



Title	第4回数学総合若手研究集会：他分野との学際的交流を目指して
Author(s)	宮口, 智成; 昆, 万佑子; 上條, 亮 他
Citation	Hokkaido University technical report series in mathematics, 126, 1
Issue Date	2008-01-01
DOI	https://doi.org/10.14943/30325
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/32358
Type	departmental bulletin paper
File Information	20080308_05.pdf



21st Century COE Program:
Mathematics of Nonlinear Structure via Singularity

第4回数学総合若手研究集会
～他分野との学際的交流を目指して～

The 4th COE Conference for Young Researchers
– CCYR4 –

世話人

宮口智成, 上條 亮, 河野真土, 昆万佑子, 佐藤康彦, 広瀬大輔
COE 運営委員会交流機能代表 泉屋周一

札幌, 2008

Series #126. January, 2008

HOKKAIDO UNIVERSITY
TECHNICAL REPORT SERIES IN MATHEMATICS

- #104 S. Izumiya (Ed), Y. Numata, J. Ishimoto, I. Sasaki, Y. Nagase and M. Yamamoto, 第2回数学総合若手研究集会 - The 2nd COE Conference for Young Researchers -, 274 pages. 2006.
- #105 T. Yamamoto, O. Hatori, M. Hayashi and T. Nakazi (Eds.), 第14回関数空間セミナー, 112 pages. 2006.
- #106 Y. Daido, 学位論文 Doctoral thesis "RECONSTRUCTION OF INCLUSIONS FOR THE INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM OF HEAT EQUATION USING PROBE METHOD", 68 pages. 2006.
- #107 T. Yamamoto, 学位論文 Doctoral thesis "Singular fibers of two colored differentiable maps and cobordism invariants", 333 pages. 2006.
- #108 S. Izumiya, Singularity theory of smooth mappings and its applications: a survey for non-specialists, 41 pages. 2006.
- #109 J. Cheng, B. Y. C. Hon, J. Y. Lee, G. Nakamura and M. Yamamoto, Inverse Problems in Applied Sciences - towards breakthrough - Organizing Committee, 96 pages. 2006.
- #110 K. Matsumoto, 超幾何関数早春学校, 87 pages. 2006.
- #111 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, The 31th Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 91 pages. 2006.
- #112 H. Okamoto, D. Sheen, Z. Shi, T. Ozawa, T. Sakajo and Y. Chen, Book of Abstracts of the First China-Japan-Korea Joint Conference on Numerical Mathematics & The Second East Asia SIAM Symposium, 78 pages. 2006.
- #113 N. Ishimura, T. Ishiwata, T. Sakajo, T. Sakurai, M. Nagayama, T. Nara, K. Hayami, D. Furihata and T. Matsuo, 応用数理サマーセミナー「確率微分方程式」, 116 pages. 2006.
- #114 T. Abe, 第8回 COE 研究員連続講演会『超平面配置と対数的ベクトル場の幾何』, 23 pages. 2006.
- #115 H. Kubo and T. Ozawa, Sapporo Guest House Symposium on Mathematics 22 "Nonlinear Wave Equations", 67 pages. 2006.
- #116 S. Okabe, 第9回 COE 研究員連続講演会『ある束縛条件下における平面弾性閉曲線のダイナミクス』, 31 pages. 2006.
- #117 A. Suzuki, T. Ito, N. Sato, K. Shibuya, D. Hirose, Y. Maekawa and K. Matsumoto, 第3回数学総合若手研究集会 -他分野との学際的交流を目指して-, 264 pages. 2007.
- #118 T. Yamamoto, Y. Sato, N. Kataoka and H. Takagi, Proceedings of the conference on New Aspects of High-dimensional Nonlinear Dynamics, 73 pages. 2007.
- #119 T. Yamamoto and T. Nakazi, 第15回関数空間セミナー報告集, 82 pages. 2007.
- #120 K. Hirata, 第10回 COE 研究員連続講演会『正值調和関数に対する Martin 積分表現と非線形楕円型方程式の正值解の存在』, 25 pages. 2007.
- #121 K. Izuchi, 第12回 COE 研究員連続講演会『I) Segal-Bargmann 空間の巡回ベクトルについて II) 2重単位開円板上の逆シフト不変部分空間上のクロス交換子について』, 18 pages. 2007.
- #122 T. Ozawa, Y. Giga, S. Jimbo, G. Nakamura, Y. Tonegawa, K. Tsutaya and T. Sakajo, The 32nd Sapporo Symposium on Partial Differential Equations, 73 pages. 2007.
- #123 H. Kubo, T. Ozawa, H. Takamura and K. Tsutaya, Nonlinear Wave Equations, 53 pages. 2007.
- #124 N. Ishimura, T. Sakajo, T. Sakurai, M. Nagayama, T. Nara, D. Furihata and T. Matsuo, 応用数理サマーセミナー 2007「計算ホモロジーとその応用」, 110 pages. 2007.
- #125 S. Hattori, 第15回 COE 研究員連続講演会『分岐理論と有限平坦 Galois 表現』, 28 pages. 2008.

21st Century COE Program:
Mathematics of Nonlinear Structure via Singularity

第4回数学総合若手研究集会
～他分野との学際的交流を目指して～

The 4th COE Conference for Young Researchers
-CCYR4-

世話人

宮口智成 上條亮 河野真士
昆万佑子 佐藤康彦 広瀬大輔

COE運営委員会交流機能代表

泉屋周一

札幌, 2008

当研究集会の経費は、

北海道大学 21世紀 COE プログラム
「特異性から見た非線形構造の数学」

北海道大学大学院理学研究院数学部門

から賄われています。

はじめに

「第4回数学総合若手研究集会～他分野との学際的交流を目指して～」は、北海道大学21世紀COEプログラム「特異性から見た非線形構造の数学」の交流機能の一事業として、大学院生、ポストドクターら若手研究者により運営される研究集会です。

この研究集会は、

- 様々な分野の若手研究者が発表し、交流する場を提供することで、お互いの研究活動に刺激を与えること、
- 数学の各分野間の横型の連携、基盤研究と応用研究間の縦型の交流という2つの軸に沿った交流を行うこと

を目的としております。

この概要集は講演者の方々から事前に集めた原稿を印刷したものです。本研究集会の目的に合わせ、講演者の方には他分野の方々にも分かり易いように、入門的な事項を含めて書いて頂きました。参加者が講演をより深く理解し、活発で分野横断的な交流を行い、またご自身の研究を進展させる一助となればこの上ない喜びです。

本研究集会の講演は、口頭講演とポスター発表からなります。口頭講演には、60分講演のシングルセッションと30分講演の平行セッションがあります。シングルセッションでは、入門的な内容を含めて講演して頂き、平行セッションでは同分野の人を対象に専門的なことを中心に講演して頂くことになっています。またポスター発表では、全ポスター講演者の講演内容が把握できるよう、講演前に1人1分程度の簡単な内容紹介をして頂くことにしています。

なお、この研究集会は、

- 北海道大学21世紀COEプログラム「特異性から見た非線形構造の数学」
- 北海道大学大学院理学研究院数学部門

の援助を受けて開催されます。

最後になりましたが、開催にあたり、

- COE運営委員会の先生方をはじめ、北大数学教室の先生方、
- COE研究推進室ならびにCOE研究支援室の事務の方々、
- 講演者のみなさま、参加者のみなさま、
- 過去のCCYR世話人の方々

から、多大なるご支援を頂きました。この場をかりて心より感謝申し上げます。

2008年2月

CCYR4 世話人

宮口智成 上條亮 河野真士
昆万佑子 佐藤康彦 広瀬大輔

第4回 数学総合若手研究集会

The 4th COE Conference for Young Researchers

日時：2008年2月12日(火)～2月15日(金)

場所：北海道大学 学術交流会館

- | | |
|-----------|-----------|
| (A) 小講堂 | (B) 第2会議室 |
| (C) 第3会議室 | (D) 第4会議室 |
| (E) 第1会議室 | (F) 大講堂 |

2月12日(火)

- 9:50 (A) 開会
- 10:00–11:00 (A) Construction of a solution to the Gierer-Meinhardt system with saturation
(サチュレーション効果のある Gierer-Meinhardt 系の解の構成)
森本 光太郎 (Koutarou MORIMOTO) 首都大学東京大学院理工学研究科
- 11:20–12:20 (A) Higher q -Fock spaces and fusion products
長尾 健太郎 (Kentaro NAGAO) 京都大学大学院理学研究科
- 12:20–14:00 昼食
- 14:00–15:00 (A) On the KAM theory
曾我 幸平 (Kohei SOGA) 早稲田大学理工学術院
- 15:20–15:50 (A) On the Navier-Stokes equations with spatially almost periodic data
米田 剛 (Tsuyoshi YONEDA) 東京大学大学院数理科学研究科
- (B) A characterization of Gel'fand-Shilov space S_r^r and $(S_r^r)'$ by Weyl transform
岡 康之 (Yasuyuki OKA) 上智大学大学院理工学研究科
- (C) On the turning point of the second kind of the Noumi-Yamada system NY_{2m+1}
(野海山田系方程式 NY 奇数系の第2種変わり点について)
梅田 陽子 (Youko UMETA) 北海道大学大学院理学院
- (D) Classification of non-symplectic automorphisms of order 3 on $K3$ surfaces
瀧 真語 (Shingo TAKI) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
- 16:05–16:35 (A) Asymptotic stability of planar stationary waves for damped wave equations in multi-dimensional half space
上田 好寛 (Yoshihiro UEDA) 九州大学大学院数理学府
- (B) Physical states of quantum electrodynamics with an indefinite metric
鈴木 章斗 (Akito SUZUKI) 北海道大学大学院理学院
- (C) Poset transformations and Quasi symmetric functions
富江 雅也 (Masaya TOMIE) 筑波大学大学院数理物質科学研究科
- (D) Application of non-commutative Groebner basis to a free resolution of a module over the Steenrod algebra
深谷 友宏 (Tomohiro FUKAYA) 京都大学大学院理学研究科

- 16:50–17:20 (A) Initial Boundary Value Problem for the Hasegawa-Wakatani equations
近藤 信太郎 (Shintaro KONDO) 慶應義塾大学大学院理工学研究科
- (B) Optimal covariant measurement of momentum on a half line in quantum mechanics
鹿野 豊 (Yutaka SHIKANO) 東京工業大学大学院理工学研究科
- (C) Bicolor-eliminable multiplicities on the braid arrangement
阿部 拓郎・縫田 光司・沼田 泰英 (Takuro ABE・Koji NUIDA・Yasuhide NUMATA)
北海道大学大学院理学研究院・産業技術総合研究所・北海道大学大学院理学研究院
- (D) Study of quark confinement with Hodge decomposition approach
作道 直幸 (Naoyuki SAKUMICHI) 京都大学大学院理学研究科

2月13日(水)

- 10:00–11:00 (A) Mathematics in information security (情報セキュリティ分野の数学)
縫田 光司 (Koji NUIDA) 産業技術総合研究所情報セキュリティ研究センター
- 11:20–12:20 (A) The spectral analysis of the Hamiltonian with a singular perturbation in quantum fields theory
高江洲 俊光 (Toshimitsu TAKAESU) 九州大学大学院数理学府
- 12:20–14:00 昼食
- 14:00–15:00 (A) The approximation of instantons over an arbitrary closed oriented 4-manifold
松尾 信一郎 (Shinichiro MATSUO) 東京大学大学院数理科学研究科
- 15:20–15:50 (A) L^p energy method for scalar viscous conservation laws on the half line
(単独粘性保存則に対するある初期・値境界値問題の解の漸近評価について)
橋本 伊都子 (Itsuko HASHIMOTO) 大阪大学大学院情報科学研究科
- (B) Chow rings of complex algebraic groups
鍛冶 静雄 (Shizuo KAJI) 京都大学大学院理学研究科
- (C) Pin structures and spin structures on surfaces
川見 将広 (Masahiro KAWAMI) 大阪市立大学数学研究所
- (D) Siegel disks with bounded type rotation number
片方 江 (Koh KATAGATA) 島根大学大学院総合理工学研究科
- 16:05–16:35 (A) Non-uniform asymptotic stability for linear time-varying second-order differential equations
鬼塚 政一 (Masakazu ONITSUKA) 島根大学大学院総合理工学研究科
- (B) On toric face rings
岡崎 亮太 (Ryota OKAZAKI) 大阪大学大学院情報科学研究科
- (C) Homotopy type of the box complexes of graphs without 4-cycles
上別府 陽 (Akira KAMIBEPPU) 筑波大学大学院数理物質科学研究科
- (D) Generalized arcsine law in an infinite measure system
秋元 琢磨 (Takuma AKIMOTO) 早稲田大学理工学術院

- 16:50–17:20 (A) The modeling in the equations of fluid mechanics at the dawn or Navier-Stokes
(黎明期における流体力学ないしは Navier-Stokes 方程式のモデリング)
増田 茂 (Shigeru MASUDA) 首都大学東京大学院理学研究科
- (B) A noncommutative algebro geometric characterization of representation type of
a quiver
(クイバーの表現型の非可換代数幾何学的特徴付け)
源 泰幸 (Hiroyuki MINAMOTO) 京都大学大学院理学研究科
- (C) On the boundary of the moduli space of log Hodge structure
巴山 竜来 (Tatsuki HAYAMA) 大阪大学大学院理学研究科
- (D) A mathematical principle of evolutionary game theory
(進化ゲーム理論の数理)
吉川 満 (Mitsuru KIKKAWA) 関西学院大学大学院経済学研究科
- 19:00– 懇親会

2月14日(木)

- 10:00–11:00 (F) Large time decay of solutions to isentropic gas dynamics
柘植 直樹 (Naoki TSUGE) 広島工業大学情報学部
- 11:20–12:20 (F) Irrational rotation algebras and real quadratic fields
縄田 紀夫 (Norio NAWATA) 九州大学大学院数理学府
- 12:20–14:00 昼食
- 14:00–15:00 (F) Generating functions for multiple zeta values with fixed weight, depth and general-
ized height
若林 徳子 (Noriko WAKABAYASHI) 近畿大学大学院総合理工学研究科
- 15:20–15:40 (F) ポスター1分スピーチ
- 16:00–17:30 (E) ポスターセッション
- (E) Classification of polarized manifolds containing Castelnuovo manifolds as their
hyperplane sections
網谷 泰治 (Yasuharu AMITANI) 早稲田大学理工学術院
- (E) On sub-Riemannian manifolds
(サブリーマン多様体の無限小自己同型について)
北川 友美子 (Yumiko KITAGAWA) 大阪市立大学数学研究所
- (E) Analysis of the alpha particle orbits in Heliotron type fusion device
(ヘリオトロン型核融合装置における α 粒子の軌道解析)
關 良輔 (Ryosuke SEKI) 北海道大学大学院工学研究科
- (E) The generalized Feynman-Kac formula with a Lebesgue-Stieltjes measure and
random variables
田中 潤 (Jun TANAKA) University of California Riverside

- (E) Boundary element analysis of tokamak plasma current profile using quasi radial basis functions with variable scaling factors
中田 健二 (Kenji NAKADA) 北海道大学大学院工学研究科
- (E) Hook formulas for a generalized Young diagram
仲田 研登 (Kento NAKADA) 大阪大学大学院情報科学研究科
- (E) Generalized Schur operators on the vector space spanned by rooted planar binary trees
沼田 泰英 (Yasuhide NUMATA) 北海道大学大学院理学研究院
- (E) Geometry of tangential distribution (接分布の幾何学)
野田 尚廣 (Takahiro Noda) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
- (E) The generic smoothness of the Gauss map and the reflexivity for a projective variety
深澤 知 (Satoru FUKASAWA) 早稲田大学理工学術院/日本学術振興会
- (E) Moment maps of isotropy representations of Hermitian symmetric spaces and the isoparametric hypersurfaces in spheres
(Hermite 対称空間の等方表現の運動量写像と球面内の等径超曲面)
藤井 忍 (Shinobu FUJII) 広島大学大学院理学研究科
- (E) On the shape of the stable patterns for activator-inhibitor systems in a disk
宮本 安人 (Yasuhito MIYAMOTO) 東京工業大学大学院理工学研究科
- (E) Some relations in universal enveloping algebras of three dimensional Lie algebras
村田 駿祐 (Shunsuke MURATA) 筑波大学大学院数理物質科学研究科
- (E) The plethystic program
四ッ谷 直仁 (Naoto YOTSUTANI) 名古屋大学大学院多元数理科学研究科
- (E) Study of neoclassical transport of LHD plasmas using the DCOM/NNW neoclassical transport database
若狭 有光 (Arimitsu WAKASA) 北海道大学大学院工学研究科

2月15日(金)

- 10:00–11:00 (A) An introduction of the theory of reproducing kernel Hilbert spaces
澤野 嘉宏 (Yoshihiro SAWANO) 首都大学東京大学院理学研究科
- 11:20–12:20 (A) A distinguished bounded realization and a symmetry characterization of homogeneous bounded domains
甲斐 千舟 (Chifune KAI) 金沢大学大学院自然科学研究科
- 12:30 (A) 閉会

世話人： 宮口智成 上條亮 河野真士
昆万佑子 佐藤康彦 広瀬大輔

サチュレーション効果のある Gierer-Meinhardt 系の解の構成

森本 光太郎 (首都大学東京 理工学研究科)

本講演では、次の Gierer-Meinhardt 系について考える。

・ギーラー・マインハルト系 (Gierer-Meinhardt, 1972)

$$\begin{cases} A_t = \varepsilon^2 \Delta A - A + \frac{A^2}{H(1+kA^2)} + \sigma_0, & A > 0 \text{ in } \Omega \times (0, \infty), \\ \tau H_t = D \Delta H - H + A^2, & H > 0 \text{ in } \Omega \times (0, \infty), \\ \frac{\partial A}{\partial \nu} = \frac{\partial H}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial \Omega \times (0, \infty). \end{cases} \quad (1)$$

$A = A(x, t)$ は活性因子の濃度, $H = H(x, t)$ は抑制因子の濃度を表す. $\varepsilon, D > 0$ はそれぞれ, 活性因子, 抑制因子の拡散係数. Ω は滑らかな境界の N 次元有界領域. Δ は通常の N 次元ラプラシアン. τ は正定数. k, σ_0 非負定数. この方程式は 1972 年に, ギーラーとマインハルトが提唱した, 生物の形態形成に関するモデルである. 詳しくは Gierer-Meinhardt [1] を参照されたい.

～活性因子, 抑制因子とは～

活性因子・抑制因子とは, 生物の細胞や組織の中に存在するとされる生化学物質である (そのような物質の存在は, 今のところ発見されていない). Ω が生物の体を表し, 体の中で, 活性因子の多く集まった場所から細胞の変化が始まるとされ, 抑制因子は活性因子の働きを抑制するとされる. 活性因子は多ければ多いほどその生産率も増加し ($k = 0$ のとき), さらに抑制因子の増殖も促す. 抑制因子は多ければ多いほど, 活性因子の生産率は低下する.

このような仮定の下で提唱された反応拡散系が Gierer-Meinhardt 系 (以下簡単に GM 系と書く) である.

何が興味深いか?

前述のような仮定をすると, GM 系は活性因子と抑制因子の拡散率の違いにより定数解が不安定化し, その代わり Ω 上の極めて狭い範囲に活性因子が集中するようなものが安定化する (この事は拡散誘導不安定化と呼ばれている). 活性因子の濃度がある点の近傍に集中することを, ピークを持つと言う事がある. GM 系において, ε が小さく, D が大きい時に一つ (single-peak), または複数のピーク (multi-peak) を持つような解の存在や安定性について, 近年でも様々な研究がなされている.

・シャドウ系 (ギーラー・マインハルト系の $D \rightarrow \infty$ の極限状態)

GM 系において, 抑制因子の拡散係数 D が大きいときを考えるわけであるから, 形式的に $D \rightarrow \infty$ とすると, $H(x, t)$ は x 変数に関して定数 $\xi(t)$ とみなす事ができ, 比較的扱いやすいシャドウ系と呼ばれる方程式に帰着される. つまり, (1) の第 2 式を

$$\frac{\tau}{D} H_t = \Delta H + \frac{1}{D} (-H + A^2),$$

と書き直して $D \rightarrow \infty$ としてみると, 形式的に $\Delta H = 0$ が得られる. Neumann 境界条件を満たす調和関数は定数に限るから, $H(x; t) = \xi(t)$. (1) の第 2 式で $H(x, t) = \xi(t)$ とし, 積分して表したものが, 次のシャドウ系である.

$$\begin{cases} A_t = \varepsilon^2 \Delta A - A + \frac{A^2}{\xi(1+kA^2)} + \sigma_0, & A > 0 \text{ in } \Omega \times (0, \infty), \\ \tau \xi_t = -\xi + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} A^2 dx \text{ in } (0, \infty), \\ \frac{\partial A}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial \Omega. \end{cases} \quad (2)$$

まずシャドウ系の解 (A, ξ) を探し, それを基にして D が有限の場合の, つまり GM 系の解を探すという方法が広く知られている.

ここで、最も単純な $k = 0, \sigma_0 = 0$ の場合、どのような事が知られているのかを一つ紹介する。
 シヤドウ系 ($k = 0, \sigma_0 = 0$ の場合) の定常状態は以下のように書ける。

$$\begin{cases} 0 = \varepsilon^2 \Delta A - A + \frac{A^2}{\xi}, & A > 0 \text{ in } \Omega, \\ 0 = -\xi + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} A^2 dx, \\ \frac{\partial A}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (3)$$

ここで、 $A = \xi u$ とおき、方程式に代入してみると、次の u に関する単独の方程式 (4) が得られる。 u が決まれば ξ は第二式 (5) により自動的に決まる。

$$\begin{cases} 0 = \varepsilon^2 \Delta u - u + u^2 \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (4)$$

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u^2 dx, \quad (5)$$

Question : 方程式 (4) は、自明な解 $u = 0$ と $u = 1$ をもつが、それ以外に解はあるか?

Answer : $\varepsilon > 0$ が大きい時には、非自明解は存在しない (Lin-Ni).

$\varepsilon > 0$ が小さい時に、 Ω の境界の最も曲がったところにピークを持つ解 u を変分法により、最小エネルギー解としてみつけた (Ni-Takagi, 1993). その解は、大まかに言ってそのピーク点の近傍で次の方程式の (一意) 解 w に対し、 $w(x/\varepsilon)$ のような形状を持つ。

$$\begin{cases} \Delta w - w + w^2 = 0, & w > 0 \text{ in } R^N, \\ \max_{R^N} w = w(0), & w(z) \rightarrow 0 (|z| \rightarrow \infty). \end{cases} \quad (6)$$

この Ni-Takagi の仕事の後、爆発的に GM 系の解の研究が盛んになった。しかし、 $k > 0, \sigma_0 > 0$ の場合の研究は少ない。⇒ $k > 0, \sigma_0 > 0$ の場合はどうなのか?

サチュレーション効果のある場合の研究

GM系において、 $k > 0$ の場合の項 $\frac{A^2}{1+kA^2}$ をサチュレーション項と言う。これは、活性因子の生産率に頭打ちがあることを表している。 $k > 0$ の場合で、知られている結果をいくつか紹介する。

(a) $k > 0, \sigma_0 = 0$ の場合のシヤドウ系において、 $k > 0$ が十分小さい場合で、境界上のある一点の近傍にピークを持つような解の存在と安定性 (Wei-Winter [5]).

(b) $k > 0, \sigma_0 > 0$ の場合の GM系において領域が Ball の場合に、内部レイヤー構造をもつ解の構成 (del Pino [2]).

(c) $k > 0, \sigma_0 = 0$ の場合の GM系において、 $k > 0$ が十分小さく、領域が x_N 軸対称の場合で、境界に複数個のピークを持つ解の構成 (Kurata-Morimoto [3]).

さらに最近、 $k > 0, \sigma_0 = \sigma_0(x) \geq 0$ の場合でも、(c) と同様の結果が得られた。

注: (a) と (c) では、 $k = O(\varepsilon^{2N})$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) くらい ε に伴って $k > 0$ も十分小さいという状況の下でピーク解を構成している (後に述べる (仮定 1) 参照). $k > 0$ が ε によらず一定だと、(b) のようなレイヤー構造を持つ解が現れ、ピークを持つような解は存在しにくいようである。

解の構成について

今回は、簡単のため $k > 0, \sigma_0 = 0$ の場合の次のシヤドウ系 (7) について、以下の仮定の下で多重ピーク定

常解の構成法を紹介する.

$$\begin{cases} 0 = \varepsilon^2 \Delta A - A + \frac{A^2}{\xi(1+kA^2)}, & A > 0 \text{ in } \Omega, \\ 0 = -\xi + \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} A^2 dx, \\ \frac{\partial A}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega. \end{cases} \quad (7)$$

(仮定 1): $k > 0$ は $\varepsilon > 0$ によるものとし, ある $k_0 \in [0, \infty)$ に対し, $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4k\varepsilon^{-2N}|\Omega|^2 = k_0$ を満たす.

(仮定 2): 領域 Ω は x_N 軸に関して対称である.

(仮定 3): 次元 N は $2 \leq N \leq 5$ とする.

注: (仮定 3) はあまり本質的ではなく, 1次元であっても解は構成できるし, $k_0 > 0$ であれば何次元であっても構わない.

準備

(1) 全域解について

ある $\delta_* > 0$ が存在し, 各 $\delta \in [0, \delta_*)$ に対し次の方程式は一意解 w_δ を持つ (Wei-Winter, 2004).

$$\begin{cases} \Delta w - w + f_\delta(w) = 0, & w > 0 \text{ in } R^N, \\ \max_{R^N} w = w(0), & w(z) \rightarrow 0 \quad (|z| \rightarrow \infty). \end{cases} \quad (8)$$

ここで, $f_\delta(w) := \frac{w^2}{1+\delta w^2}$ とおいた. 今後もこの記法を用いる.

さらに, その全域解 w_δ は以下の性質をもつ.

(性質 1) w_δ は radial (i.e. $w_\delta(y) = w_\delta(|y|)$) であり, $\delta_1 \in (0, \delta_*)$ を一つ固定すれば, 二階導関数まで $\delta \in [0, \delta_1]$ に関して一様に指数減衰する. つまりある定数 $C, C' > 0$ があり, $|\alpha| \leq 2$ なる任意の多重指数 α に対し,

$$|D^\alpha w_\delta(z)| \leq C e^{-C'|z|}, \quad z \in R^N,$$

が成り立つ.

(性質 2) w_δ は空間 $C^1(R^N)$ の中, δ に関して連続.

(性質 3) 線形化作用素 $L_\delta := \Delta - 1 + f'_\delta(w_\delta) : W_r^{2,t}(R^N) \rightarrow L_r^t(R^N)$ ($1 < t < \infty$) は可逆.

注: 我々の議論では, $\delta_1 \in (0, \delta_*)$ を一つ固定して, $0 \leq \delta \leq \delta_1$ で考えれば十分なので, 今後 δ と言ったら, 常にこの範囲のものを表しているとする.

(2) ある微分同相写像の定義

点 P_1, \dots, P_{2n} を $\partial\Omega$ と x_N 軸との交点とする. 点 P_k の周りの領域の境界をまっすぐにする微分同相写像を各 $k \in \{1, \dots, 2n\}$ に対し定義する. $\partial\Omega$ の滑らかさと領域の軸対称性から, $|x'|, (x' \in R^{N-1})$ だけによる, ある滑らかな関数 $\psi_k \in C^\infty([-\tau, \tau])$ が存在し, $\psi_k(0) = \psi'_k(0) = 0$ をみたす.

$$\Phi_j(y; P_k) = \begin{cases} y_j - y_N \psi'_k(|y'|) \frac{y_j}{|y'|}, & j = 1, \dots, N-1, \\ y_N + \psi_k(|y'|) + p_k^{(N)}, & j = N. \end{cases} \quad (9)$$

と定義する. すると $x = \Phi(y; P_k) := (\Phi_1(y; P_k), \dots, \Phi_N(y; P_k))$ はある閉球 $\overline{B_{3\kappa}}$ を含む開集合から P_k の近傍への微分同相写像となる. $x = \Phi(y; P_k)$ は超平面 $\{y_N = 0\}$ を $\partial\Omega$ へ写し, さらに $\{y_N = 0\}$ における法線ベクトルを $x_N = \psi(|x'|) + p_k^{(N)}$ における法線ベクトルへと写す. $\Psi(\cdot; P_k) := \Phi^{-1}(\cdot; P_k)$ とおく.

(3) 関数空間の定義

$1 \leq t \leq \infty$ に対し, 以下の定義をする.

$$X^t := \{u \in L^t(\Omega) : u(x) = u(|x'|, x_N)\}, \quad X^{2,t} := W^{2,t}(\Omega) \cap X^t,$$

$$W_\nu^{2,t} := \{u \in W^{2,t}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ on } \partial\Omega\}, \quad X_\nu^{2,t} := W_\nu^{2,t} \cap X^t, \quad X^0 := \{u \in C^0(\overline{\Omega}) : u(x) = u(|x'|, x_N)\}.$$

本講演の主定理を述べる。

主定理

点 P_1, \dots, P_{2n} を $\partial\Omega$ と x_N 軸との交点とする。これらの点から任意に m 個の点 P_{j_1}, \dots, P_{j_m} を選ぶ。 $\varepsilon > 0$ が十分小さいとき、シャドウ系 (10) は解 $(A_\varepsilon, \xi_\varepsilon)$ をもち、少なくとも部分列 ε_i をとれば $\varepsilon_i \rightarrow 0$ で次のような振る舞いをする。

$$\begin{aligned} (a) A_{\varepsilon_i}(x) &= \xi_{\varepsilon_i} (w_{\delta_0}(\varepsilon_i^{-1}\Psi(x; P_{j_k})) + o(1)), \quad x \in \Phi(B_{\kappa}; P_{j_k}) \cap \Omega, \quad k = 1, \dots, m, \\ (b) A_\varepsilon(x) &\leq C\xi_\varepsilon \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon} \text{dist}(x, \{P_{j_1}, \dots, P_{j_m}\})\right), \quad x \in \Omega, \\ (c) \xi_{\varepsilon_i} &= |\Omega| \left(\varepsilon_i^N \left(\frac{m}{2} \int_{R^N} w_{\delta_0}^2 dx + o(1) \right) \right)^{-1}, \end{aligned}$$

ここで、 $o(1)$ は $x \in \Omega$ に関して一様で、定数 $C, c > 0$ は ε_i によらない。 $\delta_0 \in [0, \delta_*)$ は、 k_0 から決まる次を満たす数である：

$$\delta_0 \left(m \int_{R^N} w_{\delta_0}^2(y) dy \right)^2 = k_0.$$

さらに、 k_0 が十分小さい場合には、部分列 ε_i を取らずに上の事が成り立つ。

• 解の構成の概略

主定理の解の構成法について概略を述べる。解の構成は大きく分けて次の2つの step に分けられる。

Step 1. $A = \xi u$ を (7) に代入し、 $\delta = k\xi^2$ とおき、次を得る。

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \Delta u - u + \frac{u^2}{1+\delta u^2}, & u > 0 \text{ in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{on } \partial\Omega, \end{cases} \quad (10)$$

$$\frac{1}{\xi} = \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} u^2 dx, \quad (11)$$

$$\delta \left(\int_{\Omega} u^2 dx \right)^2 = k|\Omega|^2. \quad (12)$$

十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し、(10) を δ をパラメーターとする u に関する単独の方程式として、適当な近似関数 $U_{\varepsilon, \delta(x)}$ (各点 P_{j_1}, \dots, P_{j_m} にピークを持つような関数) を定義して、その近似関数 $U_{\varepsilon, \delta(x)}$ に近い (10) の解 $u = u_\delta(x; \varepsilon)$ を構成する。さらにその解はパラメーター δ に関して連続であることを示す。

Step 2. Step 1 で得られた $u_\delta(x; \varepsilon)$ に対し、今度は δ を動かして (12) を満たす $\delta = \delta_\varepsilon$ を見つける。 (\Rightarrow (11) の式により ξ_ε を定めて、 $(A(x), \xi) = (\xi_\varepsilon u_{\delta_\varepsilon}(x; \varepsilon), \xi_\varepsilon)$ として、シャドウ系の解が得られる！)

種明かし：どうしてこのような $\delta = \delta_\varepsilon$ が見つかるのかというと、(12) の両辺に $4\varepsilon^{-2N}$ をかけて (12') と表す。実は $u_\delta(x; \varepsilon)$ の二乗積分が ε^N のオーダーで減衰していくので、(仮定 1) と合わせると丁度よい $\delta = \delta_\varepsilon$ が見つかるのである。

$$\delta \left(2\varepsilon^{-N} \int_{\Omega} u^2 dx \right)^2 = 4k\varepsilon^{-2N} |\Omega|^2. \quad (12')$$

注：サチュレーション効果のない場合 ($k = 0$) であれば (12) は考える必要がなくなり、(10) のみを解けばよいのだが、 $k > 0$ の場合は (10) と (12) を連立方程式として解かなければならない。この点において、サチュレーション効果のある場合には若干、解の構成が難しくなっている。

Step 1. (10) の解 $u_\delta(x; \varepsilon)$ の構成

各点 P_{j_1}, \dots, P_{j_m} にピークをもつような、(10) の解 $u_\delta(x; \varepsilon)$ を構成する。

$\chi \in C_0^\infty(R)$ を, (1) $0 \leq \chi(t) \leq 1$ ($t \in R$), (2) $\chi(t) = 1$ ($|t| \leq 1$), (3) $\chi(t) = 0$ ($|t| \geq 2$) なる関数とする.

$$U_{\varepsilon,\delta}(x) := \sum_{k=1}^m \chi\left(\frac{1}{\kappa}|\Psi(x; P_{j_k})|\right) w_\delta\left(\frac{1}{\varepsilon}\Psi(x; P_{j_k})\right)$$

と定義する. $U_{\varepsilon,\delta} \in C^\infty(\bar{\Omega})$ であり, $\partial\Omega$ 上 Neumann 境界条件を満たし, $U_{\varepsilon,\delta}(x) = 0$ ($x \notin \cup_{k=1}^m \Phi(B_{2\kappa}; P_{j_k})$) であり, 各点 P_{j_1}, \dots, P_{j_m} で最大値をとる.

