



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	実践報告 高校数学におけるアルゴリズム指導の試み
Author(s)	林, 大輔
Citation	教授学の探究, 25, 129-145
Issue Date	2008-02-14
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/32333
Type	departmental bulletin paper
File Information	kyouzyugaku_129-145.pdf



実践報告 高校数学におけるアルゴリズム指導の試み

林 大 輔

(北海道大学大学院教育学院修士課程)

目 次

- 0. はじめに
- 1. 授業プラン「アルゴリズムとは何か」における教育内容構成
- 2. 授業過程の分析の視点
- 3. 授業過程の分析、及び若干のコメント
 - 3. 0. 目標の理解と余りが出ない長方形 A の幾何的操作
 - 3. 1. 余りが1回出る長方形 B の幾何的操作
 - 3. 2. 長さとの対応、長方形の幾何的操作と除法との対応
 - 3. 3. 長方形の幾何的操作と除法との対応の確認
 - 3. 4. 最大公約数の理解と、長方形の幾何的操作と対応した除法
 - 3. 5. 長方形の幾何的操作と対応した除法の有限性
 - 3. 6. ユークリッドの互除法、アルゴリズムの定義
 - 3. 7. 他のアルゴリズムの例としてのエラトステネスのふるい
 - 3. 8. 表紙
- 4. 授業過程の評価と今後の課題

0. はじめに

北海道大学大学院教育学院では、平成 18 年度より「学校システム開発実践研究 A」の授業の一環で、北海道倶知安農業高等学校において授業観察を行っている。今年度は大学院生がそれぞれの教科の担当教諭と事前に授業の打ち合わせを行い、実際に授業を行った。その中の数学の時間で行われたのが、授業プラン「アルゴリズムとは何か」を使った授業である。授業者は授業プラン作成者である。

この授業は2007年10月16日、17日、18日にそれぞれ50分ずつ行われた。対象は1年1組、2年1組の各30名である。

授業の目的は、ユークリッドの互除法という2つの正の整数の最大公約数を解く方法の1つを、天下一的でない、生徒の認識過程に即した順序の中で形成し、「2つの正の整数の最大公約数を求める問題なら、どんな問題がでても時間さえあれば必ずできる」という確信を生徒が得ることでアルゴリズムとは何かを理解することである。

本論では、1. で授業プラン「アルゴリズムとは何か」の教育内容を構成する。次に2. では授業過程の分析の視点について述べる。3. では授業プランの各問題とそのねらいを順に提示し、授業記録に基づいて授業過程の分析を試みる。そして4. では、分析から明らかに

なった指導過程の妥当な部分と示唆されるプランの改訂点について述べる。

1. 授業プラン「アルゴリズムとは何か」における教育内容構成

本論における教育内容は、長方形の幾何的操作に除法を対応させることで、ユークリッドの互除法を導き、これをもとにアルゴリズムとは何かを理解する、というものである。

長方形の幾何的操作とは、2辺が共測量を持つ（方眼で敷き詰められている）長方形を敷き詰める最大の正方形を求める方法の1つで、次の3つの命題から構成されている。

- ① '長方形の長い辺の長さが短い辺の長さの整数倍の場合は、長方形の短い辺の長さが長方形を敷き詰める最大の正方形の辺の長さ
- ② '長方形の短い辺の長さを1辺の長さとする正方形で長方形を敷き詰めようとすると、長方形が余ってしまう場合は、長方形を敷き詰める最大の正方形の辺の長さ=余った長方形を敷き詰める最大の正方形の辺の長さ
- ③ '上の①', ②'をもとに、より小さな長方形を敷き詰める最大の正方形を求める操作に還元する。この操作は有限回で終わる

ユークリッドの互除法とは2つの正の整数 a, b の最大公約数を求める方法の1つで、次の3つの命題から構成されている。

- ① 負でない整数 a, b ($b \neq 0$) に対して、 $a = bq$ の場合は b が最大公約数
- ② $a = bq + r$ ($0 < r < b$) の場合は、 a, b の最大公約数 = b, r の最大公約数
- ③ 上の①, ②をもとに、より小さな整数の組についての最大公約数を求める操作に還元する。操作は有限回で終わる

長方形の幾何的操作とユークリッドの互除法の3つの命題はそれぞれ対応している。①, ②, ③の命題により、任意の2つの正の整数の最大公約数を求めるためのアルゴリズムが決定する。

アルゴリズムとは、「ある類に属するすべての問題を、有限回の操作で必ず解く手続きの体系」¹ のことである。本授業プランではユークリッドの互除法がひとつのアルゴリズムであるということを重要な教育内容とする。また、最後には他のアルゴリズムの例としてエラトステネスのふるいを紹介する。

次に、この3つの命題の底流にある除法原理について述べる。除法原理とは、すべての非負の整数 a, b ($b \neq 0$) に対して、 $a = bq + r$ ($0 \leq r < b$) となる整数 q, r をただ1組だけ決める原理であり、この q を商、 r を余りとする事で商と余りを定義する。この原理は小学校以来習ってきた整数の除法を定式化するものである。

