HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	小学生に互除法の仕組みをいかに理解させるか
Author(s)	小林, 優
Citation	教授学の探究, 25, 115-128
Issue Date	2008-02-14
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/32332
Type	departmental bulletin paper
File Information	kyouzyugaku_115-128.pdf

Hokkaido University Collection of Scholarly and Academic Papers : HUSCAP

小学生に互除法の仕組みをいかに理解させるか

小　林　　優
（北海道大学大学院教育学研究科博士課程）

目　次

0．はじめに
1．互除法の仕組み
　1．1　公約数と正方形の関係
　1．2　長方形の短辺を1辺とする正方形
　1．3　互除法の計算法
2．授業プランと実践
　2．1　授業プラン
　2．2　実践授業の記録
　2．3　実践の分析と児童の感想
3．おわりに

0．はじめに

互除法とは，最大公約数を見つける際に2数が大きければ大きいほど威力を発揮する方法である。しかも簡単なアルゴリズムで確実に最大公約数を見つけることができる。

筆者は，2004年に修士論文（北海道教育大）[1]『小学校における初等整数論の導入に関する研究』で，互除法の指導について論を進めたが，子どもたちの互除法に対する理解に関しては最後まで課題[2]として残ったのである。それで今回は，方眼の付いた長方形で導入してみようと考えた。そして，どこまで理解できるのか検証したいと考えた。

1．互除法の仕組み

1．1　公約数と正方形の関係[3]

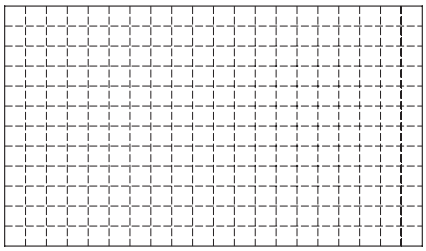
互除法を授業に取り入れた実践は，1960年代，数教協（数学教育協議会）を中心に行われていた。しかし，学習指導要領の変遷などの影響で実践研究が途絶えている（筆者の調べた限りでは）ことは，甚だ残念である。

⑴　小林優：修士学位論文「小学校における初等整数論の導入に関する研究 ― ユークリッドの互除法の指導を通して」（北海道教育大学　2004）　以下，修士論文と記す。
⑵　課題として残ったのは次の2点である。①長方形を短辺で次々と切り取ること。②半端（長方形）をしきつめることができれば，もとの長方形（全体）もしきつめることができること。
⑶　小林優：修士論文（北海道教育大学　2004）pp. 39-41

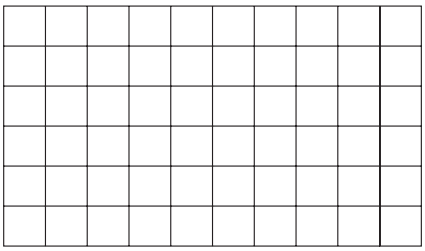
数値としての公約数を正方形という図形に置き換えて考えるという発想は，素晴らしいと思う。公約数と正方形の関係は次の通りである。

例えば，2 数（a，b；a＜b）を長方形の縦と横の長さとすると，a，b の公約数 c は，1 ≦ c ≦ a かつ 1 ≦ c ≦ b となる。公約数 c は，a，b を割り切るので， 長方形をしきつめる。したがって，**正方形**になる。図で表すと次のようになり， a ＝ 12，b ＝ 20 とすると，c は 1，2，4 である。

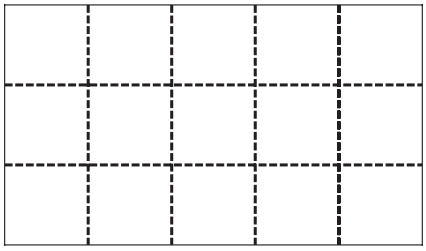
c ＝ 1 のとき，　図 1



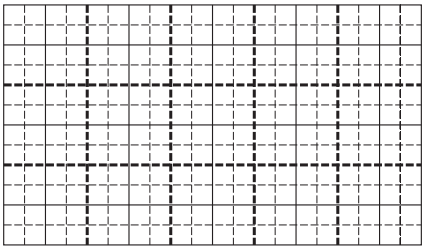
c ＝ 2 のとき，　図 2



c ＝ 4 のとき，　図 3



c ＝ 1，2，4 を重ねると，　図 4



1．2　長方形の短辺を1辺とする正方形[4]

