



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	2007年度 混沌系工学特論講義ノート
Author(s)	井上, 純一
Description	http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/konton2007/konton2007.html
Issue Date	2007
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/32315
Rights(URL)	https://creativecommons.org/licenses/by-nc-sa/2.1/jp/
Type	learning object
File Information	konton2007_SLIDE2.pdf, 第2回講義スライド



混沌系工学特論 #2

平成20年1月7日 第2回講義

大学院 情報科学研究科 井上 純一

http://chaosweb.complex.eng.hokudai.ac.jp/~j_inoue/

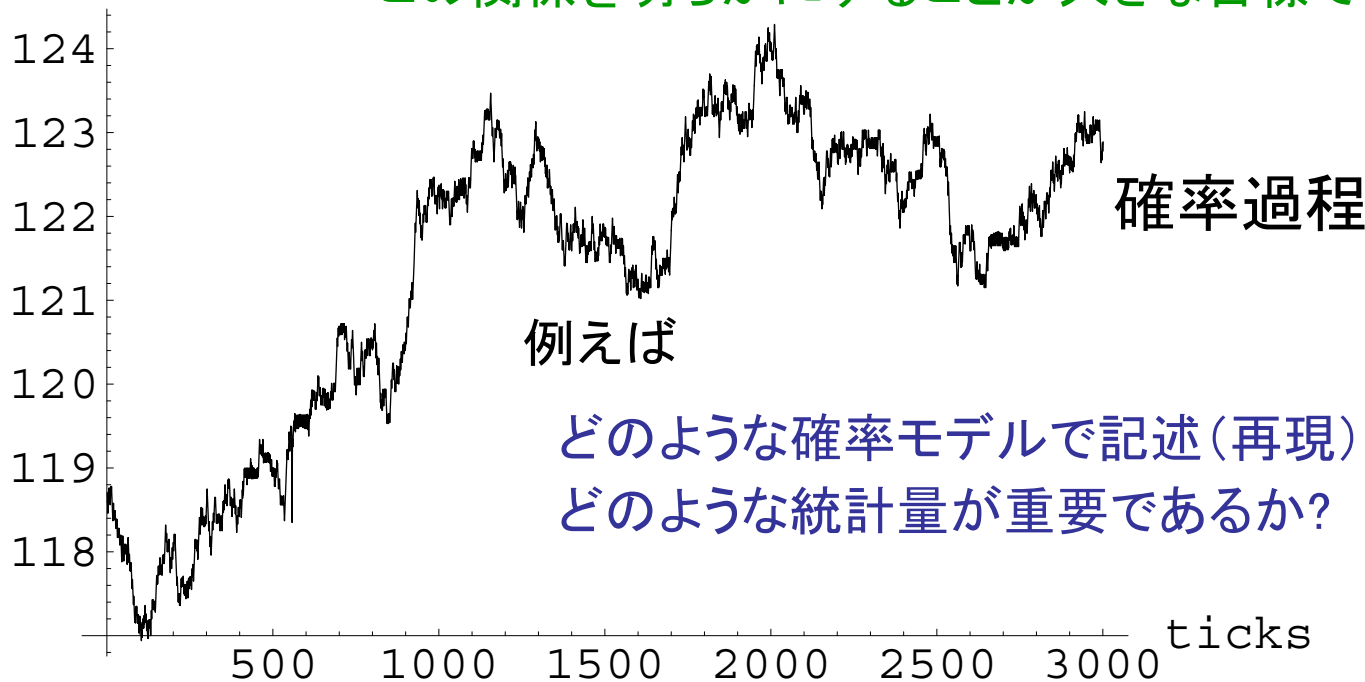
金融データの確率モデル

トレーダ(マイクロ情報) ⇒ 為替レート(マクロ情報)

