



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	第13回C0E研究員連続講演会 : 波面とその特異点
Author(s)	佐治, 健太郎
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 127, 1
Issue Date	2008-01-01
DOI	https://doi.org/10.14943/30330
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/32352
Type	departmental bulletin paper
File Information	20080308_06.pdf



第13回 COE 研究員連続講演会
波面とその特異点

COE 研究員
佐治 健太郎

2007.6.12 (火), 14 (木), 15 (金)

Series #127. January, 2008

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- #105 T. Yamamoto, O. Hatori, M. Hayashi and T. Nakazi (Eds.), 第 14 回関数空間セミナー, 112 pages. 2006.
- #106 Y. Daido, 学位論文 Doctoral thesis “RECONSTRUCTION OF INCLUSIONS FOR THE INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF HEAT EQUATION USING PROBE METHOD”, 68 pages. 2006.
- #107 T. Yamamoto, 学位論文 Doctoral thesis “Singular fibers of two colored differentiable maps and cobordism invariants”, 333 pages. 2006.
- #108 S. Izumiya, Singularity theory of smooth mappings and its applications: a survey for non-specialists, 41 pages. 2006.
- #109 J. Cheng, B. Y. C. Hon, J. Y. Lee, G. Nakamura and M. Yamamoto, Inverse Problems in Applied Sciences - towards breakthrough - Organizing Committee, 96 pages. 2006.
- #110 K. Matsumoto, 超幾何関数早春学校, 87 pages. 2006.
- #111 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, The 31th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 91 pages. 2006.
- #112 H. Okamoto, D. Sheen, Z. Shi, T. Ozawa, T. Sakajo and Y. Chen, Book of Abstracts of the First China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics & The Second East Asia SIAM Symposium, 78 pages. 2006.
- #113 N. Ishimura, T. Ishiwata, T. Sakajo, T. Sakurai, M. Nagayama, T. Nara, K. Hayami, D. Furihata and T. Matsuo, 応用数理サマーセミナー「確率微分方程式」, 116 pages. 2006.
- #114 T. Abe, 第 8 回 COE 研究員連続講演会『超平面配置と対数的ベクトル場の幾何』, 23 pages. 2006.
- #115 H. Kubo and T. Ozawa, Sapporo Guest House Symposium on Mathematics 22 “Nonlinear Wave Equations”, 67 pages. 2006.
- #116 S. Okabe, 第 9 回 COE 研究員連続講演会『ある束縛条件下における平面弾性閉曲線のダイナミクス』, 31 pages. 2006.
- #117 A. Suzuki, T. Ito, N. Sato, K. Shibuya, D. Hirose, Y. Maekawa and K. Matsumoto, 第 3 回数学総合若手研究集会 -他分野との学際的交流を目指して, 264 pages. 2007.
- #118 T. Yamamoto, Y. Sato, N. Kataoka and H. Takagi, Proceedings of the conference on New Aspects of High-dimensional Nonlinear Dynamics, 73 pages. 2007.
- #119 T. Yamamoto and T. Nakazi, 第 15 回関数空間セミナー報告集, 82 pages. 2007.
- #120 K. Hirata, 第 10 回 COE 研究員連続講演会『正值調和関数に対する Martin 積分表現と非線形楕円型方程式の正值解の存在』, 25 pages. 2007.
- #121 K. Izuchi, 第 12 回 COE 研究員連続講演会『I) Segal-Bargmann 空間の巡回ベクトルについて II) 2 重単位開円板上の逆シフト不変部分空間上のクロス交換子について』, 18 pages. 2007.
- #122 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, The 32nd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 73 pages. 2007.
- #123 H. Kubo, T. Ozawa, H. Takamura and K. Tsutaya, Nonlinear Wave Equations, 53 pages. 2007.
- #124 N. Ishimura, T. Sakajo, T. Sakurai, M. Nagayama, T. Nara, D. Furihata and T. Matsuo, 応用数理サマーセミナー 2007「計算ホモロジーとその応用」, 110 pages. 2007.
- #125 S. Hattori, 第 15 回 COE 研究員連続講演会『分岐理論と有限平坦 Galois 表現』, 28 pages. 2008.
- #126 T. Miyaguchi, M. Kon, R. Kamijo, S. Kawano, Y. Sato and D. Hirose, 第 4 回数学総合若手研究集会 -他分野との学際的交流を目指して, 298 pages. 2008.