この教育内容は、林ほか『『アルゴリズムとは何か』の授業と改訂プラン』『教授学の探究』第23号（北海道大学大学院教育学研究科、2006）で述べられている教育内容の改訂版である。この教育内容の特徴は、整数論の入り口となる除法原理から、最大公約数を求める方法の一つであるユークリッドの互除法を導き、アルゴリズムについて理解することをめざすというものである。

林ほか（2006）からの変更点は、アルゴリズムの理解を到達目標と考え、除法原理や倍数など、整数論に関する内容の一部を教育内容から外し、長方形の幾何的操作を導入部分に位置

1 青木一ほか『現代教育学辞典』（労働旬報社、1974）p. 11

づけたことである。

教育内容の変更にもなう授業プランの改訂点としては、上で述べた

「 $a = bq + r$ ($0 < r < b$) の場合は、 a, b の最大公約数 $= b, r$ の最大公約数」という、ユークリッドの互除法を構成する命題を証明する代わりに、上記の長方形の幾何的操作の段階で、「求めた正方形は長方形を敷き詰めているか」「もっと大きい正方形はないか」を確認するようにしたことである。このことにより、幾何的操作によって必ず長方形を敷き詰める最大の正方形を見つけることができることを理解する。

2. 授業過程の分析の視点

3 時間の実践授業は、次の 2, 3 時間目の授業後の感想に見られるように生徒たちには基本的には概ね受け入れられた。ユークリッドの互除法指導における長方形の幾何的操作の意義や、アルゴリズムの有用性に触れた感想は、授業プランの基である教育内容の基本姿勢が評価されたものだと言えるのではないかと。(以下の傍線は引用者注)

- ・ 数字ばかりでなく図を使って考えられたのでおもしろかったです。 今日 (2 時間目ー引用者) と昨日 (1 時間目ー引用者) で勉強していた内容が GCM ということが分かり納得しました。→ 最大公約数の原理が目で見えた。 (1-1, 2 時間目)
- ・ 図でやったことを式にして計算すると図でやったことを忘れてしまうんだなあと 思った。 (2-1, 2 時間目)
- ・ よくわからないけどいつか必ず計算が終わることがすごいと思う。 (2-1, 3 時間目)

しかし、一方で内容の未消化を訴える感想もあった。これは、1 時間目で長方形の幾何的操作と除法との対応が十分理解されなかったことや、考え慣れていない有限、無限について考えたことに起因するものと考えられるだろう。

- ・ 昨日 (1 時間目ー引用者) の授業の最初は、まったく意味がわからなくて何をやればいいのかよく分からなかった。 でも、計算をして求めるという方法が分かってからはなんとなく分かってきて自分でできるようになったので、よかったと思う。 (1-1, 2 時間目)
- ・ 難しかったです。でもわかるとおもしろかったです。 図形はかなり難しく理解するのに時間がかかりました。 (1-1, 2 時間目)
- ・ はじめて、アルゴリズムを聞きました。 むずかしかったです。 カギ 4 のもんだいは、わかりにくかった。 (1-1, 3 時間目)

こうした内容の未消化の原因を明らかにするためには、具体的な授業過程の分析に依る必要がある。分析の目的は、1. で述べた教育内容の妥当性を評価し、必要なプラン改訂の示唆を得ることである。分析は授業プランのねらいに関わる生徒の発言をその前後の授業記録と合わせて抜粋し、コメントを別に加える形で行う。

授業記録はビデオ及び MD、IC レコーダーによる記録を起こしたもので、授業者は T、学習者は C で表現した。また 4 の有限性の問題では、有限で終わるか終わらないかの選択とその理由を書いたプリントを、生徒たちの了承を得て回収しており、それも分析のデータとしている。

3. 授業過程の分析, 及び若干のコメント

授業プラン「アルゴリズムとは何か」では, 1. で述べた指導過程の基本構造に即して, 大きく分けて次の3つの章で構成されている。

- I 最初は長方形 A (35, 7) を一辺ができるだけ長く, 大きさがすべて同じ正方形で敷き詰める。幾何的操作が正しいことを確認する。次に長方形 B (30, 12) を一辺ができるだけ長く, 大きさがすべて同じ正方形で敷き詰める。幾何的操作が正しいことを確認する。長さに数を対応させ, 幾何的操作に除法を対応させる。
- II 求めた正方形の辺の長さが, 長方形の長い辺と短い辺の長さの最大公約数であることを理解し, いろいろな2つの数の最大公約数を求める。
- III ユークリッドの互除法の有限性を理解する。最後にユークリッドの互除法とアルゴリズムを定義する。他のアルゴリズムの例として, エラトステネスのふるいを紹介する。

本授業プランでの問題は次の4つの種類に分けられる。

- ①  : 本授業プランで核となる問題。この問題について考えることで本論で述べる教育内容を理解することにつながる。
- ②  :  について考えるために必要な, 文字通り「鍵」となる問題。
- ③  : p. 3 の, 長方形の幾何的操作と除法とを対応させる問題。
- ④  : 今までの内容が理解されているかを確かめるための問題。