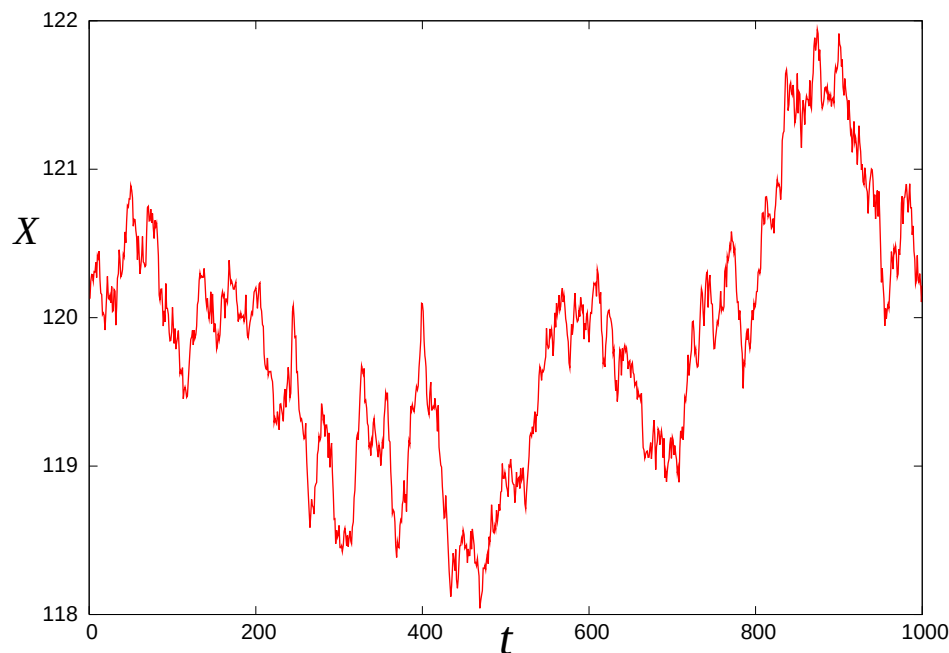
こちらについての知見を深める

Sony bank rate

この関係を明らかにすることが大きな目標ではあるが



ウィナー過程 (ブラウン運動)



実データ

1 120.074612
2 120.178779
3 120.180312
4 120.130503

.....

.....

.....

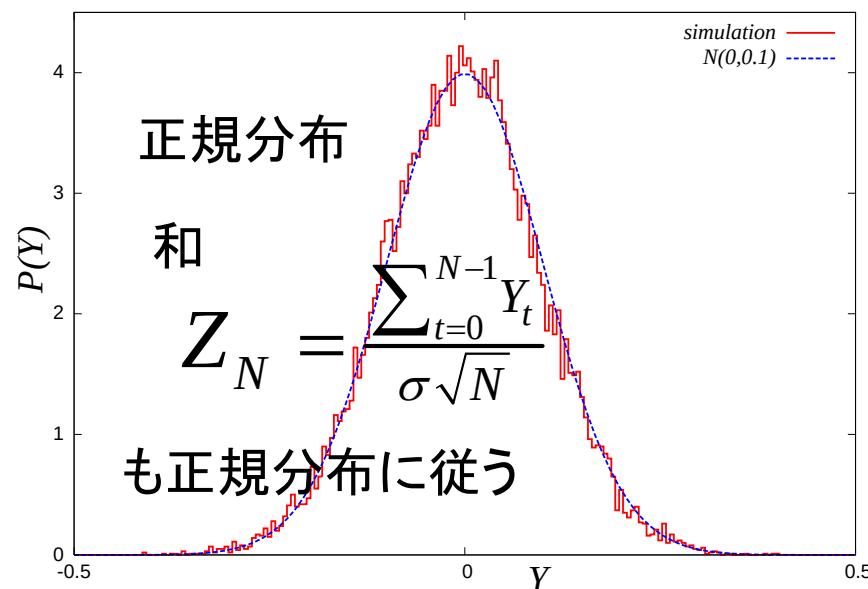
レート差分

$$Y_t = X_{t+1} - X_t$$

の従う分布を調べる

$$X_{t+1} = X_t + Y_t$$
$$P(Y_t) = N(0, \sigma)$$

ウィナー過程



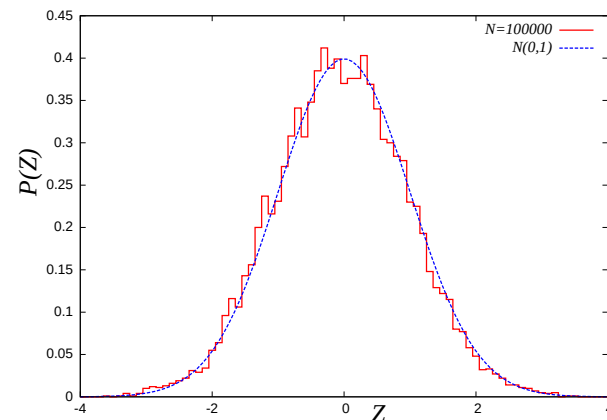
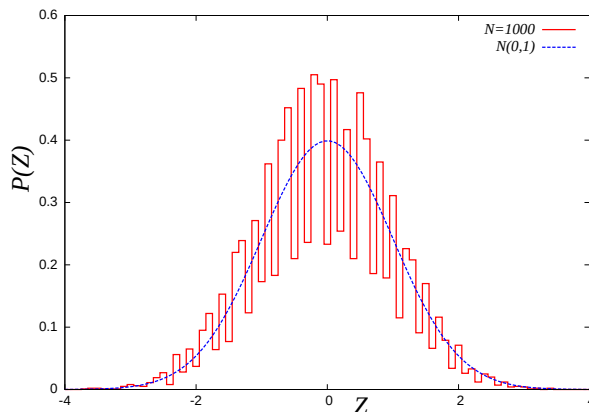
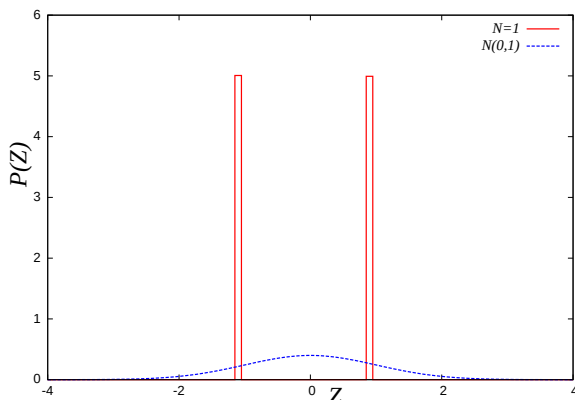
正規分布