21 世紀 COE プログラム：
特異性から見た非線形構造の数学

第 13 回 COE 研究員連続講演会
波面とその特異点

COE 研究員
佐治 健太郎

2007.6.12 (火), 14 (木), 15 (金)

北海道大学理学部 8 号館 302 室, 309 室

波面とその特異点

佐治健太郎

北海道大学大学院理学研究院 COE 研究員

本稿は 2007 年 6 月 12 日から 15 日に行われた第 13 回 COE 研究員連続講演会の内容に加筆したものである. 本稿の目的は 3 次元空間内の波面の特異点に対して有用な判定法を紹介し, 様々な場面で特異点を容易に判定できる方法を与えることである.

1 序

まずは写像の特異点と波面について簡単に整理しておく. 本節の主要な参考文献は [15].

可微分写像 $f : (U^2; u, v) \rightarrow \mathbf{R}^3$ を考える. ここで, $U^2 = U$ は $\mathbf{R}^2$ の開集合, (u, v) は座標とする. $p \in U$ が f の**特異点**であるとは

$$r := \text{rank}(df)_p = \text{rank}(f_u, f_v)(p) < 2, \quad \left(f_u = \frac{\partial f}{\partial u}, f_v = \frac{\partial f}{\partial v} \right)$$

を満たすときをいう. 微分 df の退化次数 $2 - r$ を f の p での**余階数**という.

次に波面の定義を述べるが, その前に接触構造について記しておく.

可微分多様体 N 上の余次元 1 の分布 $K_p \subset T_p N$ が, N 上の**接触構造**であるとは K が 1 形式 α に対して $K = \{\alpha = 0\}$ とあらわされるとき, 双線形形式

$$d\alpha|_{K_p} : K_p \times K_p \rightarrow \mathbf{R}$$

は任意の $p \in N$ で正則であるときをいう. この条件は $\alpha \wedge d\alpha \wedge \cdots \wedge d\alpha \neq 0$ と同値である. 接触構造が与えられた多様体を**接触多様体**という. 接触多様体は必ず奇数次元であることを注意しておく.

例 1.1. $(\mathbf{R}^{2n+1}; x_1, \dots, x_n, y, p_1, \dots, p_n)$ に対して

$$\alpha := dy - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$$

とすると $\mathbf{R}^{2n+1}$ は接触多様体となる. これを**標準的な接触構造**という.

ダルブーの定理から, 任意の接触多様体 (W, α) と任意の点 $p \in W$ に対して p の座標近傍 $(U; x_1, \dots, x_n, y, p_1, \dots, p_n)$ が存在して $\alpha = dy - \sum_{i=1}^n p_i dx_i$ となる. すなわち, 接触構造は局所的にはすべてこの例と同値である.

例 1.2. 多様体 M とその座標近傍 V に対し, $(T^*V; x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ を T^*V の座標とし,

$$\tilde{\omega} := \sum_{i=1}^n \xi_i dx_i$$

とすると, これは座標不変で, T^*M 上の 1 形式を定める. 次に PT^*M 上の 1 形式を

$$\omega := [\tilde{\omega}]$$

とすると, これは PT^*M 上の接触形式となる. これを PT^*M 上の標準的な接触構造という.

定義 1.3. はめ込み $L : U^n \rightarrow PT^*N^{n+1}$ がルジャンドルはめ込みであるとは

$$L^*\omega \equiv 0$$

が成り立つことである.

このとき,

- $\pi \circ L$ をルジャンドル写像, ($\pi : PT^*N \rightarrow N$ は標準的な射影)
- $W(L) = \pi \circ L$ を L の波面集合,
- L を $W(L)$ のルジャンドルリフト

と呼ぶ. 通常はこのような定義し, 波面集合 $W(L)$ をルジャンドルリフトの射影と考えるのであるが, 本稿の目的は波面集合を写像として考え, 研究することであるので, 以下のような定義をする.

リーマン多様体 (N, g) を考え, g によって TN と T^*N を同一視しておく. はめ込み

$$L = (f, [\nu]) : U^n \rightarrow PT^*N$$

をはめ込み

$$L = (f, [\nu]) : U^n \rightarrow PTN$$

と思うと, L がルジャンドルはめ込みであるための必要十分条件は

$$g(df(X), \nu) \equiv 0, \quad (\forall X \in TU).$$

すなわち, ν が f の法線ベクトルであることである. よって次のように定義する.

