここではある種のカオス写像からのサンプリングによりレビ分布が生成できることを見ておこう.

既に情報工学実験では $[0,1]$ の一様分布を生成するために次のロジスティック写像:

$$X_{n+1} \quad = \quad aX_n(1-X_n) \tag{46}$$

を用い, $a=4.0$ の場合にカオス・アトラクタを持つ軌道を生成させ, そこからのサンプリングにより, 擬似的な一様分布が生成できることを学んだ (図 10 参照). このようなカオス写像を改良するこ

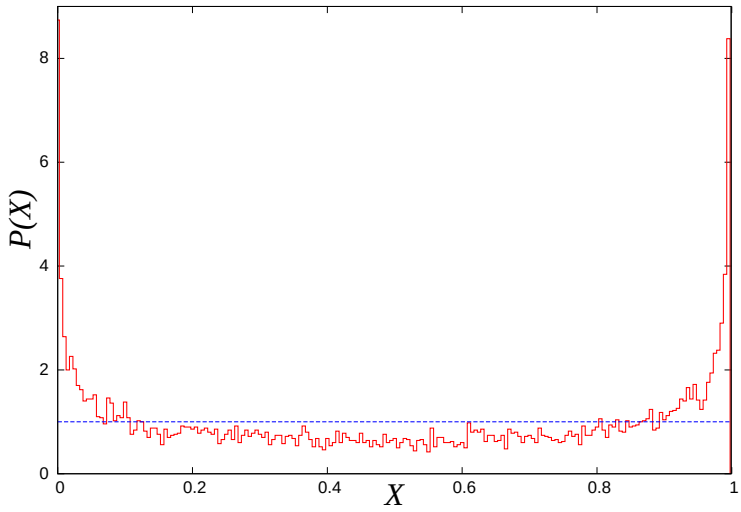


図 10: ロジスティック写像 $X_{n+1}=4X_n(1-X_n)$ からのサンプリングによるヒストグラム.

とでレビ分布を人工的に生成させることを考える.

この際, 次のようなカオス写像の重ね合わせによってもレビ分布からのサンプリングを行うことができる (Umeno 2005).

$$X_{n+1} \quad = \quad \left|\frac{1}{2}\left(|X_n|^\alpha - \frac{1}{|X_n|^\alpha}\right)\right|^{1/\alpha} \mathrm{sgn}\left(X_n - \frac{1}{X_n}\right) \tag{47}$$

上記の写像を N 個の異なる初期条件から更新させ, 各々を十分にカオス・アトラクタに落ち込ませたのちのサンプリング点 $X(i),\ i=1,\cdots,N$ の N 個からなる次のような重ね合わせを考える.

$$X \quad = \quad \frac{\sum_{i=1}^{N} X(i)}{N^{1/\alpha}} \tag{48}$$

この重ね合わせを施された変数 X を再サンプリングすることで, 重ね合わせの個数 N の増加とともに確率変数 X はレビ分布に従うようになる. 図 11 にその結果を載せる. この図より, 写像の重ね合わせの個数 N を増加させることによって, このカオス写像からのサンプリング点からなるヒストグラムは (44) 式を数値積分した解析解に近づいていくことがわかる.

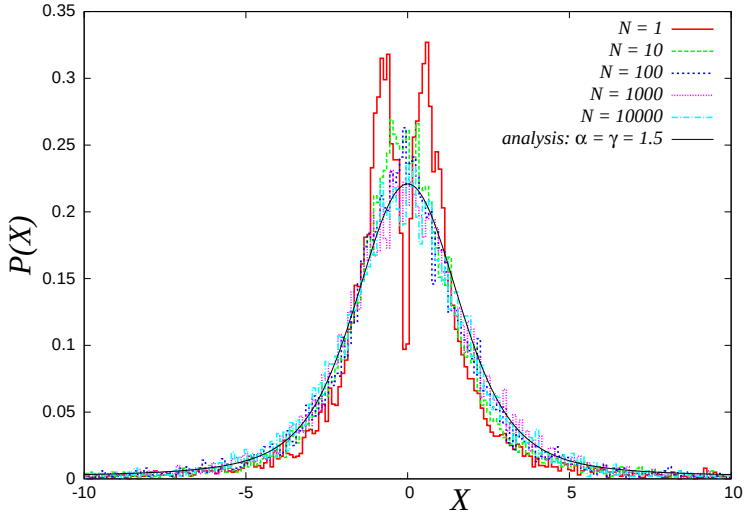


図 11: $\alpha = \gamma = 1.5$ に対するレビ分布 $P_L(X)$. 破線はカオス写像 (47) の N 個の重ね合わせを用いて計算機上で人工的に作成したヒストグラム. 実線は (44) を数値的に積分することで得られる解析解. 重ね合わせの個数 N を増やすと次第に解析解に一致する.