次のような長方形（整数比）に，短辺を一辺とする正方形を次々と作っていくとどうなるか考える。違う整数比の長方形でも確かめる。

図 1

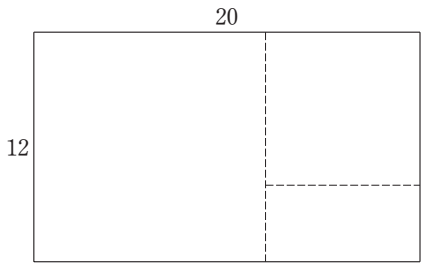
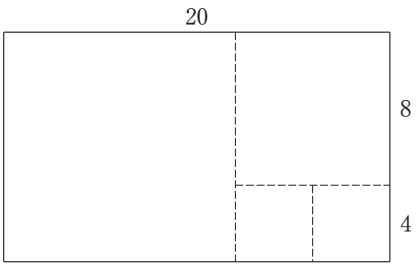


図 2



⑷　小林優：修士論文（北海道教育大学　2004）pp. 41-42

最後に正方形ができる（帰納的）。そして，この正方形が次の理由で，もとの長方形の２辺の長さの公約数になっていると考えられる。

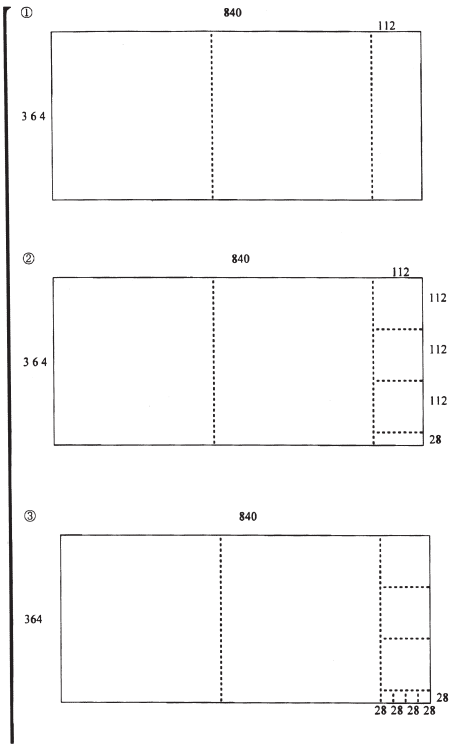
図２を見ると，最後にできる正方形の１辺４（横の辺）は，２つで８（横の辺）になっているので，４は８の公約数である。次に縦の８に注目すると，当然、公約数の４が２つ含まれていて，さらに４が１つ増えて３つになっている。それが12と等しいので，４は12の公約数でもある。以下同様に見ていくと，４は20の公約数でもある。すなわち，１辺４の正方形で最初の長方形をしきつめることができる。

４が12と20の公約数であることを確かめたら，12と20の他の公約数を拾いだして，４が最大であることに気づかせる。また，違う整数比の長方形でも確かめる。

１．３　互除法の計算法[5]

次の長方形について，互除法（用語は事前に指導しておく）を使って最大公約数を求める。

Ｔ：①の112はどのように求めますか？
Ｃ：840から364ずつとっていく。
Ｔ：引き算を繰り返してもできますが，もっと簡単な方法はないですか？
Ｃ：.....。
Ｔ：１・２年生であれば，引いていきますが，５・６年生になれば，もっと高度な計算をしますね。横と縦を比べて，縦の長さが横の長さの中にどれだけ含まれているかを調べる計算を何といいましたか？
Ｃ：.....。
Ｔ：同じものをどんどんたしていく計算を何といいますか？
Ｃ：かけ算！　ああ，そうか。割り算だ！
Ｔ：どんな式になりますか？
Ｃ：840 ÷ 364
Ｔ：答えは？
Ｃ：２余り112。
Ｔ：２は何？
Ｃ：一辺364の正方形が２枚。
Ｔ：余りの112は分かるね。
Ｃ：はい。