定義 1.4. 写像 $f : M^n \rightarrow N^{n+1}$ が**半波面 (frontal)** であるとは (イソトロピック) リフト

$$L = (f, [\nu]) : M \rightarrow PTN$$

が存在して

$$g(df(X), \nu) \equiv 0, \quad (\forall X \in TU)$$

が成り立つ. f が **波面 (front, wavefront)** であるとは半波面であって L がはめ込みであるときをいう.

以降, 半波面 (f, ν) と書いた場合は, 波面 f であって, $(f, [\nu])$ がイソトロピックリフトになるものをあらわすとする. ここで, 波面の例を挙げておく.

例 1.5. 特異点の無い曲面 $f : (U^2; u, v) \rightarrow \mathbf{R}^3$ を考える. 通常やるように単位法線ベクトルを

$$\nu = f_u \times f_v / \|f_u \times f_v\|$$

と定める. 写像 f_t ($t \in \mathbf{R}$) を

$$f_t(u, v) = f(u, v) + t\nu(u, v)$$

と定める. これは平行曲面と呼ばれるが, $(f_t, [\nu])$ はルジャンドルはめ込みとなり, f_t は任意の t に対して波面である.

平行曲面の図を描くと図 1 のようになるが, ここで, もとの f に特異点が無くても, f_t が特異点を持つことが観察できる. 従って, 波面は一般に特異点を持つことがわかる.

写像の特異点を研究するために, 以降では写像芽を扱う. 写像芽に対して, 自然な同値関係を導入する.

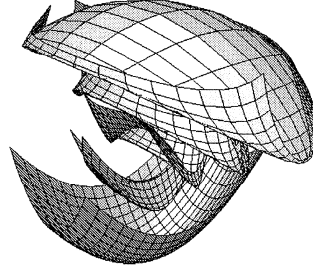


図 1: 平行曲面

定義 1.6. 2 つの写像芽

$$f : (M, p) \rightarrow (N, q), \quad f' : (M', p') \rightarrow (N', q')$$

が $\mathcal{A}$ -同値 (右左同値・同値) であるとは微分同相写像芽 $\phi : (M, p) \rightarrow (M', p')$, $\Phi : (N, q) \rightarrow (N', q')$ が存在して $\Phi \circ f = f' \circ \phi$ が成り立つときをいう.

定義 1.7. 2 つのルジャンドルはめ込み芽

$$L : (U, p) \rightarrow (PT^*N, q)$$

$$L' : (U', p') \rightarrow (PT^*N', q')$$

がルジャンドル同値であるとは $h : (U, p) \rightarrow (U', p')$ 微分同相写像芽, $H : (PT^*N, q) \rightarrow (PT^*N', q')$ ファイバーを保つ接触微分同相写像芽 ($H_*(K_p) = K'_{H(p)}$) が存在して,

$$H \circ L = L' \circ h$$

を満たすときをいう.

これらの同値関係は両方とも自然である. これらの間の関係について次が知られている.

定理 1.8 (ザカリューキン, [39]). 2 つのルジャンドルはめ込み芽

$$L : (U, p) \rightarrow (PT^*N, q), \quad L' : (U', p') \rightarrow (PT^*N', q')$$

に対して, $\pi \circ L$, $\pi \circ L'$ の正則点の集合は稠密であるとする. このとき, L と L' がルジャンドル同値であることと微分同相写像芽 $\Phi : (N, q) \rightarrow (N', q')$ が存在して, $\Phi(W(L)) = W(L')$ が成り立つことは同値である.

従って、上記 2 つの同値関係の間にはほとんど差がないことがわかる。我々の目的は波面を写像として直接扱うことであるので、波面の特異点の同値関係として定義 1.6 の方を採用する。ここで、いくつかの波面の特異点の例を挙げておく。

例. カスプ辺

$$f(u, v) = (u, v^2, v^3) \text{ at } (0, 0)$$

をカスプ辺という。 $f_u \times f_v = (0, -3v^2, 2v)$ なので

$$\nu(u, v) = (0, -3v, 2)\delta, \quad \delta = 1/\sqrt{4 + 9v^2}$$

とすれば、 f は半波面になる。さらに

$$(f_u, \nu_u) = (1, 0, 0, *, *, *)$$

$$(f_v, \nu_v) = (0, 2v, 3v^2, 0, -3\delta + \delta_v, 2\delta_v)$$

であって、 $\delta(0, 0) = 1/2, \delta_v(u, 0) = 0$ なので、 $L = (f, \nu)$ はルジヤンドルはめ込みとなり、 f は波面である。