2.3 ボラティリティ変動モデル

前節までででみたウイナー過程:

$$X_{t+1} \quad = \quad X_t + Y_t, \;\; P(Y_t) = \mathcal{N}(0, \sigma) \tag{49}$$

において, リターンの分散であるボラティリティ:

$$E[(X_{t+1} - X_t)(X_{t+1} - X_t)] \quad = \quad E[Y_t^2] = \sigma^2 \tag{50}$$

は時間的に変動しない一定値をとるものであった. しかし, 実際の金融データを具体的に調べてみると, このボラティリティ自体が時間的に変動するような場合が多い. そこで, ここではそのようなボラティリティが変動する確率モデルのいくつかを見ておくことにする.

2.3.1 ARCH 過程

金融工学などにおいて, ボラティリティ変動モデルとして最もよく使われるものの一つは **ARCH (AutoRegressive Conditional Heteroskedasticity) モデル**と呼ばれるものである. 最も単純な ARCH モデルである ARCH(1) 過程は次式で与えられる.

$$X_{t+1} \quad = \quad X_t + Y_t, \;\; P(Y_t) = \mathcal{N}(0, \sigma_t) \tag{51}$$

$$\sigma_{t+1}^2 \quad = \quad \alpha_0 + \alpha_1 X_t^2 \tag{52}$$

ここで, 確率変数である Y_t の従う分布はウイナー過程と同じ正規分布ではあるが, その分散 (ボラティリティ) は一定ではなく, (52) 式に従って時間的に変化することに注意されたい. また, この分散の更新式から, 分散の時間変化は一つ手前の時刻でのレートの値に依存することになる. 図 12 にボラティリティ σ_t^2, 及び, レートの累積:

$$X_t \quad = \quad \sum_{k=0}^{t-1} X_k \tag{53}$$

をパラメータ値 $\alpha_0 = 0.45, \alpha_1 = 0.55$ に対してプロットしたものを 12 に載せる．この図より，ボラ

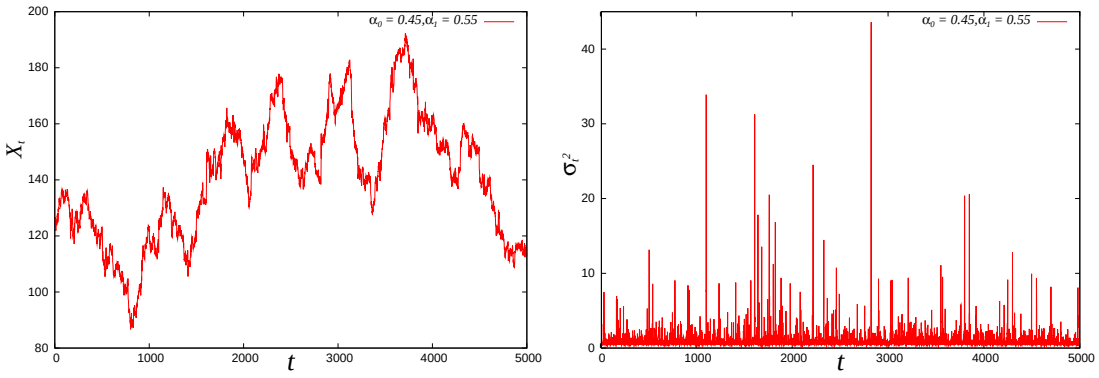


図 12: ARCH(1) 過程のレートの累積 $X_t = \sum_{k=0}^{t-1} X_k$ (左) とボラティリティ σ_t^2 (右) の時間変化．ここではパラメータの値を $\alpha_0 = 0.45, \alpha_1 = 0.55$ と選んでいる．

ティリティが時々大きく上昇しながら時間的に変化する様子を見て取れる．

ところで，十分に時間が経ったのち，ボラティリティが定常値 σ^2 を持つとすると (52) 式より

$$\sigma^2 = E[\sigma_t^2] = \alpha_0 + \alpha_1 E[X_{t-1}^2] = \alpha_0 + \alpha_1 \sigma^2 \tag{54}$$