この $U_{\varepsilon,\delta}$ を近似関数として, (10) の解をみつけよう. つまり, 次の定理が目標である.

定理 1

$\varepsilon > 0$ が十分小さいとき, 各 $\delta \in [0, \delta_1]$ に対し, (10) は軸対称解 $u_\delta(x; \varepsilon)$ をもち, ε や δ によらない定数 $C > 0$ に対し次が成り立つ:

$$\sup_{x \in \Omega} |u_\delta(x; \varepsilon) - U_{\varepsilon,\delta}(x)| \leq C\varepsilon.$$

(10) に $u(x) = U_{\varepsilon,\delta}(x) + \varepsilon\phi(x)$ を代入し, 次を得る.

$$L_{\varepsilon,\delta}[\phi] + g_{\varepsilon,\delta} + M_{\varepsilon,\delta}[\phi] = 0, \text{ in } \Omega, \quad (13)$$

$$\frac{\partial \phi}{\partial \nu} = 0, \text{ on } \partial\Omega, \quad (14)$$

ここで, 以下のようにおいた,

$$\begin{aligned} L_{\varepsilon,\delta}[\phi] &:= \varepsilon^2 \Delta \phi - \phi + f'_\delta(U_{\varepsilon,\delta})\phi, \quad g_{\varepsilon,\delta} := \frac{1}{\varepsilon}(\varepsilon^2 \Delta U_{\varepsilon,\delta} - U_{\varepsilon,\delta} + f_\delta(U_{\varepsilon,\delta})), \\ M_{\varepsilon,\delta}[\phi] &:= \frac{1}{\varepsilon}(f_\delta(U_{\varepsilon,\delta} + \varepsilon\phi) - f_\delta(U_{\varepsilon,\delta}) - \varepsilon f'_\delta(U_{\varepsilon,\delta})\phi). \end{aligned}$$

(13) と (14) をみたま, ε, δ に関し一様に有界な関数 ϕ を見つければよい.

前述の $L_{\varepsilon,\delta}[\phi] = \varepsilon^2 \Delta \phi - \phi + f'_\delta(U_{\varepsilon,\delta})\phi$ は $W^{2,t}(\Omega)$ から $L^t(\Omega)$ への作用素とみなせる. 実は関数空間 $X_\nu^{2,t}$ に定義域を制限すると, 可逆な作用素となるのである (命題 1). 証明は背理法による. 作用素 $L_\delta = \Delta - 1 + f'_\delta(w_\delta)$ の可逆性, 及び領域の軸対称性を用いると, 矛盾を導く事ができる.

命題 1

$\varepsilon > 0$ が十分小さいとき, 任意の $\delta \in [0, \delta_1]$ に対して $L_{\varepsilon,\delta}[\phi] := \varepsilon^2 \Delta \phi - \phi + f'_\delta(U_{\varepsilon,\delta})\phi : X_\nu^{2,t} \rightarrow X^t$ ($1 < t < \infty$) は有界な逆作用素

$$K_{\varepsilon,\delta} : X^t \rightarrow X_\nu^{2,t}$$

をもつ. 特に, $K_{\varepsilon,\delta}$ は X^∞ から X^∞ への写像とみなすことができ, ε や $\delta \in [0, \delta_1]$ によらない定数 $C_0 > 0$ に対し, 次が成り立つ.

$$\|K_{\varepsilon,\delta}g\|_\infty \leq C_0 \|g\|_\infty \quad (g \in X^\infty). \quad (15)$$

命題 1 の $K_{\varepsilon,\delta}$ を形式的に (13) の両辺にかけてみる.

$$L_{\varepsilon,\delta}[\phi] + g_{\varepsilon,\delta} + M_{\varepsilon,\delta}[\phi] = 0 \quad (K_{\varepsilon,\delta} \text{ をかける}) \Rightarrow \phi = -K_{\varepsilon,\delta}(g_{\varepsilon,\delta} + M_{\varepsilon,\delta}[\phi]) =: T_{\varepsilon,\delta}(\phi). \quad (16)$$

この観察により, 適当な関数空間の中で $T_{\varepsilon,\delta}$ の不動点を見つければよい事がわかる.

→ 縮小写像の原理を用いてみつけよう.

補題 2

ε や $\delta \in [0, \delta_1]$ によらない定数 $C_1 > 0$ が存在し, 任意の $\phi, \phi_1, \phi_2 \in C^0(\bar{\Omega})$ に対し以下が成立.

$$\|g_{\varepsilon, \delta}\|_{\infty} \leq C_1, \quad (17)$$

$$\|M_{\varepsilon, \delta}[\phi]\|_{\infty} \leq C_1 \varepsilon \|\phi\|_{\infty}^2, \quad (18)$$

$$\|M_{\varepsilon, \delta}[\phi_1] - M_{\varepsilon, \delta}[\phi_2]\|_{\infty} \leq C_1 \varepsilon \max\{\|\phi_1\|_{\infty}, \|\phi_2\|_{\infty}\} \|\phi_1 - \phi_2\|_{\infty}. \quad (19)$$

補題 2 を用いて, $\varepsilon > 0$ が十分小さいとき, $T_{\varepsilon, \delta}$ が次の空間 \mathcal{B} における縮小写像になっている事を示そう.

$$\mathcal{B} := \{\phi \in X^0 : \|\phi\|_{\infty} \leq 2C_0C_1\}.$$

$\phi \in \mathcal{B}$ とする. 明らかに $g_{\varepsilon, \delta}, M_{\varepsilon, \delta}[\phi] \in X^{\infty}$ であるから,

$$K_{\varepsilon, \delta}(g_{\varepsilon, \delta} + M_{\varepsilon, \delta}[\phi]) \in X_{\nu}^{2, t} \quad (t \in (1, \infty)).$$

$\Rightarrow t \geq N/2$ くらい t を大きく取っておけば, Sobolev の埋め込みにより

$$T_{\varepsilon, \delta}(\phi) = -K_{\varepsilon, \delta}(g_{\varepsilon, \delta} + M_{\varepsilon, \delta}[\phi]) \in X^0.$$

さらに,

$$\begin{aligned} \|T_{\varepsilon, \delta}[\phi]\|_{\infty} &= \|K_{\varepsilon, \delta}(g_{\varepsilon, \delta} + M_{\varepsilon, \delta}[\phi])\|_{\infty} \leq C_0(\|g_{\varepsilon, \delta}\|_{\infty} + \|M_{\varepsilon, \delta}[\phi]\|_{\infty}) \leq C_0(C_1 + C_1\varepsilon\|\phi\|_{\infty}^2) \\ &\leq C_0(C_1 + 4C_0^2C_1^3\varepsilon) \leq 2C_0C_1, \quad (\varepsilon \leq 1/(4C_0^2C_1^2) \text{ くらい } \varepsilon \text{ が小さければ}). \end{aligned}$$

ゆえに, 任意の $\phi \in \mathcal{B}$ に対し, $T_{\varepsilon, \delta}(\phi) \in \mathcal{B}$.

一方で, $\phi_1, \phi_2 \in \mathcal{B}$ とすると,

$$\begin{aligned} \|T_{\varepsilon, \delta}[\phi_1] - T_{\varepsilon, \delta}[\phi_2]\|_{\infty} &= \|K_{\varepsilon, \delta}(M_{\varepsilon, \delta}[\phi_1] - M_{\varepsilon, \delta}[\phi_2])\|_{\infty} \leq C_0\|M_{\varepsilon, \delta}[\phi_1] - M_{\varepsilon, \delta}[\phi_2]\|_{\infty} \\ &\leq C_0C_1\varepsilon \max\{\|\phi_1\|_{\infty}, \|\phi_2\|_{\infty}\} \|\phi_1 - \phi_2\|_{\infty} \leq 2C_0^2C_1^2\|\phi_1 - \phi_2\|_{\infty} \\ &\leq \frac{1}{2}\|\phi_1 - \phi_2\|_{\infty}, \quad (\varepsilon \leq 1/(4C_0^2C_1^2) \text{ くらい } \varepsilon \text{ が小さければ}), \end{aligned}$$

が成り立ち, 以上のことから $\varepsilon > 0$ が小さければ, 全ての $\delta \in [0, \delta_1]$ に対して, $T_{\varepsilon, \delta}$ は \mathcal{B} 上の縮小写像となる.

\Rightarrow 縮小写像の原理から, $T_{\varepsilon, \delta}$ は \mathcal{B} の中, 一意不動点 $\phi_{\varepsilon, \delta}$ をもつ.

$$\phi_{\varepsilon, \delta} = -K_{\varepsilon, \delta}(g_{\varepsilon, \delta} + M_{\varepsilon, \delta}[\phi_{\varepsilon, \delta}]) \in X_{\nu}^{2, t}$$

\Rightarrow Sobolev の埋め込み, 及び Schauder 理論により $\phi_{\varepsilon, \delta} \in C^{2+\theta}(\Omega) \cap C^{1+\theta}(\bar{\Omega})$ となる事が分かる.

よって, 方程式 (10) は, $u_{\delta}(x; \varepsilon) = U_{\varepsilon, \delta}(x) + \varepsilon\phi_{\varepsilon, \delta}$ を解としてもち,

$$\sup_{x \in \Omega} |u_{\delta}(x; \varepsilon) - U_{\varepsilon, \delta}(x)| = \sup_{x \in \Omega} |\varepsilon\phi_{\varepsilon, \delta}(x)| \leq 2\varepsilon C_0C_1$$

であるので, 定理 1 の主張を得る.

• $u_{\delta}(x; \varepsilon)$ が, パラメーター δ に関して連続であることを確かめる.

$$u_{\delta}(x; \varepsilon) = U_{\varepsilon, \delta}(x) + \varepsilon\phi_{\varepsilon, \delta}(x)$$

で, $U_{\varepsilon, \delta}(x)$ は定義, 及び w_{δ} の (性質 2) から δ に関して連続であることはただちに解る.

なので, $\phi_{\varepsilon, \delta}$ の δ 連続性だけ示せばよい. $\phi_{\varepsilon, \delta}$ が $T_{\varepsilon, \delta}$ の \mathcal{B} における一意不動点であった事を思い出すと, 実

は「 $T_{\varepsilon,\delta}$ が \mathcal{B} の中でパラメーター δ に関して連続であれば、その不動点 $\phi_{\varepsilon,\delta}$ も \mathcal{B} の中で δ に関して連続となる」という事が知られている (パラメーター付の縮小写像の原理). つまり

$$\|T_{\varepsilon,\delta}[\phi] - T_{\varepsilon,\delta'}[\phi]\|_{\infty} \rightarrow 0, \text{ as } \delta' \rightarrow \delta, \quad (20)$$

を示せば十分. (若干, 込入った議論になるので省略させていただく)

さらに比較定理を用いると, $u_{\delta}(x;\varepsilon)$ に関して次のようなことがわかる.

命題 3

$$0 < u_{\delta}(x;\varepsilon) \leq C \exp\left(-\frac{c}{\varepsilon} \text{dist}(x, \{P_{j_1}, \dots, P_{j_m}\})\right), \quad x \in \Omega. \quad (21)$$

ここで, $C, c > 0$ は ε や $\delta \in [0, \delta_1]$ によらない定数.

Step 2

• $\int_{\Omega} u_{\delta}^2(x;\varepsilon) dx$ についての考察.

$u_{\delta}^2(x;\varepsilon) = U_{\varepsilon,\delta}^2(x) + 2\varepsilon\phi_{\varepsilon,\delta}(x)U_{\varepsilon,\delta}(x) + \phi_{\varepsilon,\delta}^2(x)$ であるから, この右辺の積分値について調べよう.

補題 4

$\delta \in [0, \delta_1]$ に関して一様に次が成り立つ.

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left(2\varepsilon^{-N} \int_{\Omega} U_{\varepsilon,\delta}^2(x) dx\right) = \left(m \int_{R^N} w_{\delta}^2(y) dy\right). \quad (22)$$

この事は, $U_{\varepsilon,\delta}(x) := \sum_{k=1}^m \chi(\frac{1}{\varepsilon}|\Psi(x; P_{j_k})|) w_{\delta}(\frac{1}{\varepsilon}\Psi(x; P_{j_k}))$ であつたから, 積分において $\varepsilon y \sim x$ のような変数変換をして, 大体 $dx \sim \varepsilon^N dy$ のようになる事から推察できる.

補題 5

任意の $\eta \in (0, 1)$ に対して, ある定数 $C > 0$ が存在し, 次が成り立つ.

$$\int_{\Omega} |\phi_{\varepsilon,\delta}^2(x)| dx \leq C\varepsilon^{\eta N}. \quad (23)$$

この事は, 領域 Ω を各点 P_{j_1}, \dots, P_{j_m} の ε^{η} 近傍 I_{ε} と, それ以外の部分 Ω_{ε} に領域を分け, $\phi_{\varepsilon,\delta}$ は ε や $\delta \in [0, \delta_1]$ に関して一様に有界だつた事から, I_{ε} での積分は体積 ($\varepsilon^{\eta N}$ の定数倍) で評価し, Ω_{ε} での積分は, $\phi_{\varepsilon,\delta}(x) = \varepsilon^{-1}(u_{\delta}(x;\varepsilon) - U_{\varepsilon,\delta}(x))$ と表して, 命題 3, 及び w_{δ} の (性質 1) の指数減衰評価を使えば示すことが出来る.

$\delta = \delta_{\varepsilon}$ をみつけるための, 重要な命題を用意する. 次のような事が知られている.

命題 6

任意の $k_1 \in [0, \infty)$ に対して, 次を満たす $\delta_1 \in [0, \delta_*)$ が存在する.

$$k_1 = \delta_1 \left(m \int_{R^N} w_{\delta_1}^2(y) dy\right)^2. \quad (24)$$

さらに, k_1 が小さいときには, 上の δ_1 は一意的に定まる.

(12) を満たす $\delta = \delta_{\varepsilon}$ の存在を示す.

(12') の左辺を $\beta_{\varepsilon}(\delta)$, 右辺を k_{ε} とおく. $\beta_{\varepsilon}(\delta) = k_{\varepsilon}$ を満たす $\delta = \delta_{\varepsilon}$ を見つける. $k_{\varepsilon} \rightarrow k_0$ であつた.

$k_0 < k_1$ なる k_1 を一つ固定する. この k_1 に対し, 命題 6 より

$$k_1 = \delta_1 \left(m \int_{R^N} w_{\delta_1}^2(y) dy \right)^2$$

を満たす $\delta_1 \in [0, \delta_*)$ が存在する. $\beta_\varepsilon(\delta)$ は $u_\delta(x; \varepsilon)$ の連続性により $\delta \in [0, \delta_1]$ で連続であり, $\beta_\varepsilon(0) = 0$ に注意する. さらに (仮定 1) より $\beta_\varepsilon(\delta_1) = k_1 + o(1)$ ($\varepsilon \rightarrow 0$) である. なぜなら, 補題 5 と補題 6 より,

$$\begin{aligned} \beta_\varepsilon(\delta_1) &= \delta_1 \left(2\varepsilon^{-N} \int_{\Omega} u_{\delta_1}^2(x; \varepsilon) dx \right)^2 = \delta_1 \left(2\varepsilon^{-2N} \int_{\Omega} \{U_{\varepsilon, \delta_1}^2(x) + 2\varepsilon \phi_{\varepsilon, \delta_1}(x) U_{\varepsilon, \delta_1}(x) + \phi_{\varepsilon, \delta_1}^2(x)\} dx \right)^2 \\ &= k_1 + o(1) \end{aligned}$$

となるからである. よって, 十分小さな $\varepsilon > 0$ に対し, $\beta_\varepsilon(0) \leq k_\varepsilon \leq \beta_\varepsilon(\delta_1) + o(1) \Rightarrow$ 中間値の定理により, $\beta_\varepsilon(\delta_\varepsilon) = k_\varepsilon$ なる $\delta_\varepsilon \in [0, \delta_1]$ が存在する.

$\delta_\varepsilon \in [0, \delta_1]$ であったので, 部分列 $\{\varepsilon_i\}_{i=1}^\infty$ を取れば, ある $\delta_0 \in [0, \delta_1]$ に収束する. また, $\beta_{\varepsilon_i}(\delta_{\varepsilon_i}) = 4k\varepsilon_i^{-2N} \rightarrow k_0$ ($i \rightarrow \infty$) かつ

$$\beta_{\varepsilon_i}(\delta_{\varepsilon_i}) = \delta_{\varepsilon_i} \left(2\varepsilon_i^{-N} \int_{\Omega} u_{\delta_{\varepsilon_i}}^2(x; \varepsilon_i) dx \right)^2 = \delta_{\varepsilon_i} \left(m \int_{R^N} w_{\delta_{\varepsilon_i}}^2(y) dy + o(1) \right)^2 \rightarrow \delta_0 \left(m \int_{R^N} w_{\delta_0}^2(y) dy \right)^2,$$

より,

$$\delta_0 \left(m \int_{R^N} w_{\delta_0}^2(y) dy \right)^2 = k_0. \quad (25)$$

以上のことから, 主定理の結論を得る.

注: k_0 が小さければ, 実は (25) を満たすような δ_0 は一意に決まるので, 上のように部分列 $\{\varepsilon_i\}$ を取らなくてよい.

参考文献

- [1] A. Gierer and H. Meinhardt, A theory of biological pattern formation, *Kybernetik (Berlin)* 12(1972) 30-39.
- [2] M. A. del Pino, Radially symmetric internal layers in a semilinear elliptic system, *Trans. Amer. Math. Soc.*, 347 (1995), no.12, 4807-4837.
- [3] K. Kurata and K. Morimoto, Construction and asymptotic behavior of the multi-peak solutions to the Gierer-Meinhardt system with saturation, *Comm. Pure Appl. Anal.*, to appear.
- [4] W.-M. Ni and I. Takagi, Point condensation generated by a reaction-diffusion system in axially symmetric domains, *Japan J. Indust. Appl. Math.* 12(1995) 327-365.
- [5] J. Wei and M. Winter, On the Gierer-Meinhardt system with saturation, *Comm. in Contemporary Mathematics* 6, No.2(2004)259-277.
- [6] 柳田英二 [編] 『爆発と凝集』 (東京大学出版会, 2006)

Gierer-Meinhardt 系における点凝集現象について, 日本語で詳しく知りたい場合は高木泉先生の「反応拡散系に現れる点凝集現象」([6] の p.51 から p.98 に掲載) が詳しい. また, 今回の講演で省略した部分や詳細については [3] を参照されたい.

Higher q -Fock spaces and fusion products

Kentaro Nagao

Kyoto University

Quantum toroidal algebra $U_{q,r}(\mathbf{Lg})$ is a quantum affinization of the affine Kac-Moody algebra \mathfrak{g} . This has no Hopf algebra structure, but has a 'coproduct' (the Drinfeld coproduct) which does not produce tensor products of modules in the usual way since it is defined in a completion. D. Hernandez proposed a way to construct 'products' (fusion products) of certain modules of the quantum toroidal algebra ([1], [2]).

At this moment we have few examples of representations of the quantum toroidal algebra. Takemura-Uglov constructed representations of the quantum toroidal algebra on q -Fock spaces ([6]), which are isomorphic to representations on equivariant K -groups of quiver varieties ([5], [7]) after adding new parameters ([3]). In this note we show that a higher level q -Fock space is isomorphic to the fusion product of level-1 representations.

1 quantum toroidal algebra

Let \mathfrak{h} be the Cartan subalgebra of the affine Kac-Moody algebra $\mathfrak{g} = \hat{\mathfrak{sl}}_l$. Let $\alpha_0, \dots, \alpha_{l-1} \in \mathfrak{h}^*$ be their simple roots and $\alpha_0^\vee, \dots, \alpha_{l-1}^\vee \in \mathfrak{h}$ be their simple coroots. We denote

$$P = \{\lambda \in \mathfrak{h}^* \mid \forall i \in I, \lambda(\alpha_i^\vee) \in \mathbb{Z}\}$$

the set of integral weights, and

$$P^+ = \{\lambda \in P \mid \forall i \in I, \lambda(\alpha_i^\vee) \geq 0\}$$

the set of dominant weights. We also denote

$$Q = \bigoplus_{i \in I} \mathbb{Z}\alpha_i \subset P$$

the root lattice, and

$$Q^+ = \sum_{i \in I} \mathbb{Z}_{\geq 0}\alpha_i \subset Q.$$

Let $\nu: \mathfrak{h}^* \rightarrow \mathfrak{h}$ be the isomorphism induced by the symmetric bilinear form on \mathfrak{h}^* .

Let q and r be generic complex numbers.

Definition 1.1. *The quantum toroidal algebra $U_{q,r}(\mathbf{Lg})$ is a \mathbb{C} -algebra generated by $e_{i,n}$, $f_{i,n}$, K_h and $h_{i,m}^\pm$ ($i \in I$, $h \in \mathfrak{h}$, $n \in \mathbb{Z}$, $m \in \mathbb{Z}_{>0}$). The relations*

are expressed in term of the formal series

$$e_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e_{i,n} z^{-n}, \quad f_i(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f_{i,n} z^{-n},$$

$$K_i^\pm(z) = K_{\pm\alpha_i} \exp\left(\pm(q - q^{-1}) \sum_{m>0} h_{i,m}^\pm z^{\mp m}\right)$$

as follows

$$\begin{aligned} K_h K_{h'} &= K_{h+h'}, \quad K_0 = 1, \quad K_h K_i^\pm(z) = K_i^\pm(z) K_h \\ [K_i^\pm(z), K_i^\pm(w)] &= [K_i^+(z), K_i^-(w)] = 0, \\ K_h e_i(z) &= q^{\alpha_i(h)} e_i(z) K_h, \\ K_h f_i(z) &= q^{-\alpha_i(h)} f_i(z) K_h, \\ [K_i^\pm(z), e_j(w)] &= [K_i^\pm(z), f_j(w)] = 0 \quad (j \neq i, i \pm 1), \\ (r^\varepsilon z - q^{-1}w) K_i^\pm(z) e_{i+\varepsilon}(w) &= (q^{-1}z - r^\varepsilon w) e_{i+\varepsilon}(w) K_i^\pm(z) \quad (\varepsilon = \pm 1), \\ (z - q^2 w) K_i^\pm(z) e_i(w) &= (q^2 z - w) e_i(w) K_i^\pm(z), \\ (r^\varepsilon z - qw) K_i^\pm(z) f_{i+\varepsilon}(w) &= (qz - r^\varepsilon w) f_{i+\varepsilon}(w) K_i^\pm(z) \quad (\varepsilon = \pm 1), \\ (q^{-2}z - w) K_i^\pm(z) f_i(w) &= (z - q^{-2}w) f_i(w) K_i^\pm(z), \\ [e_i(z), f_j(w)] &= \frac{\delta_{ij} \delta(z/w)}{q - q^{-1}} (K_i^+(w) - K_i^-(z)), \\ (r^\varepsilon z - q^{-1}w) e_i(z) e_{i+\varepsilon}(w) &= (q^{-1}z - r^\varepsilon w) e_{i+\varepsilon}(w) e_i(z) \quad (\varepsilon = \pm 1), \\ (z - q^2 w) e_i(z) e_i(w) &= (q^2 z - w) e_i(w) e_i(z), \\ (r^\varepsilon z - qw) f_i(z) f_{i+\varepsilon}(w) &= (qz - r^\varepsilon w) f_{i+\varepsilon}(w) f_i(z) \quad (\varepsilon = \pm 1), \\ (z - q^{-2}w) f_i(z) f_i(w) &= (q^{-2}z - w) f_i(w) f_i(z), \\ \{e_i(z_1) e_i(z_2) e_{i\pm 1}(w) - (q + q^{-1}) e_i(z_1) e_{i\pm 1}(w) e_i(z_2) \\ &\quad + e_{i\pm 1}(w) e_i(z_1) e_i(z_2)\} + \{z_1 \leftrightarrow z_2\} = 0, \\ \{f_i(z_1) f_i(z_2) f_{i\pm 1}(w) - (q + q^{-1}) f_i(z_1) f_{i\pm 1}(w) f_i(z_2) \\ &\quad + f_{i\pm 1}(w) f_i(z_1) f_i(z_2)\} + \{z_1 \leftrightarrow z_2\} = 0, \end{aligned}$$

where $\delta(Z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} Z^n$.

For $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ we set $C(\lambda) = \{\mu \in \mathfrak{h}^* \mid \lambda - \mu \in \sum_i \mathbb{Z}_{\geq 0} \alpha_i\}$.

Definition 1.2. Let $\text{Mod}(U_{q,r}(\mathbf{Lg}))$ denote the category of $U_{q,r}(\mathbf{Lg})$ -modules V which satisfy the following conditions:

- V is $U_q(\mathfrak{h})$ -diagonalizable,
- V_ω is finite dimensional for any $\omega \in \mathfrak{h}^*$,
- there is a finite number of elements $\omega_1, \dots, \omega_s \in \mathfrak{h}^*$ such that all the weight of V are in $\cup_i C(\omega_i)$

2 q-character

Definition 2.1. An l -weight is a couple (λ, Φ) where $\lambda \in P$ and $\Phi = (\Phi_{i,\pm m}^\pm)_{i \in I, m \geq 0}$, such that $\Phi_{i,\pm m}^\pm \in \mathbb{C}^*$ and $\Phi_{i,0}^\pm = q^{\pm \lambda(\alpha_i^\vee)}$ for all $i \in I$ and $m \geq 0$.

Definition 2.2. We denote by QP_l^+ the set of all l -weights (λ, Φ) such that $\lambda \in P^+ - Q^+$ and there exist polynomials $F_i(z)$ and $G_i(z)$ ($i \in I$) satisfying $F_i(0) = G_i(0) = 1$ and

$$\sum_{m \geq 0} \Phi_{i, \pm m}^\pm z^{\pm m} = q^{\deg F_i - \deg G_i} \left(\frac{F_i(zq^{-1})G_i(zq)}{F_i(zq)G_i(zq^{-1})} \right)^\pm.$$

For $V \in \text{Mod}(U_{q,r}(\mathbf{Lg}))$ and an l -weight (λ, Φ) we set

$$V_{(\lambda, \Phi)} = \left\{ v \in W_\lambda \mid \exists p, \forall i, \forall m, (\phi_{i, \pm m}^\pm - \Phi_{i, \pm m}^\pm)^p = 0 \right\},$$

where $\phi_{i, \pm m}^\pm$ is the operators defined by

$$K_i^\pm(z) = \sum_{m \geq 0} \phi_{i, \pm m}^\pm z^{\pm m}.$$

Proposition 2.3. For $V \in \text{Mod}(U_{q,r}(\mathbf{Lg}))$ and an l -weight (λ, Φ) , if $V_{(\lambda, \Phi)} \neq \{0\}$, then $(\lambda, \Phi) \in QP_l^+$.

Consider formal variables $Y_{i,a}^\pm$ ($i \in I, a \in \mathbb{C}^*$) and k_ω ($\omega \in \mathfrak{h}$). Let A be the commutative groups of monomials of the form $m = \prod_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*} Y_{i,a}^{u_{i,a}(m)} k_{\omega(m)}$ ($u_{i,a}(m) \in \mathbb{Z}, \omega(m) \in \mathfrak{h}$), satisfying the following conditions:

- only a finite number of $u_{i,a}(m)$ are non-zero,
- $\alpha_i(\omega(m)) = \sum_{a \in \mathbb{C}^*} u_{i,a}(m)$ for all $i \in I$.

For $(\lambda, \Phi) \in QP_l^+$ we set

$$Y_{\lambda, \Phi} = k_{\nu(\lambda)} \prod_{i \in I, a \in \mathbb{C}^*} Y_{i,a}^{f_{i,a} - g_{i,a}} \in A$$

where $F_i(z) = \prod_{a \in \mathbb{C}^*} (1 - az)^{f_{i,a}}$ and $G_i(z) = \prod_{a \in \mathbb{C}^*} (1 - az)^{g_{i,a}}$.

Let \mathcal{Y} be the set of $\chi \in \mathbb{Z}^A$ such that there exists a finite number of elements $\lambda_1, \dots, \lambda_s \in \mathfrak{h}^*$ such that for all $m \in A$ if

$$\omega(m) \notin \bigcup_j \nu(C(\lambda_j)),$$

then the coefficient of m in χ is 0.

Definition 2.4. The q -character of a module $V \in \text{Mod}(U_{q,r}(\mathbf{Lg}))$ is defined by

$$\chi_q(V) = \sum_{(\lambda, \Phi) \in QP_l^+} \dim(V_{\lambda, \Phi}) Y_{\lambda, \Phi} \in \mathcal{Y}.$$

3 coproduct and tensor structure with formal parameter

Let $U'_{q,r}(\mathbf{Lg}) = U_{q,r}(\mathbf{Lg}) \otimes \mathbb{C}(u)$ and

$$U'_{q,r}(\mathbf{Lg}) \hat{\otimes} U'_{q,r}(\mathbf{Lg}) = (U_{q,r}(\mathbf{Lg}) \otimes_{\mathbb{C}} U_{q,r}(\mathbf{Lg}))((u))$$

be the u -topological completion of $U'_{q,r}(\mathbf{Lg}) \otimes_{\mathbb{C}(u)} U'_{q,r}(\mathbf{Lg})$. We have a algebra homomorphism $\Delta_u: U'_{q,r}(\mathbf{Lg}) \rightarrow U'_{q,r}(\mathbf{Lg}) \hat{\otimes} U'_{q,r}(\mathbf{Lg})$ such that

$$\begin{aligned}\Delta_u(e_{i,n}) &= e_{i,n} \otimes 1 + \sum_{s \geq 0} u^{n+s} (k_{i,-s}^- \otimes e_{i,n+s}), \\ \Delta_u(f_{i,n}) &= u^n (1 \otimes f_{i,n}) + \sum_{s \geq 0} u^s (f_{i,n-s} \otimes k_{i,s}^+), \\ \Delta_u(\phi_{i,m}^\pm) &= \sum_{0 \leq s \leq m} u^{\pm s} (\phi_{i,m-s}^\pm \otimes \phi_{i,s}^\pm), \quad \Delta_u(K_h) = K_h \otimes K_h.\end{aligned}$$

Definition 3.1. An (l, u) -weight is a couple $(\lambda, \Phi(u))$ where $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ and

$$\Phi(u) = (\Phi_{i,\pm m}^\pm(u))_{i \in I, m \geq 0}, \quad \Phi_{i,\pm m}^\pm(u) \in \mathbb{C}[u^\pm]$$

satisfying $\Phi_{i,0}^\pm(u) = q^{\pm \lambda(\alpha_i^\vee)}$.