[5]　小林優：修士論文（北海道教育大学　2004）pp. 42-43

T：はんぱが長方形だね。②も同じように割り算でできるね。どうなりますか？
C：はい。364 ÷ 112 ＝ 3 余り 28 です。
T：答えと余りを説明してください。
C：答えの 3 は一辺 112 の正方形の枚数。余りの 28 は，はんぱの長方形の縦の長さです。
T：そうですね。このあとはどうなりますか？
C：今度は 112 ÷ 28 ＝ 4 になり，割り切れます。
T：この 28 は何？
C：840 と 364 の最大公約数です。

◎一連の計算をまとめると次のようになる。

840 ÷ 364 ＝ 2 余り 112
364 ÷ 112 ＝ 3 余り 28
112 ÷ 28 ＝ 4

◎互除法の計算の別形態

$$\begin{array}{r} 4 \\ 28\,\overline{)\,112} \\ \underline{112} \\ 0 \end{array} \quad \begin{array}{r} 3 \\ \overline{)\,364} \\ \underline{336} \\ 28 \end{array} \quad \begin{array}{r} 2 \\ \overline{)\,840} \\ \underline{728} \\ 112 \end{array}$$

2．授業プランと実践

2．1　授業プラン

平成 19 年 2 月 16 日・19 日に筆者の勤務校で授業の実践をした。児童は習熟度別コース（上位）21 名である。

算数科学習指導案

・日　時：平成 19 年 2 月 16 日 5 校時
　　19 日 5 校時
・児　童：苫小牧市立苫小牧西小学校
　　6 年 21 名
・授業者：小林　優

1．教 材 名『ユークリッドの互除法』

2．指導計画（2 時間）

時間	指　導　目　標
1	・【問題 1】（整数比）の長方形から最大の正方形を次々とつくっていくと，最後に正方形ができることに気づく。 ・最後にできる正方形は，もとの長方形をしきつめることが分かる。 ・最後にできる正方形の一辺の長さは，もとの長方形の 2 辺の長さの最大公約数になることが分かる。
1	・互除法の計算法が分かる。 ・練習

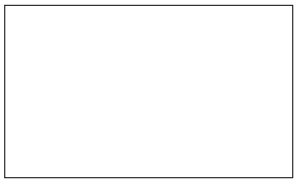
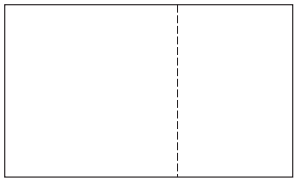
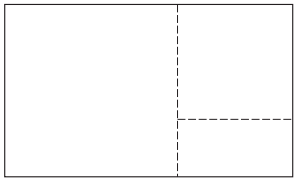
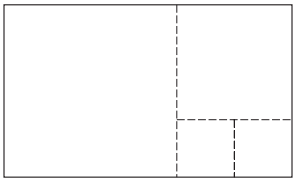
3．本時（2/16）の目標

①【問題1】（整数比）の長方形から最大の正方形を次々とつくっていくと，最後に正方形ができることに気づく。

②最後にできる正方形は，もとの長方形をしきつめることが分かる。

③最後にできる正方形の一辺の長さは，もとの長方形の2辺の長さの最大公約数になることが分かる。

4．本時（2/16）の展開

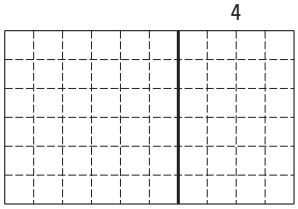
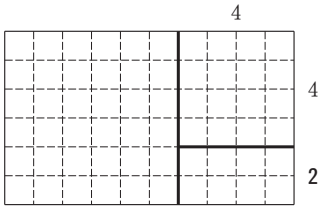
学　習　活　動	留　意　点
【問題1】次の長方形に最大の正方形をつくりなさい。 	・実際には，方眼が縦に12，横に20書かれている。 ・長方形の短辺を一辺とする正方形をつくることに気づかせる。
【問題2】右側の長方形に最大の正方形をつくりなさい。 	・【1】と同じ要領で，長方形の短辺を一辺とする正方形をつくる。
【問題3】右下の長方形に最大の正方形をつくりなさい。 	・【1】と同じ要領。
【問題4】右下の長方形はどうなりましたか？　説明してください。 	・正方形2つになったことに気づく。