以下では, 各問題のねらいと配布したプリント, 該当部分の授業記録の抜粋, それに対するコメントの順で指導過程の分析を提示する。

3. 0. 目標の理解と余りが出ない長方形 A の幾何的操作

ねらい

導入として, これから何をやるのかを十分に生徒に理解させる。つまり, ある長方形を一辺ができるだけ大きく, 同じ大きさの正方形で, 敷き詰めることが目標であることを生徒の共通認識として確立することがねらいである。

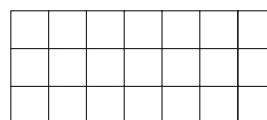
理解を助けるために次の図のような長方形を黒板に提示し, 例1, 2のような2種類の正方形で敷き詰めることでこれから行うことを把握させる。

例 1



短い辺は敷き詰めることができたが, 長い辺の方が足りない。

例 2



ぴったり最大の正方形で敷き詰めることができた。

長方形 $A(35, 7)$ をできるだけ大きな正方形で敷き詰める。ここでのねらいは、長方形の幾何的操作により見つけた正方形は、

- ① 長方形を敷き詰めている
- ② 最大である

ことを理解することで、幾何的操作が目標を達成するための正しい操作であることを理解することである。ただし、長方形 A の場合は余りがでないので、①長方形を敷き詰めている、というのは明らかである。

また、コンパスの使い方に慣れることもねらいの1つである。



長方形の形をした農地を、一辺ができるだけ長く、大きさがすべて同じ正方形の形をした畑でしきつめ (tiling) たい。いろいろな長方形で考えてみよう。



今から配る長方形 A で考えてみよう。

1

- (0) (2年1組：プリント配布，生徒が鍵穴の問題を読んだあと，授業者が黒板に長方形を貼ったあとの場面)

T ：(黒板に貼った上記の図の例1を指して) ここ余っちゃうんですね。で、この正方形じゃあだめで、じゃあ・・・

C ：じゃあ、どの正方形だったら、うまくいくか。

T ：そうそう。そういうこと。

C ：あぁー。

T ：どういう正方形だったら、きちっと敷き詰められるか。

(その後，例2を黒板に貼り，目標を理解する)

- (1) (1年1組：生徒全員に長方形 A を配布，しばらく敷き詰め方を考えた後一人の生徒が黒板で敷き詰めた方法を発表。そこで見つけた正方形について生徒全員への質問)

T ：なんでいろいろ長さがある中で、ここ(長方形の短い辺)をコンパスでとったかっていうのを、言える人？

C ：長い長さだったら、この長方形の中に入らない。

T ：お。いいとこ気付いた。これよりもし、大きかったらね、正方形は作れるには作れるんだけど、長方形を敷き詰めなきゃいけないっていう鍵穴の問題には当てはまらないでしょ。

コメント

(0)は、この授業ではこれから何をしていくのかを理解したことを表している。

(1)では長方形の短い辺で正方形を作ると、その正方形が長方形に入る最大の正方形であることを理解していると考えられる。

3. 1. 余りが1回出る長方形 B の幾何的操作

ねらい

長方形 B は短い辺を1辺とする正方形で敷き詰めようとする余りが出る。この余った長方形を、その長方形の短い辺を1辺とする正方形で敷き詰めるという操作で、目的の正方形が見つかることを理解することがねらいである。そのためには長方形 A 同様、見つけた正方形は

- ① 長方形を敷き詰めている
- ② 最大である

ことを確認することが重要である。

✎ 2

今から配る長方形 B で考えてみよう。

2

- (2) (2年1組：プリント配布, 生徒全員に長方形 B を配布, しばらく敷き詰め方を考えた後, 一人の生徒が黒板で敷き詰めた方法を発表。そこで見つけた正方形について, 生徒全員への質問)

C_1 : 同じ大きさで敷き詰めるんでしょう？

T : いい質問があった。さて, 問題です。(見つけた正方形を指して) この正方形は, 本当にぴったり敷き詰めるか？

C_1 : 敷き詰めれる。

T : なんで？

C_1 : やったから。

T : 実際これで, やったらできた？

C_2 : 半分だから。

T : ここ (長方形の短い辺) の, 半分为...