和

$$Z_N = \frac{\sum_{t=0}^{N-1} Y_t}{\sigma \sqrt{N}}$$

も正規分布に従う

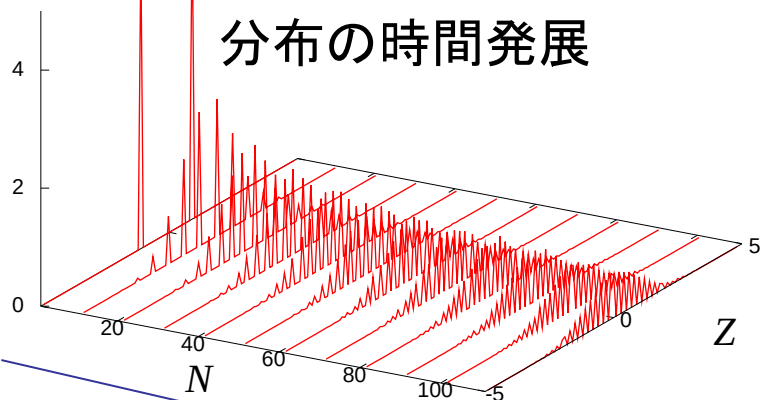
正規分布への収束



要素数の増加(「時間」)の向き

$P(Z)$

分布の時間発展



時間の向き

リターンが有限の分散を持てば

$$X_N = \sum_{t=0}^{N-1} Y_t, \quad \frac{X_N}{\sqrt{N}\sigma} \rightarrow N(0,1)$$

中心極限定理

確率変数の和の従う確率分布

確率変数の和の要素数を増やした場合の時間発展

$$P(Z_1) \rightarrow \cdots \rightarrow P(Z_N) \rightarrow \cdots \rightarrow P(Z_\infty)$$

各要素が有限分散ならば $P_G(Z_\infty)$

正規分布

分散有限の条件を緩める

$$X = \underbrace{X_1}_{f} + \underbrace{X_2}_{g}$$

$$P_2(X) = \int_{-\infty}^{\infty} f(X-t)g(t)dt = f * g$$

畳み込み

特性関数

$$\phi_2(q) = \hat{f}(q)\hat{g}(q) = \{\phi(q)\}^2 \quad (f=g=P \text{ ならば})$$

N変数に拡張

$$\phi_N(q) = \{\phi(q)\}^N$$

和の各要素の従う分布と同一ならば

安定分布

具体例は講義ノート

$$P_N(X) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_N(q) e^{-iqX} dq$$

レビ分布とレビ過程

特性関数

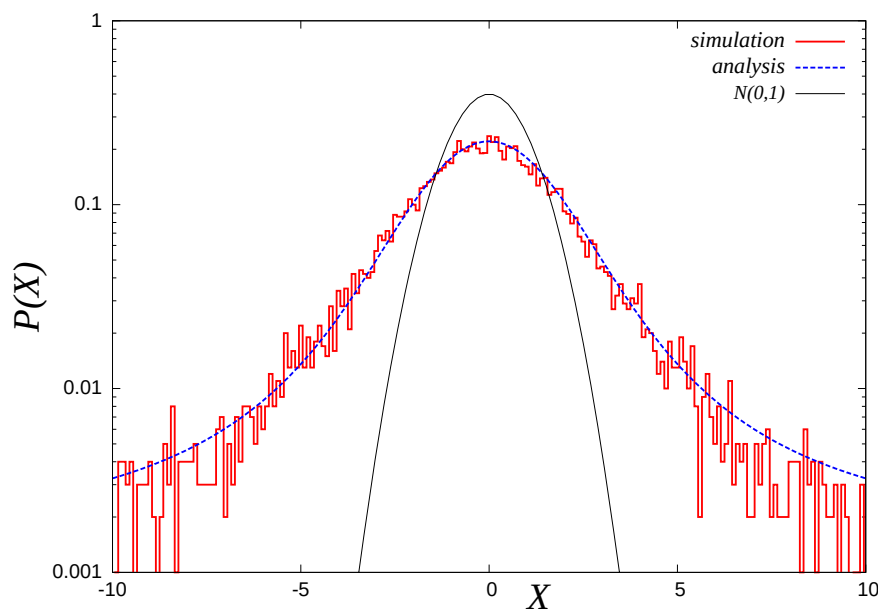
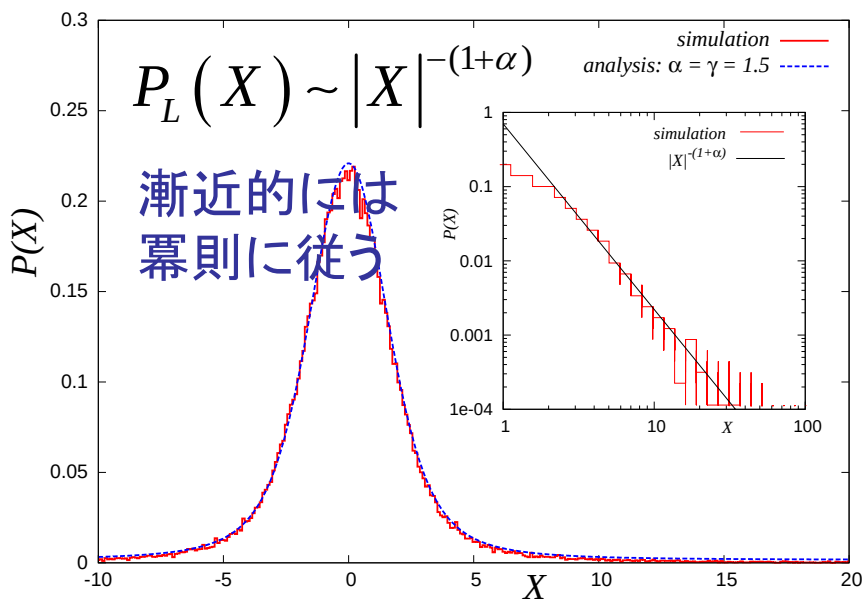
$$\phi(q) = e^{-\gamma|q|^\alpha}$$