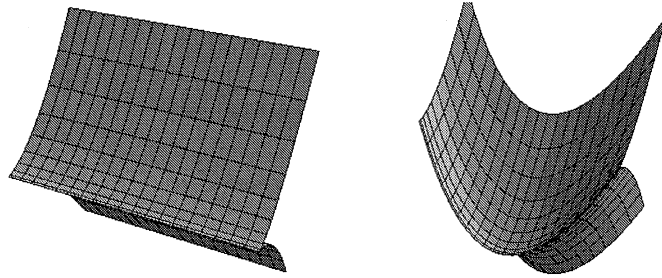


図 2: カスプ辺

5/2-カスプ辺

$$f(u, v) = (u, v^2, v^5) \text{ at } (0, 0)$$

を 5/2-カスプ辺という。 $f_u \times f_v = (0, -5v^4, 2v)$ なので

$$\nu(u, v) = (0, -5v^3, 2)\delta, \quad \delta = 1/\sqrt{4 + 25v^6}$$

とすれば、 f は半波面になる。ところが、 $\nu_v = (0, -15v^2, 0)\delta + (0, -5v^3, 2)\delta_v$ なので $\nu_v(0, 0) = 0$ となり、波面ではない。

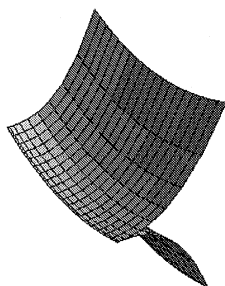


図 3: 5/2-カスプ辺

交叉帽子

$$f(u, v) = (u, v^2, uv) \text{ at } (0, 0)$$

を交叉帽子という. $f_u \times f_v = (-2v^2, -u, 2v)$ なので上手く法線ベクトルを特異点を越えて定義できない. これは半波面でない例である.

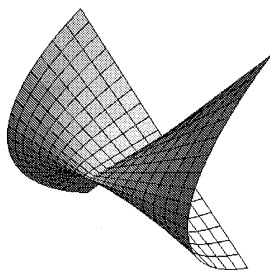


図 4: 交叉帽子

スワローテイル

$$f(u, v) = (3u^4 + u^2v, 4u^3 + 2uv, v) \text{ at } (0, 0)$$

をスワローテイルという. これは波面である.

カスプ的交叉帽子

$$f(u, v) = (u, v^2, uv^3) \text{ at } (0, 0)$$

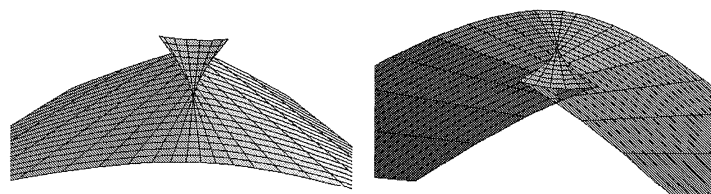


図 5: スワローテイル

をカスプ的交叉帽子という. これは半波面であるが波面でない. 空間曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^3$

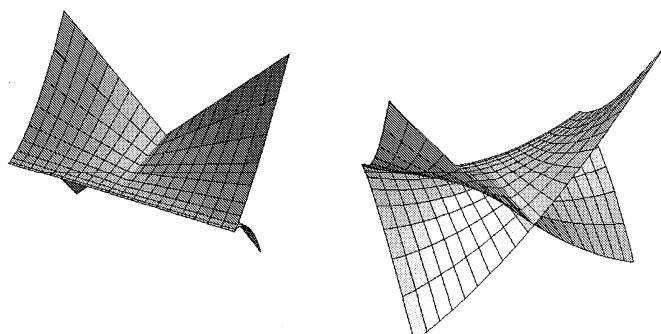


図 6: カスプ的交叉帽子

の接線曲面の振率 $\tau = 0, \tau' \neq 0$ のところにあらわれる.

カスプ的くちびる, くちばし

$$f(u, v) = (3u^4 \pm 2u^2v^2, 4u^3 \pm 4uv^2, v) \text{ at } (0, 0)$$

をカスプ的くちびる (+), カスプ的くちばし (-) という. これらは波面である.

A_4 -型特異点

$$f(u, v) = (4u^5 + u^2v, 5u^4 + 2uv, v) \text{ at } (0, 0)$$

を A_4 -型特異点という. これは波面である.