C_3 : $\frac{1}{4}$ だから。

- (3) (2年1組：(2)からの続き)

T : (見つけた正方形を指して) 本当に最大かどうか？

C_1 : やー, これ以上最大にしたら割り切れないと思うんですよ。

T : これ以上最大にしたらどう？

C_2 : 割り切れない。

T : これ以上ちょっとでも大きくしたらはみ出すよね。

コメント

(2)では見つけた正方形2個で長方形の短い辺を敷き詰めていること, そのことから残りの大きな正方形が, 見つけた正方形4個分だということを理解している。このことから全体の長方形を敷き詰めることを理解していることが示唆される。

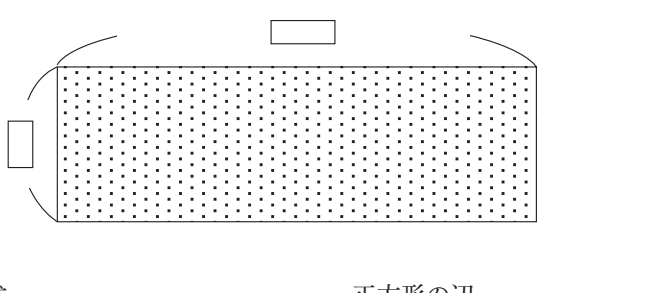
(3)では見つけた正方形を少しでも大きくすると, 余っていた長方形をぴったり敷き詰めない, はみ出すことを理解していることを表している。

3. 2. 長さとの対応, 長方形の幾何的操作と除法との対応

ねらい

方眼のついた長方形 B を使い, 長さとの数に対応させる。また, 今までの「長方形の短い辺で正方形を作る」という幾何的操作に「長方形の長い辺の長さを短い辺の長さで割る」という除法を対応させることをねらいとする。

方眼を数えて長方形 B の辺の長さを書き、
求めた正方形の辺の長さを計算してみよう。



式 _____ 正方形の辺 _____

3

(4) (2 年 1 組: プリント配布, 方眼つきの長方形 B を配布後, プリントの空欄を埋めている生徒の発言)

T : (生徒が書いた長方形の長さを見て) 30, 12 で・・・

C : 式とかない。

T : さっきの敷き詰め方で出した正方形あるじゃない。その正方形の 1 辺の長さっていくらか。

C : 一辺の長さを出せばいいの?

T : うん。

C : 6 じゃないの。

T : その 6 っていうのをどうやって出したかをとなりの式に書いてほしい。

(5) (2 年 1 組: プリントの空欄を埋めている生徒の発言)

C : 一辺の長さを出すんだったら, 割る・・・

T : 何割る何?・・・グループで考えてほしい。

C : (班員に向かって) 高さが 12 で, 正方形だから, 共通因数を見つけらればいい。

コメント

(4)では生徒は 6 という正方形の長さを正確に答えていたにもかかわらず, 式はないと言った。このことから, 「答えは分かっているが, 他に何を要求されているのか分からない」ということが考えられる。長方形の幾何的操作と除法との対応関係を理解できたとは言えないだろう。

その原因は

① コンパスの使い方のわかりにくさ

② 授業プラン p.3 のわかりにくさ

が考えられる。

①のコンパスについて、コンパス操作と除法との対応は、授業者の説明なしにはほとんど理解されなかった。長方形に円を書いていた生徒もいた。メモリのついてない定規に印をつけて同じ長さを作ろうとしていた生徒がたくさんいたが、用意した定規には印がつかなかった。生徒が自然に考える正方形の作り方は、コンパスを使ってではなく、定規に印をつけて同じ長さをつくるというものであるのかもしれない。①の改訂案としては、コンパスではなく、メモリはないが印を書き込める定規を使うということが考えられる。

②の改定案としては、ただ「式」と書くのではなく、「長方形 B の短い辺で正方形をつくると、正方形はいくつできるか。式で書いてみよう」「余った長方形の短い辺で正方形をつくると、正方形はいくつできるか。式で書いてみよう」といったように、除法を使うことが生徒にわかるようなプリントの表現にすることが考えられる。もしくは式を書かせるのではなく、生徒のそのままの考え方を書いてもらうために「求めた正方形の1辺の長さはいくらだろう。また、その理由も考えてみよう」と発問し、そこから除法へと対応させるという方法も考えられる。

(5)の発言は、今まで何を意味するのか良くわからなかった正方形の辺の長さと、長方形の2つの辺の長さとの関係に気づいた事を示唆する。「共通因数」とは「公約数」のことだろう。長さに数に対応させたことで、正方形の辺が長方形の2つの辺の公約数になることが理解できかけているのではないだろうか。

3. 3. 長方形の幾何的操作と除法との対応の確認

ねらい

長方形 C では、長方形の幾何的操作と除法との対応を理解しているかを確認することがねらいである。

問題 辺の長さが 32, 10 の長方形 C をしきつめる最大の正方形の辺の長さを求めよう。

4

(6) (1年1組：プリント配布後、プリントの問題を解いている生徒同士の発言)

C_1 : 答えどれ?

C_2 : 5 じゃないの?

C_1 : 本当?

(7) (1年1組：黒板に書いた自分の解答を説明する生徒の発言)

T : 32 $\div$ 10 っていうのはこれ (長方形の図) でいうとどういうことだ?

C : えー, 長方形を, 一辺の長さが...

T : こっち (長方形の長い辺) 32 あって。

C : それ割る...10.

T : で, こう, とっていくってことだな, 割るって言うのは。

C : はい。

T : 商が3つ取れた。で, ここ (余った長さ) が?