Definition 3.2. Let $\text{Mod}(U'_{q,r}(\mathbf{Lg}))$ be the category of $U'_{q,r}(\mathbf{Lg})$ -modules V such that there is a \mathbb{C} -vector subspace $W \subset V$ satisfying:

- $V \simeq W \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}(u)$,
- W is stable under the action of $U_q(\mathfrak{h})$ and satisfies the conditions in Definition 1.2,
- $W \otimes_{\mathbb{C}} \mathbb{C}[u^\pm]$ is under the action of $U_q(\mathbf{Lg})$,
- for all $\omega \in \mathfrak{h}^*$, $i \in I$ and $n \in \mathbb{Z}$, there are a finite number of \mathbb{C} -linear operators $\phi_{k,k',\lambda}^\pm: W_\omega \rightarrow V$ ($k \geq 0, k' \geq 0, \lambda \in \mathbb{C}^*$) such that

$$\begin{aligned}e_{i,r+m}(v) &= \sum_{k,k',\lambda} \lambda^m u^{km} m^{k'} \phi_{k,k',\lambda}^+(v), \\ f_{i,r-m}(v) &= \sum_{k,k',\lambda} \lambda^m u^{km} m^{k'} \phi_{k,k',\lambda}^-(v),\end{aligned}$$

- We have a decomposition

$$V = \bigoplus_{(\lambda, \Phi(u))} V_{(\lambda, \Phi(u))}$$

where

$$V_{(\lambda, \Phi(u))} = \left\{ v \in V_\lambda \mid \exists p, \forall i, \forall m, (\phi_{i,\pm m}^\pm - \Phi_{i,\pm m}^\pm(u))^p = 0 \right\}.$$

For $V \in \text{Mod}(U_{q,r}(\mathbf{Lg}))$ let $i(V) = V \otimes \mathbb{C}(u)$ be the $U'_{q,r}(\mathbf{Lg})$ -module given by natural extension.

Proposition 3.3. The map i defines a fully faithful functor

$$i: \text{Mod}(U_{q,r}(\mathbf{Lg})) \rightarrow \text{Mod}(U'_{q,r}(\mathbf{Lg})).$$

We denote Mod^0 be the semi-simple category with a unique simple object $i(L(0,1))$, where $L(0,1)$ is the l -highest weight simple $U_{q,r}(\mathbf{Lg})$ -module with l -highest weight $(0,1)$. For $r \geq 1$ let Mod^r be a copy of $\text{Mod}(U'_{q,r}(\mathbf{Lg}))$.

Definition 3.4. We denote by Mod the direct sum of categories

$$\text{Mod} = \text{Mod}^0 \oplus \text{Mod}^1 \oplus \text{Mod}^2 \oplus \cdots .$$

For $V_1 \in \text{Mod}^{r_1}$ and $V_2 \in \text{Mod}^{r_2}$ we define an action of $U'_{q,r}(\mathbf{Lg})$ on $V_1 \otimes_{\mathbb{C}(u)} V_2((u))$ by

$$g \cdot (v_1 \otimes v_2) = \Delta_{u^r}(g)(v_1 \otimes v_2).$$

Lemma 3.5. The subspace $V_1 \otimes_{\mathbb{C}(u)} V_2 \subset V_1 \otimes_{\mathbb{C}(u)} V_2((u))$ is stable under the action of $U'_{q,r}(\mathbf{Lg})$, and $V_1 \otimes_{\mathbb{C}(u)} V_2 \in \text{Mod}(U'_{q,r}(\mathbf{Lg}))$.

We consider $V_1 \otimes_{\mathbb{C}(u)} V_2$ as an element of $\text{Mod}^{r_1+r_2}$. Then we have a bifunctor

$$\otimes_f: \text{Mod} \times \text{Mod} \rightarrow \text{Mod}.$$

Theorem 3.6. ([2] Theorem 3.14) The bifunctor \otimes_f defines a tensor structure on Mod .

Theorem 3.7. ([2] Theorem 6.2) Let $V_1, V_2 \in \text{Mod}(U_{q,r}(\mathbf{Lg}))$ be two l -highest weight modules. Then $i(V_1) \otimes_f i(V_2)$ is a cyclic $U'_{q,r}(\mathbf{Lg})$ -module.

4 specialization of formal parameter

Consider the ring

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{f(u)}{g(u)} \mid f(u), g(u) \in \mathbb{C}[u^\pm], g(1) \neq 0 \right\} \subset \mathbb{C}(u)$$

and the algebra $U_{q,r}^u(\mathbf{Lg}) = U_{q,r}(\mathbf{Lg}) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{A} \in U'_{q,r}(\mathbf{Lg})$.

Definition 4.1. For $V \in \text{Mod}(U'_{q,r}(\mathbf{Lg}))$, an \mathfrak{A} -form \tilde{V} of V is a sub \mathfrak{A} -module of V satisfying:

- \tilde{V} is stable under the action of $U_{q,r}^u(\mathbf{Lg})$,
- \tilde{V} generates V as $\mathbb{C}(u)$ -vector space, and
- for $\omega \in \mathfrak{h}^*$, $\tilde{V} \cap V_\omega$ is a finitely generated \mathfrak{A} -module.

Proposition 4.2. For $V \in \text{Mod}(U'_{q,r}(\mathbf{Lg}))$ and \tilde{V} be an \mathfrak{A} -form of V . Then $(\tilde{V})_{u=1} \in \text{Mod}(U_{q,r}(\mathbf{Lg}))$.

Theorem 4.3. ([2] Theorem 4.6) Let $V \in \text{Mod}(U'_{q,r}(\mathbf{Lg}))$ be a cyclic module generated by $v \in V - \{0\}$. Then $\tilde{V}(v) = U_{q,r}^u(\mathbf{Lg}) \cdot v$ is an \mathfrak{A} -form of V . Moreover, $(\tilde{V}(v))_{u=1} \in \text{Mod}(U_{q,r}(\mathbf{Lg}))$ is a cyclic $U_{q,r}(\mathbf{Lg})$ -module.

Let V_1, \dots, V_r be l -highest weight modules in $\text{Mod}(U_{q,r}(\mathbf{Lg}))$. Recall that $W = i(V_1) \otimes_f \cdots \otimes_f i(V_r)$ is a cyclic $U'_{q,r}(\mathbf{Lg})$ -module (theorem 3.7).

Definition 4.4. The l -highest weight module $(\tilde{W}(u))_{u=1}$ is denoted by $V_1 *_f \cdots *_f V_r$ and called the fusion product of V_1, \dots, V_r .

Theorem 4.5. ([2] Corollary 6.3)

$$\chi_q(V_1) \cdots \chi_q(V_r) = \chi_q(V_1 *_f \cdots *_f V_r).$$

5 q-Fock spaces

Let l be a positive integer, $\vec{c} \in Z^l$, and $\gamma_1, \dots, \gamma_l$ be generic complex numbers satisfying $\gamma_1 \cdots \gamma_l = 1$. For such data we can construct a representation $F(\vec{c})_{\gamma_1, \dots, \gamma_l}$ of $U_{q,r}(\mathbf{Lg})$, which is called the level- l q-Fock space ([6],[3]). This space has a natural basis $\{u_{\vec{\lambda}}\}_{\vec{\lambda} \in \Pi^l}$ indexed by l -tuples of Young diagrams, where $u_{\vec{\lambda}}$ is an element so called a normally ordered wedge.

In [4] and [3] we construct new basis $\{\Psi_{\vec{\lambda}}\}$ such that

- the transition matrix between $\{u_{\vec{\lambda}}\}$ and $\{\Psi_{\vec{\lambda}}\}$ is upper triangular with respect to a certain order on Π^l , and
- $\Psi_{\vec{\lambda}}$ is a simultaneous eigenvector for the actions of the generators K_h 's and $h_{i,m}^{\pm}$'s.

For $\gamma \in \mathbb{C}^*$ we have a automorphism of $U_{q,r}(\mathbf{Lg})$ given by $\mathcal{X}_i(z) \mapsto \mathcal{X}_i(\gamma z)$ ($\mathcal{X} = e, f, K^{\pm}$). Let $F(c)_{\gamma}$ denote the representation given by twisting the level-1 q-Fock space $F(c) = F(c)_1$ through this automorphism.

Theorem 5.1. *The level- l q-Fock space $F(\vec{c})_{\gamma_1, \dots, \gamma_l}$ is isomorphic to the fusion product $F(c_1)_{\gamma_1} *_{f} \cdots *_{f} F(c_l)_{\gamma_l}$ of level-1 q-Fock spaces.*

Remark 5.2. *In this case, $F(c_1)_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes F(c_l)_{\gamma_l} \subset F(c_1)_{\gamma_1}(u) \otimes \cdots \otimes F(c_l)_{\gamma_l}(u)$ is in the \mathcal{A} -form of $F(c_1)_{\gamma_1}(u) \otimes \cdots \otimes F(c_l)_{\gamma_l}(u)$. The isomorphism can be given by associating $\Psi_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \Psi_{\lambda_l}$ with $\Psi_{\vec{\lambda}}$ after suitable normalization.*

Remark 5.3. *Take non-generic $\gamma_1, \dots, \gamma_l$. Then*

- the equation $\chi_l(\Psi_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \Psi_{\lambda_l}) = \chi_l(\Psi_{\vec{\lambda}})$ still holds.
- The subspace $F(c_1)_{\gamma_1} \otimes \cdots \otimes F(c_l)_{\gamma_l}$ is not in the \mathcal{A} -form of $F(c_1)_{\gamma_1}(u) \otimes \cdots \otimes F(c_l)_{\gamma_l}(u)$ any more. But after multiplying a suitable power of $1-u$, $\Psi_{\lambda_1} \otimes \cdots \otimes \Psi_{\lambda_l}$ induces a simultaneous eigenvector.
- As is claimed in [3], the actions of K_h 's and $h_{i,m}^{\pm}$'s are not simultaneously diagonalizable in $F(\vec{c})_{\gamma_1, \dots, \gamma_l}$ anymore. Hence $F(\vec{c})_{\gamma_1, \dots, \gamma_l}$ and $F(c_1)_{\gamma_1} *_{f} \cdots *_{f} F(c_l)_{\gamma_l}$ are not isomorphic.

Acknowledgement

The author would like to thank David Hernandez for teaching him about fusion products.

References

- [1] D. Hernandez, *Representations of quantum affinizations and fusion product*, Transformation Groups **10** (2005), no. 2, 163–200.
- [2] ———, *Drinfeld coproduct, quantum fusion tensor category and applications*, Proceedings of the London Mathematical Society (3) **95** (2007), no. 3, 567–608.

- [3] K. Nagao, *K-theory of quiver varieties and q -fock spaces*, Proceedings of Representation theory of Algebraic groups and Quantum Groups 10, <http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~kentaron/raq10.pdf>.
- [4] ———, *K-theory of quiver varieties, q -fock space and nonsymmetric Macdonald polynomials*, math/0709.1767.
- [5] H. Nakajima, *Quiver varieties and finite-dimensional representations of quantum affine algebras*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001), no. 1, 145–238.
- [6] K. Takemura and D. Uglov, *Representations of the quantum toroidal algebra on highest weight modules of the quantum affine algebra of type gl_n* , Publ. RIMS, Kyoto Univ. **35** (1998), 407–450.
- [7] M. Varagnolo and E. Vasserot, *On the K-theory of the cyclic quiver variety*, Internat. Math. Res. Notices, **18** (1999), 1005–1028.

On the KAM Theory

Kohei Soga

Department of Physics and Applied Physics, Waseda University,

E-mail address: kohei-math@toki.waseda.jp

1 始めに

本稿のテーマである **KAM Theory** は、**Hamilton 力学** に現れる正準方程式のうち、**可積分系** と呼ばれる特別なクラスに対する摂動問題を取り扱う理論として誕生した。**可積分系の摂動問題** は、Poincaré が「力学の基本問題」と呼んだように、天体力学と関連して長い歴史を持つ。この問題が一定程度解決されるまでには、長い時間を要した。その理由は、問題の解決に必要な「収束の証明」が極めて難しいことである。大きな前進は、1954年、**A. N. Kolmogorov** によってもたらされた [4]。Kolmogorov は新しい逐次近似のアイデアを提唱し、「収束の証明」が可能であることを(詳細な証明無しに)主張した。この主張に対し、Kolmogorov の学生であった **V. I. Arnold** は、1963年、完全な証明を付けた [1]。**J. Moser** は、1954年の Kolmogorov の主張を *Mathematical Reviews* 誌上で評論していた。Moser は、1962年、円環上の面積保存写像力学における上と同類の摂動問題に対し、完全な証明を付けた [5]。これら3つの仕事は、後に多くの研究者によって整備・拡張され、現在も広く研究されている。この分野は、三氏の頭文字を取って、KAM Theory と総称される。本稿では、Hamilton 力学を含む**古典力学**をまず概説し、次いで KAM Theory の主要な結果と根幹を成すアイデアを紹介する。

2 古典力学

本節では古典力学を、Newton 力学・Lagrange 力学・Hamilton 力学の3つに大別して概観する。これらは一般に同値ではないが、応用上重要な例では同値である。この同値性を手掛かりとして、Newton 力学から Lagrange 力学が、Lagrange 力学から Hamilton 力学が自然に導入される道筋を概説する。この過程において、**多変数微積分法・変分法・多様体・シンプレクティック幾何**などのアイデアが自然に発生することも見ていく。古典力学は本質的に幾何学的な側面を多く有する。一方、4節で述べる KAM Theory は、古典力学に現れる正準方程式を1階 ODE の問題として解析的に取り扱う。したがって、そこではこれから述べるような幾何的な考察は必ずしも必要ではない。以下では簡単のため自励系しか述べないが、非自励系も同様に展開可能である。

(1) Newton 力学

Newton 力学は、慣性座標系と力に対する仮定及び2階 ODE である運動方程式

$$(2.1) \quad \frac{d}{dt} \left\{ m_i \frac{d}{dt} x_i(t) \right\} = F_i(x(t)) \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

$t \in \mathbb{R}$: 時刻, $x \in \mathbb{R}^n$: 位置, $F \in \mathbb{R}^n$: 力, $m_i \in \mathbb{R}_+$: 質点の質量 から成る。以下 $\frac{d}{dt}$ を「 $\dot{}$ 」とも表す。 F を与えて (2.1) を解けば、各質点の運動が得られる。この枠組みは直感的で簡単である。しかしながら(数学的に)不十分な部分もある。これらは Liebniz, D'Alembert, Maupertuis, Euler, Lagrange, Hamilton, Jacobi らの仕事によって是正され、Lagrange 力学・Hamilton 力学へと発展する。両者はしばしば、Newton 力学と区別して、解析力学とも呼ばれる。不十分な点として例えば以下の項目がある。

- $x, x', F \in \mathbb{R}^n$ であるが, これらは次の意味で別物である: 変数変換 $x \mapsto \tilde{x} = \psi(x)$ によって $x' \mapsto \tilde{x}' = D\psi(x)x'$, $F \mapsto \tilde{F} = {}^tD(\psi^{-1}(\tilde{x}))F$
- 変数変換によって運動方程式の形が変わる
- 変分原理の記述になっていない

(2) Lagrange 力学

保存力の下で運動方程式の解を, ある汎関数の停留曲線として解釈できる。それによって, Lagrange 力学が変分原理・多様体の概念とともに自然に生じることを見る。 $m_{ij} = 0$ ($i \neq j$), $m_{ii} = m_i$, $U: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 とする。 $x(t)$ ($t \in [t_0, t_1]$) を, 保存力の運動方程式

$$(2.2) \quad mx''(t) = -\partial_x U(x(t)), \quad m = [m_{ij}]$$

の解とする。任意の $h: [t_0, t_1] \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^1 , $h(t_0) = h(t_1) = 0$ に対して, 部分積分より

$$0 = \int_{t_0}^{t_1} \{-mx''(t) - \partial_x U(x(t))\} \cdot h(t) dt = \int_{t_0}^{t_1} \{mx'(t) \cdot h'(t) - \partial_x U(x(t)) \cdot h(t)\} dt.$$

ただし $x \cdot y := \sum_{i=1}^n x_i y_i$. これは, 正定値 2 次形式 $T: \mathbb{R}^n \ni \dot{x} \mapsto \frac{1}{2}m\dot{x} \cdot \dot{x} \in \mathbb{R}$, 関数 $L(\dot{x}, x) = T(\dot{x}) - U(x)$, 曲線 $\gamma_\varepsilon(t) = x(t) + \varepsilon h(t)$ を用いて次のように表せる (以下 \dot{x} に微分の意味は無い)。

$$\delta F(\gamma_0) := \frac{d}{d\varepsilon} \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma'_\varepsilon(t), \gamma_\varepsilon(t)) dt \Big|_{\varepsilon=0} = 0 \quad (\delta F: \text{Gâteaux 微分}),$$

$$F(\gamma) := \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma'(t), \gamma(t)) dt: \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{K} := \{\gamma(t): \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n \mid \gamma \in C^1\}.$$

(2.2) の解は汎関数 F の停留曲線である。逆も正しい。ここで「 $\gamma \in \mathcal{K}$ が汎関数 F の停留曲線である」とは, 「任意の $\gamma_\varepsilon \in \mathcal{K}_{\gamma, t_0, t_1} := \{\gamma_\varepsilon = \gamma + \varepsilon h \mid h \in C^1(\mathbb{R}), h(t_0) = h(t_1) = 0\} \subset \mathcal{K}$ に対して $\delta F(\gamma_0) = 0$ となること」をいう。(2.2) を L を用いて表すと

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x'(t), x(t)) \right\} - \frac{\partial L}{\partial x}(x'(t), x(t)) = 0.$$

この 2 階 ODE を L に関する **Euler-Lagrange 方程式** という。変数変換 $x \mapsto \tilde{x} = \psi(x)$ に対して $\dot{x} \mapsto \dot{\tilde{x}} = D\psi(x)\dot{x}$ と定めると (接ベクトルの定義につながる), 以下の 3 項目は同値になる: 「 $x(t)$ が F の停留曲線であること», 「 $\tilde{x}(t) = \psi(x(t))$ が $\tilde{\mathcal{K}} := \{\psi \circ \gamma \mid \gamma \in \mathcal{K}\}$ 上の汎関数

$$\tilde{F}(\tilde{\gamma}) = \int_{t_0}^{t_1} \tilde{L}(\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}(t)) dt, \quad \tilde{L}(\dot{\tilde{x}}, \tilde{x}) := L(D\psi^{-1}(\tilde{x})\dot{\tilde{x}}, \psi^{-1}(\tilde{x}))$$

の停留曲線であること», 「 $\tilde{x}(t)$ が \tilde{L} に関する Euler-Lagrange 方程式を満たすこと」。以上の考察は, 多様体の概念を用いて以下のように一般化できる。

$M \ni x$ を n 次元微分可能多様体 (位置), $TM \ni \xi$ を接バンドル (速度と位置), $L(\xi): TM \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 とする。ただし, M の局所座標近傍を $\mathbf{c}_\lambda = (\varphi_\lambda, o_\lambda)$, $\varphi_\lambda: o_\lambda \subset M \rightarrow \mathbb{R}^n$, 座標変換を $\psi_{\lambda\nu} = \varphi_\lambda \circ \varphi_\nu^{-1}$ と表して

$$TM := \bigcup_{x \in M} T_x M,$$

$$T_x M := \{(\mathbf{c}_\lambda, \dot{x}_\lambda, x_\lambda) \mid \mathbf{c}_\lambda \in [x \text{ を含む } M \text{ の局所座標近傍全体}], \dot{x}_\lambda \in \mathbb{R}^n, x_\lambda = \varphi_\lambda(x)\} / \sim,$$

$$(\mathbf{c}_\lambda, \dot{x}_\lambda, x_\lambda) \sim (\mathbf{c}_\nu, \dot{x}_\nu, x_\nu), \quad \text{if } \dot{x}_\lambda = D\psi_{\lambda\nu}(x_\nu)\dot{x}_\nu, x_\lambda = \psi_{\lambda\nu}(x_\nu).$$

Definition 2.1 M を配位空間, L を **Lagrangian**, (M, L) を **Lagrange 力学系** という。 M 上の曲線 $\gamma(t): \mathbb{R} \rightarrow M$ 全体上で定義された汎関数

$$F(\gamma) = \int_{t_0}^{t_1} L(\gamma'(t)) dt \quad (\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)} M)$$

を **action** という (t_0, t_1 は任意)。曲線 $x(t)$ が (M, L) の運動であるとは, $x(t)$ が F の停留曲線であることをいう。

Theorem 2.2 $x(t)$ を (M, L) の運動とする。 $x(t)$ の局所座標系表示 $x_\lambda(t) = \varphi_\lambda(x(t))$ は、座標系の取り方によらず以下の Euler-Lagrange 方程式を満たす。

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}_\lambda}(x'_\lambda(t), x_\lambda(t)) \right\} - \frac{\partial L_\lambda}{\partial x_\lambda}(x'_\lambda(t), x_\lambda(t)) = 0, \quad L_\lambda(\dot{x}_\lambda, x_\lambda) := L(\Phi_\lambda^{-1}(\dot{x}_\lambda, x_\lambda)),$$

$$\Phi_\lambda : O_\lambda = \bigcup_{x \in o_\lambda} T_x M \ni \xi \mapsto (\dot{x}_\lambda, x_\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \varphi_\lambda(o_\lambda) \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \Psi_{\lambda\nu} = \Phi_\lambda \circ \Phi_\nu^{-1}$$

$(\mathcal{C}_\lambda = (\Phi_\lambda, O_\lambda): TM$ の自然な局所座標系, $\Psi_{\lambda\nu}$: 座標変換).

応用上重要な Lagrange 力学系 (M, L) は、自然系と呼ばれる次のものである。

$$M : \text{Riemann 多様体 } (\exists \langle \cdot, \cdot \rangle : \bigcup_{x \in M} (T_x M \times T_x M) \rightarrow \mathbb{R}, \text{ 正定値双線形}),$$

$$L(\xi) = T(\xi) - U \circ \pi(\xi) \quad (\pi : TM \rightarrow M \text{ 自然な射影}),$$

$$T : TM \ni \xi \mapsto \frac{1}{2} \langle \xi, \xi \rangle \in \mathbb{R} \quad (\text{運動エネルギー}),$$

$$U : M \rightarrow \mathbb{R} \quad (\text{ポテンシャルエネルギー}).$$

(3) Hamilton 力学

(M, L) の運動 $x(t)$ は、 TM の曲線 $\xi(t) = x'(t)$ を与える。 $\xi(t)$ をある方向場 (速度場) の積分曲線とみなし、これに付随した 1 階正規系 ODE を得ることを考える。これは TM 上では無理であるが、 (M, L) が例えば自然系の場合、 $\xi(t)$ を M の余接バンドル T^*M の曲線 $\xi^*(t)$ にある仕方に対応付けると可能になる。こうして Hamilton 力学が自然に導入される。この作業は L を多様体上で Legendre 変換することである。まずその定義をする。そのためには

$$(2.3) \quad T^*M \ni \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\xi)$$

が意味を持つように、 T^*M と $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\xi)$ を定義すればよい。 L の局所座標系表示 L_λ, L_ν に対し、 $L_\lambda(\dot{x}_\lambda, x_\lambda) = L_\nu(\Psi_{\nu\lambda}(\dot{x}_\lambda, x_\lambda)) = L_\nu(D\psi_{\nu\lambda}(x_\lambda)\dot{x}_\lambda, \psi_{\nu\lambda}(x_\lambda))$ だから

$$\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}_\lambda}(\dot{x}_\lambda, x_\lambda) = {}^t D\psi_{\nu\lambda}(x_\lambda) \frac{\partial L_\nu}{\partial \dot{x}_\nu}(\dot{x}_\nu, x_\nu).$$

これを手掛かりに、以下のように定義する (通常の定義と異なるが、同等である)。

$$T^*M := \bigcup_{x \in M} T_x^*M,$$

$$T_x^*M := \{(\mathbf{c}_\lambda, x_\lambda^*, x_\lambda) \mid \mathbf{c}_\lambda \in [x \text{ を含む } M \text{ の局所座標近傍全体}], x_\lambda^* \in \mathbb{R}^n, x_\lambda = \varphi_\lambda(x)\} / \sim_*,$$

$$(\mathbf{c}_\lambda, x_\lambda^*, x_\lambda) \sim_* (\mathbf{c}_\nu, x_\nu^*, x_\nu), \quad \text{if } x_\lambda^* = {}^t D\psi_{\nu\lambda}(\psi_{\lambda\nu}(x_\nu))x_\nu^*, x_\lambda = \psi_{\lambda\nu}(x_\nu),$$

$$\Phi_\lambda^* : O_\lambda^* = \bigcup_{x \in o_\lambda} T_x^*M \ni \xi^* \mapsto (x_\lambda^*, x_\lambda) \in \mathbb{R}^n \times \varphi_\lambda(o_\lambda) \subset \mathbb{R}^{2n}, \quad \Psi_{\lambda\nu}^* = \Phi_\lambda^* \circ \Phi_\nu^{*-1}$$

$(\mathcal{C}_\lambda^* = (\Phi_\lambda^*, O_\lambda^*): T^*M$ の自然な局所座標系, Ψ_λ^* : 座標変換).

これより、 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\xi) := \Phi_\lambda^{*-1}(\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}_\lambda}(\dot{x}_\lambda, x_\lambda), x_\lambda)$ に対して (2.3) は意味を持つ。 T : 正定値 2 次形式, $L = T - U \circ \pi$ より、 $\frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}_\lambda}(\cdot, x_\lambda) : \mathbb{R}^n \ni \dot{x}_\lambda \rightarrow x_\lambda^* = \frac{\partial L_\lambda}{\partial \dot{x}_\lambda}(\dot{x}_\lambda, x_\lambda) \in \mathbb{R}^n$ は同型写像。逆写像を $\dot{x}_\lambda(x_\lambda^*, x_\lambda)$ と表す。以下 $L \in C^3(TM)$ とする。

Proposition 2.3 写像 $\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} : TM \rightarrow T^*M$ は C^2 -微分同相である。 $L_\lambda(\dot{x}_\lambda, x_\lambda)$ の \dot{x}_λ に関する Legendre 変換 $H_\lambda(x_\lambda^*, x_\lambda) := x_\lambda^* \cdot \dot{x}_\lambda(x_\lambda^*, x_\lambda) - L_\lambda(\dot{x}_\lambda(x_\lambda^*, x_\lambda), x_\lambda)$ をつなぐことができ、 L の TM 上での Legendre 変換 $L(\xi) \mapsto H(\xi^*) : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 , $H(\xi^*) = T(\xi) + U \circ \pi(\xi)$ for $\xi^* = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(\xi)$ が well-defined.

T^*M は $2n$ 次元微分可能多様体であるから、各点 ξ^* で $T_{\xi^*}(T^*M)$, $T_{\xi^*}^*(T^*M)$ が定義できる。各 $\xi^* \in T^*M$ に対して次の写像は well-defined かつ同型。

$$I : T_{\xi^*}^*(T^*M) \ni \Xi^* = \{(C_\lambda^*, \zeta_\lambda^*, \xi_\lambda^*)\}_{\sim^*} \mapsto \Xi = \{(C_\lambda^*, J\zeta_\lambda^*, \xi_\lambda^*)\}_{\sim} \in T_{\xi^*}(T^*M), \quad \zeta_\lambda^* \in \mathbb{R}^{2n},$$

$$J = \begin{pmatrix} O_{n \times n} & -E_{n \times n} \\ E_{n \times n} & O_{n \times n} \end{pmatrix} \quad E: \text{単位行列}, O: \text{零行列}.$$

ただし $\{\cdot\}_{\sim}$ は「 \sim 」による「 \cdot 」の同値類。Proposition 2.3 で得た $H(\xi^*)$ に対して

$$\frac{\partial H}{\partial \xi^*}(\xi^*) := \left\{ \left(C_\lambda^*, \frac{\partial H_\lambda}{\partial \xi_\lambda^*}(\xi_\lambda^*), \xi_\lambda^* \right) \right\}_{\sim^*} \in T_{\xi^*}^*(T^*M).$$

$\frac{\partial H}{\partial \xi^*}(\xi^*)$ は I で T^*M の接ベクトルに写せるので、これを速度場と思えば積分曲線が得られる。

Definition 2.4 L の Legendre 変換 $H(\xi^*) \in C^2(T^*M)$ を **Hamiltonian**, $I \frac{\partial H}{\partial \xi^*}(\cdot) : T^*M \rightarrow T(T^*M)$ を **Hamilton ベクトル場**, (T^*M, H) を (M, L) から導かれる **Hamilton 力学系** と言う。 T^*M の曲線 $\xi^*(t)$ が (T^*M, H) の運動であるとは、 $\xi^*(t)$ が $I \frac{\partial H}{\partial \xi^*}(\cdot)$ の積分曲線であることをいう。すなわち

$$(2.4) \quad \xi^{*'}(t) = I \frac{\partial H}{\partial \xi^*}(\xi^*(t)).$$

Remark この定義は、 H が L の Legendre 変換でない場合も有効であるので、Lagrange 力学系とは独立に Hamilton 力学系 (T^*M, H) , $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$, C^2 の定義が得られた。

Theorem 2.5 (2.4) を T^*M の自然な局所座標 $\xi_\lambda^* = (p_\lambda, q_\lambda) \in \mathbb{R}^{2n}$ で表示すると、座標系の選び方によらず最初の $2n$ 個の成分は正準方程式

$$\xi_\lambda^{*'}(t) = J \frac{\partial H_\lambda}{\partial \xi_\lambda^*}(\xi_\lambda^*(t)) \iff p_\lambda'(t) = -\frac{\partial H_\lambda}{\partial q_\lambda}(p_\lambda(t), q_\lambda(t)), \quad q_\lambda'(t) = \frac{\partial H_\lambda}{\partial p_\lambda}(p_\lambda(t), q_\lambda(t))$$

となる。特に、自然系 (M, L) の運動 $x(t)$ に対し、 $\xi^*(t) := \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}(x'(t))$ は (2.4) を満たす。

この定理は本質的に次のことを意味している。

Proposition 2.6 M を n 次元微分可能多様体とする。 T^*M の自然な微分可能多様体構造において、各座標変換 $\Psi_{\nu\lambda}^*$ は ${}^t D\Psi_{\nu\lambda}^*(\xi_\lambda^*) J D\Psi_{\nu\lambda}^*(\xi_\lambda^*) \equiv J$ を満たす。

最後の関係式は「 $\Psi_{\nu\lambda}^*$ が正準変換であること」の定義である。この性質により、 T^*M 上で表現行列を J とする 2 次微分形式が定義可能となる。こうして T^*M においてシンプレクティック構造の概念が生じる。さらに Hamilton 力学系は (S, H) , $S : \text{偶数次元シンプレクティック多様体}$, $H : S \rightarrow \mathbb{R}$ へと一般化される。

3 正準方程式

本節では、幾何学的なことから離れて正準方程式を ODE の問題として取り扱う。 $M \subset \mathbb{R}^{2n}$ を領域、 $H(p, q) : M \rightarrow \mathbb{R}$ を C^2 関数として正準方程式

$$(3.1) \quad p'(t) = -\frac{\partial H}{\partial q}(p(t), q(t)), \quad q'(t) = \frac{\partial H}{\partial p}(p(t), q(t))$$

を考える。(3.1) の流れを ϕ_H^t , 初期値 (p_0, q_0) の解を $\phi_H^t(p_0, q_0)$ と表す。

(1) 正準変換

Definition 3.1 C^2 -微分同相写像 $\varphi : V \ni (P, Q) \mapsto (p, q) \in U \subset M$ が正準変換であるとは、 ${}^t D\varphi(P, Q)JD\varphi(P, Q) \equiv J$ on V となることをいう。

定義より、正準変換の逆変換は正準変換であり、2つの正準変換の合成も正準変換である。 $(p, q) = \varphi(P, Q)$ を正準変換とする。 $\tilde{H}(P, Q) := H \circ \varphi(P, Q)$ に関する正準方程式の解 $(P(t), Q(t))$ に対し、 $(p(t), q(t)) := \varphi(P(t), Q(t))$ は (3.1) を満たす。すなわち $\phi_H^t \circ \varphi = \varphi \circ \phi_{\tilde{H} \circ \varphi}^t$ 。正準変換は1つのスカラー関数 $W \in C^3$ (母関数という) から構成できる。 $P \in O_1 \subset \mathbb{R}^n$, $q \in O_2 \subset \mathbb{R}^n$, $W(P, q) : O_1 \times O_2 \rightarrow \mathbb{R}$ に対して

Proposition 3.2 写像 $O_1 \times O_2 \ni (P, q) \mapsto (P, \partial_P W(P, q)) \in V$ が逆写像 $(P, q) = (P, f(P, Q)) : V \rightarrow O_1 \times O_2$ を持つならば、

$$\varphi : V \ni (P, Q) \mapsto (p, q) = (\partial_q W(P, f(P, Q)), f(P, Q)) \in U$$

は (局所的に) 正準変換である。

この構成法は KAM Theory で使われる。

(2) 可積分系

次に (3.1) が可積分系であることの定義を述べる。まず1つの例

$$\mathcal{H}(P, Q) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2} \lambda_i (P_i^2 + Q_i^2), \quad \lambda_i : \text{const.} \quad (\text{調和振動子})$$