波面は一般に様々な特異点を持つが, 3次元空間内の波面に関しては次の定理が知られており, ジェネリックにあらわれる特異点はカスプ辺とスワローテイルであるこ

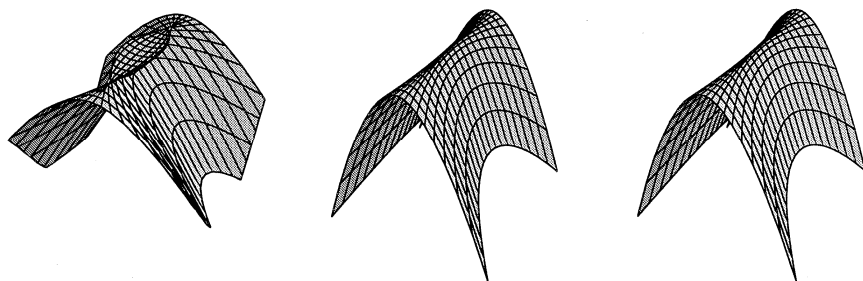


図 7: カスプ的くちびる (真ん中)

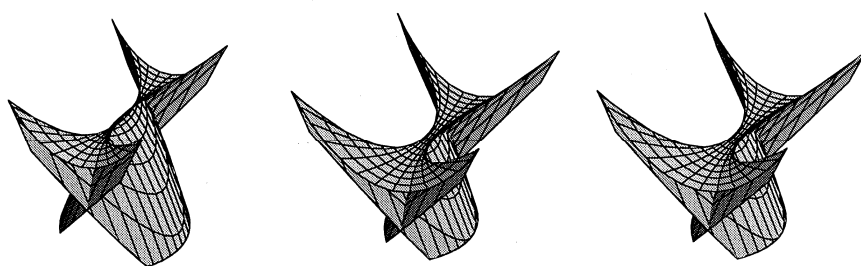


図 8: カスプ的くちばし (真ん中)

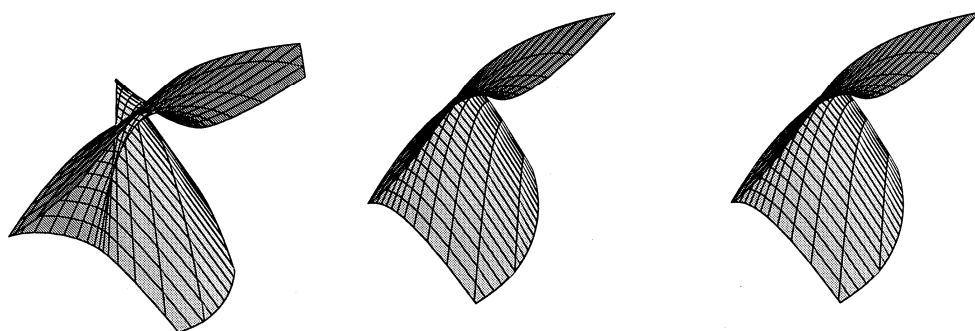


図 9: A_4 -型特異点 (真ん中)

とが分かっている．波面全体の集合を

$$F := \{L \in C^\infty(M^2, PT^*N^3) \mid L : \text{ルジャンドルはめこみ} \}$$

にホイットニー位相を入れたものとする．このとき

定理 1.9 (アーノルド・ザカリューキン, [1]). 波面全体の集合 F に対し,

$$\mathcal{O} = \{L \in F \mid \forall p \in M, L \text{ at } p \text{ は } W(L) \text{ が} \\ \text{非特異またはカスプ辺またはスワローテイルに同値} \}$$

は F の中で開かつ稠密である．

以降では、ここに挙げた特異点の判定法を紹介する．

2 判定法のための準備

本節では判定法を述べるための基礎概念について述べる．本節の主要な参考文献は [19].