C : 余りの, 2。

T : で, 次。ここどうするか。余っちゃったとこ (余った長方形)。

C : それを, 10 を。

T : 10 がこの長い方。うん。

C : 10 を, 割る。

T : この余った小っちゃい方で (2 で) また割っていくと。そうすると?

C : 5 つ。

T : 正方形ができて。

C : 余り 0。

T : ぴったり。余り 0 と。求めたい正方形の一辺っていうのが?

C : 2。

T : 2。そうだね。

(その後, 黒板で説明した生徒に対して他の生徒から拍手が起こる)

コメント

(6)にあるように, 筆算は完璧だが答えを最後に取れた正方形の個数である 5 にしていた生徒がいた。これは, 長方形の幾何的操作と除法との対応関係を理解しきれていないことを示唆する。

しかし(7)の黒板で解いた生徒の解説を通して, 筆算で出てきた数が長方形の図のどの長さに対応するのかを多くの生徒は理解できたのではないだろうか。

(1 時間目終わり)

3. 4. 最大公約数の理解と, 長方形の幾何的操作と対応した除法

ねらい

今まで求めてきた長方形を敷き詰める正方形の辺の長さが, 長方形の長い辺の長さと, 短い辺の長さの最大公約数であることを理解させることがねらいである。

GCM (28, 20), GCM (105, 77) を求める問題は, 余りが何回出ても, 長方形の幾何的操作と対応した除法を繰り返し適応できるかどうかを確かめることがねらいである。

前回の授業で, 長方形 (辺の長さ, a と b) を一辺ができるだけ長く, 大きさがすべて同じ正方形でしきつめた。

その正方形の辺の長さ c を, a と b の () といい, $\text{GCM}(a, b)$ と書く。
(a, b は正の整数)

GCM とは **g**reatest **c**ommon **m**easure にある 3 つの単語の頭文字である。

つまり

☞ 2 (p.3) から, $\text{GCM}(\quad, \quad) = \quad$ となる。

☞ 3

GCM (28, 20) を求めよう。

問題

GCM (105, 77) を求めよう。

6

(8) (2年1組: GCM (28, 20) を求めているときの生徒同士の発言)

C_1 : 最初でつかい方を, 小っちゃい方で割って, で, 今度割った数を, 余りで割る。

C_2 : 余りが, 8? 0 になんない。

C_1 : もう一回やって。

C_2 : なに, これを?

C_1 : 割った数を, 余りで。

コメント

(8)は2人の生徒の会話なのだが, 1人の生徒は何を何で割ればいいのか混乱することなくもう1人の生徒に説明できている。これは長方形の幾何的操作と除法との対応関係を理解していることを表している。しかし, もう1人の生徒は対応関係を理解しているとは言えないだろう。なぜこのように理解の違いがでるのかは, この分析からはわからなかった。

(2時間目終わり)

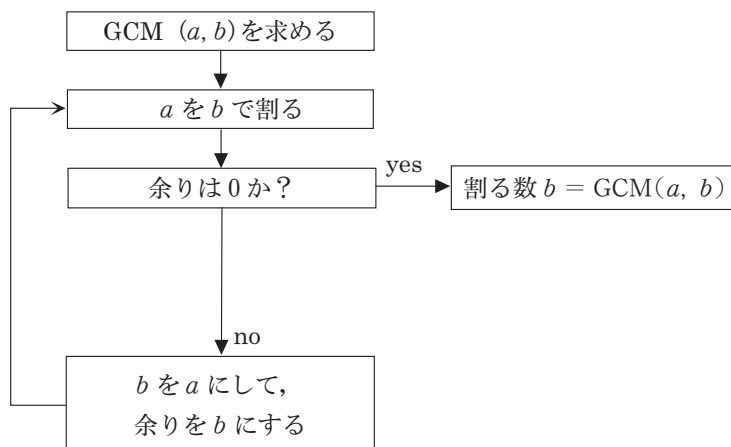
3. 5. 長方形の幾何的操作と対応した除法の有限性

ねらい

2時間目に学んできた最大公約数を求める方法の一般化がねらいである。つまり「2つの正の整数の最大公約数を求めるときに, 学んだ方法で解く中でたとえ余りがでても, 矢印に従ってもどってまた割ればいい」ということを流れ図で理解することをねらう。

✎ 4の問題は生徒と授業者の間, 生徒同士でいろいろな意見が出て活発な議論を展開することにより, 正の整数の範囲では有限回で必ず操作が終わることを理解することがねらいである。

前の時間に学んだ方法で, 2つの正の整数 a, b ($a \geq b$) の GCM (a, b) を求めることができた。



🔑 4

どんな 2 つの正の整数 a, b ($a \geq b$) でも, 前の時間に学んだ方法で
必ず $\text{GCM}(a, b)$ を求めることができるか。

ア. できる イ. できない

7

(9) (2 年 1 組: プリント配布後, 流れ図の説明の場面)

T: 割った数を余りで割る。

C: 割り切れるわけですね。またもし, またそこで余りができるなら。

T: そうだね。また割り切れない。またもし余りがでたら?