を考える。 \mathcal{H} に関する正準方程式は

$$P_i(t) = c_i \cos(\lambda_i t + \theta_i), \quad Q_i(t) = c_i \sin(\lambda_i t + \theta_i) \quad (c_i, \theta_i : \text{初期値で決まる定数})$$

と解ける。これより写像 $F(P, Q) = (F_1(P, Q), \dots, F_n(P, Q))$, $F_i(P, Q) := P_i^2 + Q_i^2$ の各成分は第1積分 (各軌道に沿って値が不変な関数) である。したがって F のレベル集合 $\mathcal{I} = F^{-1}(p)$, $p = (c_1^2, \dots, c_n^2) \in \mathbb{R}_+^n$ 上の軌道は \mathcal{I} にとどまる ($\phi_{\mathcal{H}}^t(\mathcal{I}) \subset \mathcal{I}$)。この意味で \mathcal{I} を $\phi_{\mathcal{H}}^t$ -不変集合という。 $\mathcal{I} \cong \mathbb{T}^n$ が次のことから分かる。正準変換 (正準極座標変換)

$$(P_i, Q_i) = (\sqrt{2p_i} \cos q_i, \sqrt{2p_i} \sin q_i) : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n} \quad (\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / 2\pi\mathbb{Z}^n)$$

によって、 $\mathcal{H}(P, Q)$ は $H(p, q) = \lambda \cdot p : \mathbb{R}_+^n \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ となり

$$\phi_H^t(I, \theta) = (I, \lambda t + \theta) \in \mathcal{I}_0 = \{I\} \times \mathbb{T}^n.$$

n 個の第1積分を持つ調和振動子では、軌道は n -トーラス上の直線であり、周期又は準周期のみである。このような特徴を持つ正準方程式を可積分系という。

Definition 3.3 正準方程式 (3.1) が可積分系であるとは、 n 個の第1積分 $F_1, \dots, F_n : M \rightarrow \mathbb{R}$ が存在して $\nabla F_1, \dots, \nabla F_n$ は1次独立かつ $J\nabla F_i \cdot \nabla F_j = 0 \quad \forall i, j$ となることをいう (F_1, \dots, F_n は独立かつ対合的であるという)。

Theorem 3.4 (Liouville-Arnold-Jost) $F = (F_1, \dots, F_n) : M \subset \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^n$, C^2 は成分が独立かつ対合的であるとする。 $F^{-1}(c_0)$ が連結かつコンパクトならば、 C^2 -微分同相写像 $\mu : G \ni p \mapsto c \in D$ ($G, D \subset \mathbb{R}^n$: 領域, $D \ni c_0$) 及び正準変換 $\varphi : G \times \mathbb{T}^n \ni (p, q) \rightarrow U \subset M$ が存在して、 $\varphi(\{p\} \times \mathbb{T}^n) = F^{-1}(\mu(p))$, $F \circ \varphi(p, q) = \exists f(p)$ 。

(3.1) で H は常に第1積分であるので、(3.1) が可積分系であり連結・コンパクト性があれば、(局所的に) $H(p, q) = H_0(p) : G \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ の正準方程式に帰着できる。したがって軌道は n -トーラス上の直線で、周期又は準周期のみである。 $\phi_H^t(I, \theta) = (p(t), q(t))$ に対して、 $\lim_{|t| \rightarrow \infty} \frac{q(t)}{t} = \partial_p H_0(I)$ を振動数という。可積分系の議論は、上記の H_0 から始まることも多い。

4 KAM Theory

(1) KAM Theorem

可積分系の Hamiltonian H_0 に、可積分性を崩すような摂動 H_1 が付いたとき、対応する正準方程式はどのような解を持つであろうか？このような正準方程式は、しばしば**近可積分系**と呼ばれる。次の問題に対して、以下の Theorem 4.1 (KAM Theorem) は一定程度の解答を与える。

Problem (力学の基本問題 by Poincaré) $G \subset \mathbb{R}^n$ を有界閉領域とし、 $H(p, q) = H_0(p) + H_1(p, q) : G \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ とする。 $H_1 \neq 0$ の場合、 $\phi_H^t(I, \theta)$ はどうなるか？

Theorem 4.1 ([4][1][6][3][7][8]) 次のことを仮定する。

(A-1) H : 実解析 (A-2) H_0 : Rüssmann-非退化 (A-3) $\|H_1\|$: 十分小

このとき、集合 $X_{KAM} \subset G \times \mathbb{T}^n$ が存在して以下のことが成り立つ。

1. $X_{KAM} = [\phi_H^t$ -不変多様体 \mathcal{I} の族], $\mathcal{I} = \Phi(\mathbb{T}^n)$ (**KAM トーラス**という)
 $\Phi : \mathbb{T}^n \rightarrow G \times \mathbb{T}^n$ 実解析的埋め込み;
2. 各 \mathcal{I} に対して、*Diophantine* 数 λ が存在して、任意の初期値 $(I, \theta) \in \mathcal{I}$ に対して

$$\phi_H^t(I, \theta) = \Phi(\lambda t + Q_0(\theta)) \quad (\text{振動数 } \lambda \text{ の準周期軌道});$$
3. $\text{mes}[G \times \mathbb{T}^n \setminus X_{KAM}] \rightarrow 0$ as $\|H_1\| \rightarrow 0$ (H_1 に関して一様).

Remark $\cdot \|H_1\|$ は H_1 の定義域を複素へ拡張したときの sup-ノルム

- $\cdot H_0$ が Rüssmann-非退化であるとは、 $\partial_p H_0(G) \subset \mathbb{R}^n$ が \mathbb{R}^n の原点を通る如何なる超平面にも含まれない場合をいう
- $\cdot X_{KAM}$ を任意の $\theta \in \mathbb{T}^n$ で切ると、切り口は G の Cantor 部分集合となる

これは 1995 年前後の結果であり、実解析的な範疇では最もシャープである。1963 年の Arnold の結果は、(A-2) が「Kolmogorov-非退化 ($\text{rank } \partial_p^2 H_0(p) = n$ on G)」の場合である。Rüssmann-非退化条件は $1 \leq \text{rank } \partial_p^2 H_0(p) \leq n$ で成立し得る。非退化条件が弱くなることで、証明は難しくなる。しかし基本的なアイデアは変わらない。

(2) KAM Theory の基本アイデア

KAM Theory の基本アイデアは Kolmogorov による。それは Diophantine 近似を伴う新しい摂動論の方法である。KAM Theory 登場以前にあった 2 つの代表的な摂動論の方法と合わせて、Kolmogorov のアイデアを概説する。

(a) “old” method: 解を ($t \rightarrow \infty$ で発散し得る) 級数で形式表示する。永年項 $t^m \sin at, t^m \cos at, \dots$ が現れるので、時間大域的な挙動を知ることは難しい。

(b) “new” method: Lindstedt と Poincaré による永年項が現れない方法である。Kolmogorov のアイデアの原型といえる。ここでは、摂動パラメータ ε を伴う $H(p, q) = H_0(p) + \varepsilon H_1(p, q) : G \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ に対し $H \circ \varphi(P, Q) = h_0(P) : G \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ とするような正準変換 φ を探す。 φ を得るためには、少なくとも、次に示す P をパラメータに持つ Hamilton-Jacobi 方程式の解 $u(P, q)$ を構成せねばならない ($\det \partial_q \partial_P u(P, q) \neq 0$ ならば u は φ の母関数)。

$$(4.1) \quad H(\partial_q u(P, q), q) = h_0(P)$$

(4.1) を満たす u, h_0 を以下のように形式的に構成する。 $P \in G$ を 1 つ固定して次のように置く。

$$(4.2) \quad u(P, q) = P \cdot q + \varepsilon u_1(P, q) + \varepsilon^2 u_2(P, q) + \varepsilon^3 u_3(P, q) + \dots$$

これを (4.1) の左辺に代入して P の周りで展開し, ε の次数を揃えると

$$\begin{aligned} H(\partial_q u(P, q), q) &= H_0(P) + \varepsilon \{ \partial_p H_0(P) \cdot \partial_q u_1(P, q) + H_1(P, q) \}_1 \\ &+ \varepsilon^2 \{ \partial_p H_0(P) \cdot \partial_q u_2(P, q) + [H_0, H_1, u_1 \text{ から決まる関数}]_2 \}_2 \\ &+ \varepsilon^3 \{ \partial_p H_0(P) \cdot \partial_q u_3(P, q) + [H_0, H_1, u_1, u_2 \text{ から決まる関数}]_3 \}_3 + \dots \end{aligned}$$

各 $\{ \}_s = \exists f^s(P)$ となるように $u_s (s = 1, 2, \dots)$ を逐次的に決める。

$$\begin{aligned} u_1(P, q) &:= \sum_{z \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{i f_z^1(P) e^{iz \cdot q}}{\partial_p H_0(P) \cdot z} \quad (f_z^1(P) : H_1(P, \cdot) \text{ の Fourier 係数}) \\ u_{s+1}(P, q) &:= \sum_{z \in \mathbb{Z}^n \setminus \{0\}} \frac{i f_z^{s+1}(P) e^{iz \cdot q}}{\partial_p H_0(P) \cdot z} \quad (f_z^{s+1}(P) : []_{s+1} \text{ の Fourier 係数}) \end{aligned}$$

と定めれば (4.2) は, $h_0(P) := H_0(P) + \sum_{s=1}^{\infty} \varepsilon^s f_0^s(P)$ として, (4.1) を満たす。以上の議論は形式的にはうまくいくものの, 重大な欠陥を伴う。もし $\partial_p H_0(P) \cdot z = 0$ となるような P を取ると, 上の議論は破綻する。従って一般に, $u(P, q)$ の P に関する微分可能性はおろか連続性も期待できない。仮に P を $\partial_p H_0(P) \cdot z \neq 0, \forall z \neq 0$ となるように固定しても, 必ず非有界な点列 $\{z_j\} \subset \mathbb{Z}^n$ が存在して

$$(4.3) \quad \partial_p H_0(P) \cdot z_j \rightarrow 0 \quad \text{as } j \rightarrow \infty \quad (\partial_p H_0(P) \cdot z \text{ を小分母と呼ぶ})$$

となる。従って各 u_s の収束性は疑わしい。そこで (4.3) の 0 への収束の速さを下から制限することを考える。その 1 つの方法が γ, τ -Diophantine 数を利用することである。すなわち, $\partial_p H_0(P)$ が以下のことを満たすように P が取れるとする。

$$(4.4) \quad |\partial_p H_0(P) \cdot z| \geq \gamma \|z\|_1^{-\tau} \quad \forall z \neq 0 \quad (\gamma > 0, \tau > n - 1).$$

これにより各 u_s の収束は保障できそうであるが, これらの和としての (4.2) の収束性を保障することはやはり極めて困難である。実際 Poincaré はこの級数は発散するだろうと予想した。この困難を小分母の問題という。

(c) **KAM method:** Kolmogorov のアイデアは, (B) を次のように修正したものである。

- H_1 を 1 回で消去するような正準変換をベキ展開で構成するのではなく, 逐次的に消去するような正準変換の列を構成する。すなわち $H(p, q) = H_0(p) + H_1(p, q), \|H_1\| < M_0$ を

$$H^1(p, q) = H_0^1(p) + H_1^1(p, q), \quad \|H_1^1\| < M_1 < M_0$$

にするような正準変換 φ^1 を構成し, $\dots, H^s(p, q) = H_0^s(p) + H_1^s(p, q)$ を

$$H^{s+1}(p, q) = H_0^{s+1}(p) + H_1^{s+1}(p, q), \quad \|H_1^{s+1}\| < M_{s+1} < M_s$$

とするような正準変換 φ^{s+1} を構成する (**KAM iteration**)

- 各 step で現れる小分母は, 適当な $N_s \rightarrow \infty$ as $s \rightarrow \infty$ なる N_s を用いて, (4.4) を $\|z\|_1 < N_s$ で打ち切ることで処理する (**小分母の Diophantine 近似**)。もし有限で打ち切らないならば, Cantor 集合上の関数が現れ, 微分操作が不可能になる

Kolmogorov-非退化条件下での 1 回のサイクルを簡単に紹介する。 $\Omega = \partial_p H_0(G)$ とおく。母関数 $P \cdot q + u^1(P, q)$ によって, 目的の正準変換 $(p, q) = \varphi^1(P, Q) = (P + \partial_q u^1(P, q(P, Q)), q(P, Q))$ を構成する。ただし $q(P, Q)$ は $Q = q + \partial_p u^1(P, q)$ の逆写像,

$$u^1(P, q) := \sum_{1 \leq \|z\|_1 < N_1} \frac{i f_z^0(P) e^{iz \cdot q}}{\partial_p H_0(P) \cdot z} \quad (f_z^0(P) : H_1(P, \cdot) \text{ の Fourier 係数}).$$

小分母をコントロールするために, $\Omega_1 := \{\omega \in \Omega; |\omega \cdot z| \geq \gamma \|z\|_1^{-\tau} \text{ for } z \text{ with } 1 \leq \|z\|_1 < N_1\}$ として, $P \in G_1 := (\partial_p H_0)^{-1}(\Omega_1)$ へ制限する。この操作で Kolmogorov-非退化条件が本質的

になる。Rüssmann-非退化条件下ではこの操作ができないので、小分母のコントロールに多大な工夫が必要となる。 $N_1 = \infty$ とすると、 Ω_1, G_1 は Cantor 集合になってしまい、 P に関する微分操作が不可能になる。新しい Hamiltonian は

$$\begin{aligned} H^1(P, Q) &:= H \circ \varphi^1(P, Q) \\ &= H_0(P) + \{ \partial_p H_0(P) \cdot \partial_q u^1(P, q) + H_1(P, q) \}_1 \\ &\quad + \left\{ \frac{1}{2} \partial_p^2 H_0(P + C \partial_q u^1(P, q)) \partial_q u^1(P, q) \cdot \partial_q u^1(P, q) \right\}_2 \\ &\quad + \left\{ \partial_p H_1(P + \tilde{C} \partial_q u^1(P, q), q) \cdot \partial_q u^1(P, q) \right\}_3 \Big|_{q=q(P, Q)} \end{aligned}$$

$H_1(P, Q)$ は定義域を $\| \text{Im } Q \| \leq \exists \rho$ に拡張できてそこで解析関数となるので、 $|f_z^0(P)| \leq M_0 e^{-\rho \|z\|_1}$ となる。まず $\{ \}_1 = f_0^0(P) + R$, $R = [H_1 \text{ の } \|z\|_1 \geq N_1 \text{ の Fourier 成分}]$ となり、 $N_1 = O(\log M_0^{-1})$ のとき $|R| = O(M_0^2)$ である。さらに、Cauchy の積分公式で関数の微分を評価すると、 $|\{ \}_2|, |\{ \}_3| = O(M_0^2)$ を得る。以上より

$$\begin{aligned} H^1(P, Q) &= H_0^1(P) + H_1^1(P, Q) : G_1 \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ H_0^1(P) &= H_0(P) + f_0^0(P), \quad \| H_1^1 \| < M_1 = O(M_0^2). \end{aligned}$$

この操作を $s+1$ 回行うと

$$\begin{aligned} H^{s+1}(P, Q) &= H_0^{s+1}(P) + H_1^{s+1}(P, Q) : G_{s+1} \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}, \\ H_0^{s+1}(P) &= H_0(P) + f_0^0(P) + \dots + f_0^s(P), \quad \| H_1^{s+1} \| < M_{s+1} = O(M_0^{2^{s+1}}). \end{aligned}$$

最後に $s \rightarrow \infty$ の議論を概説する。 $M_{s+1} = O(M_0^{2^{s+1}})$ から分かるように、この逐次近似の収束は Newton 法的に速い。小分母による増大は高々べきで抑えられるので、小分母の問題は解消する。 Ω_s は Ω のある γ, τ -Diophantine 部分集合 Ω^* に収束する。 $\text{mes}[\Omega \setminus \Omega^*] = O(\gamma)$ である。 G_s もある G^* に収束する。 G^* は Cantor 集合 Ω^* を同相写像で引き戻した集合なので、やはり Cantor 集合となり、 $\text{mes}[G \setminus G^*] = O(\gamma)$ と評価できる。 $\Phi^s := \varphi^1 \circ \dots \circ \varphi^s$ は $G^* \times \mathbb{T}^n$ 上である Φ^* に収束する。各 $P_0 \in G^*$ に対して

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow \infty} \phi_{H^s}^t(P_0, Q_0) &= (P_0, \lambda t + Q_0), \quad \lambda := \lim_{s \rightarrow \infty} \partial_P H_0^s(P_0) \in \Omega^*; \\ \phi_H^t(\Phi^*(P_0, Q_0)) &= \lim_{s \rightarrow \infty} \Phi^s(\phi_{H^s}^t(P_0, Q_0)) = \Phi^*(P_0, \lambda t + Q_0); \\ \Phi^*(G^* \times \mathbb{T}^n) &= X_{KAM}, \quad \mathcal{I} := \Phi^*({P_0} \times \mathbb{T}^n) : \text{KAM トーラス}. \end{aligned}$$

Remark $\lim_{s \rightarrow \infty} H^s(P, Q) = \exists h_0(P) : G^* \times \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ となるが、これは微分不可能である。したがって KAM Theorem は、 h_0 の正準方程式から帰結されるのではない。しかし形式的にはそのように見える。

References

- [1] V. I. Arnol'd, Russ. Math. Surv. **18** (1963), No. 5, 9-36.
- [2] V. I. Arnol'd, V. V. Kozlov, A. Neishtadt, Dynamical Systems III, Springer, (1988).
- [3] Ch.-Q. Cheng and Y.-S. Sun, J. Differ. Eqs. **114** (1994), 288-335.
- [4] A. N. Kolmogorov, Dokl. Akad. Nauk SSSR **98** (1954), No. 4, 527-530.
- [5] J. Moser, Nachr. Akad. Wiss. Göttingen. Math-phys. Kl. (1962), 1-20.
- [6] H. Rüssmann, Talk on Mécanique céleste et systèmes hamiltoniens, Marseille, (1990).
- [7] M. B. Sevryuk, J. Dyn. Control. Syst. **1** (1995), 351-366.
- [8] J. Xiu, J. You, and Q. Qiu, Math. Z. **226** (1997), 375-387.

ON THE NAVIER-STOKES EQUATIONS WITH SPATIALLY ALMOST PERIODIC DATA

TSUYOSHI YONEDA

このテクニカルレポートでは主定理に関する証明は省略し、主定理を考える背景に関して細かく説明することにする。(なお、題目には Navier-Stokes 方程式を挙げているが、主定理は Navier-Stokes 方程式の粘性係数を 0 にとぼした場合の Euler 方程式に関するものであることを最初にことわっておく。)

我々が扱う Navier-Stokes 方程式には有名な未解決問題が存在し、それは Clay 財団が「解けたら 100 万ドルの懸賞金を提供する」と宣言した 7 つの未解決問題の一つとしても有名である。(http://www.claymath.org/参照) 我々が今後、徐々に扱っていききたい未解決問題を以下に詳述する。

$$(1) \quad \begin{cases} u_t - \nu \Delta u + (u, \nabla)u + \nabla p = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \quad \nu > 0, \\ \operatorname{div} u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = u_0 = \sum_{m \in \mathbb{Z}^3} c_m e^{i\pi m \cdot x} \in C^\infty(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

という初期値が周期関数の Navier-Stokes 方程式に対して $p, u \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \times [0, \infty))$ となる解 (p, u) の一意存在、または非存在を示せ、というのがその未解決問題である。ちなみに 3 次元であることが重要で、2 次元の場合の「滑らかな大域的一意解の存在」はもう既に示されている。我々は上述の未解決問題を解くこと (より厳密には滑らかな解の大域的一意存在を示すこと) を最終目標としているが、その為にはこの未解決問題の難しい点や攻略出来そうな点などを詳しく調べたり、周期関数 (フーリエ級数) に関する深い洞察を行う必要がある。なお未解決問題は初期関数が周期関数で解ければよいとされているが、我々は初期関数が概周期関数である場合を考えることで周期関数のみを扱うだけでは習得しにくい数学的直観を得て、未解決問題の解決に近づきたいと意図している。例えば周期関数を考えるだけでは「周波数集合」(周期関数の場合は \mathbb{Z}^3 になる) に関する深い洞察はほとんど必要ないが、概周期関数を考える際には「周波数集合」に関する深い洞察が必要となり、この数学的直観は上述の未解決問題に必ず必要になるであろうと思われる「数列の合成積演算」の助けになる。ちなみに滑らかな大域的一意解の非存在 (すなわち、滑らかな一意解の有限時間の爆発) を目指した研究者としては、Sinai の名を挙げるにとどめておく。

難しい問題に挑戦する際にまずは解けそうな問題から考えるのは誰もが認める定石だと思われるが、その為に我々は「コリオリ力付き」の Navier-Stokes 方程式や Euler 方程式を、初期関数が概周期関数である場合の滑らかな大域的一意解の存在を現在は考察していて、そこから上述の未解決問題に対する突破口を開こう、という戦略をとっている。ここでいうコリオリ力とは台風のような地球の自転によって引き起こ

される回転力みたいなものを指す。簡単のために Navier-Stokes 方程式に関する問題設定はここでは省略し、Euler 方程式に関する問題設定のみを以下に記す。(これはまだ主定理ではない。後で紹介する主定理を踏み台にして示したい問題である)

Problem 0.1. $X(\mathbb{R}^3)$ を $C^1(\mathbb{R}^3)$ に含まれる或る適当な関数空間とし、そのノルムを $\|\cdot\|_X$ とする。

$$(2) \quad \begin{cases} u_t + (u, \nabla)u + \Omega e_3 \times u + \nabla p = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^3, \\ \operatorname{div} u = 0, & x \in \mathbb{R}^3, \\ u|_{t=0} = u_0 = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e^{i\lambda \cdot x} \in X(\mathbb{R}^3) \subset C^1(\mathbb{R}^3), \end{cases}$$

(ここで Ω は正定数で \times は外積を表し $\Lambda \subset \mathbb{R}^3$ は高々加算無限集合とする。例えば周期関数の場合は $\Lambda = \mathbb{Z}^3$ となる) に対して任意の $\rho > 0$ と任意の $T' > 0$ に対して或る $\Omega' > 0$ が存在し、任意の $\Omega > \Omega'$ と $\|u_0\|_X \leq \rho$ を満たす任意の $u_0 \in X(\mathbb{R}^3)$ に対して $u \in C([0, T']; X(\mathbb{R}^3))$ となり、かつ $u(x, t) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda(t) e^{i\lambda \cdot x}$, $c_\lambda(0) = c_\lambda$ となることを示せ。(存在時間が Ω の大きさに依存しているが、実際はもっといい形の定理が言える事が予想される)

もし $\Lambda = \mathbb{Z}^3$, すなわち初期関数が周期関数の場合は [1], [2] ですすでに結果が得られている。初期関数が概周期関数になると、初期関数が周期関数の場合よりも飛躍的に難しくなる。何故なら方程式の形から「初期関数が周期関数なら解も周期関数」になることはすぐに言えるが「初期関数が概周期関数なら解も概周期関数」になることはすぐには言えないからである。上述の Problem 0.1 を解く為の第一ステップとして、「初期関数が概周期関数なら解も概周期関数」となることを考察した。(ちなみに今年の2月下旬から私がアリゾナ州立大学に2週間訪問し、そのときに Mahalov 先生たちと Problem 0.1 に関する議論を進める予定である。更に私が訪問している時期に Sinai 先生もアリゾナに来ているとの事なので、「滑らかな解の爆発」の研究に関する見聞も広げたいと思っている) これは何回も言うように「初期関数が周期関数なら解も周期関数」を示すことよりもずっと難しい問題である。ちなみに方程式の解の一意性 (より厳密には初期値に対する連続依存性) が言えているなら、「初期値が概周期関数なら解も概周期関数」は比較的簡単に言える。この場合に関しては例えば [7] を参照のこと。よって我々は解の一意性が言えていない場合というより難しい問題設定のもとで「初期値が概周期関数なら解も概周期関数」であることを示した。

ここで主定理の紹介の前に Euler 方程式に関しての最近の研究について簡単に触れておこう。H. C. Pak と Y. J. Park [12] は解の一意存在を $u_0 \in B_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^d) \subset C^1(\mathbb{R}^d)$ ($d \geq 2$) の関数クラスで導いた。 $C^1(\mathbb{R}^d)$ よりも狭い場合のソボレフ空間上でも沢山の研究が存在するが、ここでは D. Chae の論文 [4] を挙げるにとどめておこう。

二次元に関しての研究も沢山存在するが、ここでは Y. Taniuchi の [13] を挙げるにとどめておこう。[13] では $C^1(\mathbb{R}^2)$ よりも少し広い関数空間で弱解の大域的一意存在を示している。そこでは渦度を上手く使って

有用な評価式を導いて大域解を示している。ちなみにこの関数空間上で「初期関数が概周期関数なら解も概周期関数」になることを谷内先生と修士学生の田代君との共同研究で進めている。上述の関数空間よりも広いところ、すなわち $u_0 \in \tilde{L}_{uloc}^p(\mathbb{R}^2)$ ($p > 2$) に対しては解の存在がかりうじて言えていることが [13] で示されている。なお $\tilde{L}_{uloc}^p(\mathbb{R}^2)$ の定義は後で出てくる。(解の一意性と大域解については今のところは不明) そういう事情を踏まえて我々は $u_0 \in \tilde{L}_{uloc}^p(\mathbb{R}^2)$ で「初期関数が概周期関数なら解も概周期関数」となることを示した。

主定理は以下の通り。

$$(3) \quad \begin{cases} u_t + (u, \nabla)u + \nabla p = 0, & t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^2, \\ \operatorname{div} u = 0, & x \in \mathbb{R}^2, \\ u|_{t=0} = u_0 \in \tilde{L}_{uloc}^p(\mathbb{R}^2), & p > 2, \end{cases}$$

$u = u(t, x)$ は未知関数, $u_0 = u_0(x)$ は与えられた初期関数とし、

$$L_{uloc}^p = \{f \in L_{loc}^1 : \|f : L_{uloc}^p\| := \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \left(\int_{Q_x} |f(y)|^p dy \right)^{1/p} < \infty\},$$

$$\tilde{L}_{uloc}^p = \{u \in L_{uloc}^p :$$

$$\operatorname{div} u = 0, \|u : \tilde{L}_{uloc}^p\| := \|u : L_{uloc}^p\| + \|\operatorname{rot} u : L_{uloc}^p\| < \infty\}$$

とする。(なお $u_0 \in \tilde{L}_{uloc}^p(\mathbb{R}^2)$ なら $u_0 \in C^{1-2/p}(\mathbb{R}^2)$ である) 次に概周期関数に関するソボレフ型関数空間を以下のように定義する。

$$X_p^s := \{f(x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e^{i\lambda x} \in AP(\mathbb{R}^2) :$$

$$\|f : X_p^s\| := \left(\sum_{z \in \mathbb{Z}^2} \left(\sum_{\lambda \in Q_z \cap \Lambda} |\lambda|^s |c_\lambda|^p \right)^{1/p} < \infty\},$$

where $Q_z := \{x \in \mathbb{R}^2 : -\frac{1}{2} \leq x_j - z_j < \frac{1}{2}, \quad j = 1, 2\}$. ここで $AP(\mathbb{R}^2)$ は概周期関数全体を表す。厳密な定義に関しては [5] 参照。ここでは $AP(\mathbb{R}^2) \subset BUC(\mathbb{R}^2)$ であると述べるにとどめておく。更に有限個の基底を持つ概周期関数における関数空間を定義する。ここで $\{r_1, \dots, r_\ell\} \subset \mathbb{R}^2$ を有理数 \mathbb{Q} 上線形独立なものとする。(例えば $\{1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e\}$ は \mathbb{Q} 上線形独立である)

$$X_{p, \{r_1, \dots, r_\ell\}}^s := \{f(x) \in X_p^s : f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^{2\ell}} c_m \exp(i \sum_{j=1}^{\ell} (m_j r_j) \cdot x)\},$$

$$Y_{p, \{r_1, \dots, r_\ell\}}^1 := \{f(x) \in \tilde{L}_{uloc}^{p'} :$$

$$f(x) = \sum_{m \in \mathbb{Z}^{2\ell}} c_m \exp(i \sum_{j=1}^{\ell} (m_j r_j) \cdot x) \quad \text{in Fejer mean}\}.$$

ここでいう Fejer mean とは、フーリエ級数論に出てくる Fejer 和の意味で和が収束する、という意味である。詳しいことは [5] 参照。

Theorem 0.2. 初期関数を $u_0 = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda e^{i\lambda x} \in X_{p, \{r_1, \dots, r_\ell\}}^1 \subset \tilde{L}_{uloc}^p$ とする。すると [13] で示されている方程式 (3) における (今のところ一意かどうか分からない) 弱解の少なくとも一つは

$$u(t, x) = \sum_{\lambda \in \Lambda} c_\lambda(t) e^{i\lambda x} \in Y_{p, \{r_1, \dots, r_\ell\}}^1, \quad c_\lambda(0) = c_\lambda, \quad c_\lambda(t) \in C([0, T])$$

と表される。

REFERENCES

- [1] A. Babin, A. Mahalov and B. Nicolaenko, *Global regularity of the 3D Rotating Navier-Stokes Equations for resonant domains*. Indiana University Mathematics Journal, 48 (1999), 1133-1176.
- [2] A. Babin, A. Mahalov and B. Nicolaenko, *3D Navier-Stokes and Euler equations with initial data characterized by uniformly large vorticity*. Indiana University Mathematics Journal, 50 (2001), 1-35.
- [3] N. K. Bary, *A treatise on trigonometric series. Vols. I, II*. A Pergamon Press Book The Macmillan Co., New York (1964)
- [4] D. Chae, *On the well-posedness of the Euler equations in the Triebel-Lizorkin spaces*. Comm. Pure Appl. Math 55 (2002), 654- 678.
- [5] C. Corduneanu, *Almost Periodic Functions*, Interscience Publishers, New York (1968).
- [6] A. M. Fink, *Almost periodic differential equations*. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 377. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1974.
- [7] Y. Giga, H. Jo, A. Mahalov and T. Yoneda, *On time analyticity of the Navier-Stokes equations in a rotating frame with spatially almost periodic data*. preprint.
- [8] F. Holland, *On the representation of functions as Fourier transforms of unbounded measures*. Proc. London Math. Soc. (3) 30 (1975), 347-365.
- [9] F. Holland, *Harmonic analysis on amalgams of L^p and l^q* . J. London Math. Soc. (2) 10 (1975), 295-305. h. Fluid Mech., 3 (2001), 213-230.
- [10] A. Mahalov and B. Nicolaenko, *Global regularity of the 3D Navier-Stokes Equations with weakly aligned large initial vorticity*. Russian Math. Surveys, 58 (350), (2003), 287-318.
- [11] A. Mahalov, B. Nicolaenko, C. Bardos and F. Golse, *Regularity of Euler equations for a class of three-dimensional initial data*. Special Volume on 'Trends in Partial Differential Equations of Mathematical Physics', Nonlinear Analysis Series, Birkhauser-Verlag, 61 (2004), 161-185.
- [12] H. C. Pak, Y. J. Park, *Existence of solution for the Euler equations in a critical Besov space $\mathbf{B}_{\infty,1}^1(\mathbb{R}^n)$* . Comm. Partial Differential Equations 29 (2004), no. 7-8, 1149-1166.
- [13] Y. Taniuchi, *Uniformly local L^p estimate for 2-D vorticity equation and its application to Euler equations with initial vorticity in bmo*. Comm. Math. Phys. 248 (2004), no. 1, 169-186.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICAL SCIENCES, THE UNIVERSITY OF TOKYO,
3-8-1 KOMABA, MEGURO-KU TOKYO 153-8914, JAPAN
E-mail address: yoneda@ms.u-tokyo.ac.jp

A Characterization of the Gel'fand-Shilov space \mathcal{S}_r^r and $(\mathcal{S}_r^r)'$ by Weyl transform

Yasuyuki Oka
Department of Mathematics,
Sophia University, Tokyo, Japan

Abstract : We will give a characterization of the Gel'fand-Shilov space \mathcal{S}_r^r and its dual space $(\mathcal{S}_r^r)'$ using the Weyl transform.