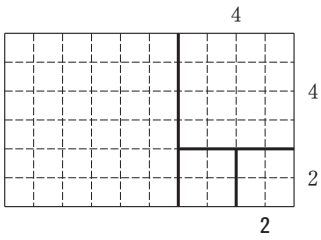
【問題５】他の長方形でも同じことをやってみよう。 ＜省略＞	・２～３の長方形でやってみる。 ・最後に正方形ができることに気づく。 ・整数比に触れる。
【問題６】長方形に最大の正方形を次々とつくっていくと最後に小さな正方形ができました。この正方形の大きさは，最初の長方形をしきつめることができますか？	・方眼に着目して，正方形の一辺が，最初の長方形の長辺と短辺をわりきることに気づくとよい。 ・正方形の一辺の長さが，最初の長方形の２辺の長さの最大公約数になることに気づくとよい。

５．本時（2/19）の目標

①互除法の計算法が分かる。

６．本時（2/19）の展開

学　習　活　動	留　意　点
【問題】次の長方形で，互除法を使って最大公約数を求めます。 ①　４はどのように求めますか？  	・10 － 6 ＝ 4 ↓ ・10 ÷ 6 ＝ 1 余り 4
② 縦の２はどのように求めますか？  	・6 ÷ 4 ＝ 1 余り 2

③ 下の２はどのように求めますか？　この２は何？  互除法の計算法のまとめ ① 10 ÷ 6 ＝ 1 余り 4 ② 6 ÷ 4 ＝ 1 余り 2 ③ 4 ÷ 2 ＝ 2　← 割り切れたときの割る数が最大公約数 ↓ 次のような書き方もある。 ③ ② ① 2) 4) 6) 10 4 4 6 0 2 4 ◆練　習 互除法で最大公約数を求めなさい。 ①（64，96）　②（76，182）　③（364，840） ④（621，522）　⑤（728，1364）　⑥（3629，8404） ⑦（8811，15219）　⑧（26722，50858） ⑨（394208，1207846）	・4 ÷ 2 ＝ 2 ↑ 最大公約数

7．本時（2/16・2/19）の評価
目標（①～④）に到達できたか。

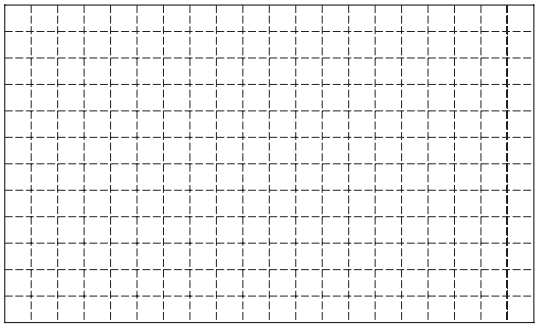
2．2　実践授業の記録（protocol）

2．2．1　protocol（2月16日）

・protocol の記号について
T：教師の発問　　C n：児童一人の発言　　C：児童数人の発言
＊：protocol 前後の授業の内容

【問題１】次の長方形に最大の正方形をつくりなさい。

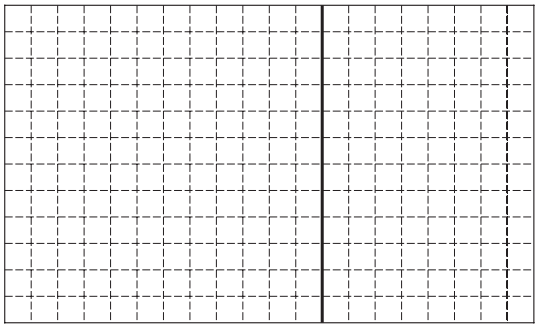
＜予想＞最初はとまどうと思うが，短辺を一辺にすればよいということに気づくと思う。



Ｔ　：長方形の中に最大の正方形をつくりなさい。さあ，どうやる？	
Ｃ１：縦が何個か調べる。縦が12個だから，横に12個やって線を引く。	・いきなり正解である。
Ｔ　：他にない？　じゃ，やってみて。	
＊各自問題に取りかかる。	
Ｔ　：ちょっと見てください。（最初の児童が発表したことを黒板で説明する。）	・最大な正方形ができることを確認する。