C: また同じことを繰り返す。

T: また同じことを繰り返す。で, そのことをこの 7 ページの図は言ってるの。

C: あ, だからここで矢印ピーって, 先のぼりっていうかなんつうの, 逆流してるのか。

(10) (2 年 1 組: 🔑 4 の問題を読んだ直後の場面)

C₁: できない, できない!

C₂: 1 はどうなの? 公約数・・・

C₁: 1 でしか割れないやつ割れないのと同じ?

(11) (2 年 1 組: 🔑 4 の問題を考えている生徒からの発言)

C: 先生, これ, ちょっとできましたよ, 私。

T: ん?

C: 絶対に, なんつうんですか, 1 が入ってるんですよ。1。絶対最後, 1 になるじゃないですか。だってどの計算やってみても, 確か俺最終的に 1 になったんですよ。割り切れない数字にしてみようとして, こうしたら, やっぱコイツ出てくるんですよ, 最終的に。

T: 1 がでてくるんだ。

コメント

(9)は繰り返すという意味の, 流れ図の上に戻る矢印の理解を示唆している。

(10)では, 生徒の一部は問題を見て, すぐにすべての整数の公約数である 1 に着目している, ということを表している。

(11)では互いに素な 2 つの数の最大公約数を求めるとき, 何回余りが出ても必ず 1 で割り切れて答えが出る, ということを理解していることが考えられる。

有限性の問題で生徒がアカイを選んだ理由 (一部抜粋) は次のとおりである。

1 年 1 組

このクラスは全員「ア できる」の方に手を挙げていた。そこで授業者から, 「では, GCM (2093, 759) はできるか」という発問をした。計算ミスはあったが, ほとんどの生徒がユークリッドの互除法によって $\text{GCM}(2093, 759) = 23$ と解けることを理解した。

さらに次のような意見があった。

- ・全ての自然数は1で割れるから [例]

$$1 \overline{) 2 \overline{) 5}}$$

$$\begin{array}{r} \underline{2} \quad \underline{4} \\ 0 \quad 1 \end{array}$$

- ・絶対1でわりきれない！

$$\begin{array}{r} \underline{4} \quad \underline{1} \quad \underline{1} \quad \underline{1} \quad \underline{1} \quad \underline{6} \\ 1 \overline{) 4 \overline{) 5 \overline{) 9 \overline{) 14 \overline{) 23 \overline{) 152}}}} \\ \underline{4} \quad \underline{4} \quad \underline{5} \quad \underline{9} \quad \underline{14} \quad \underline{138} \\ 0 \quad 1 \quad 4 \quad 5 \quad 9 \quad 14 \end{array}$$

集めたプリントでは「イ できない」に丸をつけた生徒が2人いたが、理由は書いていなかった。

さらにこんな意見があった。

- ・100%われる。長方形は正四角形を使って作れないとおかしいから。

この意見は、どんな長方形でも方眼で必ず敷き詰められていなければならないと考えていることを表している。

教育内容としては、2辺が共測量を持つ長方形しか扱っていないので授業の進行に影響はないが、数学的事実として方眼で敷き詰められない長方形は存在するので、無理数の指導とのつながりを考えた場合、教育内容の改訂を考える必要があるだろう。

2年1組

- ・公約数が1になれば、できるのでは？

- ・最終的にあまりが出なければいいから1で割れば割り切れるから。1があるから割り切れないことはない。

$$1 \overline{) 2 \overline{) 5 \overline{) 7}}}$$

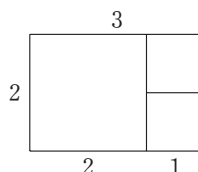
$$\begin{array}{r} \underline{2} \quad \underline{4} \quad \underline{5} \\ 0 \quad 1 \quad 2 \end{array}$$

- ・どんどん数が小さくなり、最終的には1になって、解答（最大公約数）が1になったりして求めることができない数はないから。最終的にはあまりが出なくなるため答が出てくる。

また最大公約数自体が1があるので最大公約数が出ないことはないから。

また、「イ できない」に丸をつけた生徒が3人いたが、理由は書いていない、なんとなくが1人ずつ。そしてもう一人が

- ・割り切れないなければ（割り切れなければ一筆者）、わからない（わからない一筆者）問題だと、絶対に終わらない問題である。



$$1 \overline{) 2 \overline{) 3}}$$

$$\begin{array}{r} \underline{2} \quad \underline{2} \\ 0 \quad 1 \end{array}$$

$$\text{GCM}(3, 2) = 1$$

この意見は(10)で「できない、できない！」と発言した生徒のものである。これらの発言と意見から、この生徒は正の整数の範囲ではいつかは操作が終わるが、整数でなければ終わらないこともある、と考えていることを示唆しているのではないだろうか。

コメント

1年1組でも2年1組でも、互いに素な2つの数の最大公約数は1であることを理解していると考えられる。これは正の整数の範囲ではユークリッドの互除法が有限回で終わることを理解していると考えられるのではないだろうか。