1 Introduction

The aim of this investigation is to characterize the Gel'fand-Shilov space \mathcal{S}_r^r and $(\mathcal{S}_r^r)'$ on the phase space by means of the Weyl transform. Specifically, we will show the correspondence between the given function space in which the symbol of the Weyl transform belongs and an operator class with some estimate. The Gel'fand-Shilov space was introduced by I. M. Gel'fand and G. E. Shilov in [6] and was characterized via the Fourier transform in [1] and via the Wigner distribution in [2]. The Weyl transform $\tilde{\mathcal{W}}(F)$ with symbol $F \in L^1(\mathbb{R}^{2d})$ is defined by

$$\tilde{\mathcal{W}}(F)\varphi(\xi) = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} F(x, y)[\pi(x, y)\varphi](\xi) dx dy, \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

where $\pi(x, y)$ acts on $\varphi(x)$ as follows: $[\pi(x, y)\varphi](\xi) = e^{i(x \cdot \xi + \frac{1}{2}x \cdot y)}\varphi(\xi + y)$. Note that $\pi(x, y)$ is an irreducible representation of the Heisenberg group at $t = 0$. We call F the symbol function in this paper. Moreover, for $F \in L^1(\mathbb{R}^{2d})$, the matrix elements of the Weyl transform $\tilde{\mathcal{W}}(F)$ is given by

$$(\tilde{\mathcal{W}}(F)f, g) = (2\pi)^{\frac{d}{2}} \iint_{\mathbb{R}^{2d}} F(x, y)V(f, g)(x, y) dx dy, \quad f, g \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

where $V(f, g)(x, y)$ is defined by

$$V(f, g)(x, y) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot p} f(p + \frac{y}{2}) \overline{g(p - \frac{y}{2})} dp.$$

$V(f, g)(x, y)$ is called the Fourier-Wigner transform. The Weyl transform $\tilde{\mathcal{W}}(F)$ has the following properties. If the symbol function F is in $L^1(\mathbb{R}^{2d})$, then $\tilde{\mathcal{W}}(F)$ is in \mathcal{B} , the set of all bounded operators on $L^2(\mathbb{R}^d)$, and if the symbol function F is in $L^2(\mathbb{R}^{2d})$, then $\tilde{\mathcal{W}}(F)$ is in \mathcal{HS} , the set of all Hilbert-Schmidt operators on $L^2(\mathbb{R}^d)$. Then it is natural to ask the following with regard to the Weyl transform $\tilde{\mathcal{W}}(F)$ of the symbol function F : If the symbol function F is given, then in which operator class does $\tilde{\mathcal{W}}(F)$ belong? To this problem, it is known that if the symbol function F is in $L^r(\mathbb{R}^{2d})$ ($1 \leq r \leq 2$), then the Weyl transform $\tilde{\mathcal{W}}(F)$ is in the set \mathcal{C} of compact operators on $L^2(\mathbb{R}^d)$ [14]. Moreover, if the symbol function F is in $L^r(\mathbb{R}^{2d})$ ($2 < r < \infty$), then B. Simon showed that the Weyl transform $\tilde{\mathcal{W}}(F)$ is not always a bounded linear operator on $L^2(\mathbb{R}^d)$ [11]. With regard to the Schwartz class $S(\mathbb{R}^{2d})$, A. Voros showed the Weyl transform of a symbol function in $S(\mathbb{R}^{2d})$ belongs in \mathcal{T} , the set of trace class operators on $L^2(\mathbb{R}^d)$ [13]. Moreover, M. Christ and D. Geller [3] claimed the following theorem:

Theorem 1 (M. Christ and D. Geller [3]) *Let $\tilde{\mathcal{W}}(S(\mathbb{R}^{2d}))$ be the set of all the Weyl transforms with the symbol functions in Schwartz class $S(\mathbb{R}^{2d})$. Then*

$$\tilde{\mathcal{W}}(S(\mathbb{R}^{2d})) = \{R \in \mathcal{B} \mid \forall N, \exists C_N \geq 0 \text{ such that } |(Rh_\alpha, h_\beta)| \leq C_N(|\alpha| + 1)^{-N}(|\beta| + 1)^{-N}\},$$

where h_α, h_β are the Hermite functions.

We obtain the following result by considering \mathcal{S}_r^r instead of \mathcal{S} in Theorem 1:

Theorem 2 Let $\tilde{\mathcal{W}}(\mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^{2d}))$ be the set of all the Weyl transform with the symbol functions in the Gel'fand-Shilov space $\mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^{2d})$. Then

$$\tilde{\mathcal{W}}(\mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^{2d})) = \{R \in \mathcal{B} \mid \exists a, a' \in (0, \infty)^d, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d, \exists C_r \geq 0 \text{ such that } |(Rh_\alpha, h_\beta)| \leq C_r e^{-a|\alpha|^{\frac{1}{2r}}} e^{-a'|\beta|^{\frac{1}{2r}}}\},$$

where h_α, h_β are the Hermite functions.

On the other hand, with regard to the Weyl transform of symbol functions in the space of generalized functions, the following theorem is known.

Theorem 3 (G. B. Folland [5]) The map $\tilde{\mathcal{W}}$ from $L^1(\mathbb{R}^{2d})$ to the space of bounded operators on $L^2(\mathbb{R}^d)$, defined by

$$\tilde{\mathcal{W}}(F)\varphi(\xi) = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} F(x, y)[\pi(x, y)\varphi](\xi) dx dy, \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

extends uniquely to a bijection from $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ to the space of continuous linear maps from $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ to $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Now we considered $(\mathcal{S}_r^r)'$ instead of \mathcal{S}' . Then we obtained the following result:

Theorem 4 The map $\tilde{\mathcal{W}}$ from $L^1(\mathbb{R}^{2d})$ to the space of bounded operators on $L^2(\mathbb{R}^d)$, defined by

$$\tilde{\mathcal{W}}(F)\varphi(\xi) = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} F(x, y)[\pi(x, y)\varphi](\xi) dx dy, \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

extends uniquely to a bijection from $(\mathcal{S}_r^r)'(\mathbb{R}^{2d})$ to the space of continuous linear maps from $\mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^d)$ to $(\mathcal{S}_r^r)'(\mathbb{R}^d)$.

2 The Gel'fand-Shilov space \mathcal{S}_r^r and $(\mathcal{S}_r^r)'$

First of all, we give some notations. We use a multi-index $\alpha \in \mathbb{Z}_+^d$, namely, $\alpha = (\alpha_1 \cdots \alpha_d)$ where $\alpha_i \in \mathbb{Z}$ and $\alpha_i \geq 0$. So, for $x \in \mathbb{R}^d$, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_d^{\alpha_d}$ and $\partial_x^\alpha = \partial_{x_1}^{\alpha_1} \cdots \partial_{x_d}^{\alpha_d}$, where $\partial_{x_j}^{\alpha_j} = (\frac{\partial}{\partial x_j})^{\alpha_j}$. The Fourier transform \mathcal{F} for integrable functions f is defined by

$$\mathcal{F}f(\xi) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} f(x) e^{-ix \cdot \xi} dx.$$

Definition 1 (The Gel'fand-Shilov space \mathcal{S}_r^r [6]) For $r = (r_1, \dots, r_d)$ and $r_i \geq 0$, $1 \leq i \leq d$,

$$\mathcal{S}_{r,A}^{r,B}(\mathbb{R}^d) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \forall \delta \in (0, \infty)^d, \forall \rho \in (0, \infty)^d, \exists C_{\delta\rho} \geq 0 \text{ s.t.}$$

$$|x^k \partial_x^q \varphi(x)| \leq C_{\delta\rho} (A + \delta)^k (B + \rho)^q k^{kr} q^{qr}, \quad \forall k, q \in \mathbb{Z}_+^d\},$$

where $A, B \in (0, \infty)^d$ is given and

$$(A + \delta)^k = (A_1 + \delta_1)^{k_1} \cdots (A_d + \delta_d)^{k_d},$$

$$(B + \rho)^q = (B_1 + \rho_1)^{q_1} \cdots (B_d + \rho_d)^{q_d}.$$

$\mathcal{S}_{r,A}^{r,B}(\mathbb{R}^d)$ is a Fréchet space with the semi-norms

$$\|\phi\|_{\delta\rho} = \sup_{x,k,q} \frac{|x^k \partial_x^q \varphi(x)|}{(A + \delta)^k (B + \rho)^q k^{kr} q^{qr}}, \quad (\delta_i, \rho_i = 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \cdots).$$

The space $\mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^d)$ is defined by

$$\mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^d) = \bigcup_A \bigcup_B \mathcal{S}_{r,A}^{r,B}$$

and the topology of $\mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^d)$ is given by the inductive limit

$$\mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^d) = \varinjlim_{A, B \rightarrow \infty} \mathcal{S}_{r, A}^{r, B}(\mathbb{R}^d).$$

$$\mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^d) = \{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^d) \mid \exists A_\varphi, B_\varphi \in (0, \infty)^d, \exists C_\varphi \geq 0 \text{ s.t.}$$

$$|x^k \partial_x^q \varphi(x)| \leq C_\varphi A^k B^q k^{kr} q^{qr}, \forall k, q \in \mathbb{Z}_+^d\}.$$

It is an interesting consideration to study the correspondence between functional space and sequence space. For example it is well known that $L^2 \cong l^2$ and $\mathcal{S} \cong s$ [10]. Of course, with regard to the Gel'fand-Shilov space \mathcal{S}_r^r , the correspondence between \mathcal{S}_r^r and some sequence space is known by G-Z. Zhang [15]. G-Z. Zhang gave the correspondence between \mathcal{S}_r^r and some sequence space by the Hermite function as follows:

Theorem 5 (G-Z. Zhang [15]) *Let $\phi \in \mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^d)$, $r_j \geq \frac{1}{2}$ ($\forall j$). Then there exist some constants $C \geq 0$ and $L \in (0, \infty)^d$ such that*

$$\phi = \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \langle \phi, h_\alpha \rangle h_\alpha \text{ and } |\langle \phi, h_\alpha \rangle| \leq C \exp(-L|\alpha|^{\frac{1}{2r}}).$$

Conversely, if $|a_\alpha| \leq C \exp(-L|\alpha|^{\frac{1}{2r}})$ for some constants $C \geq 0$ and $L \in (0, \infty)^d$, then the series $\sum_{|\alpha|=0}^{\infty} a_\alpha h_\alpha(x)$ converges to a function in $\mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^d)$, where h_α are the Hermite functions defined by

$$h_\alpha(x) = h_{\alpha_1}(x_1) h_{\alpha_2}(x_2) \cdots h_{\alpha_d}(x_d),$$

$$h_{\alpha_j}(x_j) = (2^{\alpha_j} \alpha_j!)^{-\frac{1}{2}} \pi^{-\frac{1}{4}} (-1)^{\alpha_j} e^{\frac{1}{2} x_j^2} \partial_{x_j}^{\alpha_j} e^{-x_j^2}.$$

As a remark, it is known that $\{h_\alpha\}_{\alpha \in \mathbb{Z}_+^d}$ forms the orthonormal basis for $L^2(\mathbb{R}^d)$.

Theorem 5 plays the important role of our main results in this paper. We denote the dual space of $\mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^d)$ by $(\mathcal{S}_r^r)'(\mathbb{R}^d)$.

3 Main Theorem 1 and Main Theorem 2

Instead of the Schwartz class $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{2d})$ in Theorem 1, we consider the Gel'fand-Shilov space $\mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^{2d})$. Then we obtain the following result.

Main Theorem 1 *Let $\tilde{\mathcal{W}}(\mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^{2d}))$ be the set of all the Weyl transform with the symbol functions in the Gel'fand-Shilov space $\mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^{2d})$. Then*

$$\tilde{\mathcal{W}}(\mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^{2d})) = \{R \in \mathcal{B} \mid \exists a, a' \in (0, \infty)^d, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d, \exists C_r \geq 0 \text{ such that } |(Rh_\alpha, h_\beta)| \leq C_r e^{-a|\alpha|^{\frac{1}{2r}}} e^{-a'|\beta|^{\frac{1}{2r}}}\},$$

where h_α, h_β are the Hermite functions.

We remark that we use Theorem 5 [15] to prove Main Theorem 1, so we can deal only with $\mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^{2d})$. For the proof of Main result, we recall the following lemma with regard to the Hilbert-Schmidt operators.

Lemma 1 ([9]) *$A \in \mathcal{HS}$ if and only if $\{\|A\varphi_n\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}\} \in l^2$ for some orthonormal basis $\{\varphi_n\}$ on $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

Proof of Main Theorem 1: We denote by \mathcal{G} the operator class $\{R \in \mathcal{B} \mid \exists a, a' \in (0, \infty)^d, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^d, \exists C_r \geq 0 \text{ such that } |(Rh_\alpha, h_\beta)| \leq C_r e^{-a|\alpha|^{\frac{1}{2r}}} e^{-a'|\beta|^{\frac{1}{2r}}}\}$. Suppose $F \in \mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^{2d})$. By the integral kernel

K of the Weyl transform $\tilde{\mathcal{W}}(F)$ and Proposition 1 (iii), it is apparent that $F \in \mathcal{S}'_r(\mathbb{R}^{2d})$ if and only if $K \in \mathcal{S}'_r(\mathbb{R}^{2d})$. Therefore, by Theorem 5 and Fubini's Theorem, we obtain

$$\begin{aligned} |(\tilde{\mathcal{W}}(F)h_\alpha, h_\beta)| &= \left| \left(\int_{\mathbb{R}^d} K(p, p') h_\alpha(p') dp', h_\beta(p) \right) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} K(p, p') h_\alpha(p') h_\beta(p) dp dp' \right| \\ &= |\langle K, h_\alpha h_\beta \rangle| \leq C_r e^{-a|\alpha|^{\frac{1}{2r}}} e^{-a'|\beta|^{\frac{1}{2r}}}. \end{aligned}$$

Hence $\tilde{\mathcal{W}}(F) \in \mathcal{G}$. Conversely, suppose $R_1 \in \mathcal{G}$. Then

$$\begin{aligned} \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \|R_1 h_\alpha\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}^2 &= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} (R_1 h_\alpha, R_1 h_\alpha) \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=0}^{\infty} (R_1 h_\alpha, h_\beta) (h_\beta, R_1 h_\alpha) \\ &= \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=0}^{\infty} |(R_1 h_\alpha, h_\beta)|^2 \\ &\leq C \sum_{|\alpha|=0}^{\infty} \sum_{|\beta|=0}^{\infty} e^{-2a|\alpha|^{\frac{1}{2r}}} e^{-2a'|\beta|^{\frac{1}{2r}}} < \infty. \end{aligned}$$

By Lemma 1, R_1 is in \mathcal{HS} and so there exists a function $K \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ with

$$(R_1 \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} K(x, y) \varphi(y) dy.$$

Thus, we were able to show that there exists $G \in L^2(\mathbb{R}^{2d})$ such that $\tilde{\mathcal{W}}(G) = R_1$. Therefore, we obtain

$$|(\tilde{\mathcal{W}}(G)h_\alpha, h_\beta)| e^{a|\alpha|^{\frac{1}{2r}}} e^{a'|\beta|^{\frac{1}{2r}}} = |\langle K, h_\alpha h_\beta \rangle| e^{a|\alpha|^{\frac{1}{2r}}} e^{a'|\beta|^{\frac{1}{2r}}} \leq C_r,$$

which immediately give us the estimate

$$|\langle K, h_\alpha h_\beta \rangle| \leq C_r e^{-a|\alpha|^{\frac{1}{2r}}} e^{-a'|\beta|^{\frac{1}{2r}}}.$$

Finally, by Theorem 5, we find that K is in $\mathcal{S}'_r(\mathbb{R}^{2d})$, and so is G \square

We consider the case of generalized functions. For symbol functions in the space \mathcal{S}' of tempered distributions, we find the following result in [5].

Theorem 6 ([5]) *The map $\tilde{\mathcal{W}}$ from $L^1(\mathbb{R}^{2d})$ to the space of bounded operators on $L^2(\mathbb{R}^d)$, defined by*

$$\tilde{\mathcal{W}}(F)\varphi(\xi) = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} F(x, y) [\pi(x, y)\varphi](\xi) dx dy, \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

extends uniquely to a bijection from $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$ to the space of continuous linear maps from $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ to $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$.

Hence, for $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2d})$, we can define the Weyl transform $\tilde{\mathcal{W}}(T)$ by

$$\langle \tilde{\mathcal{W}}(T)\varphi, \psi \rangle = \langle T, V(\varphi, \bar{\psi}) \rangle, \quad (\varphi, \psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)),$$

where $V(f, g)$ is called the Fourier-Wigner transform defined by

$$V(f, g) = (2\pi)^{-\frac{d}{2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix \cdot p} f\left(p + \frac{y}{2}\right) \overline{g\left(p - \frac{y}{2}\right)} dp.$$

As an analogue to Theorem 6, we have the following result for $(\mathcal{S}'_r)'$.

Main Theorem 2 The map \tilde{W} from $L^1(\mathbb{R}^{2d})$ to the space of bounded operators on $L^2(\mathbb{R}^d)$, defined by

$$\tilde{W}(F)\varphi(\xi) = \iint_{\mathbb{R}^{2d}} F(x, y)[\pi(x, y)\varphi](\xi) dx dy, \quad \varphi \in L^2(\mathbb{R}^d),$$

extends uniquely to a bijection from $(\mathcal{S}_r^r)'(\mathbb{R}^{2d})$ to the space of continuous linear maps from $\mathcal{S}_r^r(\mathbb{R}^d)$ to $(\mathcal{S}_r^r)'(\mathbb{R}^d)$.

We can prove Main Theorem 2 by using the Schwartz kernel theorem for $(\mathcal{S}_r^r)'$ [8].

Acknowledgement

The author is thankful to Prof. Kunio Yoshino, Prof. Joachim Toft and Prof. Soon-Yeong Chung for their very helpful suggestions and remarks.

References

- [1] J. Chung, S. -Y. Chung and D. Kim, *Characterizations of the Gel'fand-Shilov spaces via Fourier transforms*, Proc. A. M. S. Vol. 124, No.7 (1996), 2101-2108.
- [2] J. Cho, *A characterization of Gelfand-Shilov space based on Wigner Distribution*, Comm. Korean Math. Soc. 14 (1999), No. 4, 761-767.
- [3] M. Christ and D. Geller, *Singular integral characterizations of Hardy spaces on homogeneous groups*, Duke Math. J. 51 (1984), 547-598.
- [4] J. Du and M. W. Wong, *A Product Formula for Localization operators*, Bull. Korean Math. Soc. 37, No. 1 (2000), 77-84.
- [5] G. B. Folland, *Harmonic Analysis in Phase Space*, Princeton University Press (1989).
- [6] I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Generalized Functions Vol.2*, Academic press, 1958.
- [7] S. Nagamachi and N. Mugibayashi, *Hyperfunction Quantum Field Theory*, Commun. math. Phys. 46 (1976), 119-134.
- [8] Y. Oka, *The Schwartz Kernel Theorem for the Generalized functions $(\mathcal{S}_r^r)'$* , preprint.
- [9] M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics I : Functional Analysis*, Academic Press.
- [10] B. Simon, *Distributions and Their Hermite Expansions*, J. Math. Phys. vol. 12.No. 1, (1971), 140-148.
- [11] B. Simon, *The Weyl transform and L^p functions on phase space*, Proc. Amer. Math. Soc. 116 (1992), 1045-1047.
- [12] G. Szegö, *Orthogonal Polynomials*, American Mathematical Society, New York, (1959).
- [13] A. Voros, *An Algebra of Pseudodifferential Operators and the Asymptotics of Quantum Mechanics*, J. Funct. Anal. 29 (1978), 104-132.
- [14] M. W. Wong, *Weyl transforms*, Springer-Verlag (1998).
- [15] G-Z. Zhang, *Theory of Distributions of S Type and Pansions*, Chinese Math. Acta. 4 (1963), 211-221.

Yasuyuki Oka
 Department of Mathematics
 Sophia University
 7-1 Kioicho, Chiyoda-ku, Tokyo 102-8554
 Japan
 e-mail address: yasuyu-o@hoffman.cc.sophia.ac.jp

野海山田系方程式NY奇数系の第2種変わり点について

梅田陽子 (北海道大学理学院)

1 序文

野海山田系方程式 NY_l は大きなパラメーター η^{-1} をもつ非線形常微分方程式である。 NY_l は一つのパンルベ階層で、付随する Lax pair は高階の線形方程式となる。非線形方程式 NY_l のストークス幾何を決定することは、WKB 解析の重要な問題として近年精力的に研究されている。 NY_l の構造は l の偶奇によって形が異なる。 NY 奇数系は $l+1$ 本の式と 2 本の正規化条件式からなり次で与えられる ($l = 2m+1$):

$$\begin{aligned} \prod_j &= \sum_{1 \leq r \leq s \leq m} u_{j+2r-1} u_{j+2s} - \sum_{1 \leq s \leq q \leq m} u_{j+2s} u_{j+2q+1} \text{ と置くと、} \\ \eta^{-1} \frac{t}{2} \frac{du_j}{dt} &= \begin{cases} u_j (\prod_j + \frac{1}{2} \eta^{-1} - \alpha_{\text{even}}) + \frac{1}{2} \alpha_j t, & j = 0, 2, \dots, 2m, \\ u_j (\prod_j + \frac{1}{2} \eta^{-1} - \alpha_{\text{odd}}) + \frac{1}{2} \alpha_j t, & j = 1, 3, \dots, 2m+1. \end{cases} \end{aligned} \quad (1)$$

ここで、 $\alpha_{\text{even}} = \alpha_0 + \alpha_2 + \dots + \alpha_{2m}$, $\alpha_{\text{odd}} = \alpha_1 + \alpha_3 + \dots + \alpha_{2m+1}$ であり、次の関係

$$\alpha_0 + \alpha_1 + \dots + \alpha_{2m+1} = \eta^{-1}$$

を満たす。正規化条件式は、

$$u_0 + u_2 + \dots + u_{2m} = \frac{t}{2}, \quad u_1 + u_3 + \dots + u_{2m+1} = \frac{t}{2}$$

である。

NY_l のストークス幾何は、 NY_l の 0-パラメーター解と呼ばれる η^{-1} の形式冪級数解の主部が満たす代数方程式によって定義される代数多様体上に展開される。この代数多様体は正規化条件式と、次の f_j によって与えられる代数方程式系を解かなければいけない。

$$f_j = \begin{cases} u_j (\prod_j - \alpha_{\text{even}}) + \frac{1}{2} \alpha_j t, & j = 0, 2, \dots, 2m, \\ u_j (\prod_j - \alpha_{\text{odd}}) + \frac{1}{2} \alpha_j t, & j = 1, 3, \dots, 2m+1. \end{cases} \quad (2)$$

この代数多様体に付随するイデアル \mathcal{I} と $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_u^{2m+2}}$ 加群 \mathcal{N} をそれぞれ、

$$\mathcal{I} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_u^{2m+2}}(f_0, f_1, \dots, f_{2m+1}, u_{\text{even}} - \frac{t}{2}, u_{\text{odd}} - \frac{t}{2}),$$

$$\mathcal{N} = \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_u^{2m+2}}}{\mathcal{I}}$$

で定義し、解析的閉集合 $V_\alpha \subset \mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_u^{2m+2}$ をイデアル \mathcal{I} で定まる共通零点集合とする。 $\{f_0, \dots, f_{2m+1}\}$ に関する次の特性方程式

$$\Lambda(\lambda, u) = \det(J_u(f_0, f_1, \dots, f_{2m+1}) - \lambda I_{2m+2})$$

を考えたとき、 $\Lambda(\lambda, u) = (\lambda^2 - \alpha_{\text{even}}^2) \check{\Lambda}_{\text{odd}}(\lambda, u)$ なる形をしていることがわかってい (cf.[T])。 NY_l の変わり点は2種類ある。第1種変わり点は、 $\check{\Lambda}_{\text{odd}}(0, u) = 0$ となる V_α 上の点で、第2種変わり点は $\check{\Lambda}_{\text{odd}}(\lambda, u)$ の λ に関する判別式の零点である。 V_α 上の形式解は $\check{\Lambda}_{\text{odd}}(0, u)$ が消えていない V_α 上の点で構成できるので、変わり点は NY_l のストークス幾何を記述する上で重要な役割を与えている。

変わり点の個数に関する研究は、上記の代数方程式が有限個の解を有することは l が低い次数の場合 [T] により具体的に確かめられ、[AH1] によって一般の場合に示されている。今回代数多様体を調べることにより、第2種変わり点の個数を求めることができた。この発表では、特に l が奇数の場合、つまり NY 奇数系について求めた結果を紹介させていただく。 NY 奇数系と NY 偶数系では大きな違いがある。1つは方程式の未知変数に関する次数が異なり NY 奇数系は大変複雑な連立方程式系になっているという事である。もう1点は奇数系では $\{t = 0\}$ が非線形常微分方程式系の特異点となっている事である。従って奇数系のときは偶数系と異なり、 $t \neq 0$ で考えなければならない。変わり点の個数を求めるには、 $\{t = 0\}$ と無限遠にある零点の詳細な分布を解析する必要がある。この研究は本多尚文先生、青木貴文先生との共同研究です。

2 問題を解く出発点

NY 奇数系は $t \neq 0$ で考えなければいけないので、開集合 $U_u \subset \mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_u^{2m+2}$ を $\{(t, u) \in \mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_u^{2m+2}; t \neq 0\}$ で定義する。方程式 f_j は、ある変換によって $g_k = \frac{1}{4}(\xi_{k+1}^2 - \xi_k^2) + \alpha_k$ という双曲型の式に帰着できる。開集合 $U_{t,\xi} \subset \mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_\xi^{2m+2}$ を $\{(t, \xi) \in \mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_{2m+2}; t \neq 0\}$ で定義し、次の写像を考える。
 $U_{t,\xi} \subset \mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_\xi^{2m+2}$ から $U_u \subset \mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_u^{2m+2}$ への解析的写像 $\Psi : U_{t,\xi} \rightarrow U_u$

$$(t; u_0, u_1, \dots, u_{2m+1}) = \Psi(t; \xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{2m+1})$$

$$= \left(t; \frac{\xi_0 + \xi_1}{2}, \dots, \frac{\xi_k + \xi_{k+1}}{2}, \dots, \frac{\xi_{2m+1} + \xi_0}{2} \right).$$

写像 Ψ は $U_{t,\xi}$ と U_u の同型写像でない事に注意する。しかし次のことが証明できる。[AH2]

U_u の閉部分多様体を、 $W_u = \{(t, u) \in U_u; u_{\text{even}} = \frac{t}{2}, u_{\text{odd}} = \frac{t}{2}\}$ と定義し、 $U_{t,\xi}$ の閉部分多様体を、 $W_{t,\xi} = \{(t, \xi) \in U_{t,\xi}; \xi_{\text{total}} - t = 0, \tau(\xi) - 4\alpha_{\text{even}} = 0\}$ (ここで、 $\tau(\xi) = \sum_{0 \leq k \leq m} \xi_{2k}^2 - \sum_{0 \leq k \leq m} \xi_{2k+1}^2$) と置くと、 $W_u \stackrel{\Psi}{\cong} W_{t,\xi}$ である。さらに $\Psi^*(h)(t, \xi) = h(\Psi(t, \xi))$ (Ψ^* を、 U_u 上の関数 $h(t, u)$ の $U_{t,\xi}$ 上への引き戻し) とすると、 $W_{t,\xi}$ 上 $\Psi^*(f_k) = \frac{t}{2}g_k$ となる。イデアル $\mathcal{I}_{t,\xi}$ と $\mathcal{O}_{\mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_\xi^{2m+2}}$ 加群 $\mathcal{N}_{t,\xi}$ を、

$$\mathcal{I}_{t,\xi} = \mathcal{O}_{\mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_\xi^{2m+2}}(g_0, g_1, \dots, g_{2m+1}, \xi_{\text{total}} - t),$$

$$\mathcal{N}_{t,\xi} = \frac{\mathcal{O}_{\mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_\xi^{2m+2}}}{\mathcal{I}_{t,\xi}}$$

で定義し、解析的閉集合 $V_{t,\xi} \subset \mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_\xi^{2m+2}$ をイデアル $\mathcal{I}_{t,\xi}$ で定まる共通零点集合とすると、次の定理が成立する。

定理. 零点集合 $V_\alpha \cap U_u$ と $V_{t,\xi} \cap U_{t,\xi}$ は解析的集合として同型であり、 Ψ^* は $\pi^{-1}\mathcal{O}_{\mathbb{C}_t}$ 加群としての同型

$$\Psi^{-1}\mathcal{N}|_{W_{t,\xi}} \stackrel{\Psi^*}{\cong} \mathcal{N}_{t,\xi}|_{W_{t,\xi}}$$

を与える。但し、 $\pi : \mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_\xi^{2m+2} \rightarrow \mathbb{C}_t$ は t 変数に関する標準射影とする。 \square

定理. $W_{t,\xi}$ 上次のことが成立する。

$$\Psi^*(\Lambda)(\lambda, \xi) = \frac{(\lambda^2 - \alpha_{\text{even}}^2)}{t^2\lambda}(\Lambda^+(\lambda, \xi) - \Lambda^-(\lambda, \xi)),$$

$$\Lambda^+(\lambda, \xi) = \prod_{0 \leq i \leq 2m+1} \left(\lambda + \frac{t\xi_i}{2}\right), \quad \Lambda^-(\lambda, \xi) = \prod_{0 \leq i \leq 2m+1} \left(\lambda - \frac{t\xi_i}{2}\right).$$

\square

従って、2つの定理から第2種変わり点の個数を求めるには、

$$C(\lambda, \xi) = \frac{1}{t^2\lambda}(\Lambda^+(\lambda, \xi) - \Lambda^-(\lambda, \xi))$$

とおき、 ξ 平面で、 $C(\lambda, \xi)$ の判別式の零点について考えればよい。 C の判別式の零点は第1種変わり点も含むので $C(\sqrt{\lambda}, \xi)$ の判別式の零点を考える。

$$C(\sqrt{\lambda}, \xi) = \frac{1}{t^2\sqrt{\lambda}} \left(\prod_{0 \leq i \leq 2m+1} \left(\sqrt{\lambda} + \frac{t\xi_i}{2}\right) - \prod_{0 \leq i \leq 2m+1} \left(\sqrt{\lambda} - \frac{t\xi_i}{2}\right) \right).$$

さらに、簡単のため 2^{2m} をかけて、 4λ を λ とおきなおした次のものを $\hat{C}(\lambda, \xi)$ とし、この式の判別式の零点の個数を調べればよいことがわかる。

$$\hat{C}(\lambda, \xi) = \frac{1}{2t^2\sqrt{\lambda}} \left(\prod_{0 \leq i \leq 2m+1} (\sqrt{\lambda} + t\xi_i) - \prod_{0 \leq i \leq 2m+1} (\sqrt{\lambda} - t\xi_i) \right).$$

3 問題の解決方法

第2種変わり点の個数を求めるために、斉次座標 $(t, \xi_0, \dots, \xi_{2m+1}; \eta)$ を持つ射影空間 $\mathbb{P}_{t,\xi}^{2m+3}$ を考え、空間 $\mathbb{C}_t \times \mathbb{C}_\xi^{2m+2}$ を $\{\eta \neq 0\}$ と同一視する。斉次多項式 g_k と ξ_{total} をそれぞれ、

$$g_k = \frac{1}{4}(\xi_{k+1}^2 - \xi_k^2) + \alpha_k \eta^2 \quad (k = 0, 1, \dots, 2m+1),$$

$$\xi_{total} = \xi_0 + \xi_1 + \dots + \xi_{2m+1}$$

とおく。添字は常に $\text{mod}(2m+2)$ で考えるものとする。この g_k によって定義される零点集合を $\check{V}_{t,\xi} \subset \mathbb{P}_{t,\xi}^{2m+3}$ とする。

$$\check{V}_{t,\xi} = \{g_0 = 0, g_1 = 0, \dots, g_{2m+1} = 0, \xi_{total} = t\}.$$

一方、斉次座標 $(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{2m+1}; \eta)$ を持つ射影空間 \mathbb{P}_ξ^{2m+2} を考え、空間 \mathbb{C}_ξ^{2m+2} を、空間 $\{\eta \neq 0\}$ と同一視する。また、次の零点集合を $Z_\xi \subset \mathbb{P}_\xi^{2m+2}$ とする。

$$Z_\xi = \{g_0 = 0, g_1 = 0, \dots, g_{2m+1} = 0\}.$$

次に、 $H_{t,\xi}$ を、 $\xi_{total} - t = 0$ で定義される $\mathbb{P}_{t,\xi}^{2m+3}$ の超平面とする。また \mathbb{P}_ξ^{2m+2} の2つの超平面をそれぞれ

$$H_0 = \{(\xi; \eta) \in \mathbb{P}_\xi^{l+1} | \xi_{total} = 0\}, \quad H_\infty = \{(\xi; \eta) \in \mathbb{P}_\xi^{l+1} | \eta = 0\}$$

で定義する。次の写像

$$\iota : \mathbb{P}_\xi^{2m+2} \rightarrow H_{t,\xi} \subset \mathbb{P}_{t,\xi}^{2m+3}$$

$$(\xi; \eta) \mapsto (\xi_{total}, \xi; \eta)$$

によって、 $\check{V}_{t,\xi} \setminus \{t = 0\}$ と $Z_\xi \setminus H_0$ が同型となる。 $\hat{C}(\lambda, \xi)$ の判別式 $\hat{D}(\xi)$ は ξ の斉次多項式だから、そのままの形で \mathbb{P}_ξ^{2m+2} 上の因子と考える。 $\eta = 1$ 上では、因子 $\hat{D}(\xi)$ は、もとの求めたい判別式と一致する。次にパラメーター空間を、

$$P = \{(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_{2m+1}) \in \mathbb{C}^{2m+2}; \alpha_0 + \dots + \alpha_{2m+1} = 0\}$$

と置く。 $i, k \geq 0$ に対して $\alpha(i; k) = \alpha_i + \alpha_{i+1} + \dots + \alpha_{i+k}$ と定める。

$$E_i^l = \{(\alpha_0, \dots, \alpha_l) \in P; \alpha(i; 0)\alpha(i; 1) \cdots \alpha(i; l-1) = 0\},$$

$$E_{cup}^l = \bigcup_{0 \leq i \leq l} E_i^l,$$

$$E_{cap}^l = \bigcap_{0 \leq i \leq l} E_i^l$$

と置く。この時、[AH2] で、 $\alpha \in P \setminus E_{cup}^l$ ならば Z_ξ は smooth な連結多様体であることが証明されている。よって Z_ξ は既約である。また、 $\hat{D}(\xi)$ が Z_ξ 上恒等的に零となる連結成分を持たないことが証明されているので、バズーの定理から $\hat{D}(\xi)$ の全零点数が判る。したがって、第2種変わり点の個数を求めるためには、 $(Z_\xi \cap H_\infty) \setminus H_0$, $Z_\xi \cap H_\infty \cap H_0$, $(Z_\xi \setminus H_\infty) \cap H_0$ 上での $\hat{D}(\xi)$ の零点の個数をそれぞれ求め、全体から総数を引けばよい。

4 第2種変わり点の個数

3章で述べた方法により、次の補題と3つの定理から第2種変わり点の個数を求めることができる。

補題 1. $v^*\hat{C}(\lambda, \xi)$ の判別式 $\hat{D}(\xi)$ は、 ξ の $4m(m-1)$ 次斉次多項式である。

定理 1. パラメーター α は P 上の点とする。また、 $p \in (Z_\xi \cap H_\infty) \setminus H_0$ とし、 $l(p) > 1$ とする。この時、 Z_ξ に制限した因子 $\hat{D}(\xi)$ の点 p における零点の位数は $4 \times l(p)C_2$ 以上である。また *generic* なパラメーター α に対してはちょうど $4 \times l(p)C_2$ と一致する。

定理 2. パラメーター α は $P \setminus E_{cup}$ 上の点とする。また、 $p \in (Z_\xi \cap H_0) \setminus H_\infty$ とする。この時、 Z_ξ に制限した因子 $\hat{D}(\xi)$ の点 p における零点の位数は、 $2 \text{mult}_p(Z_\xi, H_0)(m-1)^2$ 以上の零点をもつ。また *generic* なパラメーターに対しては、零点の位数がちょうど $2(m-1)^2$ と一致する。

定理 3. パラメーター α は $P \setminus E_{cup}$ 上の点とする。また、 $p \in Z_\xi \cap H_\infty \cap H_0$ とする。この時、 Z_ξ に制限した因子 $\hat{D}(\xi)$ の点 p における零点の位数は、
 $d(p) = \frac{1}{2} \text{mult}_p(Z_\xi, H_0) - 1$ とおくと、 $6m(m-1) + 2(2m^2 - 4m + 1 + d(p))d(p)$ 以上である。また *generic* なパラメーター α に対してはちょうど $6m(m-1)$ と一致する。

主定理 1. 第2種変わり点の個数

パラメーター α は $P \setminus E_{cup}$ 上の点とする。この時 第2種変わり点の個数は、

$$2 \left((3m^2 + 5m + 4) {}_{2m}C_{m-1} + (m^2 + 2m + 3) {}_{2m}C_m - 3(m+1)2^{2m} \right)$$

個以下である。またパラメーター空間 P に余次元1以上のある解析的集合 E が存在し、 $\alpha \notin E$ であれば等号が成立する。

参考文献

- [AH1] T. Aoki, N. Honda, 野海・山田系に付随する代数方程式系について, RIMS Kôkyûroku, No.1516,(2006), 1-8
- [AH2] T. Aoki and N. Honda, On the geometric properties of the algebraic equations associated with the Noumi-Yamada system, in preparation.
- [T] Y. Takei, Toward the exact WKB analysis for higher-order Painlevé equations - The case of Noumi-Yamada Systems -, Publ.RIMS, Kyoto Univ., 40(2004), 709-730.