【問題２】右側の長方形に最大の正方形をつくりなさい。

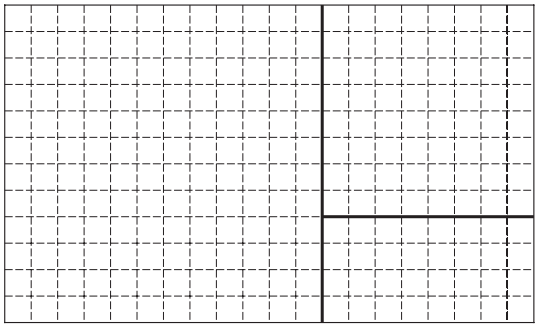
＜予想＞【問題１】の要領で簡単にできるはずである。



＊【問題２】の説明をする。	
Ｔ　：どうやってつくればいいですか？	
Ｃ２：横は８だから，縦も８にすればいい。	・予想通りである。

【問題３】右下の長方形に最大の正方形をつくりなさい。

＜予想＞【問題１】の要領で簡単にできるはずである。

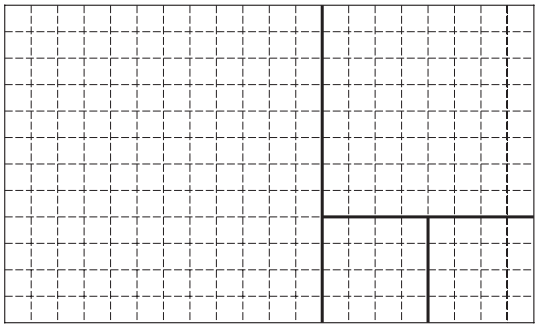


T　：さらに，ここ（右下）に最大の正方形をつくるにはどうするか？
C３：縦の４つを横にとる。

・つくり方を確認する。

【問題４】右下の長方形はどうなりましたか。説明してください。

＜予想＞最初は説明にとまどうと思うが，長方形ができない，正方形だけしかないということに落ち着くはずである。



T　：最後はどうなった？
C　：正方形になった。
T　：ということは，長方形に最大の正方形を次々とつくっていくとどうなる？
C４：正方形ができる。
T　：これだけでは決められないね。偶然かもしれない。

【問題５】他の長方形でも同じことをやってみよう。

※図省略

＜予想＞２つめの長方形も同じように最後には正方形ができるということに気づくはずである。すべての長方形に正方形ができるのではなく，一部（整数比）の長方形だけに正方形ができるということに触れる必要がある。

＊児童，【問題５】に取り組む。

Ｔ　：どうなりましたか？

Ｃ５：正方形で終わった。

Ｔ　：これはすべての長方形で，（正方形が）できるのではなく，長さの比が整数の時です。

＊整数比の説明をする。

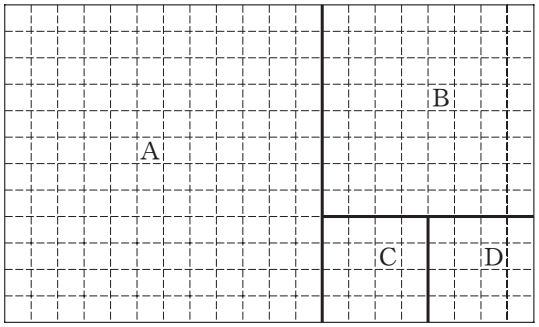
Ｔ　：今まで最大の正方形をつくる勉強をしてきたけど，これからする勉強のプリントを配ります。

・縦と横の長さの比が違う２つの長方形で確認する。

【問題６】長方形に最大の正方形を次々とつくっていくと最後に小さな正方形ができました。さて，この正方形の大きさは最初の長方形をしきつめることができますか？

＜予想＞正方形Ｂは，正方形Ｃ，Ｄで下の一辺がしきつめられているから，全体的にしきつめられている。正方形Ａは，正方形Ｂ，Ｃで右縦一辺がしきつめられているから，全体的にしきつめられている。よって，長方形全体も正方形Ｃ，Ｄでしきつめられている。

以上のように説明できなくてもマス目を駆使して，正方形Ｃ，Ｄの一辺の長さは，大きな長方形の長辺・短辺の長さを割りきるということに気づいて，しきつめられるという結論を出せるとよい。その後，公約数へと進む。