$\alpha=2$ 正規分布

$\alpha=1$ ローレンツ分布

$$P_L(X) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-\gamma|q|^\alpha} \cos(qX) dq$$

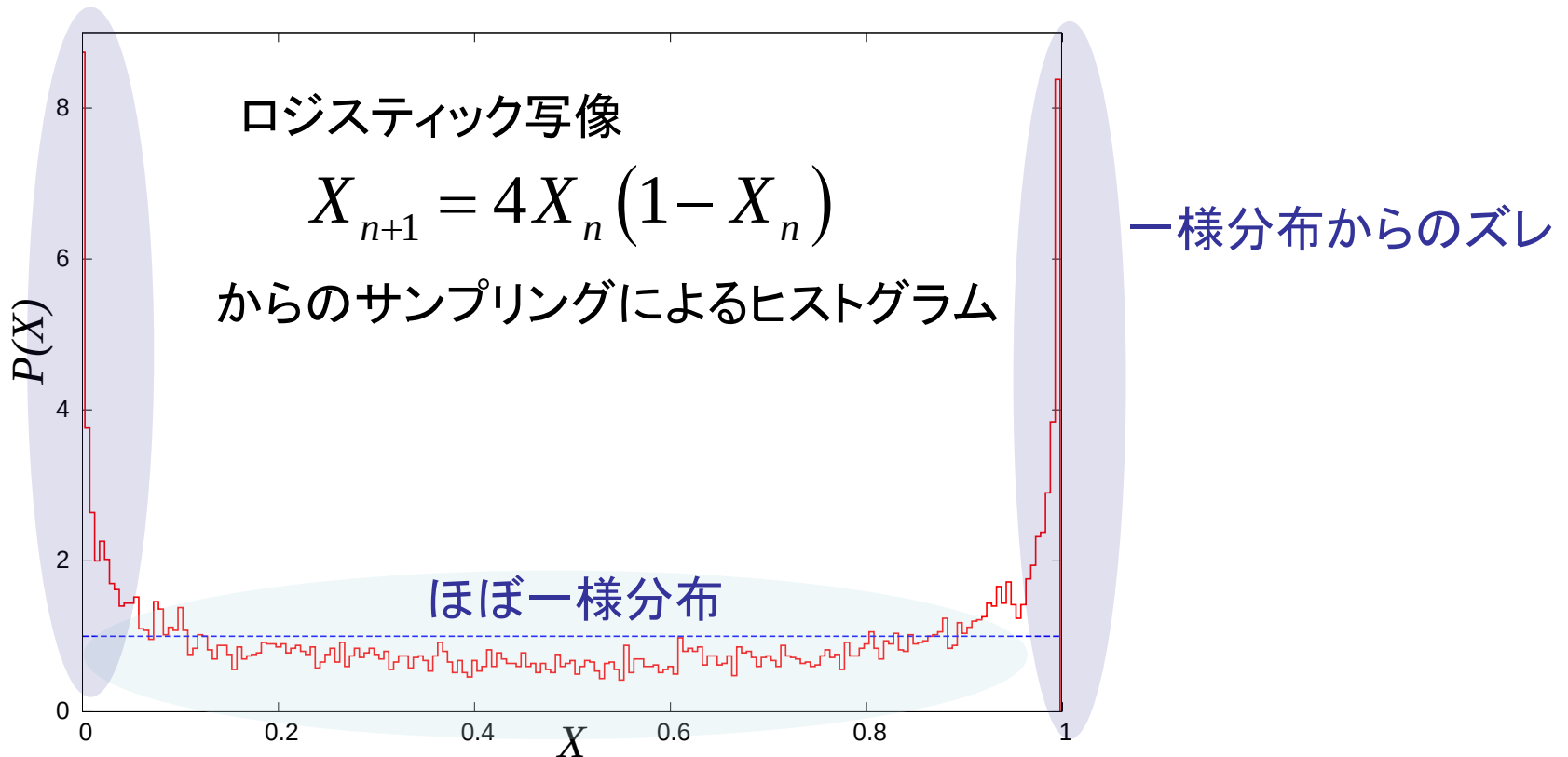
レビ分布



$$X_{t+1} = X_t + Y_t, P_L(Y_t)$$

レビ過程 (レビ・フライト)

カオス写像からのサンプリング