CLASSIFICATION OF NON-SYMPLECTIC AUTOMORPHISMS OF ORDER 3 ON $K3$ SURFACES

瀧 真語

ABSTRACT. 代数的な $K3$ 曲面の non-symplectic な位数 3 の自己同型について考察する. 特に固定点集合を 3-elementary 格子の不変量で特徴付ける.

CONTENTS

1. はじめに	1
2. 格子	2
3. 自己同型と固定点集合	2
4. 例	3
References	4

1. はじめに

今回は代数的な $K3$ 曲面上の位数が 3 である non-symplectic な自己同型について考察する. つまり X を \mathbb{C} 上の代数的な $K3$ 曲面, ω_X を至る所で消えない正則 2 形式とし, ζ を 1 の原始 3 乗根としたとき, X の自己同型 φ が $\varphi^*\omega_X = \zeta\omega_X$ を満たすときである. 特にこのような自己同型で Néron-Severi 格子 S_X に自明に作用するものが研究対象である.

「 $K3$ 曲面の研究と言えば格子の研究と言っても過言ではない」というような事を何かで読んだ覚えがあるが, 今回の話でも格子の話は沢山出てくる. 実際, 位数 2 のときは V.V. Nikulin [Ni2] によって 2-elementary 格子の不変量を用いて, その自己同型の固定点集合を特徴付けることができた. そこで今回は 3-elementary 格子を用いる.

なお $K3$ 曲面の細かい話や突っ込んだ話は [BHPV] や [Be] を見てもらいたい. ($K3$ 曲面に関してはフランス語だが [Be] の方が良いような気がする.)

Date: January 8, 2008.

2. 格子

以下 U は \mathbb{Z}^2 とその上の行列 $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ によって定義される双線型形式との組で定まる格子とし, A_m や E_n で A_m, E_n 型の Dynkin 図形から定まる負定値な偶格子をあらわす. また格子 L と整数 m に対し, $L(m)$ で L の双線型形式を m 倍した格子を表す.

さて, 今回の主役は次のような格子である.

Definition 2.1. L を非退化な格子とし, $L^* = \text{Hom}(L, \mathbb{Z})$ とする. 素数 p に対し, $L^*/L \simeq (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^s$ が成り立つとき, L を p -elementary 格子という.

一般に S_X に自明に作用する位数 p の non-symplectic な自己同型が存在するとき, S_X は p -elementary 格子になることが知られている. ([Vo], [Kon1])

今回は位数 3 の自己同型を考えているので 3-elementary 格子が大事になる. 心強いことに $p(\neq 2)$ -elementary 格子は A.N. Rudakov と I.R. Shafarevich [RS] によって分類されている.

Theorem 2.2 (Rudakov and Shafarevich). $p \neq 2, n \geq 2$ とする. rank n の不定値 p -elementary 偶格子は s によって一意的に定まる.

今 X は代数的なので, Hodge の指数定理から Néron-Severi 格子の符号は $(1, \text{rank } S_X - 1)$ である. つまりこの定理を用いることで必要な Néron-Severi 格子を全部書き出すことが可能となる. 得られた分類表を見ると, 今回扱うべき $K3$ 曲面はすべて楕円曲面の構造を持つことが分かる. 実際に主定理 (Theorem 3.2) を証明するとき, 楕円曲面の特異ファイバーの分類 ([Kod]) が大事になる.

3. 自己同型と固定点集合

まず固定点集合上での φ のふるまいを見ておく.

Lemma 3.1.

- (1) P を φ による X の孤立固定点とする. このとき P での局所座標を取ると, φ^* は $\begin{pmatrix} \zeta^2 & 0 \\ 0 & \zeta^2 \end{pmatrix}$ と書ける.
- (2) C を既約固定曲線とし, Q を C の点とする. このとき Q での局所座標を取ると, φ^* は $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \zeta \end{pmatrix}$ と書ける.

この補題によって X の φ による固定点集合を既約分解すると, 孤立点と非特異曲線の直和であることがわかる. これらの個数や主数を格子の言葉で特徴付けることができる. 実際に次が成り立つ.

Theorem 3.2. S_X を Néron-Severi 格子, ρ を X の Picard 数とし, s を S_X^*/S_X の極小生成元の数とする. このとき次が成り立つ.

- (1) $22 - \rho - 2s < 0$ ならば X は位数 3 の non-symplectic で S_X に自明に作用する自己同型を持たない.
- (2) $22 - \rho - 2s \geq 0$ ならば X は位数 3 の non-symplectic で S_X に自明に作用する自己同型を持つ. さらに固定点集合 $X^\varphi := \{x \in X \mid \varphi(x) = x\}$ は次の型になる.

$$X^\varphi = \begin{cases} \{P_1\} \amalg \{P_2\} \amalg \{P_3\} \amalg C^{(1)} & \text{if } S_X = U(3) \oplus E_6^*(3) \\ \{P_1\} \amalg \cdots \amalg \{P_M\} \amalg C^{(g)} \amalg E_1 \amalg \cdots \amalg E_{N-1} & \text{otherwise} \end{cases}$$

ここで, P_i は孤立点, $C^{(g)}$ は種数 g の非特異曲線, E_j は非特異有理曲線である. そして $M = \rho/2 - 1$, $g = (22 - \rho - 2s)/4$, $N = (6 + \rho - 2s)/4$ となる.

さらに $22 - \rho - 2s \geq 0$ であれば位数 3 の non-symplectic で S_X に自明に作用する自己同型を持つ $K3$ 曲面の具体例を構成することができる.

定理の (2) の証明において用いるテクニックは楕円曲面の特異ファイバーの分類, Lefschetz の定理 (正則なもの位相的なもの), Hurwitz の公式である. これらによって S_X ごとにケース・バイ・ケースで種数や曲線の数をカウントしていく.

なお, (1) に関しては格子の言葉を用いて示すことができる.

4. 例

一つ例を示しておく.

Example 4.1 ([Kon2]). C を種数 4 の非超楕円曲線とする. \mathbb{P}^3 内で考えれば, C は既約 2 次曲面 Q と既約 3 次曲面 S の完全交叉であることに注意する. そこで X を C で分岐する Q の三重被覆とする. このとき X は $K3$ 曲面であり, C を固定する位数 3 の自己同型 φ を持つ. φ が C を固定することから, $H^0(X, \Omega_X^2)$ への作用は 1 の原始 3 乗根 ζ 倍であることがわかる ([Ni1]). つまり φ は non-symplectic である.

さて, E を Q の一つの罫 (ruling) の一般ファイバーの逆像とする. F も同様に他の罫から得られるものとする. このとき E と F は楕円曲線となり, どの交点数 $E \cdot F$ は 3 である. そしてこれらが X の Néron-Severi 格子を生成することがわかる. すなわち $S_X = U(3)$ である.

$U(3)$ には (-2) ベクトルが含まれていないので X は有理曲線を持たない. つまり固定点集合にも有理曲線は含まれない. さらに Lefschetz の定理から固定点集合のオイラー数は -6 であることがわかるが, これは C のオイラー数と一致する. これは固定点集合に孤立点が含まれていないことを意味する.

以上によって, $X^\varphi = C^{(4)}$ である.

たき しんご

C に結節点を持たせることで別の具体例を作ることができる。結節点の数によって固定点集合も Néron-Severi 格子も異なる。

REFERENCES

- [BHPV] W. Barth, K. Hulek, C. Peters, A. Van de Ven, *Compact Complex Surfaces. Second Enlarged Edition*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3.Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, **4**, Springer, 2004.
- [Be] A. Beauville et al, *Géométrie des surfaces $K3$: Modules et périodes*, Astérisque, **126**, (1985).
- [Kod] K. Kodaira, On compact analytic surface II, III, Ann. of Math., **77** (1963), 563–626; **78** (1963), 1–40.
- [Kon1] S. Kondo, Automorphisms of algebraic $K3$ surfaces which act trivially on Picard groups, J. Math. Soc. Japan, **44** (1992), 75–98.
- [Kon2] S. Kondo, The moduli space of curves of genus 4 and Deligne-Mostow's complex reflection groups, Advanced Studies in Pure Mathematics, **36** (2002), Algebraic Geometry 2000, Azumino, 383–400.
- [Ni1] V.V. Nikulin, Finite automorphism groups of Kählerian $K3$ surfaces, Trans. Moscow Math. Soc., **38** (1980), No 2, 71–135.
- [Ni2] V.V. Nikulin, Factor groups of groups of automorphisms of hyperbolic forms with respect to subgroups generated by 2-reflections, J. Soviet Math., **22** (1983), 1401–1475.
- [RS] A.N. Rudakov and I.R. Shafarevich, Surfaces of type $K3$ over fields of finite characteristic, J. Soviet Math., **22** (1983), 1476–1533.
- [Vo] S.P. Vorontsov, Automorphisms of even lattices that arise in connection with automorphisms of algebraic $K3$ surfaces, Vestnik Mosk. Univ. Math. **38** (1983), 19–21.

GRADUATE SCHOOL OF MATHEMATICS, NAGOYA UNIVERSITY, CHIKUSA-KU
NAGOYA 464-8602 JAPAN

E-mail address: m04022x@math.nagoya-u.ac.jp

Asymptotic stability of planar stationary waves for damped wave equations in multi-dimensional half space

Yoshihiro Ueda (Kyushu University)

We are concerned with the long-time behavior of solutions to the following damped wave equation with a nonlinear convection term

$$(1) \quad u_{tt} - \Delta u + u_t + \operatorname{div} f(u) = 0$$

in the n -dimensional half space $\mathbb{R}_+^n := \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^{n-1}$, where $\mathbb{R}_+ := (0, \infty)$ and $n \geq 2$. Here $x = (x_1, \dots, x_n)$ is the space variable which is sometimes written as $x = (x_1, x')$ with $x_1 \in \mathbb{R}_+$ and $x' = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$, $u = u(t, x)$ is the real valued unknown function, and $f = f(u)$ is a given smooth function of $u \in \mathbb{R}$ of the form $f = (f_1, \dots, f_n)$. The initial and boundary conditions for the equation (1) are prescribed as

$$(2) \quad u(0, x) = u_0(x), \quad u_t(0, x) = u_1(x),$$

$$(3) \quad u(t, 0, x') = u_b,$$

where u_b is a constant. The initial function $u_0(x)$ is supposed to tend to a constant u_+ , which is not equal to u_b , in the normal direction:

$$(4) \quad \lim_{x_1 \rightarrow \infty} u_0(x) = u_+ (\neq u_b).$$

We also assume that the flux function f satisfies the sub-characteristic and convexity conditions:

$$(5) \quad |f'(u)| < 1 \quad \text{and} \quad f_1''(u) > 0 \quad \text{for} \quad u \in [u_b, u_+],$$

where $f' = (f_1', \dots, f_n')$ and $|f'(u)| = (\sum_{j=1}^n |f_j'(u)|^2)^{1/2}$.

The main purpose is to obtain a convergence rate of solutions to the initial-boundary value problem (1), (2) and (3) toward the corresponding planar stationary wave. Here, the planar stationary wave $\phi(x_1)$ is defined

as a solution to (1) which is independent of t and x' and satisfies the same boundary condition (3) and the spatial asymptotic condition (4). Namely, $\phi(x_1)$ is a solution to the corresponding one-dimensional stationary problem:

$$(6) \quad -\phi_{x_1 x_1} + f_1(\phi)_{x_1} = 0,$$

$$(7) \quad \phi(0) = u_b, \quad \lim_{x_1 \rightarrow \infty} \phi(x_1) = u_+.$$

The existence of solutions $\phi(x_1)$ to the problem (6) and (7) is studied in the paper [6]. For the details, see also [9]. Here we summarize the existence result in the following proposition.

Proposition 1. ([6]) A necessary condition for the existence of solutions to the boundary value problem (6) and (7) is $f_1'(u_+) \leq 0$. Moreover, under this condition, we have:

(i) Non-degenerate case: Suppose that $f_1'(u_+) < 0$. If $u_b < u_+$, there exists a monotone increasing solution $\phi(x_1)$. If $u_+ < u_b$ and $f_1(u) < f_1(u_+)$ for $u \in (u_+, u_b)$, there exists a monotone decreasing solution $\phi(x_1)$. In both cases, the solution $\phi(x_1)$ satisfies

$$(8) \quad |\partial_{x_1}^k (\phi(x_1) - u_+)| \leq C \delta e^{-cx_1} \quad \text{for } k = 0, 1, \dots,$$

where $\delta := |u_b - u_+|$ is the amplitude of the stationary wave, and C and c are positive constants.

(ii) Degenerate case: Suppose that $f_1'(u_+) = 0$. There exists a solution $\phi(x_1)$ if and only if $u_b < u_+$. The solution $\phi(x_1)$ is monotone increasing and satisfies

$$(9) \quad |\partial_{x_1}^k (\phi(x_1) - u_+)| \leq C \delta^{k+1} (1 + \delta x_1)^{-(k+1)} \quad \text{for } k = 0, 1, \dots,$$

where C is a positive constant.

The following two theorems are the main results which give the convergence rate of solution $u(t, x)$ toward the planar stationary wave $\phi(x_1)$. The first theorem gives the convergence rate for the non-degenerate case, and the second treats the degenerate case. To summarize the results, we assume that $u_0 - \phi \in Y^{s+1} \cap Y_\alpha^1$ and $u_1 \in X^s \cap X_\alpha^0$ for $s \geq [\frac{n-1}{2}] + 1$, and put

$$M_\alpha^2 := \|u_0 - \phi\|_{Y^{s+1}}^2 + \|u_0 - \phi\|_{Y_\alpha^1}^2 + \|u_1\|_{X^s}^2 + \|u_1\|_{X_\alpha^0}^2,$$

where the spaces Y^{s+1} , X^s , Y_α^1 and X_α^0 and their norms are defined at the end of this section, and $[z]$ denotes the largest integer which does not exceed z .

Theorem 2. (Non-degenerate case) Suppose that $f_1'(u_+) < 0$ and $u_b < u_+$. Let $\alpha \geq 0$ and $s \geq [\frac{n-1}{2}] + 1$, and suppose that $u_0 - \phi \in Y^{s+1} \cap Y_\alpha^1$ and $u_1 \in X^s \cap X_\alpha^0$. Then there exists a positive constant ε_0 such that if $M_0 \leq \varepsilon_0$, then the problem (1), (2) and (3) has a unique global in time solution satisfying

$$u - \phi \in C([0, \infty); Y^{s+1} \cap Y_\alpha^1) \cap C^1([0, \infty); X^s \cap X_\alpha^0).$$

Moreover, tangential derivatives of the solution verify the decay estimate

$$(10) \quad \|\partial^k(u - \phi, \nabla(u - \phi), u_t)(t)\|_{L^2} \leq CM_\alpha(1+t)^{-\alpha/2-k/2}$$

for each k with $0 \leq k \leq s$. In particular, we have the following L^p decay estimate:

$$(11) \quad \|(u - \phi)(t)\|_{L^p} \leq CM_\alpha(1+t)^{-\alpha/2-((n-1)/2)(1/2-1/p)}$$

for any p with $2 \leq p \leq \infty$.

Theorem 3. (Degenerate case) Suppose that $f_1'(u_+) = 0$ and $u_b < u_+$. Let $s \geq [\frac{n-1}{2}] + 1$ and suppose that $u_0 - \phi \in Y^{s+1}$ and $u_1 \in X^s$. Then there exists a positive constant ε_0 such that if $M_0 \leq \varepsilon_0$, then the problem (1), (2) and (3) has a unique global in time solution satisfying

$$u - \phi \in C([0, \infty); Y^{s+1}) \cap C^1([0, \infty); X^s).$$

The solution verifies the decay estimate

$$(12) \quad \|\partial^k(u - \phi, \nabla(u - \phi), u_t)(t)\|_{L^2} \leq CM_0(1+t)^{-k/2}$$

for each k with $0 \leq k \leq s$. In particular, we have

$$(13) \quad \|(u - \phi)(t)\|_{L^p} \leq CM_0(1+t)^{-((n-1)/2)(1/2-1/p)}$$

for any p with $2 \leq p \leq \infty$.

Remark 4. The L^2 decay estimate (10) and (12) for tangential derivatives may be optimal but we have no such a better decay estimate for normal derivatives. Therefore the L^p estimates (11) and (13), which are based on the decay estimates for derivatives and the Gagliardo-Nirenberg interpolation, might be not optimal. In fact, we know ([5], [4]) that the L^p decay rate

for viscous conservation laws is $t^{-(n/2)(1/2-1/p)}$ which is better than our rate $t^{-((n-1)/2)(1/2-1/p)}$ for (1).

Remark 5. In Theorem 2, we require the non-degenerate stationary wave to be monotone increasing. However, this requirement can be removed. In fact, for the monotone decreasing stationary wave, we can show the same convergence result (11) under the additional condition that the amplitude δ of the wave is sufficiently small.

Remark 6. For the non-degenerate case, we can also obtain the exponential convergence rate by assuming that the initial perturbation $(v_0, \nabla v_0, v_1)$ belongs to the exponentially weighted space $L^2_{\alpha, \text{exp}} = \{u; e^{(\alpha/2)x_1} u \in L^2\}$. The proof of this result is similar to that for the one-dimensional case discussed in the paper [9], so that the details are omitted here.

Notations. The differential operators $\nabla := (\partial_{x_1}, \dots, \partial_{x_n})$ and $\Delta := \sum_{i=1}^n \partial_{x_i}^2$ denote the standard gradient and Laplacian with respect to $x = (x_1, \dots, x_n)$, respectively. For a nonnegative integer k , we denote by ∂^k the totality of all the k -th order derivatives with respect to the tangential variable $x' = (x_2, \dots, x_n)$.

For a domain $\Omega \subset \mathbb{R}_+^n$ and a nonnegative integer s , $H^s(\Omega)$ denotes the s -th order Sobolev space over Ω in the L^2 sense with the norm $\|\cdot\|_{H^s(\Omega)}$. We note that $H^0(\Omega) = L^2(\Omega)$ and sometimes abbreviate $H^s(\Omega)$ to H^s if $\Omega = \mathbb{R}_+^n$. We define a Banach space X^s over \mathbb{R}_+^n as

$$X^s = \{u \in L^2; \partial^k u \in L^2 \text{ for } k \leq s\}, \quad \|u\|_{X^s} = \left(\sum_{k=0}^s \|\partial^k u\|_{L^2}^2 \right)^{1/2} =: \|u\|_s,$$

where ∂^k are tangential derivatives so that this definition does not involve any normal derivative ∂_{x_1} . Notice that $X^s = L^2(\mathbb{R}_+; H^s(\mathbb{R}^{n-1}))$. Also, we define

$$Y^{s+1} = \{u \in X^s; \nabla u \in X^s\}, \quad \|u\|_{Y^{s+1}} = \|(u, \nabla u)\|_{X^s} = \|(u, \nabla u)\|_s.$$

Finally, we introduce the corresponding weighted spaces. For $\alpha \in \mathbb{R}$, we denote by L^2_α the space of functions u satisfying $(1+x_1)^{\alpha/2} u \in L^2$, with the norm

$$(14) \quad \|u\|_{L^2_\alpha} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} (1+x_1)^\alpha |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Note that we only use the weight with respect to the normal variable x_1 . We introduce the weighted spaces X_α^s and Y_α^{s+1} as

$$X_\alpha^s = \{u \in L_\alpha^2; \partial^k u \in L_\alpha^2 \text{ for } k \leq s\}, \quad Y_\alpha^{s+1} = \{u \in X_\alpha^s; \nabla u \in X_\alpha^s\},$$

and denote the corresponding norms as $\|\cdot\|_{X_\alpha^s}$ and $\|\cdot\|_{Y_\alpha^{s+1}}$, respectively. Note that $\|u\|_{X_\alpha^0} = \|u\|_{L_\alpha^2}$, $\|u\|_{Y_\alpha^1} = \|(u, \nabla u)\|_{L_\alpha^2}$.

References

- [1] T. Hosono, *Large time behavior of solutions to a dissipative wave equation in higher space dimensions*, preprint, 2006.
- [2] A. M. Il'in and O. A. Oleinik, *Behavior of the solution of the Cauchy problem for certain quasilinear equations for unbounded increase of the time*, Amer. Math. Soc. Transl., **42** (1964), 19–23.
- [3] S. Kawashima, S. Nishibata and M. Nishikawa, *Asymptotic stability of stationary waves for two-dimensional viscous conservation laws in half plane*, Discrete Contin. Dyn. Syst., Suppl., (2003), 469–476.
- [4] S. Kawashima, S. Nishibata and M. Nishikawa, *L^p energy method for multi-dimensional viscous conservation laws and application to the stability of planar waves*, J. Hyperbolic Differ. Equ., **1** (2004), 581–603.
- [5] S. Kawashima, S. Nishibata and M. Nishikawa, *Asymptotic stability of stationary waves for multi-dimensional viscous conservation laws in half space*, preprint, 2004.
- [6] T.-P. Liu, A. Matsumura and K. Nishihara, *Behaviors of solutions for the Burgers equation with boundary corresponding to rarefaction waves*, SIAM J. Math. Anal., **29** (1998), 293–308.
- [7] T. Nakamura, S. Nishibata and T. Yuge, *Convergence rate of solutions toward stationary solutions to the compressible Navier–Stokes equation in a half line*, J. Differential Equations, **241** (2007), 94–111.
- [8] M. Nishikawa, *Convergence rate to the traveling wave for viscous conservation laws*, Funkcial. Ekvac., **41** (1998), 107–132.
- [9] Y. Ueda, *Asymptotic stability of stationary waves for damped wave equations with a nonlinear convection term*, preprint, 2006.

Physical states of quantum electrodynamics with an indefinite metric

Akito Suzuki ¹

Department of Mathematics, Hokkaido University

1 Introduction

Let us consider the quantized electromagnetic field interacting with a classical given source [4] and construct the quantized radiation field A^μ ($\mu = 0, 1, 2, 3$) as an operator-valued distribution [8] satisfying the following equations

$$\square A_\mu(t, x) = j_\mu(t, x), \quad (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3, \quad (1)$$

$$A_\mu(t, x) = A_\mu(x), \quad \frac{d}{dt} A_\mu(t, x) = \dot{A}_\mu(x), \quad (2)$$

where the current density j^μ of the source is conserved:

$$\partial^\mu j_\mu(t, x) = 0. \quad (3)$$

Here the Fourier expansion of $A_\mu(x)$ and $\dot{A}_\mu(x)$ are written as

$$A_j(x) = \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dk}{\sqrt{2\omega(k)}} e_j^{(\lambda)}(k) \left(a_\lambda(k) e^{ik \cdot x} + a_\lambda^\dagger(k) e^{-ik \cdot x} \right),$$

$$A_0(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dk}{\sqrt{2\omega(k)}} \left(a_0(k) e^{ik \cdot x} + a_0^\dagger(k) e^{-ik \cdot x} \right),$$

and

$$\dot{A}_j(x) = i \sum_{\lambda=1}^3 \int_{\mathbb{R}^3} dk \sqrt{\frac{\omega(k)}{2(2\pi)^3}} e_j^{(\lambda)}(k) \left(e^{-ik \cdot x} a_\lambda^\dagger(k) - e^{ik \cdot x} a_\lambda(k) \right),$$

$$\dot{A}_0(x) = i \int_{\mathbb{R}^3} dk \sqrt{\frac{\omega(k)}{2(2\pi)^3}} \left(e^{-ik \cdot x} a_0^\dagger(k) - e^{ik \cdot x} a_0(k) \right).$$

where $\omega(k) = |k|$ is the single photon energy of the wave vector $k \in \mathbb{R}^3$, $e^{(\lambda)}(k) \in \mathbb{R}^3$ ($\lambda = 1, 2, 3$) the polarization vectors satisfying

$$e_j^{(3)}(k) = \frac{k_j}{|k|}, \quad j = 1, 2, 3,$$

$$\sum_{j=1}^3 e_j^{(\lambda)}(k) e_j^{(\lambda')}(k) = \delta_{\lambda\lambda'}, \quad \lambda, \lambda' = 1, 2, 3.$$

The operators $a_\mu(k)$ and its adjoint $a_\mu^\dagger(k)$, called the annihilation and creation operators respectively, satisfy the canonical commutation relations (CCRs) as follows:

$$[a_\mu(k), a_\nu^\dagger(k')] = -g_{\mu\nu} \delta(k - k'),$$

$$[a_\mu(k), a_\nu(k')] = 0 = [a_\mu^\dagger(k), a_\nu^\dagger(k')],$$

¹The author is supported by JSPS research fellowships for young scientists.

where the 4×4 matrix $(g_{\mu\nu})_{\mu,\nu=0,1,2,3}$ is the diagonal matrix with

$$g_{00} = -g_{jj} = 1 \quad (j = 1, 2, 3), \quad (4)$$

$$g_{\mu\nu} = 0 \quad (\mu \neq \nu). \quad (5)$$

Let \mathcal{F} be the state space where the operators A_μ act and $\langle \cdot | \cdot \rangle$ the metric on \mathcal{F} . Requiring the existence of the vacuum state $\Omega \in \mathcal{F}$ characterized by

$$a_\mu(k)\Omega = 0, \quad \langle \Omega | \Omega \rangle = 1,$$

we find that the state space \mathcal{F} is an indefinite metric space. Indeed, for $f \in L^2(\mathbb{R}^3)$, setting $\Psi_f = \int_{\mathbb{R}^3} dk f(k) a_0^\dagger(k) \Omega$, we have

$$\begin{aligned} \langle \Psi_f | \Psi_f \rangle &= \int_{\mathbb{R}^3} dk \int_{\mathbb{R}^3} dq f^*(k) f(q) \langle \Omega | [a_0(k), a_0^\dagger(q)] \Omega \rangle \\ &= - \int_{\mathbb{R}^3} |f(k)|^2 dk < 0. \end{aligned}$$

As was seen in [7, 8], one can define the operators $a(k)$ and $a^\dagger(k)$ on a Krein space \mathcal{F} which is given by the usual Fock space and a metric operator acting therein. In the usual quantum theory, since the state space is a Hilbert space, the theory can be probabilistically interpretable. The above state space \mathcal{F} is however an indefinite metric Krein space, so that the theory can not be immediately probabilistically interpretable. According to the Gupta-Bleuler formalism [2, 3], one can select a probabilistically interpretable subspace, called the physical subspace, from the state space. We interested in the physical subspace.

2 Gupta-Bleuler formalism

Let us now explain the Gupta-Bleuler formalism. By (1) and (3), we find that $\partial^\mu A_\mu$ is a free field:

$$\square \partial^\mu A_\mu(t, x) = 0.$$

Hence we may write $\partial^\mu A_\mu(t, x)$ as

$$\partial^\mu A_\mu(t, x) = \int_{\mathbb{R}^3} dk (\alpha(k) e^{-i\omega(k)t} e^{ik \cdot x} + \alpha^\dagger(k) e^{i\omega(k)t} e^{-ik \cdot x}).$$

In the above equation, the term which has the factor $e^{-i\omega(k)t}$ (resp. $e^{i\omega(k)t}$) is called the positive frequency part (resp. negative frequency part) of $\partial^\mu A_\mu(t, x)$ and written as $[\partial^\mu A_\mu(t, x)]^{(+)}$ (resp. $[\partial^\mu A_\mu(t, x)]^{(-)}$). For the state vector $\Psi \in \mathcal{F}$, the condition

$$[\partial^\mu A_\mu(t, x)]^{(+)} \Psi = 0 \quad (6)$$

is called the Gupta subsidiary condition [2, 3, 6, 8]. The physical subspace $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ is formally defined by

$$\mathcal{V}_{\text{phys}} \equiv \left\{ \Psi \in \mathcal{F} \mid [\partial^\mu A_\mu(t, x)]^{(+)} \Psi = 0, (t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3 \right\}. \quad (7)$$

Let us here mention the physical meaning of $\mathcal{V}_{\text{phys}}$. It is clear from definition (7) that

$$\langle \Psi | \partial^\mu A_\mu(t, x) \Phi \rangle = 0, \quad \Psi, \Phi \in \mathcal{V}_{\text{phys}}, \quad (8)$$

which is called the Lorentz condition. From a classical field theoretical point of view, the equations (1) and (8) are just the Maxwell equations in the Lorentz gauge. If we can show that $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ is non-negative, i.e.,

$$\langle \Psi | \Psi \rangle \geq 0, \quad \Psi \in \mathcal{V}_{\text{phys}},$$

we obtain the physical Hilbert space $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ given by the completion of the quotient vector space $\mathcal{V}_{\text{phys}}/\mathcal{V}_0$:

$$\mathcal{H}_{\text{phys}} = \overline{\mathcal{V}_{\text{phys}}/\mathcal{V}_0},$$

where \mathcal{V}_0 is the subspace of all neutral vectors of $\mathcal{V}_{\text{phys}}$:

$$\mathcal{V}_0 = \{\Psi \in \mathcal{V}_{\text{phys}} \mid \langle \Psi | \Psi \rangle = 0\}.$$

In this case, the states in $\mathcal{H}_{\text{phys}}$ can be probabilistically interpretable in the usual way (for more details see [5, 6]).