が得られるから，これを σ^2 について解いて

$$\sigma^2 \quad = \quad \frac{\alpha_0}{1-\alpha_1} \tag{55}$$

がその定常値を与える．ここで，期待値 $E[\cdots]$ は確率変数 $\cdots$ の示す時刻の一つ手前の時刻における変数が確定した条件下で $\cdots$ の従う分布での平均を意味する．従って，図 12 におけるパラメータ $\alpha_0 = 0.45, \alpha_1 = 0.55$ に対しては $\sigma^2 = 1$ となる．

また，$Z_t = X_t/\sigma_t$ を**イノベーション (innovation)** として定義し，この変数が $\mathcal{N}(0,1)$ に従うとすると[5]，$X_t = Z_t\sigma_t$ の 4 次のモーメント $c = E[X_t^4]$ が具体的に計算できて，(52) 式の両辺の自乗を用いると

$$c \equiv E[X_t^4] = E[Z_t^4]E[\sigma_t^4] = 3(\alpha_0^2 + 2\alpha_0\alpha_1 E[X_{t-1}^2] + \alpha_1^2 E[X_{t-1}^4]) \tag{56}$$

が得られる[6]．$E[X_{t-1}^2] = \sigma^2 = \alpha_0/(1-\alpha_1), E[X_{t-1}^4] = c$ より，上式を c について解くと

$$c \quad = \quad E[X_t^4] = \frac{3\alpha_0^2(1-\alpha_1^2)}{(1-3\alpha_1^2)(1-\alpha_2)^2} \tag{57}$$

が 4 次のモーメントとして得られる．従って，2 次のモーメントが $E[X_t^2] = \sigma^2 = \alpha_0/(1-\alpha_1)$ でであったから，X_t の分布の尖り具合を表す**尖度 (Kurtosis)** は

$$\kappa \quad \equiv \quad \frac{E[X_t^4]}{\{E[X_t^2]\}^2} = \frac{3(1-\alpha_1^2)}{1-3\alpha_1^2} \tag{58}$$

となる．従って，ARCH(1) 過程の尖度はパラメータ α_1 のみで決まり，図に示した ARCH(1) 過程の場合の尖度は $\kappa = 23$ となる．実際には，金融の実データ解析から尖度を計算し，その値を再現するように (58) 式から ARCH(1) モデルのパラメータ α_1 を決めることになる．

[5] この場合を特に「強 ARCH 過程 (*strong ARCH process*)」と呼んでいる．
[6] $E[Z_t^4]$ は $\mathcal{N}(0,1)$ の 4 次のモーメント 3 であることに注意．

2.3.2 GARCH 過程

ARCH 過程はボラティリティの時間発展の式 (ARCH(1) モデルの場合には (52) 式) に過去の時刻でのボラティリティの値を逐次加えることで一般化することができる. このようにして一般化された確率モデルを **GARCH (Generalized ARCH) モデル**と呼び, 最も単純な GARCH モデルである GARCH(1,1) 過程は

$$X_{t+1} = X_t + Y_t, \quad P(Y_t) = \mathcal{N}(0, \sigma_t) \tag{59}$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2 \tag{60}$$

で与えられる. ARCH(1) のときと同様の解析により, GARCH(1,1) 過程の定常分散と尖度はそれぞれ

$$\sigma^2 = \frac{\alpha_0}{1 - \alpha_1 - \beta_1} \tag{61}$$

$$\kappa = \frac{3(1 + \alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2)}{1 - 3\alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 - \beta_1^2} \tag{62}$$

で与えられる. 図 13 にパラメータの値を $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = (0.4, 0.3, 0.3)$ の場合 (尖度 $\kappa = 4.17$) の GARCH(1,1) 過程に対するリターン Y_t の分布を載せる.

ここではいくつかの代表的なボラティリティ変動モデルについて述べたが, これ以外にも様々な確率モデルが提案されている. そのどれが適切なのかは, もちろん, 実際の金融データとの整合性を計りながら選ばなくてはいけない. そのようなデータ解析の一部を次回の後半以降に紹介したい.