3.6. ユークリッドの互除法, アルゴリズムの定義

ねらい

ユークリッドの互除法を使えばどんな2つの正の整数の最大公約数も求めることができることを確認し、ユークリッドの互除法を定義する。

最後に、ユークリッドの互除法が有限回の決まった操作で必ず2つの正の整数の最大公約数を求める手続きであることを確認し、アルゴリズム (algorithm) を定義する。

前の時間に学んだ方法でどんな2つの正の整数 a, b ($a \geq b$) でも $\text{GCM}(a, b)$ を求めることができる。

この授業で学んだ方法で、2つの数の最大公約数を求める手続きを、**ユークリッドの互除法**という。

Euclid (ユークリッド) : ギリシャの数学者で、B.C. 300~270年ごろ生きた。

Euclid は、その時代の幾何学と数論を系統的にまとめて、著名な本『Elements』(『原論』)にした。

ユークリッドの互除法を使うと、どんな2つの正の整数でも必ず計算が終わって最大公約数が求まる。無限に続けなくてもいい。これを有限回の操作で計算が完了すると表現する。

ユークリッドの互除法は、algorithm (アルゴリズム) のひとつの例である。アルゴリズムとは、問題を解く手続きである。同じ種類の問題 (ユークリッドの互除法の場合は、2つの正の整数の最大公約数を求めるという問題) であれば、アルゴリズムを使って有限回の操作で解答を得ることができる。

(12) (2年1組: プリント配布後、授業者がプリントを読んでいる場面)

T: ユークリッドの互除法といいます。

C₁: ゴジョっていうんですか?

T: 互除。互除ってどういう意味だ? 漢字見てわかる?

C₁: お互いで、削除。お互いで、かき消す。

T: 除ってどういう意味?

C₁: 除? 削除の除とか駆除。

C₂: 割るんじゃないの?

C₁: ああ、何だっけ。除数。

T: 除数。割り算のことなんていうの?

C₃: 除法。

T: 除法の除はこれね。つまり割り算。

コメント

(12)では互除法という聞きなれない言葉が、今までやってきた「お互いに割っていく」ということと対応させることで生徒のものになっていく過程が表れているのではないだろうか。

3. 7. 他のアルゴリズムの例としてのエラトステネスのふるい

ねらい

他のアルゴリズムの例として、エラトステネスのふるいを紹介する。「ある数以下の素数を求める」という問題も、アルゴリズムが決定できれば単純作業を繰り返すことで、答えを求めることができることを実感させることがねらいである。

他の algorithm の例として、エラトステネスのふるいというものがある。

ある数以下のすべての素数を求めるための次のような algorithm を
エラトステネスのふるいという。
(素数とは、1を除く2つ以上の整数の積の形で表せない数)

2 ～ 100 までの素数を探す

2から 100 までの整数を小さい順に並べて表を作る（1は素数ではないので書かない）



最初の数の2にマルをつける。2の倍数を消す。



次の数の3にマルをつける。3の倍数を消す。



どこまで調べればよいか？

9

	2	3	4	5	6
7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30
31	32	33	34	35	36
37	38	39	40	41	42
43	44	45	46	47	48
49	50	51	52	53	54
55	56	57	58	59	60
61	62	63	64	65	66

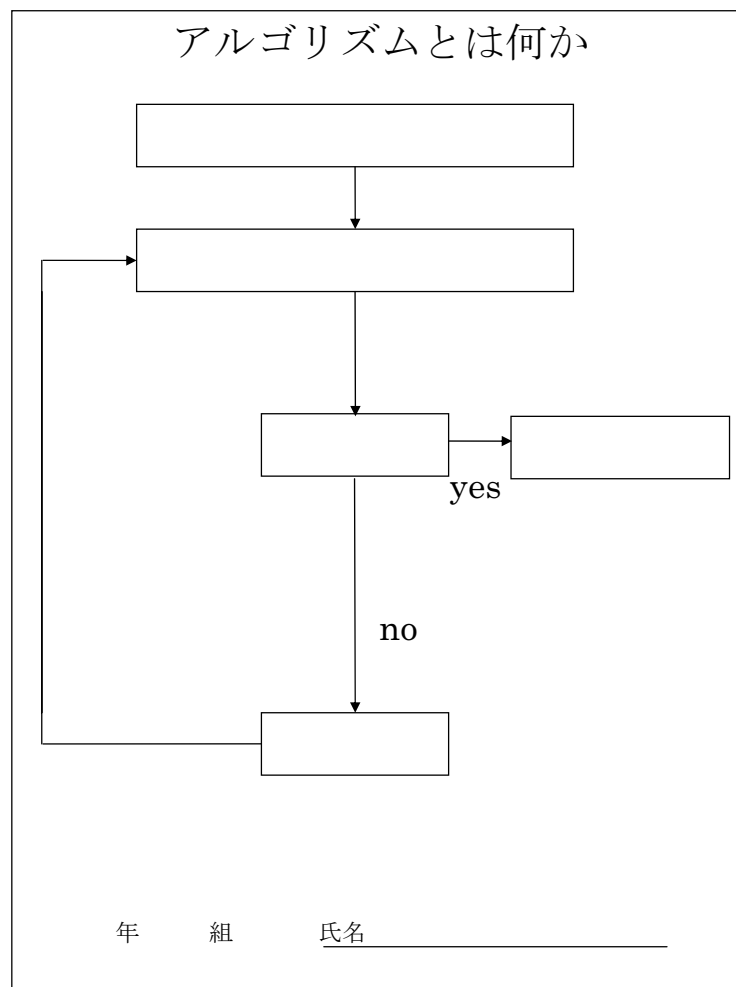
67	68	69	70	71	72
73	74	75	76	77	78
79	80	81	82	83	84
85	86	87	88	89	90
91	92	93	94	95	96
97	98	99	100		