The physical subspace $\mathcal{V}_{\text{phys}}$, in other words, is the solution space of the vector equation (6) for all $(t, x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^3$. The zero vector $0 \in \mathcal{F}$ is a trivial solution of (6). We say that the physical subspace $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ is trivial if $\mathcal{V}_{\text{phys}} = \{0\}$. It is of course expected that the physical subspace $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ is non-trivial: $\mathcal{V}_{\text{phys}} \neq \{0\}$. It is, however, not clear whether $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ is non-trivial or not. It depends on the property of the current j^μ .

Recently, in [7], we study the physical subspace in the case where $j^0(t, x) = \rho(x)$ is independent of time and $j^i = 0$ ($i = 1, 2, 3$). We say that a function ρ is infrared regular if $\rho \in H_\omega^{-3/2}(\mathbb{R}^3)$ and that ρ is infrared singular if $\rho \notin H_\omega^{-3/2}(\mathbb{R}^3)$, where

$$H_\omega^s(\mathbb{R}^3) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3) \mid \omega^s \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^3)\}.$$

In this case, we proved that $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ is non-trivial if and only if ρ is infrared regular. We are interested in the condition that $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ is non-trivial in the present case.

3 Construction on the Fock space

Let \mathcal{F} be the boson Fock space over $\oplus^4 L^2(\mathbb{R}^3)$:

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}(\oplus^4 L^2(\mathbb{R}^3)) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} \bigotimes_s^n [\oplus^4 L^2(\mathbb{R}^3)],$$

where \otimes_s^n denotes the symmetric tensor product with the convention

$$\otimes_s^0 [\oplus^4 L^2(\mathbb{R}^3)] = \mathbb{C}.$$

A vector $\Psi \in \mathcal{F}$ can be identified with the sequence $\{\Psi^{(n)}\}_{n=0}^{\infty}$ of the 4^n -component squared integrable functions $\Psi^{(n)} = \{\Psi_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{(n)}\}_{\mu_l=0,1,2,3}$ satisfying that, for all permutations π ,

$$\Psi_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = \Psi_{\mu_{\pi(1)}, \dots, \mu_{\pi(n)}}^{(n)}(k_{\pi(1)}, \dots, k_{\pi(n)}).$$

The metric of \mathcal{F} is given by

$$\begin{aligned} \langle \Psi | \Phi \rangle &= \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{\substack{\mu_l=0 \\ l=1, \dots, n}}^3 \int_{\mathbb{R}^{3n}} \Psi_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{(n)}(k_1, \dots, k_n)^* \\ &\quad \times (-g_{\mu_1 \nu_1}) \cdots (-g_{\mu_n \nu_n}) \Phi_{\nu_1, \dots, \nu_n}^{(n)}(k_1, \dots, k_n) \end{aligned}$$

for all $\Psi, \Phi \in \mathcal{F}$. Let us define an operator η on \mathcal{F} by

$$(\eta\Psi)_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = (-g_{\mu_1\nu_1}) \cdots (-g_{\mu_n\nu_n}) \Psi_{\nu_1, \dots, \nu_n}^{(n)}(k_1, \dots, k_n), \quad \text{a.e.}$$

We observe that $\eta = \eta^* = \eta^{-1}$ and that

$$\langle \Phi | \Psi \rangle = \langle \Phi, \eta\Psi \rangle, \quad \Psi, \Phi \in \mathcal{F},$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denotes the (original) inner product of the Fock space \mathcal{F} and $*$ the usual Hilbert adjoint with respect to $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Hence \mathcal{F} is a Krein space with the metric operator η . We consider that the state space \mathcal{F} is the Krein space $(\mathcal{F}, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ which has the norm topology given by the norm

$$\|\Psi\| = \sqrt{\langle \Psi, \Psi \rangle}, \quad \Psi \in \mathcal{F}.$$

For each $\Psi \in \mathcal{F}$, we define $a_\mu(k)\Psi \in \times_{n=0}^\infty \otimes_s^n [\oplus^4 L^2(\mathbb{R}^3)]$ by

$$(a_\mu(k)\Psi)_{\mu_1, \dots, \mu_n}^{(n)}(k_1, \dots, k_n) = \sqrt{n+1} \Psi_{\mu, \mu_1, \dots, \mu_n}^{(n+1)}(k, k_1, \dots, k_n), \quad \text{a.e.},$$

where the symbol “ \times ” denotes the Cartesian product. Let

$$D(a_\mu(k)) := \{ \Psi \in \mathcal{F} \mid a_\mu(\mathbf{p})\Psi \in \mathcal{F}, \text{ a.e. } \mathbf{p} \in \mathbb{R}^3 \}.$$

We note that $D(a_\mu(k))$ is independent of k . The Fock vacuum $\Omega := \{1, 0, 0, \dots\} \in \mathcal{F}$ satisfies that $\Omega \in D(a_\mu(k))$ and that

$$a_\mu(k)\Omega = 0.$$

Let

$$a_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^3} f^*(k) a_\mu(k) dk, \quad f \in L^2(\mathbb{R}^3).$$

We also denote the closure of $a(f)$ by the same symbol.

In general, the adjoint operator A^\dagger of an operator A on the Krein space \mathcal{K} with the metric operator ι is given by $A^\dagger = \iota A^* \iota$. We observe that the adjoint of $a_\mu(f)$ is given by

$$a_\mu^\dagger(f) = \begin{cases} -a_0(f)^*, & \mu = 0 \\ a_j(f)^*, & \mu = j = 1, 2, 3, \end{cases}$$

and that for all $f, g \in L^2(\mathbb{R}^3)$,

$$\begin{aligned} [a_\mu(f), a_\nu^\dagger(g)] &= -g_{\mu\nu} \int_{\mathbb{R}^3} f^*(k) g(k) dk, \\ [a_\mu(f), a_\nu(g)] &= [a_\mu^\dagger(f), a_\nu^\dagger(g)] = 0 \end{aligned}$$

on the finite particle space \mathcal{F}_0 where

$$\mathcal{F}_0 = \{ \Psi \in \mathcal{F} \mid \Psi^{(n)} = 0 \text{ for all } n \geq n_0 \text{ with some } n_0 \in \mathbb{N} \}.$$

Formally, we write

$$a_\mu^\dagger(f) = \int_{\mathbb{R}^3} dk f(k) a_\mu^\dagger(k).$$

Let us solve the equations (1) and (2). For the technical simplicity, we assume that $j_\mu \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^4)$. Then the solution is given by

$$A_\mu(t, x) = A_\mu^{(0)}(t, x) + A_\mu^{\text{cl}}(t, x),$$

where

$$A_j^{(0)}(t, x) = \sum_{\lambda=1}^3 \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dk}{\sqrt{2\omega(k)}} e_j^{(\lambda)}(k) \left(a_\lambda(k) e^{-i\omega(k)t+ik\cdot x} + a_\lambda^\dagger(k) e^{i\omega(k)t-ik\cdot x} \right),$$

$$A_0^{(0)}(t, x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{dk}{\sqrt{2\omega(k)}} \left(a_0(k) e^{-i\omega(k)t+ik\cdot x} + a_0^\dagger(k) e^{i\omega(k)t-ik\cdot x} \right)$$

and

$$A_\mu^{\text{cl}}(t, x) = \int_0^t \frac{\sin(t-\tau)\omega}{\omega} j_\mu(\tau, x)$$

with $\omega = \sqrt{-\Delta}$. It is not difficult to check (see [1, 7, 8]) that the maps

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^4) \ni f \mapsto \int_{\mathbb{R}^4} dx f(t, x) \langle \Psi | A_\mu(t, x) \Phi \rangle, \quad \mu = 0, 1, 2, 3$$

are tempered distributions on \mathbb{R}^4 and, in this sense, satisfy the equations (1) and (2).

4 Physical subspace

By direct calculation, we have

$$\begin{aligned} [\partial^\mu A_\mu(t, x)]^{(+)} &= [\partial^\mu A_\mu^{(0)}(t, x)]^{(+)} + i \frac{e^{-it\omega}}{2\omega} j_0(0, x) \\ &= -i \int_{\mathbb{R}^3} dk \frac{\sqrt{\omega(k)}}{\sqrt{2(2\pi)^3}} e^{-i\omega(k)t+ikx} \left[a_0(k) - a_3(k) - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\hat{j}_0(0, k)}{\omega(k)^{3/2}} \right], \end{aligned}$$

where we have used the equation (3) and integration by parts. Similar as in paper [7], we have the following theorem

Theorem 4.1. (i) *If $j(0, \cdot)$ is infrared regular, then $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ is non-trivial and non-negative.*

(ii) *If $j(0, \cdot)$ is infrared singular, then $\mathcal{V}_{\text{phys}}$ is trivial.*

References

- [1] A. Arai, Nippon-Hyouronsya, Tokyo (2000) (in Japanese).
- [2] K. Bleuler, *Helv. Phys. Acta.* **23** (1950), 567-586.
- [3] S. N. Gupta, *Proc. Phys. Soc.* **A63** (1950), 681-691.
- [4] C. Itzykson and j.-B. Zuber, McGraw-Hill, New York (1980).
- [5] Kugo and Ojima, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **66** (1979), 1-130.
- [6] N. Nakanishi, *Prog. Theor. Phys. Suppl.* **51** (1972), 1-95.
- [7] Akito Suzuki, *Hokkaido University Preprint Series in Mathematics* **886**, (2007) 1-26.
- [8] *Ark. fr Phys.* **28** (1964), 129-184.

Poset transformations and Quasi symmetric functions

富江 雅也

筑波大学数理物質科学研究科 D 2

1 Poset に関する基礎事項

Definition 1.1

集合 P に以下の条件を満たす 2 項関係 \leq が定義されているとき組 (P, \leq) を *Poset* (Partially ordered set) という。

- (1) $x \in P$ に対して $x \leq x$
- (2) $x, y \in P$ に対して $x \leq y$ かつ $y \leq x$ ならば $x = y$
- (3) $x, y, z \in P$ に対して $x \leq y, y \leq z$ ならば $x \leq z$

本稿では finite (濃度が有限)、graded (階層付けられている) bounded (最大元 $\hat{1}$, 及び最小元 $\hat{0}$ が存在する) な Poset のみを考える。このような Poset 達には Boolean algebra を中心として distributive lattice, geometric lattice, Polytope, Eulerian poset, shellable poset, Cohen-Macaulay poset など様々なクラスが知られており活発に研究がなされている。2 節以降では Poset から定義される flag-vector とその母関数的なものである Quasi symmetric function を主に紹介していきたい。

先行研究としては例えば distributive lattice に関してはその上に定義された Birkhoff transformation と Stembridge map との関係が Hsiao によって明らかにされている。([7] [9]) また geometric lattice については matroid と等価なものであり、例えば超平面配置の交叉束などがあげられる。より一般的に Billera, Ehrenborg, Readdy により oriented matroid と geometric lattice の flag vector を介した関係が述べられている。([2]) 幾何学との関連では shellable poset が良く研究されている。これは Poset から定まる順序複体を考えたときにトポロジーにおける shelling を持つ複体に対応するものでさらに EL shellable poset, CL shellable poset 等があり、[3],[4] に詳しく述べられている。特に EL shellable poset に関してはその上に定義される label から flag vector を特徴付けることができる。Polytope における face lattice は Dehn-Sommerville の等式を満たすことが昔から知られていたが face における関係式を flag に拡張した Generalized Dehn-Sommerville 等式が Billera, Bayer によって

Eulerian Poset 上で示された。(1) この等式は Stembridge peak algebra, **ab** 指数及び **cd** 指数と関係していることが分かっており非常に興味深いものである。

2 flag vectors と Quasi-symmetric functions について

この節では finite, graded, bounded な Poset に対して Quasi symmetric function (以下 $Qsym$ と記す) を対応させその性質について簡単に述べる。

いま $\mathcal{P} := \{P \mid P : \text{graded, finite bounded poset}\}$

$\mathcal{P}_n := \{P \mid P : \text{graded, finite bounded poset rank} = n\}$ とおき固定する。

Definition 2.1

K を体とする。ベクトル空間 $K\mathcal{P}$ に対して Poset の直積 \times で積を定め、余積 Δ を以下のように定める。このとき $K\mathcal{P}$ は双代数となる。特に Hopf 代数になる。

$$\Delta(P) := \sum_{x \in P} [\widehat{0}, x] \otimes [x, \widehat{1}] \quad P \in \mathcal{P}.$$

Definition 2.2

$P \in \mathcal{P}_n$ とする。 $S \subset [n-1]$ に対して flag-vector $\alpha_S(P)$ を以下のように定める。

$$\alpha_S(P) := \#\{(\widehat{0}, x_1, x_2, \dots, x_k, \widehat{1}) \mid \widehat{0} < x_1 < x_2 < \dots < x_k < \widehat{1}, rk(x_i) \in S\}$$

Remark 2.1

flag-vector から Möbius 関数を計算することができる。実際 Möbius 関数は $\widehat{0}$ と $\widehat{1}$ を結ぶ道全体の長さによる交代和ゆえ与えられた rank を通る道の個数は flag-vector であることから $\mu(P) = \sum_{S \subset [n-1]} (-1)^{|S|+1} \alpha_S$ となる。

Definition 2.3

無限変数冪級数環 $K[t_1, t_2, \dots]$ に対し部分集合 $Qsym$ を以下のように定める。

$$Qsym := \text{span}_K \{ \sum_{t_{i_1} < \dots < t_{i_r}} t_{i_1}^{a_1} t_{i_2}^{a_2} \dots t_{i_r}^{a_r} \mid a_i \in \mathbb{N} \}$$

$$\text{とくに } \sum_{t_{i_1} < \dots < t_{i_r}} t_{i_1}^{a_1} t_{i_2}^{a_2} \dots t_{i_r}^{a_r} =: M_{a_1, a_2, \dots, a_r} \text{ とおき } Qsym = \bigoplus_{(a_1, a_2, \dots, a_r)} KM_{(a_1, a_2, \dots, a_r)}$$

となり $Qsym$ は K 代数になる。また

$$\Delta(M_{(a_1, a_2, \dots, a_r)}) := \sum_{i=1}^r M_{(a_1, \dots, a_i)} \otimes M_{(a_{i+1}, \dots, a_r)}$$

によって双代数になる。とくに Hopf 代数になる。

Remark 2.2

n の分割 (a_1, \dots, a_r) と $[n-1]$ の部分集合 $\{a_1, a_1 + a_2, \dots, a_1 + a_2 + \dots + a_{r-1}\} := S$ を同一視して $M_{(a_1, a_2, \dots, a_r)}$ を M_S と書くこともある。

Proposition 2.1

$F : K\mathcal{P} \rightarrow Qsym$ を $F(P) := \sum_{S \subset [rk(P)-1]} \alpha_S M_S$ としたとき F は Hopf 代数射になる。

Definition 2.4

$Qsym$ の部分集合 $Peak$ を以下のように定義する。

$$Peak_n := \text{span}_k \{ K_\Lambda \mid K_\Lambda = \sum_{S \subset [n-1]: \Lambda \subset S \cup S+1} 2^{|S|+1} M_S \quad \Lambda : \text{left sparse set} \}$$

$$Peak := \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} Peak_n$$

$$\text{但し } \Lambda : \text{left sparse set} \iff_{def} 1 \notin \Lambda, \quad i \in \Lambda \Rightarrow i-1 \notin \Lambda$$

このとき $Peak$ は $Qsym$ の部分双代数となり $Peak$ を *Stembridge peak algebra* という

3 $Qsym$ における代数射から引き起こされる Poset 変換

この節では $Qsym$ における代数射を定義していくつか具体例を紹介する。このような射が導入された背景については [6] を参照のこと。

Definition 3.1

$G : Qsym \rightarrow K$ algebra-map に対し $\tilde{g} : Qsym \rightarrow Qsym$ を以下のように定める。

$$\tilde{g}(M) := \sum_{k \geq 1} \Sigma G(M_{(1)}) G(M_{(2)}) \cdots G(M_{(k+1)}) M_{(1)} \circ M_{(2)} \circ \cdots M_{(k+1)}$$

但し $\Delta^k(M) = \Sigma M_{(1)} \circ M_{(2)} \circ \cdots M_{(k+1)}$, $M_{(\alpha_1, \dots, \alpha_p)} \circ M_{(\beta_1, \dots, \beta_q)} = M_{(\alpha_1, \dots, \alpha_p, \beta_1, \dots, \beta_q)}$ とする

Proposition 3.1

\tilde{g} は双代数射になっている。

Problem 3.1

ある $G \in \text{Alghom}(Qsym, K)$ に対して $F \circ \Theta(P) \sim \tilde{g} \circ F(P)$ となるような $\Theta : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ を見つけよ。

Remark 3.1

= でなくて \sim であるのは実際に具体例を考えたときスカラー一倍で調節されていたり、次数を 1 つ下げていたりするからである。

Example 3.1

(1) $G(F(P)) = 1$ としたとき $id : \mathcal{P} \rightarrow \mathcal{P}$ が対応する。

(2) $G(F(P)) = \sum_{x \in P} (-1)^{rk(x)} \mu(\widehat{0}, x)$ としたとき \tilde{g} は *Stembridge map* になる。とくに P を *distributive lattice* としたとき対応する *Poset 変換* は *Birkhoff transformation* になる。

(3) $G(F(P)) = \sum_{x \in P} (1-r)^{rk(x)} \mu(\widehat{0}, x)$ としたとき \tilde{g} は *r-signed Stembridge map* になる。とくに P を *distributive lattice* としたとき対応する *Poset 変換* は *r-signed Birkhoff transformation* になる。

(4) $G(F(P)) = \#P$ としたとき Θ は *Chebyshev transformation* になる。

Remark 3.2

G の中身が $M_{\alpha_1, \dots, \alpha_r}$ という形でなく $F(P)$ となっているのは *Poset* を意識してのことである。*Cartesian product* を保つ良い不変量を持ってこれれば対応する Θ も面白いものであらうと期待してのことである。

Remark 3.3

(2),(4)において P を *Eulerian poset* にしたとき G 及び \tilde{g} は一致する。しかし *Birkhoff transformation* と *Chebyshev transformation* はまったく別物である。この奇妙な現象が \tilde{g} を考察しようという動機のひとつである。

REFERENCE

- [1] M.Bayer,L.Billeras, Generalized Dehn-Sommerville relations for polytopes, spheres and Eulerian partially ordered sets. *Invent.Math.*79.(1985).143-157.
- [2] L.J.Billera,R.Ehrenborg,M.Readdy, The **c-2d** index of oriented matroids. *J.Combin.Theory Ser .A* 80 (1997) 79-105.
- [3] A.Björner, Shellable and Cohen-Macaulay partially ordered sets. *Trans. Amer.Math.Soc.*260.(1)(1980).159-183.
- [4] A.Björner,M.Wachs, On lexicographically shellable posets. *Trans.Amer. Math.Soc.*277.(1983).323-341.
- [5] R.Ehrenborg,M.Readdy, The Chebyshev transforms of the first and second kinds. *arXiv:math.CO/0412124*.
- [6] R.Ehrenborg, On posets and Hopf algebras. *Adv.Math.*119.(1).(1996).1-25.
- [7] S.K.Hsiao,A signed analogue of the Birkhoff transform. *J.Combin.Theory.Ser.A.* 113.(2006).251-272.
- [8] R.P.Stanley, Flag f -vectors and the **cd**-index. *Math.Z.*216.(1994),483-499.
- [9] J.Stembridge, Enriched P -partitions. *Trans.Amer.Math.Soc.*349.(2).(1997). 763-788.

Application of non-commutative Gröbner basis to a free resolution of a module over the Steenrod Algebra.

TOMOHIRO FUKAYA*

Abstract

We review the theory of Gröbner basis for the non-commutative rings and apply it to the Steenrod algebra and modules over it. For example, we can compute the E_2 -terms of the Adams spectral sequence, which converge to the homotopy set of continuous maps of spaces.

Introduction

The singular cohomology has cohomology operations called Steenrod operations. If we consider the actions of them for the cohomology of the space, we will have more precise information on the space. For example, E_2 -terms of Adams spectral sequence, which converge to the homotopy set of continuous maps of the spaces, are given by the \mathcal{A}_2 free resolution of the cohomology group of the space.

First, we review the Steenrod algebra and Adams spectral sequence. In section 2, we give the definition and the algorithmic feature of non-commutative Gröbner basis. In section 3, we explain the algorithm to computing a free resolution of a module over the non-commutative ring.

1 Steenrod algebra and Adams spectral sequence

THEOREM 1.1. *Steenrod algebra, \mathcal{A}_2 , which is generated by operations*

$$\mathrm{Sq}^i: H^*(\ ; \mathbb{F}_2) \rightarrow H^{*+i}(\ ; \mathbb{F}_2),$$

for $i \geq 0$, satisfying

- (1) $\mathrm{Sq}^0 =$ the identity homomorphism.
- (2) If $x \in H^n(X; \mathbb{F}_2)$, then $\mathrm{Sq}^n x = x^2$.
- (3) For all $x, y \in H^*(X; \mathbb{F}_2)$, $\mathrm{Sq}^k(x \cup y) = \sum_{i=0}^k \mathrm{Sq}^i x \cup \mathrm{Sq}^{k-i} y$, the Cartan formula.
- (4) Sq^1 is the Bockstein homomorphism associated to the short exact sequence of coefficients, $0 \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \xrightarrow{\times 2} \mathbb{Z}/4\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow 0$.
- (5) The following relations hold among the generators: if $0 < a < 2b$

$$\mathrm{Sq}^a \mathrm{Sq}^b - \sum_{i=0}^{\lfloor a/2 \rfloor} \binom{b-1-i}{a-2i} \mathrm{Sq}^{a+b-i} \mathrm{Sq}^i$$

These relations are called the Adem relations.

2000 *Mathematics Subject Classification.* Primary 55H15; Secondary 55S10.

Key words and phrases. Steenrod algebra, Free resolution, Non-commutative Gröbner basis.

*The author is supported by Grant-in-Aid for JSPS Fellows (19-3177) from Japan Society for the Promotion of Science.

THEOREM 1.2. Let $I = (i_1, i_2, \dots, i_r)$ be a sequence of nonnegative integers. We say that I is **admissible** if $i_{s-1} \geq 2i_s$ for $r \geq s > 1$. Associate to I the product of generators $\text{Sq}^I = \text{Sq}^{i_1} \text{Sq}^{i_2} \dots \text{Sq}^{i_r}$. We say that $\text{Sq}^I \in \mathcal{A}_2$ is **admissible** if the sequence I is admissible. The admissible products form a vector space basis for A .

1.1 Adams spectral sequence

We denote the group of morphism $\{Y, X\}_k = \lim_{\leftarrow} [S^{n+k}Y, S^nX]$. For an abelian group G , ${}_{(p)}G$ denote the quotient ${}_{(p)}G = G/\{\text{elements of finite order prime to } p\}$.

THEOREM 1.3. There is a spectral sequence, converging to ${}_{(2)}\{Y, X\}_*$, with E_2 -terms given by

$$(1) \quad E_2^{s,t} \cong \text{Ext}_{\mathcal{A}_2}^{s,t}(H^*(X; \mathbb{F}_2), H^*(Y; \mathbb{F}_2))$$

and differentials d_r of bi-degree $(r, r-1)$.

EXAMPLE 1.4. Let $Y = S^0$, then the above spectral sequence converges to the stable homotopy group of X localized at 2, ${}_{(2)}\pi_*^S(X)$.

REMARK. We resolve a left- \mathcal{A}_2 -module M by free \mathcal{A}_2 -modules

$$\dots \rightarrow \mathcal{A}_2^{s_i} \rightarrow \dots \rightarrow \mathcal{A}_2^{s_1} \rightarrow \mathcal{A}_2^{s_0} \rightarrow M \rightarrow 0.$$

Let N be left- \mathcal{A}_2 -module and apply $\text{Hom}_{\mathcal{A}_2}^*(-, N)$ to this sequence

$$\text{Hom}_{\mathcal{A}_2}^*(\mathcal{A}_2^{s_0}, N) \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}_2}^*(\mathcal{A}_2^{s_1}, N) \rightarrow \dots \rightarrow \text{Hom}_{\mathcal{A}_2}^*(\mathcal{A}_2^{s_i}, N) \rightarrow \dots$$

The cohomology of this sequence defines $\text{Ext}_{\mathcal{A}_2}^{*,*}(M, N)$.

There is a useful book on spectral sequences [4]. It also contain the short explanation on the Steenrod algebra and other tools of algebraic topology.

2 Non-commutative ring and Gröbner bases

All of the information in this section can be found in [3]. $\mathbb{X} = \{x_i\}_i \in \Lambda$, $\mathcal{B} = \{x_{i_1} \dots x_{i_k} \mid x_i \in \mathbb{X}\}$, we call elements of \mathbb{X} as *alphabet* and that of \mathcal{B} as *word* or *power product*. Let k be a field and we consider the non-commutative free associative ring $A = k\langle \mathbb{X} \rangle = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$. We call an element of A as a polynomial. The first step to have a feasible division algorithm for A is to define a suitable ‘‘monomial ordering’’ on \mathcal{B} .

DEFINITION 2.1 (Monomial order). Let \leq be a well-ordering on $\mathcal{B} \cup \{1\}$. \leq is said to be a monomial ordering on A if the following two conditions are satisfied.

- (1) if $u, v, w, s \in \mathcal{B}$ with $w \leq u$, then $vws \leq vus$.
 - (2) For $u, w \in \mathcal{B}$, if $u = vws$ for some $v, s \in \mathcal{B}$ with $v \neq 1$ or $s \neq 1$, then $w \leq u$.
- (Hence $1 \leq u$ for all $u \in \mathcal{B}$.)

For $f \in A$, $f \neq 0$, we may write $f = c_1u_1 + \dots + c_mu_m$ where $c_i \in k \setminus \{0\}$, $u_i \in \mathcal{B}$, $u_1 > u_2 > \dots > u_m$. We denote: $\text{lp}(f) = u_1$, the *leading power product* of f ; $\text{lc}(f) = a_1$, the *leading coefficient* of f ; $\text{lt}(f) = a_1u_1$, the *leading term* of f . We define $\text{lp}(0) = \text{lc}(0) = \text{lt}(0) = 0$. From here, we fix a monomial ordering on \mathcal{B} .

DEFINITION 2.2. Let u and w be power products of A , $u, w \in \mathcal{B}$. Then u is *divisible* by w if and only if there are $v, s \in \mathcal{B}$ such that $u = vws$.

Let f and g_1, \dots, g_m be polynomials. We have an algorithm to divide f by g_1, \dots, g_m .

THEOREM 2.3. *Division on f by \mathcal{G}*

$$\begin{aligned} \text{INPUT} \quad f &= \sum_{i=1}^m c_i u_i \quad c_i \in k \setminus \{0\}, u_i \in \mathcal{B}, u_1 > u_2 > \dots > u_m \\ \mathcal{G} &= \{g_1, \dots, g_m\} \subset A \\ \text{OUTPUT} \quad f &= \sum_{h=0}^d \mu_h v_h g_{i_h} s_h + r \end{aligned}$$

where $i_h \in \{1, \dots, m\}$, $\mu_h \in k \setminus \{0\}$, $v_h, s_h \in \mathcal{B}$, and $r = 0$ or $r = \sum_j c_j t_j$ where $c_j \in k \setminus \{0\}$, $t_j \in \mathcal{B}$, with property that $\text{lp}(r) \leq \text{lp}(f)$ and none of the t_j is divisible by any $\text{lp}(g_i)$, $i = 1, \dots, m$.

The r appeared in above OUTPUT is called a remainder of f on the division by \mathcal{G} , denoted $\bar{f}^{\mathcal{G}}$. Now we can define the Gröbner basis of the (both-side) ideal of the non-commutative ring.

DEFINITION 2.4. Let $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in J} \subset A$ be a subset of A . For the two-side ideal of A generated by \mathcal{G} , denoted $I = \langle \mathcal{G} \rangle$, if every $f \in I$ has a representation $f = \sum_i \lambda_i u_i g_i v_i$, $\lambda_i \in k \setminus \{0\}$, $u_i, v_i \in \mathcal{B}$, $g_i \in \mathcal{G}$ with property that $u_i g_i v_i \leq \text{lp}(f)$, then \mathcal{G} is called **Gröbner basis** of I .

REMARK. We do not require \mathcal{G} to be finite because A is not Noetherian.

The algorithmic feature of Gröbner basis is the following.

PROPOSITION 2.5. Let $\mathcal{G} = \{g_i\}_{i \in J}$ be Gröbner basis for an ideal I . Let $f \in A$ and $\bar{f}^{\mathcal{G}}$ the remainder of f on the division by \mathcal{G} .

- (1) $\bar{f}^{\mathcal{G}}$ is independent of the order of the $g_i \in \mathcal{G}$, and $\bar{f}^{\mathcal{G}}$ is unique in A .
- (2) $f \in I$ if and only if $\bar{f}^{\mathcal{G}} = 0$.

PROPOSITION 2.6. $\mathcal{B} \setminus \langle \{\text{lp}(g_i)\}_{i \in \Lambda} \rangle$ forms a basis of k vector space $k\langle X_1, \dots, X_l, \dots \rangle / I$ if and only if $\{g_i\}_{i \in \Lambda}$ is a Gröbner basis of I .

REMARK. There exists the non-commutative version of Buchberger theorem.

By Theorem 1, we can consider the Steenrod algebra as a quotient ring of non-commutative polynomial ring. We introduce the following symbol.

$$\begin{aligned} A &= \mathbb{Z}_2 \langle \text{Sq}^1, \text{Sq}^2, \dots \rangle, \\ \mathcal{G} &= \left\{ g_{ab} = \text{Sq}^a \text{Sq}^b - \sum_{i=0}^{\lfloor a/2 \rfloor} \binom{b-1-i}{a-2i} \text{Sq}^{a+b-i} \text{Sq}^i \in A \mid a < 2b \right\}, \\ I &= \langle \mathcal{G} \rangle, \\ \mathcal{A}_2 &= A/I. \end{aligned}$$

DEFINITION 2.7. We define a monomial ordering on $\mathcal{B} = \{\text{Sq}^{a_1} \dots \text{Sq}^{a_k}\}$ as follows. For u and v be monomials as $u = \text{Sq}^{a_1} \dots \text{Sq}^{a_k}$, $v = \text{Sq}^{b_1} \dots \text{Sq}^{b_l} \in \mathcal{B}$. Then, $u \geq v$ if and only if $k > l$ or, $k = l$ and the right-most nonzero entry of $(a_1 - b_1, \dots, a_k - b_k)$ is positive.

We should remark that the leading monomial of g_{ab} is $\text{Sq}^a \text{Sq}^b$. By Theorem 1.2, we have,

COROLLARY 2.8. \mathcal{G} is a Gröbner basis of I .

3 Free resolution of a module over a non-commutative ring

As in the non-commutative ring case, we can define and prove the algorithmic feature of Gröbner basis of the left- A -module where A is a non-commutative polynomial ring. Using them, we can compute the free resolution of the left- A -module M , that is, the exact sequence

$$(2) \quad \cdots \rightarrow A^{s_i} \rightarrow \cdots \rightarrow A^{s_1} \rightarrow A^{s_0} \rightarrow M \rightarrow 0.$$

The argument is quite similar to the commutative case [1]. It is the syzygy modules that the key to compute the free resolutions.

Let N be submodule of A^m generated by vectors $\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s$ of A^m .