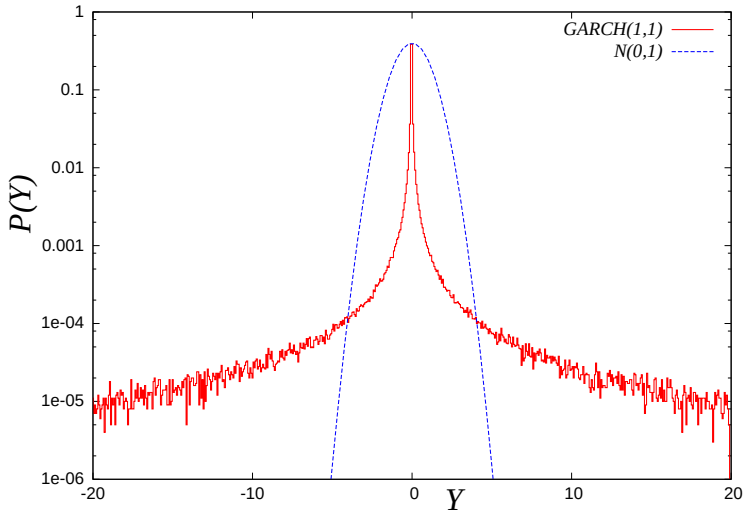
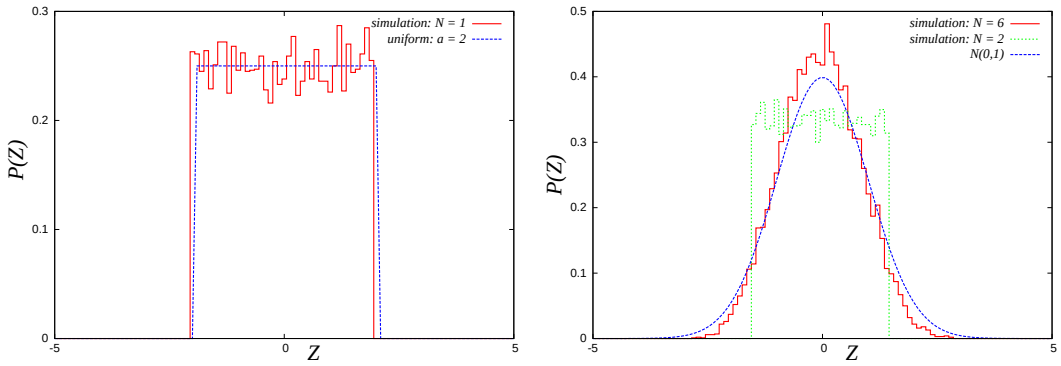


図 13: パラメータの値 $(\alpha_0, \alpha_1, \beta_1) = (0.4, 0.3, 0.3)$ の場合 (尖度 $\kappa = 4.17$) の GARCH(1,1) 過程に対するリターン Y_t の分布. 比較のために $\mathcal{N}(0, 1)$ も同時にプロットしてある.

課題 1：
その確率分布が

$$P(Y_t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|Y_t| \leq a) \\ 0 & (|Y_t| > a) \end{cases} \tag{63}$$

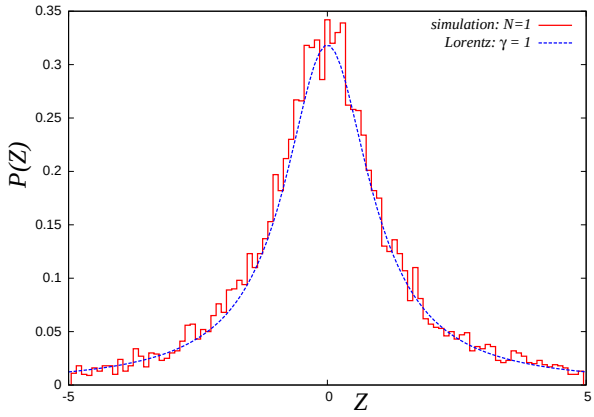
で与えられる確率変数 Y_t に対し, Z_N の従う分布 $P(Z_N)$ が N の増加とともに収束していくを図 8 にならって数値的に調べよ (下図を参考にせよ).



また, Y_t の従う分布が次のような**ローレンツ分布**:

$$P(Y_t) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\gamma^2 + Y_t^2} \tag{64}$$

の場合はどうなるか? (下図を参考にせよ)



(ヒント) ローレンツ分布を生成させる際に次の写像からのサンプリングを用いても良い.

$$X_{n+1} = \frac{1}{2}\left(|X_n| - \frac{1}{|X_n|}\right)$$

※ **レポート提出の際にはプログラムソースも添付すること**.

次回第 3 回講義は 1 月 21 日です.