半波面 $f : U \rightarrow \mathbf{R}^3$ に対してその法線ベクトルを $[\nu]$ と書く．

特異点 $p \in U$ の余階数が 1 のとき, p の近くで 0 にならないベクトル場 η が存在して

$$q \in S(f) \Rightarrow \langle \eta_q \rangle_{\mathbf{R}} = \text{Ker}(df)_q.$$

このベクトル場を**退化ベクトル場**と呼ぶ．

関数 λ を

$$\lambda(u, v) = \det(f_u, f_v, \nu)$$

と定義する．代表元 ν を取り替えると λ は 0 でない関数倍される．もちろん λ の零点は f の特異点集合と一致するが, 写像 f の特異点 p が**非退化**であるとは, $d\lambda(p) \neq 0$ であるときをいう．非退化な特異点 p の近くで $S(f)$ は余次元 1 の部分多様体になる．

3 交叉帽子の判定法

波面の判定法を紹介する前に, 波面の特異点ではないが, ホイットニーによる交叉帽子の判定法を述べる．本節の主要な参考文献は [38]. この判定法は非常に扱いやすいが, この判定法以降, 特異点の判定法を作るという研究は著者の知る限りあまり行われて来なかったようである．

定理 3.1 (ホイットニー, [38]). 可微分写像 $f : \mathbf{R}^2 \rightarrow \mathbf{R}^3$ に対して特異点 0 が交叉帽子であるための必要十分条件は 0 において退化方向と横断的な任意のベクトル場 X に対して

$$\det(Xf, \eta Xf, \eta\eta f)(0) \neq 0$$

である. ここで Xf などは, X による f の方向微分をあらわす.

[38] では上記の形で述べられているわけではないが, 少しの考察によりこのような形になる.

この判定法は f の言葉しか使っていないので大変便利で, 様々な場面で使える. 次節以降では波面に対しても同様に便利な判定法を与えていく.

4 波面の特異点の判定法

波面 f の特異点 p が非退化のとき, p のちかくで $S(f)$ は正則な曲線なのでそのパラメーター表示を $\gamma(t)$ ($\gamma(0) = p$) ととることができる. このとき, γ 上の退化ベクトル場も t をパラメーターとするのでそれを $\eta(t)$ と書くことにする. 本節の主要な参考文献は [18, 19].

4.1 カस्प辺, スワローテイル

次が成り立つ.

定理 4.1 ([19]). 波面 (f, ν) の特異点 p における写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, p) \rightarrow (\mathbf{R}^3, f(p))$ がカस्प辺に同値であるための必要十分条件は p が非退化な特異点であり, p で η_p が γ と横断的なことである.

スワローテイルに同値であるための必要十分条件は p が非退化な特異点であり,

$$\phi(t) = \det(\gamma'(t), \eta(t)) \tag{1}$$

としたとき,

$$\phi(0) = 0, \phi'(0) \neq 0$$

が成り立つことである.

4.2 カスプ的くちびる, くちばし, A_4 型特異点の判定法

これらはジェネリックな波面にはあらわれないが, 波面にジェネリックに発生する. よってこれらもあらわれやすい特異点であり, 判定法を作っておくことは重要であると思われる.

定理 4.2 ([18]). 波面 (f, ν) の特異点 p における写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, p) \rightarrow (\mathbf{R}^3, f(p))$ がカスプ的くちびる (resp. くちばし) に同値であるための必要十分条件は p が余階数 1 の特異点であり, p で λ が指数 0 または 2 (resp. 1) のモース型臨界点を持つことである. くちばしの場合はこれに加えて条件 $\eta\eta\lambda(p) \neq 0$ が成り立つ.

定理 4.3 ([16]). 波面 (f, ν) の特異点 p における写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, p) \rightarrow (\mathbf{R}^3, f(p))$ が A_4 型特異点に同値であるための必要十分条件は p 非退化な特異点であり,

$$\phi(0) = \phi'(0) = 0, \phi''(0) \neq 0$$

が成り立つことである.

5 カスプ的交叉帽子の判定法

カスプ的交叉帽子は波面の特異点ではなく, 半波面の特異点であるが, 半波面にジェネリックにあらわれる. 本節ではその判定法を与える. 本節の主要な参考文献は [3]. 半波面 (f, ν) の非退化な特異点に対して特異点の近くでの特異点集合のパラメーター表示を $\gamma(t)$ とし, γ 上で退化方向 $\eta(t)$ をとる. 特異点上の関数 ψ を

$$\psi(t) = \det(f \circ \gamma(t), \nu \circ \gamma(t), \eta\nu \circ \gamma(t))$$

と定義する.

定理 5.1 ([3]). 半波面 (f, ν) の特異点 p における写像芽 $f : (\mathbf{R}^2, p) \rightarrow (\mathbf{R}^3, f(p))$ がカスプ的交叉帽子に同値であるための必要十分条件は p は非退化な特異点であり,

$$\psi(0) = 0, \psi'(0) \neq 0$$

が成り立つことである.