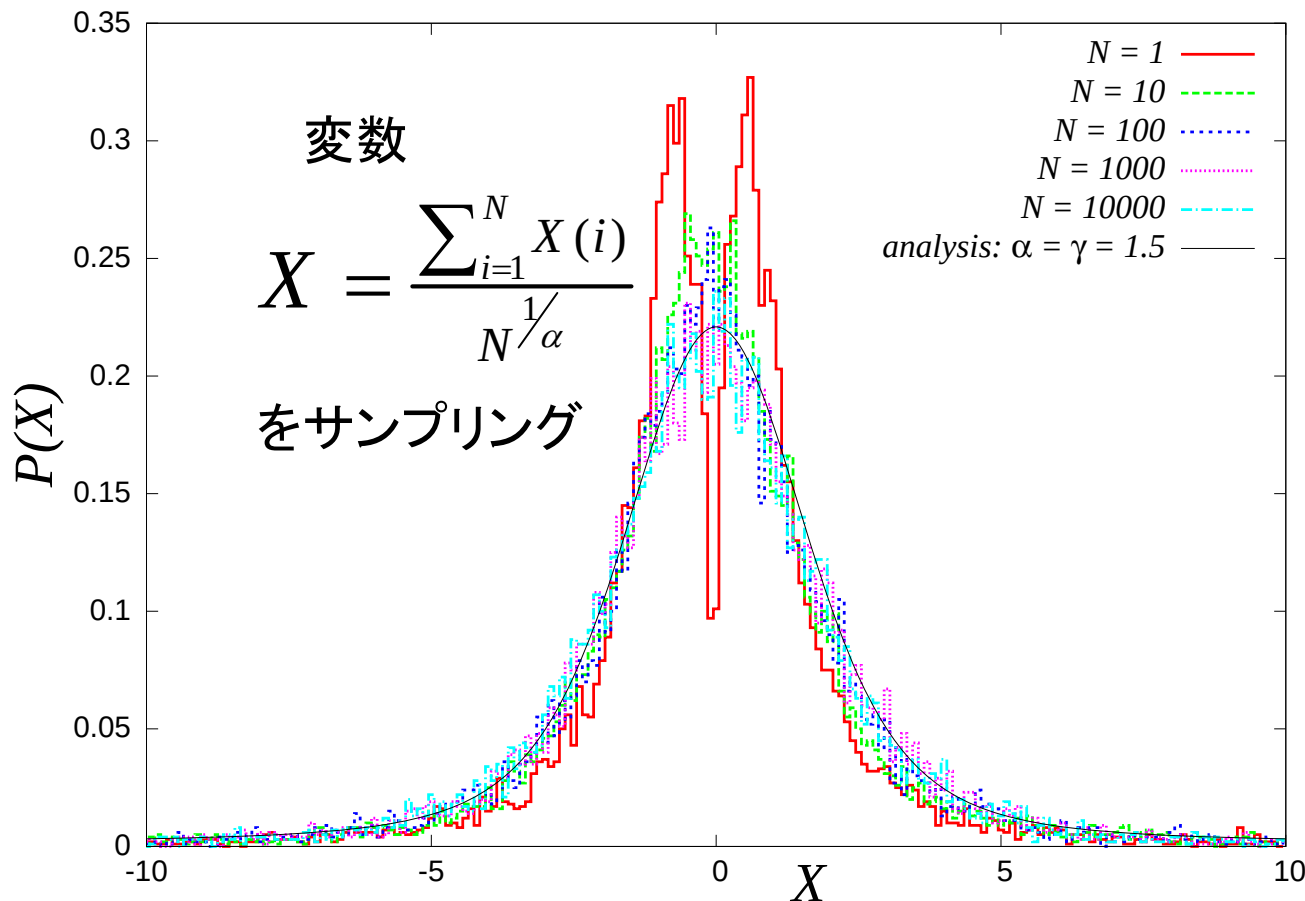


レビ分布がカオス写像から作れないか？

カオスの重ね合わせとレビ分布

$$X_{n+1} = \left| \frac{1}{2} \left(|X_n|^\alpha - \frac{1}{|X_n|^\alpha} \right) \right|^{1/\alpha} \operatorname{sgn} \left(X_n - \frac{1}{X_n} \right)$$