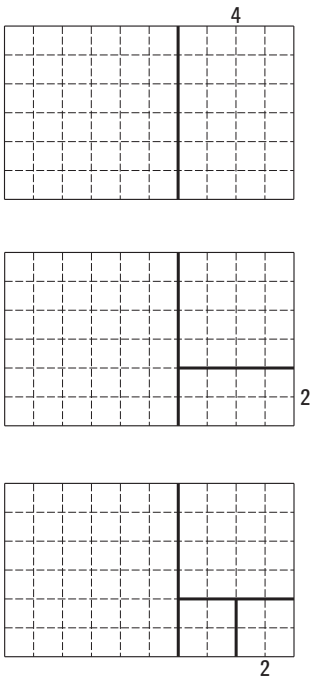


※ CやDの中に，他の約数（1，2）が含まれているので，視認することができる。

T　：最後にできた正方形は，最初の長方形をしきつめることができますか？
C　：できる。
T　：できるとすれば，どうしてか考えて。
＊少し時間をとる。
T　：○○君，できそうかい。
C 6：できる。
T　：どうして？
C 6：ぱっと見！
T　：それでは△△君は？
C 1：一番最後にしきつめられたから。一番小さな正方形だから。
T　：もう少しわかりやすく言うとどうなる？
C 4：縦と横（最初の長方形）は，4の倍数だから。
T　：縦は？
C　：12。
T　：横は？
C　：20。
T　：倍数ということは，こっち（4を指す）から見たんだよね。それじゃ，こっち（最初の長方形の縦や横の長さ）から見たらなんと言えばいいの？
C7：約数。
T　：約数だよな。倍数と約数の関係はこういうことだよな。12の約数は4，20の約数は4。こういうのをなんて言うの？
C　：公約数。
T　：12と20の公約数は何？
C　：4。
C8：2。
C2：1。
T　：あとは？
C　：ない。
T　：4は何て言うの？
C9：最大公約数。
T　：図を使って公約数を見ていくよ。4はどこだ？... 正方形の長さだな。2はどこ？
C4：（図に書き込む。）
T　：1はどこ？
C10：正方形の中。
T　：ということは，この中（一辺が4の正方形）に2も1も入っているね。

2．2．2　protocol（2月19日）

T　：4はどうやったらでてくる？
C11：10を6でわって，あまった数。
T　：ふつうは10から6をひくよね。素晴らしい！（実は1学期に，互除法に触れたことがあり，そのことを覚えていたのである。）
T　：この2はどうやってだすの？
C 4：6 ÷ 4 ＝ 1余り2
T　：そうだね。それでは下の2はどうやってだすの。
C10：4 ÷ 2 ＝ 2。わり切れた。
T　：そうだね。互除法というのは，大きい数を小さい数でわって，余りでさらにわっていって，わり切れたときのわる数が最大公約数になるんだね。それでは練習問題をやってみて。
＊児童，練習問題に取り組む。



・10 ÷ 6 ＝ 1余り 4

・互除法における商や余りの意味を確認する。

2．3　実践の分析と児童の感想

＜実践の分析＞

項　　目	分　析　と　反　省
1．教　具	・方眼付きの長方形を使ったことで，操作の個人差に関係なく，確実に正方形にたどり着ける。
2．しきつめ	・正方形が最初の長方形をしきつめる説明を指導者主導でやってしまったところがある。
3．互除法の計算法	・なぜ「わり算」でするのかという説明がなかった。本時ではひき算でもよい。横に長い長方形を用意して，最大の合同な正方形が何枚もつくられる実例を示すべきであった。
4．指導時間	・短い。できれば4時間はほしい。そして，児童にじっくり考えさせて，活発な意見交流をさせたかった。 ・指導時間が短かったので，発問も多くなり，児童の考える時間が少なかった。

5．全般的	・最大公約数の使い道について，児童が興味を持つようなものを示すことができれば意欲につながると思う。 例）$\frac{3984}{5976}-\frac{5667}{13223}+\frac{310}{3255}$ の解法など。 ・修論の実践と比べると，互除法の学習を無理なく進めることができたと思う。また，小学校６年生でも互除法の仕組みを理解することができると確信した。