6 例

ここでは, 判定法の応用例として $\mathbf{R}^3$ 内の線織面の特異点を判定してみる. $\mathbf{R}^3$ 内の線織面とは曲線 $\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^3$ と $\delta \times \delta' \neq 0$ をみたす曲線 $\delta: I \rightarrow \mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ に対して

$$F_{(\gamma, \delta)}(t, u) = \gamma(t) + u\delta(t)$$

と定義される. F のガウス曲率が 0 である, すなわち可展開面であるための必要十分条件は関数 α, β が存在して $\gamma' = \alpha\delta + \beta\delta'$ をみたすことである. このとき F の特異点を計算してみる. F の特異点集合は $\{(t, u) \mid \beta(t) + u = 0\}$ であり, 退化方向は $(-1, \alpha(t))$ である. F の単位法線ベクトルは

$$\frac{\delta \times \delta'}{\|\delta \times \delta'\|}$$

である. よって

$$\begin{aligned} \lambda &= \beta(t) + u \\ \phi(t) &= \alpha(t) - \beta'(t) \\ \psi(t) &= \det(\delta, \delta', \delta'')(t) \end{aligned}$$

である. この計算と判定法により可展開面の特異点はすぐにわかる. また, 空間曲線 $(t^2, t^3, t^4) + o(5)$ の接線曲面がツバメの尾であり, $(t^3, t^4, t^5) + o(6)$ の接線曲面は A_4 型特異点であることがわかる. [4] で, $(t^3, t^4, t^5) + o(6)$ の特異点はすべて同値であることが示されていたが, これが A_4 型特異点であることがわかった.

特異点を許した波面の微分幾何学的研究として [3, 19, 20, 29, 37] がある. 特に, ミンコフスキー空間内の微分幾何の研究が泉屋らによって強力に推し進められている. それについては [8–14, 18] を参照. 波面の特異点自体の微分幾何学の研究として [34, 35] がある. $\mathbf{R}^3$ 内の曲面の特異点と曲面のトポロジーとの関係については [6, 21, 22, 30] を参照. 関連する他の話題については [5, 7, 17, 23–28, 31, 36] などを参照. 本稿で述べた判定法はこれらや他の様々な状況で有用と思われる.

参考文献

- [1] V. I. Arnol'd, S. M. Gusein-Zade and A. N. Varchenko, *Singularities of Differentiable Maps vol. I*. Birkhäuser (1986).

- [2] J. W. Bruce and P. J. Giblin, *Curves and singularities (second edition)*, Cambridge University press (1992)
- [3] S. Fujimori, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of maximal surfaces*, preprint.
- [4] G. Ishikawa, *Developable of a curve and determinacy relative to osculation-type*, Quart. J. Math. Oxford, **46** (1995), 437-451.
- [5] G. Ishikawa and Y. Machida, *Singularities of improper affine spheres and surfaces of constant Gaussian curvature*, International J. Math., **17** (2006), no. 3, 269-293.
- [6] S. Izumiya and T. Marar, *The Euler characteristic of a generic wavefront in a 3-manifold*. Proc. Amer. Math. Soc., 118 (1993), 1347-1350.
- [7] S. Izumiya and T. Sano, *Generic affine differential geometry of space curves*. Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A 128 (1998), no. 2, 301-314.
- [8] S. Izumiya, D-H. Pei and T. Sano, *Singularities of hyperbolic Gauss maps*. Proc. London Math. Soc. 86 (2003), 485-512.
- [9] S. Izumiya, D. Pei and M.C. Romero Fuster, *The lightcone Gauss map of a spacelike surface in Minkowski 4-space*, Asian J. Math., vol. 8 (2004), 511-530.
- [10] S. Izumiya, D. Pei and M.C. Romero Fuster, *Umbilicity of spacelike submanifolds of Minkowski space*, Proc. Roy. Soc. Edinburgh, 134A (2004), 375-387.
- [11] S. Izumiya, D. Pei, M.C. Romero Fuster and M. Takahashi, *The horospherical geometry of submanifolds in hyperbolic space*. J. London Math. Soc. (2) 71 (2005), 779-800.
- [12] S. Izumiya, M. Kossowski, D. Pei and M.C. Romero Fuster, *Singularities of lightlike hypersurfaces in Minkowski 4-space*. Tohoku Math. J. (2) 58 (2006), 71-88.
- [13] S. Izumiya, D-H. Pei and M.C. Romero-Fuster, *The horospherical geometry of surfaces in Hyperbolic 4-space*. Israel J. Maths. 154 (2006), 361-379.
- [14] S. Izumiya, *Legendrian dualities and spacelike hypersurfaces in the lightcone*. Preprint.
- [15] 泉屋周一・石川剛郎, 応用特異点論, 共立出版 (1998).
- [16] S. Izumiya and K. Saji, in preparation.