10

3. 8. 表紙

ねらい

最後に表紙を配る。最初に配らない理由は、「アルゴリズムとは何か」というタイトルを先に聞いても、何をやるのか生徒は分からないからである。最後に配って「ああ、この授業はこういうことを教えたかったのか」と生徒が納得してくれればこの授業は成功だろう。



(13) (2年1組: 表紙を配った後の生徒の発言)

C: あ, これもしかしてあれですか, 俺の頭で理解したアルゴリズムは何かってのを
書くてことですか?

T: ああいいよ。

コメント

(13)では自分でアルゴリズムを考えてみようという積極性が示唆される。

4. 授業過程の評価と今後の課題

本論において作成した授業プラン「アルゴリズムとは何か」は, 実験授業とその分析を通じて, いくつかの妥当な点と示唆されるプランの改訂点が明らかになった。本章ではそれらについて整理すると同時に, 今後の授業プランの改訂の方向について述べたい。

3. 0. の分析から, 授業の導入として, これからどんなことをしていくのかがわかる具体的説明が重要であることが示唆された。また, 長方形の短い辺でつくった正方形は, 長方形に入る最大の正方形であることを, 生徒は困難なく理解できることが確認された。

3. 1. の分析からは, 余りがでる長方形の場合, 見つけた正方形は本当に長方形を敷き詰めるかどうかは自明ではないことが考えられる。しかし, 余った長方形の長い辺が残りの大きな正方形の辺であることに気づくと, 理解できることが確かめられた。

3. 2., 3. 3. の分析では, 「長方形を敷き詰める最大の正方形の辺」と, 「2つの数の最大公約数」との対応は理解しているものの, 長方形の幾何的操作と除法との対応関係の理解の不十分さが露呈した。長方形の幾何的操作と除法との対応関係が十分理解できるように改訂をしたい。

3. 4. の分析からは, 生徒の一部は長方形の幾何的操作と除法を対応させて最大公約数を求めることができていたことが確認された。発言を記録できなかったので3. 4. では述べなかったが, GCM (105, 77) を求める問題も多く生徒がプリントに正しく筆算を書いて解いていた。しかしながら, すべての生徒が問題を解けていたわけではない。その原因は上述したように, 長方形の幾何的操作と除法との対応関係の理解が不十分であることであろう。

3. 5. の分析から, 生徒は互いに素である2つの数のGCMを求める問題を経験していないにもかかわらず, 自分で互いに素である2つの数でGCMを求めようと考えたということが確認された。これは「割り算を何回繰り返しても余りが0にならない, 割り切れないような2つの数を考えよう」「余りが何回もでて数がどんどん小さくなったらどうなるか」と考えたからでてきた発想ではないだろうか。あるいは授業プラン p. 5 で最大公約数の説明時に, 2つの数の公約数には1が必ずあることを復習していること, 授業プラン p. 3 で方眼で敷き詰められた長方形を見ていることも理由として考えられるだろう。「どんなに余りが出て数が小さくなくても, 最終的には1で割り切れるから」という理由は, 2つの正の整数の最大公約数を求めるとき, 有限回でユークリッドの互除法が終わる理由としては十分なものだろう。

3. 8. では自分の日常生活の中でアルゴリズムを探したり, 表紙の流れ図を使って自分でアルゴリズムを作ろうとしている生徒が何人もいた。空欄の流れ図が生徒のアルゴリズムへの興味を喚起したとあっていいだろう。ただ, アルゴリズムを理解できたかどうかを判断することはできなかった。判断するには「これができればアルゴリズムがわかったといえる」というよ

うな問題を出せばいいのだが、それがどんな問題なのかを考えるのが今後の課題である。ひとつの提案として、表紙（空欄の流れ図）に自分でアルゴリズムを作っていた生徒が何人かいたことから、「自分でアルゴリズムをつくる」という課題はアルゴリズムを理解しているかどうかを問う問題になるのではないか。

今後の課題としては、上に挙げた改訂点を克服した改訂プランを作り、実践することである。

最後に、事前訪問のときから快く私たちを迎えてくださり、授業にいたるまでの様々な準備に協力してくださった倶知安農業高校の先生の方々、そして誰よりも授業で率直な意見、感想を述べてくれた同校の1年1組、2年1組の生徒全員に心から感謝したい。