＜児童の感想＞21名

・難しいけど結構できたし，それなりにおもしろかったと思う。今度は応用とかやってみたい。（C８　女子）
・難しかったけど今日の学習でやっとわかった。今まで互除法ということをやらなかったので，初めてやったとき，ちんぷんかんぷんだった。だけどわかった。（C12　女子）
・１学期に１回，互除法をやったことがあるけど，前よりもわかってきました。もう少し詳しくやってみたいです。いつかまた何かでやりたいです。でも少し難しかったです。でも便利でいいと思います。すべて意味がわかったら，簡単にできると思う。（C13　女子）
・簡単（？）なやり方がわかってよかった。大きな数字の最大公約数がわかったときはうれしい。もっとたくさんやりたいです。（C７　女子）
・ちょっと難しかったけど結構わかりやすかった。それにやり方がとてもわかりやすくていいナァーと思った。（C14　女子）
・前に互除法のことを少しやったけれど，詳しくわかったので，よかったです。でも，ちょっと難しかったです。（C５　男子）
・互除法の勉強は少し面倒くさくなるときもあるけど，ふつうに求めていくのに比べると簡単にできる。でも，数が大きければ大きいほど数がぐちゃぐちゃになってしまう。ただ，やり方だけは覚えた（覚えることができた）少し苦手かもしれない。（C15　女子）
・最初は難しそうだなと思ったら，わかりやすく教えてくれたので，できてよかったです。（C９　男子）
・あまりなれなかったけど，バッチリわかった。難しい公約数もこれでわかりやすくなったから，いいと思う。これからも互除法を使っていきたいと思う。（C16　男子）
・互除法は詳しくわかりました。（C11　男子）
・互除法の問題の中で，チャレンジ問題④の⑥～⑨が難しかったです。（C17　男子）
・難しくて，いやだったです。めんどうくさかった。最後のプリントテスト[6]がわるかったです。（C18　男子）
・いみがわかりませ～ん。（C６　男子）
・色々と難しかったが，わかってしまったら，便利！（C２　女子）
・互除法の計算が長かった。（C19　男子）
・大きい数の最大公約数を求めるのには，便利な方法だと思います。でも，やり方が難しい

⑹　本実践授業とは無関係である。

です。前に１回互除法をやったけど，そのときよりやり方はわかりました。（C20 女子）
・すごくむずかしくてわかりませんでした。（C １ 男子）
・難しいです。わり算が苦手なので，難しかったです。（C ３ 男子）
・やり方がめんどうでたのしくなかったです。（C21 男子）
・やってみるとおもしろく，楽しく正確にできた。（C10 男子）
・互除法をしっかり覚えることができました。とても楽しかったです。家庭学習などでも取り組んでいきたいと思います。（C ４ 男子）

３．おわりに

「実践の分析」でも述べたが，方眼付き長方形を取り入れたことは互除法（の仕組み）を理解させるのに有効だと考える。すなわち，修士論文の課題として残った２点[7] を解決するのに役立った。

課題①については，最初だけヒントを出せば２回目からはスムーズに取り組むことができた。

課題②については，約数の意味を方眼（model）に置き換えて説明することができたと考える。少なくても，視認（直感）できた。よって，小学生（６年）でも十分に理解できると確信した。

児童の感想について触れると，「難しい」と答えた児童は９名，「わかった」と答えた児童は11名であった。そして，「難しい」と答えた９名中の６名が「わかった」と答えている。さらに感想は，「おもしろかった・楽しかった」と答えた児童は２名，「わからなかった」が２名，「楽しくない」が１名，「覚えることができた」が２名だった。「わからなかった」の２名の児童については，実践授業（２月16日）で最大の正方形のつくり方を説明したC １であり，もう一人は，「最後にできた正方形は最初の長方形をしきつめることができるか」の発問に，「できる」と答えたC ４である。

今回の授業に対する児童の評価をまとめると，「わかった・おもしろかった・楽しかった・覚えることができた」をYesとし，「わからなかった・楽しくない・難しい（わかったと答えた６名以外）」をNoとすれば（児童：21名），Y：15名（71％），N：６名（29％）である。

「たし算とひき算」では「たし算」，「かけ算とわり算」では「かけ算」。これはどちらが好きかという質問に対する児童の回答である。そして，ほとんど100％の児童が上のような回答をするのである。「ひき算」と「わり算」はどうして嫌いかという質問に対しては「めんどうだから」という回答が返ってくる。だから，『あまり』のある「わり算」は，最悪である。なぜ児童たちはこのようなイメージを抱くのであろうか？――それは，計算スキルを身につけることに終始し過ぎた結果である。しかし，嫌われ者の『あまり』のある「わり算」も見方を変えると救世主に変身するのである。

⑺ 課題①　長方形を短辺で次々と切り取ること。
課題②　半端（長方形）をしきつめることができれば，もとの長方形（全体）もしきつめることができること。