- [17] S. Izumiya, K. Saji and N. Takeuchi, *Circular surfaces*, Adv. geom. **7** (2007), 295–313.
- [18] S. Izumiya, K. Saji and M. Takahashi, *Horospherical flat surfaces in hyperbolic 3-space*, preprint.
- [19] M. Kokubu, W. Rossman, K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Singularities of flat fronts in hyperbolic 3-space*, Pacific J. of Math. **221** (2005), 303–351.
- [20] M. Kokubu, W. Rossman, M. Umehara and K. Yamada, *Flat fronts in hyperbolic 3-space and their caustics*, J. Math. Soc. Japan, **50** (2007), 265–299.
- [21] M. Kossowski, *The Boy-Gauss-Bonnet theorems for C^∞ -singular surfaces with limiting tangent bundle*, Annals of Global Analysis and Geometry **21** (2002), 19–29.
- [22] R. Langevin, G. Levitt and H. Rosenberg, *Classes d’homotopie de surfaces avec rebroussements et queues d’aronde dans $\mathbb{R}^3$* , Canad. J. Math. **47** (1995), 544–572.
- [23] D.K.H. Mochida, M.C. Romero Fuster and M.A.S. Ruas, *The geometry of surfaces in 4-space from a contact viewpoint*. Geom. Dedicata 54 (1995), no. 3, 323–332.
- [24] D.K.H. Mochida, M.C. Romero-Fuster and M.A.S. Ruas, *Osculating hyperplanes and asymptotic directions of codimension two submanifolds of Euclidean spaces*. Geom. Dedicata 77 (1999), no. 3, 305–315.
- [25] D.K.H. Mochida, M.C. Romero-Fuster and M.A.S. Ruas, *Singularities and duality in the flat geometry of submanifolds of Euclidean spaces*. Beitrage Algebra Geom. 42 (2001), no. 1, 137–148.
- [26] D.K.H. Mochida, M.C. Romero-Fuster and M.A.S. Ruas, *Inflection points and non-singular embeddings of surfaces in $\mathbf{R}^5$* . Rocky Mountain J. Math. 33 (2003), no. 3, 995–1009.
- [27] J. A. Montaldi, *On contact between submanifolds*, Michigan Math. J., 33 (1986), 81–85.
- [28] J. A. Montaldi, *Surfaces in 3-space and their contact with circles*. J. Diff. Geom. 23 (1986), no. 2, 109–126.
- [29] S. Murata and M. Umehara, *Flat Surfaces with singularities in Euclidean 3-space*, preprint, math.DG/0605604.

- [30] J. J. Nuño-Ballesteros and O. Saeki, *On the number of singularities of a generic surface with boundary in a 3-manifold*. Hokkaido Math. J. 27 (1998), 517–544.
- [31] M. Noro, T. Sasaki, K. Yamada and M. Yoshida, *Confluence of swallowtail singularities of the hyperbolic Schwarz map defined by the hypergeometric differential equation*, preprint.
- [32] I.R. Porteous, *The normal singularities of a submanifold*. J. Diff. Geom. 5 (1971), 543–564.
- [33] I.R. Porteous, *Geometric differentiation. For the intelligence of curves and surfaces*. Second edition. Cambridge University Press, Cambridge (2001).
- [34] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *The geometry of fronts*, math.DG/0503236; to appear in Ann. of Math.
- [35] K. Saji, M. Umehara and K. Yamada, *Behavior of corank-one singular points on wave fronts*, to appear in Kyushu J. Math.
- [36] O. P. Scherbak, *Wavefront and reflection groups*, Russian Math. Surveys **43**-3 (1988), 149–194.
- [37] M. Umehara and K. Yamada, *Maximal surfaces with singularities in Minkowski space*, Hokkaido Math. J. 35 (2006), 13–40.
- [38] H. Whitney, *The singularities of a smooth n -manifold in $(2n - 1)$ -space*, Ann. of Math. (2) 45 (1944), 247–293.
- [39] V. M. Zakalyukin, *Reconstructions of fronts and caustics depending one parameter and versality of mappings*. J. Sov. Math., **27** (1984), 2713–2735.