N個の異なる
初期条件からの
写像を並列に
動作させる



重ね合わせの個数増加
とともにヒストグラム
はレビ分布に近づく

ボラティリティ変動モデル #1

ウィナー過程 $X_{t+1} = X_t + Y_t, P(Y_t) = N(0, \sigma)$

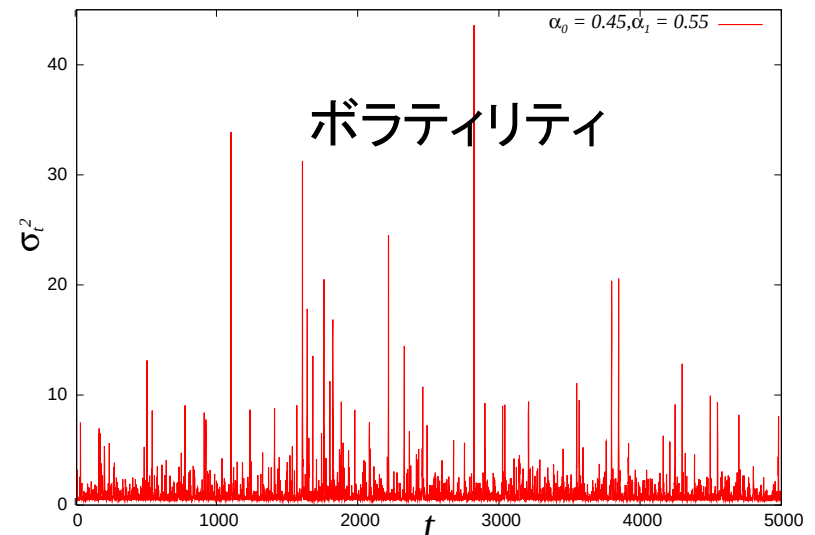
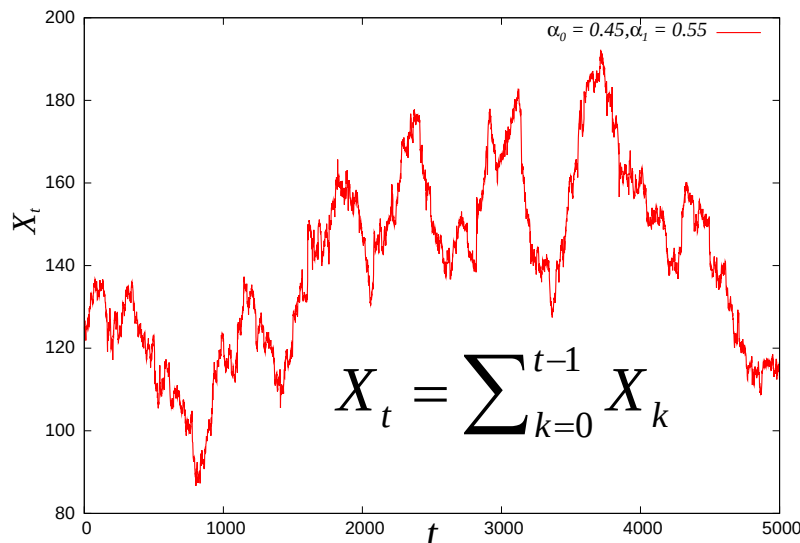
ボラティリティ $E[(X_{t+1} - X_t)(X_{t+1} - X_t)] = E[Y_t^2] = \sigma^2$ 時間的に不変

金融の実データではボラティリティは時間とともに変化している

$$X_{t+1} = X_t + Y_t, P(Y_t) = N(0, \sigma_t)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_t^2$$

ARCH(1) モデル



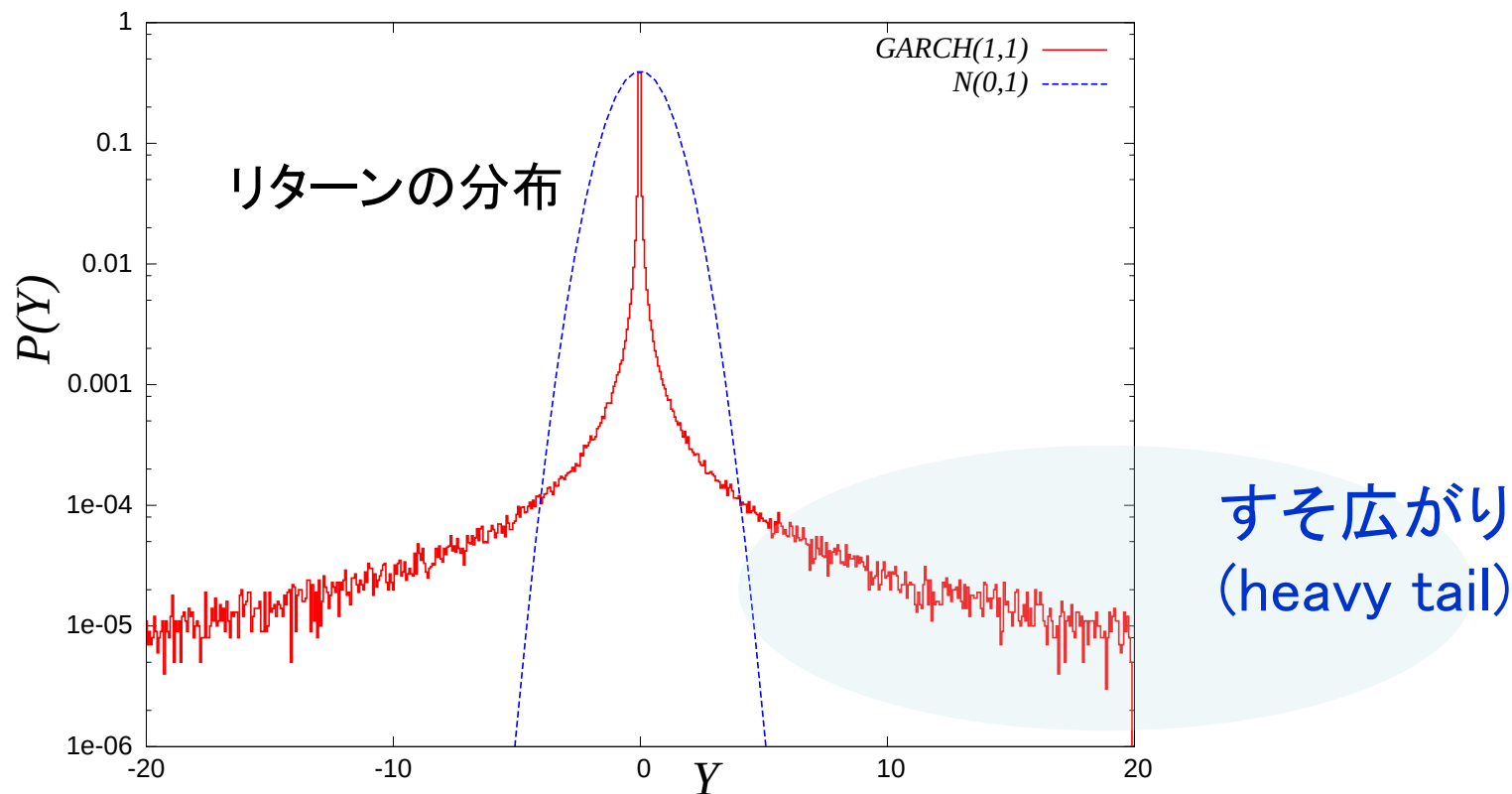
ボラティリティ変動モデル #2

ARCH(1)モデルを一般化する

$$X_{t+1} = X_t + Y_t, P(Y_t) = N(0, \sigma_t)$$

$$\sigma_{t+1}^2 = \alpha_0 + \alpha_1 X_t^2 + \beta_1 \sigma_t^2$$

GARCH(1,1)モデル



課題1 (1)

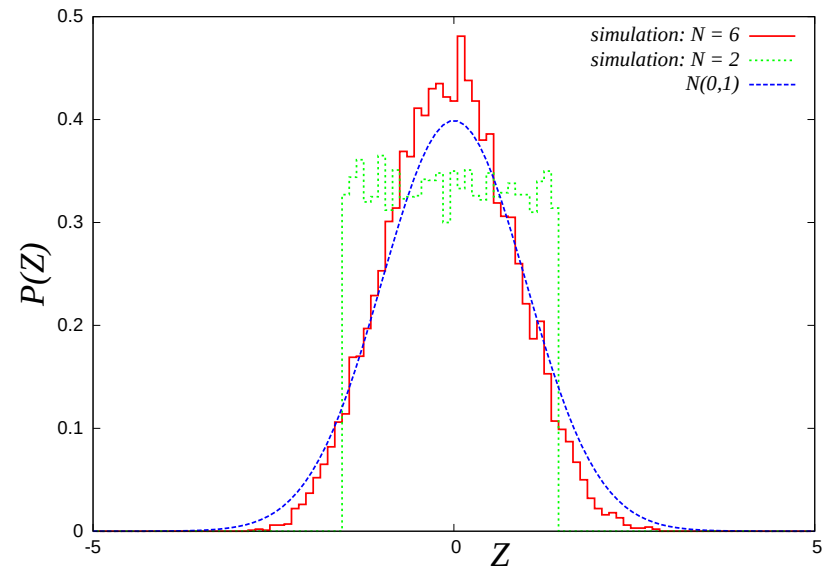
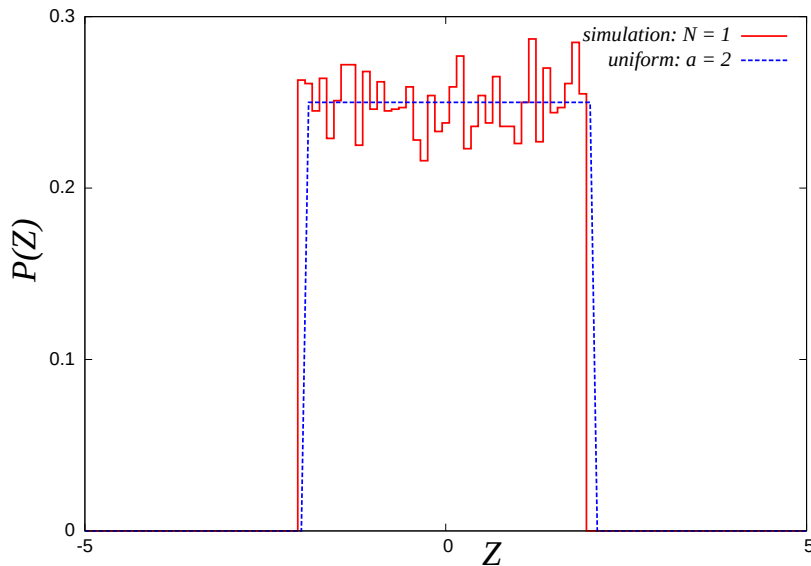
各要素が一様分布

$$P(Y_t) = \begin{cases} \frac{1}{2a} & (|Y_t| \leq a) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}$$

に従うとき

$$Z_N = \frac{\sum_{k=0}^{N-1} Y_k}{\sigma\sqrt{N}}$$

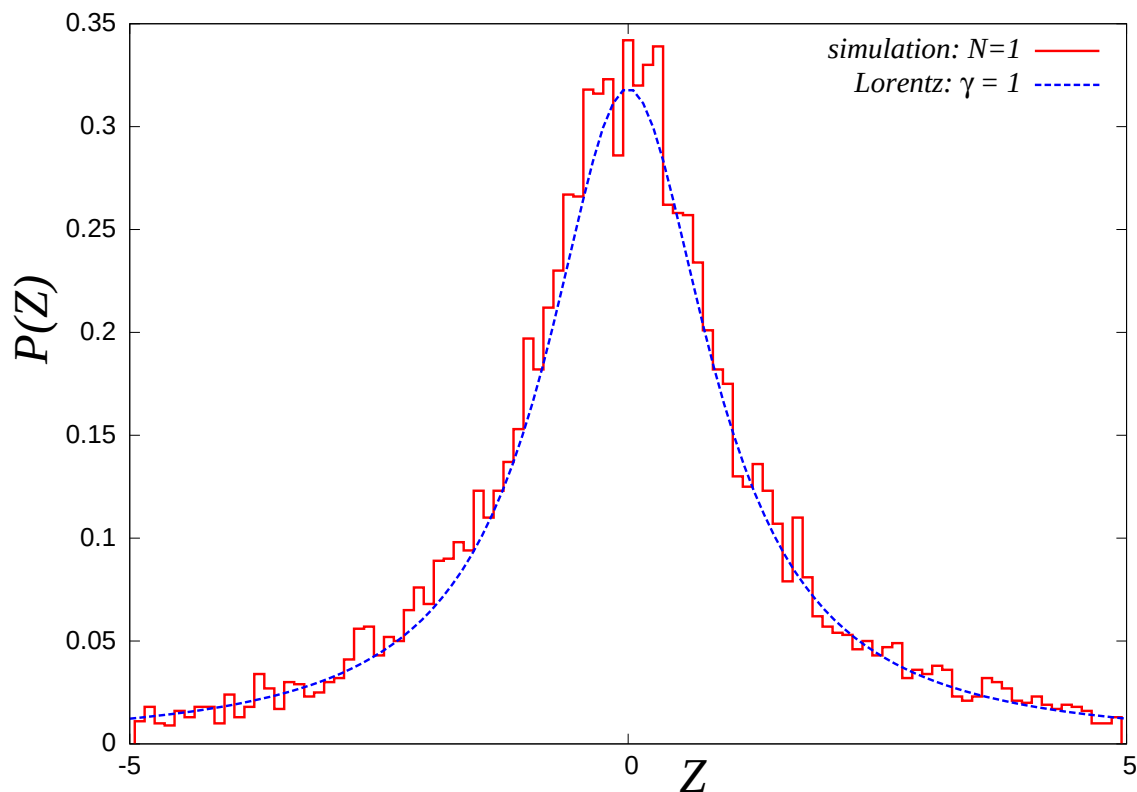
の従う分布を計算機で求めよ



課題1 (2)

各要素はローレンツ分布

$$P(Y_t) = \frac{\gamma}{\pi} \frac{1}{\gamma^2 + Y_t^2} \quad \text{に従う}$$



確率変数

$$Z_N = \sum_{k=0}^{N-1} Y_k$$

のヒストグラム
を計算機で求めよ

次回は
1月21日