DEFINITION 3.1. The kernel of the map $\phi: A^s \rightarrow N$ given by

$$(h_1, \dots, h_s) \mapsto \sum_{i=1}^s h_i \mathbf{f}_i$$

is called the syzygy module of the $s \times m$ matrix ${}^t[\mathbf{f}_1 \cdots \mathbf{f}_s]$. It is denoted $\text{Syz}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s)$.

3.1 Syzygy for Gröbner basis

PROPOSITION 3.2. Let $c_1, \dots, c_s \in k \setminus \{0\}$ and let $\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_s$ are monomials in A^m . For $i \neq j \in \{1, \dots, s\}$, we define $\mathbf{X}_{ij} = \text{lcm}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$ if it exists. Then the module $\text{Syz}(c_1 \mathbf{X}_1, \dots, c_s \mathbf{X}_s)$ is generated by

$$\left\{ \frac{\mathbf{X}_{ij}}{c_i \mathbf{X}_i} \mathbf{e}_i - \frac{\mathbf{X}_{ij}}{c_j \mathbf{X}_j} \mathbf{e}_j \mid 1 \leq i, j \leq s, \text{lcm}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) \text{ is exists} \right\},$$

where $\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_s$ form the standard basis for A^s .

The calculation of syzygy module is done in two steps. We first compute a Gröbner basis $\mathcal{G} = \{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_t\}$ for $\langle f_1, \dots, f_s \rangle$ and compute $\text{Syz}(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_t)$. We then show how to obtain $\text{Syz}(f_1, \dots, f_t)$ from $\text{Syz}(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_t)$.

Let $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_t\}$ be a Gröbner basis, where we assume that the \mathbf{g}_i 's are monic. For $i \in \{1, \dots, t\}$, we let $\text{lm}(\mathbf{g}_i) = \mathbf{X}_i$ and for $i \neq j \in \{1, \dots, t\}$, we let $\mathbf{X}_{ij} = \text{lcm}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j)$. Then the S-polynomial of \mathbf{g}_i and \mathbf{g}_j is, if it exists, given by

$$S(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j) = \frac{\mathbf{X}_{ij}}{\mathbf{X}_i} \mathbf{g}_i - \frac{\mathbf{X}_{ij}}{\mathbf{X}_j} \mathbf{g}_j.$$

We note that $\text{lm}(S(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j)) < \mathbf{X}_{ij}$. Because \mathcal{G} is a Gröbner basis, we have $S(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j) = \sum_{\nu=t}^i h_{ij\nu} \mathbf{g}_\nu$ for some $h_{ij\nu} \in A$, such that $\max_{1 \leq \nu \leq t} (\text{lm}(h_{ij\nu}) \text{lm}(\mathbf{g}_\nu)) = \text{lm}(S(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j))$. We now define

$$\mathbf{s}_{ij} = \frac{\mathbf{X}_{ij}}{\mathbf{X}_i} \mathbf{e}_i - \frac{\mathbf{X}_{ij}}{\mathbf{X}_j} \mathbf{e}_j - (h_{ij1}, \dots, h_{ijt}) \in A^t.$$

We note that $\mathbf{s}_{ij} \in \text{Syz}(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_t)$, since

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_{ij} \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \cdots & \mathbf{g}_t \end{bmatrix} &= (\bar{\mathbf{X}}_i \mathbf{e}_i - \bar{\mathbf{X}}_j \mathbf{e}_j) \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \cdots & \mathbf{g}_s \end{bmatrix} - (h_{ij1}, \dots, h_{ijt}) \begin{bmatrix} \mathbf{g}_1 & \cdots & \mathbf{g}_t \end{bmatrix} \\ &= S(\mathbf{g}_i, \mathbf{g}_j) - \sum_{\nu=t}^i h_{ij\nu} \mathbf{g}_\nu. \end{aligned}$$

By Proposition 3.2, we have,

THEOREM 3.3. With notation above, the collection $\{\mathbf{s}_{ij} \mid 1 \leq i \leq j \leq t, \text{lcm}(\mathbf{X}_i, \mathbf{X}_j) \text{ is exists}\}$ is generating set for $\text{Syz}(\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_t)$.

3.2 Syzygy for not Gröbner basis

Let $\{\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s\}$ be a collection of non-zero vectors in A^m which may not form a Gröbner basis. We suppose $M = \langle \mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s \rangle$ has finite Gröbner basis $\{\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_t\}$. We again assume that $\mathbf{g}_1, \dots, \mathbf{g}_t$ are monic. Set $F = {}^t[\mathbf{f}_1 \dots \mathbf{f}_s]$ and $G = {}^t[\mathbf{g}_1 \dots \mathbf{g}_t]$. There is a $s \times t$ matrix S and $t \times s$ matrix T with entries in A such that $F = SG$ and $G = TF$. Now using Theorem 3.3, we can compute a generating set $\{\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_r\}$ for $\text{Syz}(G)$, therefore for each $i = 1, \dots, r$ $\mathbf{0} = \mathbf{s}_i G = \mathbf{s}_i(TF) = (\mathbf{s}_i T)F$, and hence $\langle \mathbf{s}_i T \mid i = 1, \dots, r \rangle \subset \text{Syz}(F)$. Moreover, if we let I_s be the $s \times s$ identity matrix, we have $(I_s - ST)F = F - STF = F - SG = F - F = \mathbf{0}$, and hence the rows $\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s$ of $I_s - TS$ are also in $\text{Syz}(F)$.

THEOREM 3.4. *With the notation above we have $\text{Syz}(\mathbf{f}_1, \dots, \mathbf{f}_s) = \langle \mathbf{s}_1 T, \dots, \mathbf{s}_r T, \mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s \rangle$.*

4 Application

For a given left- A -module M , using Theorem 3.4 we have a standard representation $M = A^s/N$ where N is a submodule of A^s . Using Theorem 3.4 again and repeatedly, we have the free resolution of M (2).

By above method, we can compute the free resolution of \mathcal{A}_2 -module $H^*(X; \mathbb{Z}/2)$ for topological space X . The author is writing a computer program to compute the E_2 -terms of Adams spectral sequence (1). The program will be available from the web page (http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~tomo_xi).

References

- [1] William W. Adams and Philippe Loustau, *An introduction to Gröbner bases*, Graduate Studies in Mathematics, vol. 3, American Mathematical Society, Providence, RI, 1994. MR MR1287608 (95g:13025)
- [2] Tomohiro Fukaya, *Application of groebner bases to the cup-length of oriented grassmann manifolds*, 2007. <http://arxiv.org/abs/0710.4033>
- [3] Huishi Li, *Noncommutative Gröbner bases and filtered-graded transfer*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1795, Springer-Verlag, Berlin, 2002. MR MR1947291 (2003i:16065)
- [4] John McCleary, *A user's guide to spectral sequences*, second ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics, vol. 58, Cambridge University Press, Cambridge, 2001. MR MR1793722 (2002c:55027)

DEPARTMENT OF MATHEMATICS
KYOTO-UNIVERSITY
KYOTO 606-8502
JAPAN

E-mail address: tomo_xi@math.kyoto-u.ac.jp

Web page: http://www.math.kyoto-u.ac.jp/~tomo_xi

Initial Boundary Value Problem for the Hasegawa-Wakatani equations

Shintaro KONDO, Atusi TANI
Department of Mathematics, Keio Univ.

Abstract

The Hasegawa-Wakatani equations are the nonlinear equations which describe the resistive drift wave turbulence in Tokamak. We proved the existence and uniqueness of a local strong solution for the initial boundary value problem for the Hasegawa-Wakatani equations. In this talk, I shall explain Tokamak and the Hasegawa-Wakatani equations and present my result

1 Hasegawa-Wakatani equations

Tokamak is an most advanced magnetic confinement device in which an axisymmetric plasma is confined in a vacuum region by a strong magnetic field (toroidal magnetic field) running along the long circumference of the torus. In a tokamak plasma is heated at very high temperatures until thermonuclear fusion of the nuclei occurs. There are two types of fluid model of plasmas which are a common tool to study fusion devices : one is to treat the plasma as a two-component fluid consisting of an electron fluid and an ion fluid, and the other is to treat it as a one-component fluid by assuming local charge neutrality [4]. The former is usually called two-fluid model, and the latter is usually called the magnetohydrodynamics (MHD) which is derived from the two-fluid model.

The energy losses observed in tokamak, are much greater than predicted by neoclassical transport theory [1]. It is also well known that spatial gradients in the plasma lead to drift waves. Therefore, it is considered that drift-wave turbulence is a natural cause of anomalous transport and that the dramatic reduction in confinement results from anomalous transport.

In 1983 Hasegawa and Wakatani derived the model equations (Hasegawa-Wakatani equations) describing the resistive drift wave turbulence in Tokamak from two fluid model [2], which consist of the coupled nonlinear partial differential equations for the perturbations of the density n and the electrostatic potential ϕ in the homogeneous strong magnetic field $\vec{B} = B_0 \vec{e}_3$ and the inhomogeneous plasma equilibrium density $\bar{n} = \bar{n}(r)$ ($x = (x_1, x_2, x_3) = (r \cos \theta, r \sin \theta, x_3)$). Here a magnetic field strength B_0 is constant.

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - (\nabla \phi \times \vec{e}_3) \cdot \nabla \right) \Delta \phi = -\frac{c_1}{\bar{n}} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\phi - n) + c_2 \Delta^2 \phi, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - (\nabla \phi \times \vec{e}_3) \cdot \nabla \right) (n + \log \bar{n}) = -\frac{c_1}{\bar{n}} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\phi - n), \end{cases} \quad (1.1)$$

Here $\vec{e}_3 = (0, 0, 1)$, $\nabla \phi \times \vec{e}_3 = \left(\frac{\partial \phi}{\partial x_2}, -\frac{\partial \phi}{\partial x_1}, 0 \right)$,

$$c_1 = \frac{T_e}{e^2 \eta \omega_{ci}} > 0, \quad c_2 = \frac{\mu}{\rho_s^2 \omega_{ci}} > 0 \quad \text{are constants,}$$

T_e is the electron temperature, e is the elementary charge, μ is the kinematic ion-viscosity coefficient, η is the resistivity, m_i is the ion mass.

$\omega_{ci} = \frac{eB_0}{m_i}$ is the cyclotron frequency, $\rho_s = \frac{1}{\omega_{ci}} \left(\frac{T_e}{m_i} \right)^{\frac{1}{2}}$ is the ion Larmor radius.

2 Initial condition and Boundary condition

We consider the initial boundary value problem for the Hasegawa-Wakatani equations.

Let us consider the problem: For an initial electrostatic potential ϕ_0 and an initial density n_0 and the background density $\bar{n} = \bar{n}(r)$, find $\phi = \phi(x, t)$ and $n = n(x, t)$ satisfying equations (1.1) in $Q_T = \Omega \times (0, T)$ and the initial and the boundary conditions

$$\begin{cases} n(x, 0) = n_0(x), \quad \phi(x, 0) = \phi_0(x) & \text{on } \Omega, \\ n(x, t) = \phi(x, t) = \Delta \phi(x, t) = 0 & \text{for } (x, t) \in \Gamma_1 \times (0, T), \\ n(x', -L, t) = n(x', L, t) & \text{for } (x', t) \in \omega \times (0, T), \\ \phi(x', -L, t) = \phi(x', L, t) & \text{for } (x', t) \in \omega \times (0, T), \\ \Delta \phi(x', -L, t) = \Delta \phi(x', L, t) & \text{for } (x', t) \in \omega \times (0, T). \end{cases} \quad (2.1)$$

Here $T > 0$, $\Omega = \omega \times (-L, L)$ is a 3-dimensional torus, $\omega = \{x' = (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \mid |x'| < l\}$, $\Gamma_1 = \partial\omega \times [-L, L]$, $\Gamma_2 = \omega \times \{x_3 = -L\}$, $\Gamma_3 = \omega \times \{x_3 = L\}$,

Let n as a new unknown function in place of $n + \log \bar{n}(r) - \log \bar{n}(l)$. Then the problem (1.1), (2.1) becomes

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - (\nabla \phi \times \vec{e}_3) \cdot \nabla \right) \Delta \phi = -\frac{c_1}{\bar{n}} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\phi - n) + c_2 \Delta^2 \phi & \text{in } Q_T, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - (\nabla \phi \times \vec{e}_3) \cdot \nabla \right) n = -\frac{c_1}{\bar{n}} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\phi - n) & \text{in } Q_T, \end{cases} \quad (2.2)$$

and (2.1).

3 Function space

We consider problem (2.2), (2.1) in Sobolev-Slobodetskii spaces defined as follows.

Let $T > 0$ and Ω be a domain in \mathbf{R}^3 . By $W_2^l(\Omega)$ we denote the space of functions $u(x)$, $x \in \Omega$, equipped with the finite norm

$$\|u\|_{W_2^l(\Omega)}^2 = \sum_{|k| < l} \|D_x^k u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \|u\|_{\dot{W}_2^l(\Omega)}^2$$

where

$$\|u\|_{\dot{W}_2^l(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha|=l} \|D_x^\alpha u\|_{L_2(\Omega)}^2$$

for integral l and

$$\|u\|_{\dot{W}_2^l(\Omega)}^2 = \sum_{|\alpha|=l} \int_{\Omega} \int_{\Omega} \frac{|D_x^\alpha u(x) - D_x^\alpha u(y)|^2}{|x - y|^{3+2(l-|\alpha|)}} dx dy$$

for nonintegral l . Here, $[l]$ is the integer part of l , and $D_x^\alpha u = \partial^{|\alpha|} u / \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_n^{\alpha_n}$ is the generalized derivative of order $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$, and $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_n)$ is a multi-index.

Similarly, by $W_2^l(0, T)$ (for nonintegral l) we denote the space of functions $u(x)$, $x \in \Omega$, equipped with the finite norm

$$\|u\|_{W_2^l(0, T)}^2 = \sum_{j=0}^{[l]} \|D_t^j u\|_{L_2(0, T)}^2 + \int_0^T \int_0^T \frac{|D_t^{[l]} u(t) - D_t^{[l]} u(\tau)|^2}{|t - \tau|^{1+2(l-[l])}} dt d\tau$$

The anisotropic Sobolev Slobodetskii space $W_2^{l, \frac{1}{2}}(Q_T)$ ($Q_T \equiv \Omega \times (0, T)$) is defined as $L_2(0, T; W_2^l(\Omega)) \cap L_2(\Omega; W_2^{\frac{1}{2}}(0, T))$, equipped with the finite norm

$$\begin{aligned} \|u\|_{W_2^{l, \frac{1}{2}}(Q_T)}^2 &= \|u\|_{W_2^{l, 0}(Q_T)}^2 + \|u\|_{W_2^{0, \frac{1}{2}}(Q_T)}^2 \\ &= \int_0^T \|u\|_{W_2^l(\Omega)}^2 dt + \int_{\Omega} \|u\|_{W_2^{\frac{1}{2}}(0, T)}^2 dx \end{aligned}$$

4 Main theorem

Our main theorem in this paper is Theorem 1.

Theorem 1 *Let $\bar{n} \in W_2^4(\Omega)$, $\inf_{x' \in \omega} \bar{n}(x') > 0$ and we assume that $(n_0, \phi_0) \in W_2^2(\Omega) \times W_2^4(\Omega)$ satisfy the compatibility conditions*

$$\begin{cases} \Delta \phi_0(x) = 0 & \text{for } x \in \Gamma_1, \\ n_0(x) = 0 & \text{for } x \in \Gamma_1, \\ \Delta \phi_0(x', L) = \Delta \phi_0(x', -L) & \text{for } x' \in \omega, \\ n_0(x', L) = n_0(x', -L) & \text{for } x' \in \omega, \end{cases}$$

Then there exists a unique strong solution (n, ϕ) to the problem (2.2), (2.1) on some $T > 0$ such that $(n, \phi) \in W_2^{2,1}(Q_T) \times L^2(0, T; W_2^4(\Omega))$, $\frac{\partial \phi}{\partial t} \in L^2(0, T; W_2^2(\Omega))$.

5 Outline of proof

In order to prove Theorem 1 we firstly consider the regularized problem

$$\begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial t} - (\nabla \phi \times \vec{e}_3) \cdot \nabla \right) \Delta \phi = -\frac{c_1}{\bar{n}} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\phi - n) + c_2 \Delta^2 \phi & \text{in } Q_T, \\ \left(\frac{\partial}{\partial t} - (\nabla \phi \times \vec{e}_3) \cdot \nabla \right) n \\ = -\frac{c_1}{\bar{n}} \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} (\phi - n) + \varepsilon \left(\frac{\partial^2 n}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 n}{\partial x_2^2} \right) & \text{in } Q_T. \end{cases} \quad (5.1)$$

and (2.1) with $\varepsilon > 0$.

For this problem we have

Theorem 2 Let $\bar{n} \in W_2^{1+l}(\Omega)$, $\inf_{x' \in \omega} \bar{n}(x') > 0$, $l \geq 0$, $l \in \mathbf{Z}$ and $0 < T < \infty$. Assume that $(n_0, \phi_0) \in W_2^{1+l}(\Omega) \times W_2^{3+l}(\Omega)$ satisfy the compatibility conditions

$$\begin{cases} \Delta \phi_0(x) = 0 & \text{for } x \in \Gamma_1, \\ n_0(x) = 0 & \text{for } x \in \Gamma_1, \\ \Delta \phi_0(x', L) = \Delta \phi_0(x', -L) & \text{for } x' \in \omega, \\ n_0(x', L) = n_0(x', -L) & \text{for } x' \in \omega, \end{cases}$$

Then the initial boundary value problem (5.1), (2.1) has a unique solution $(n_\varepsilon, \phi_\varepsilon) \in W_2^{2+l, 1+\frac{1}{2}}(Q_T) \times (L^2(0, T; W_2^{4+l}(\Omega)) \cap W_2^{1+\frac{1}{2}}(0, T; W_2^2(\Omega)))$.

Secondly we derive the uniform estimates of the solution to the regularized problem (5.1), (2.1). Finally, by passing to the limit $\varepsilon \rightarrow 0$, we prove the existence and uniqueness of the strong solution of the initial boundary value problem (2.2), (2.1) by the method of Kato [3].

References

- [1] S. J. Camargo, D. Biskamp, and B. D. Scott: Resistive drift-wave turbulence, *Phys. Plasmas*, **2** (1), 1070-664x/95/2(1)/48/15.
- [2] A. Hasegawa and M. Wakatani: Plasma Edge Turbulence, *Phys. Rev. Lett.*, **50** (1983), 682.
- [3] T. Kato: Nonstationary flows of viscous and ideal fluids in \mathbf{R}^3 , *J. Func. Anal.*, **9** (1972), 296-305.
- [4] K. Miyamoto: *Fundamentals of Plasma Physics and Controlled Fusion*, Iwanami (1997) (in Japanese).
- [5] V. A. Solonnikov: On general initial-boundary value problems for linear parabolic systems, *Proc. Steklov Math. Inst.*, **83** (1985), 3-162.
- [6] A. Tani, S. Itoh, N. Tanaka: The initial value problem for the Navier-Stokes equations with general slip boundary condition, *Adv. Math. Sci. Appl.*, **4** (1994), 51-69.

OPTIMAL COVARIANT MEASUREMENT OF MOMENTUM ON A HALF LINE IN QUANTUM MECHANICS

YUTAKA SHIKANO

1. INTRODUCTION

Quantum theory begins in 1899 with the discovery of the Planck law in black body radiation. Its formulation was initiated by Heisenberg and Schrödinger respectively. In 1932, von Neumann mathematically formulated quantum mechanics [2] as the following postulates.

Postulate 1 (Representations of states and observables). *Any quantum system \mathbf{S} is associated with a separable Hilbert space $\mathcal{H}_{\mathbf{S}}$, called the state space of \mathbf{S} . Any quantum state of \mathbf{S} is the element $|\psi\rangle$ of the Hilbert space and is represented in one-to-one correspondence by a positive operator $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$ with unit trace, called a density operator. Any observable of \mathbf{S} is represented in one-to-one correspondence by a self-adjoint operator A densely defined on $\mathcal{H}_{\mathbf{S}}$.*

Postulate 2 (Schrödinger equation). *If \mathbf{S} is isolated in a time interval (t, t') , there is a unitary operator U such that if \mathbf{S} is in ρ at t then \mathbf{S} is in $\rho = U\rho U^\dagger$ at t' .*

Postulate 3 (Born formula). *Any observable A takes the value in a Borel set Δ in any ρ with the probability $\text{Tr}[E^A(\Delta)\rho]$, where $E^A(\Delta)$ is the spectral projection of A corresponding to Δ .*

Postulate 4 (Composition rule). *The composite system $\mathbf{S}+\mathbf{S}'$ is the tensor product $\mathcal{H}_{\mathbf{S}} \otimes \mathcal{H}_{\mathbf{S}'}$ of their state spaces.*

While he discussed measuring processes, he failed to give the mathematical postulate of measurement. Thereafter Ozawa introduced the postulate of measurement [3] to consider the measured system and probe system.

Postulate 5 (Representation of generalized measurement). *When any observable A of the measured system is measured in any state ρ_{sys} before measurement, we obtain that the state after measurement is $M(\Delta)\rho_{\text{sys}} = \text{Tr}_{\text{env}}[U(\rho_{\text{sys}} \otimes \rho_{\text{prob}})U^\dagger]$ and A takes the value in a Borel set Δ with the probability $\text{Tr}_{\text{sys}}[\rho_{\text{sys}}M(\Delta)]$, where the time evolution operator is defined on the composite system $\mathcal{H}_{\text{sys}} \otimes \mathcal{H}_{\text{prob}}$.*

$M(\Delta)$ is often called positive operator valued measure (POVM) or completely positive trace preserving (CPTP) map of measurement. The concept of measurement is illustrated in Fig. 1. So measurement is represented by a POVM while an interaction between a measured and probe system is not known. To consider an experimental setup of measurement, we need to know the interaction. We now derive the measurement interaction from a given POVM under a specific condition about measurement of a momentum on a half line.

This technical report is for the talk at "The 4th COE Conference for Young Researchers" held at Hokkaido university and is based on the work [1] with Prof. Akio Hosoya.

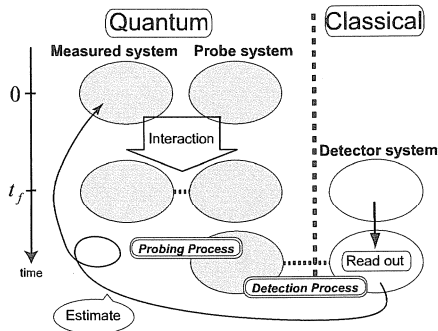


FIGURE 1. Scheme of measuring processes. We switch on the interaction between the measured and probe systems in the first step to obtain the measurement outcome of the probe system in the second step. We infer the observable of the measured system at $t = 0$ from the outcome of the probe system at $t = t_f$ in the third step.

2. QUANTUM MECHANICS ON A HALF LINE

Let us specifically consider a quantum system on a half line $\mathbb{R}_+ \equiv [0, \infty)$ and take a Hilbert space $\mathcal{H}_+ \equiv \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$ and a momentum operator \hat{p}_+ in \mathcal{H}_+ defined by $\hat{p}_+ = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ with

$$(1) \quad \mathcal{D}(\hat{p}_+) = \left\{ \psi \in \mathcal{H}_+; \psi(0) = 0, \int_0^\infty \left| \frac{d}{dx} \psi(x) \right|^2 dx < \infty \right\}$$

in analogy to the standard momentum operator on a whole line. Throughout this report, we take the unit $\hbar = 1$. Then \hat{p}_+ is symmetric noting that $\hat{p}_+^\dagger = \frac{1}{i} \frac{d}{dx}$ with

$$(2) \quad \mathcal{D}(\hat{p}_+^\dagger) = \left\{ \psi \in \mathcal{H}_+; \int_0^\infty \left| \frac{d}{dx} \psi(x) \right|^2 dx < \infty \right\}.$$

Then it follows that $(\hat{p}_+, \mathcal{D}(\hat{p}_+)) \subsetneq (\hat{p}_+^\dagger, \mathcal{D}(\hat{p}_+^\dagger))$ since $\mathcal{D}(\hat{p}_+) \neq \mathcal{D}(\hat{p}_+^\dagger)$ and the momentum operator \hat{p}_+ on a half line is symmetric but not self-adjoint, i.e., not an observable. So we extend the domain of \hat{p}_+ *à la* Naimark so that the extended operator \hat{p} is self-adjoint. The extended Hilbert space is

$$(3) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \otimes \mathcal{H}_2,$$

where $\mathcal{H} \equiv \mathcal{L}^2(\mathbb{R})$, $\mathcal{H}_+ \equiv \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_+)$ and \mathcal{H}_2 is a two dimensional Hilbert space of the two level system with the orthonormal bases $|0\rangle$ and $|1\rangle$. We choose the form of the extended momentum operator as

$$(4) \quad \hat{p} = \hat{p}_+ \otimes |0\rangle\langle 0| - \hat{p}_+ \otimes |1\rangle\langle 1|.$$

By the unitary transformation Π_1 , which is a space inversion around the zero point only for the spin state $|1\rangle$, the Hilbert space \mathcal{H} is unitarily equivalent to

$$(5) \quad \mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \otimes |0\rangle + \mathcal{H}_- \otimes |1\rangle = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-,$$

where $\mathcal{H}_- \equiv \mathcal{L}^2(\mathbb{R}_-)$ and $\mathbb{R}_- \equiv (-\infty, 0]$. Then we transform the extended momentum operator (4) by Π_1 as

$$(6) \quad \Pi_1 \hat{p} \Pi_1^\dagger = \hat{p}_+ \otimes |0\rangle\langle 0| + \hat{p}_- \otimes |1\rangle\langle 1|,$$

where \hat{p}_+ and \hat{p}_- are momentum operators having domains,

$$(7) \quad \begin{aligned} \mathcal{D}(\hat{p}_+) &= \left\{ \psi \in \mathcal{H}_+ ; \psi(0) = 0, \int_0^\infty \left| \frac{d}{dx} \psi(x) \right|^2 < \infty \right\} \\ \mathcal{D}(\hat{p}_-) &= \left\{ \psi \in \mathcal{H}_- ; \psi(0) = 0, \int_{-\infty}^0 \left| \frac{d}{dx} \psi(x) \right|^2 < \infty \right\}, \end{aligned}$$

respectively. Then the extended operator \hat{p} becomes self-adjoint since the domain is the Hilbert space for the whole line system. In what follows, we consider how to optimally measure the extended operator \hat{p} .

3. DEFINITION OF OPTIMAL COVARIANT MEASUREMENT

Definition 1. A POVM $M(dp)$ is covariant with respect to the representation $p \rightarrow V_p$ if

$$(8) \quad V_p^\dagger M(\Delta) V_p = M(\Delta - p), \quad p \in \Omega$$

for any $\Delta \in \mathcal{A}(\Omega)$, where

$$(9) \quad \Delta_p = \{p' | p' = p + p'', p'' \in \Delta\}$$

is the image of the set Δ under the transformation p and $\mathcal{A}(\Omega)$ is the Borel σ -field of Ω and $V_p \equiv e^{-ip\hat{x}}$ is a projective unitary representation of the shift group.

Definition 2. A measurement is called a covariant measurement if a POVM representing the measurement is covariant.

Notation 1. A notation $[\cdot]$ is introduced as the follows. By von Neumann's spectral theorem, any Hilbert space \mathcal{H} can be formally described as the direct integral of a Hilbert space \mathcal{H}_x , $\mathcal{H} = \int \oplus \mathcal{H}_x dx$, so that any state vector $\psi \in \mathcal{H}$ is described by the vector-valued function $\psi = [\psi_x]$ with $\psi_x \in \mathcal{H}_x$. Furthermore, a kernel $[K(x, x')]$, where $K(x, x')$ is a mapping from $\mathcal{H}_{x'}$ to \mathcal{H}_x for all x and x' , defines an operator \hat{K} on \mathcal{H} . We can write

$$(10) \quad \hat{K}\psi = [K(x, x')] [\psi_{x'}] = \left[\int K(x, x') \psi_{x'} dx' \right], \quad \psi \in \mathcal{H}, \quad \hat{K} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Theorem 1 (Holevo [4]). Any covariant POVM to measure a momentum in \mathcal{H} has the form

$$(11) \quad M(dp) = \left[K(x, x') e^{i(x-x')p} \frac{dp}{2\pi} \right],$$

where $[K(x, x')]$ is a positive definite kernel satisfying $K(x, x) \equiv I_x$, the identity mapping from \mathcal{H}_x to itself.

Definition 3 (Helstrom [5]). A measurement is called an optimal measurement if the system observable is optimally evaluated by the outcome of the probe observable.

Let us assume that $W(p-P)$ is a deviation function, which expresses the variance between the inferred "measurement" outcome p of the system momentum before the interaction and the measurement outcome P of the probe momentum after the interaction, satisfying

$$(12) \quad W(p) = - \int e^{ipx} \tilde{W}(dx),$$

for an even finite measure $\tilde{W}(dx)$ on \mathbb{R} . Any measurement is limited to covariant measurement. Then the condition for optimal measurement is to minimize the variance

$$(13) \quad R_p\{M\} = \int_{\mathbb{R}} W(p-P)\mu_\rho(dp),$$

where $\mu_\rho(dp) \equiv \text{Tr } \rho M(dp)$ is the probability distribution for the pure state $\rho = |\psi\rangle\langle\psi|$.

Theorem 2 (Holevo [6, 7]). *An optimal covariant POVM $M_0(dp)$ to measure a momentum in \mathcal{H} has the form*

$$(14) \quad M_0(dp) = \left[\frac{\psi_x \cdot \psi_{x'}^\dagger}{\|\psi_x\|_x \|\psi_{x'}\|_{x'}} e^{i(x-x')p} \frac{dp}{2\pi} \right].$$

Note that Eq. (14) does not depend on the choice of the deviation function $W(p-P)$ because of the covariance. The details of the proof of these theorems are shown in [1, 7]. To make our exposition shorter, we assume that the wave functions $\{\psi_x\}$ are always normalized and the measure $\frac{dp}{2\pi}$ is omitted in Eq. (14). Then Eq. (14) is simply

$$(15) \quad M_0 = \left[\psi_x \cdot \psi_{x'}^\dagger e^{i(x-x')p} \right].$$

4. MAIN RESULT

We show in the following section that a model Hamiltonian,

$$(16) \quad \hat{\mathcal{H}}_{com} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2M}\hat{P}^2 + g\hat{P}\hat{x}\delta(t) + \frac{m\omega^2}{2}\hat{x}^2 \equiv \hat{\mathcal{H}}_0 + g\hat{P}\hat{x}\delta(t),$$

leads to the optimal covariant POVM (15), where a pair (\hat{x}, \hat{p}) are the position and the momentum operators of the measured system, a pair (\hat{X}, \hat{P}) are those of the probe system and $\delta(t)$ is the Dirac δ -function. We take the potential of the measured system as a harmonic oscillator for simplicity and the probe system is assumed to be a free particle system and the interaction be instantaneous with a coupling constant g .

5. OPTIMAL COVARIANT MEASUREMENT MODEL

Let us assume that the measured system itself is weakly coupled to a bulk system at zero temperature. We consider the measuring process from the time $t = 0-$ to $t = t_f$. From Eq. (16) the evolution operator \hat{U} becomes

$$(17) \quad \begin{aligned} \hat{U} &= \text{T exp} \left(-i \int_{0-}^{t_f} \hat{\mathcal{H}}_{com} dt \right) \\ &= \text{T exp} \left(-i \int_{\epsilon}^{t_f} \hat{\mathcal{H}}_0 dt \right) \exp \left(-i \int_{-\epsilon}^{\epsilon} g\hat{P}\hat{x}\delta(t) dt \right) \\ &= \text{T exp} \left(-i \int_{\epsilon}^{t_f} \hat{\mathcal{H}}_0 dt \right) \exp \left(-ig\hat{P}\hat{x}(0) \right), \end{aligned}$$

where ϵ is an infinitesimal positive parameter and T stands for the time-ordered product.

We construct the Kraus operator $[\hat{A}_{xx'}]$ from the evolution operator as follows. Given the initial probe state $|\tilde{P}\rangle$, an eigenstate of the momentum \hat{P} of the probe system, we see that

$$\begin{aligned} \hat{A}_{xx'} &= \int \langle P | \langle x | \hat{U} | x' \rangle | \tilde{P} \rangle dP \\ &= \sum_j \langle x | T \exp \left(-i \int_{\epsilon}^{t_f} \hat{H}_0 dt \right) | j \rangle \psi_{x',j}^\dagger \exp \left(-ig\tilde{P}x(0) \right) \\ (18) \quad &\rightarrow \psi_x \cdot \psi_x^\dagger \exp \left(-ig\tilde{P}x(0) \right) \text{ as } t_f \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

where $|P\rangle$ is an eigenstate of \hat{P} , $\psi_{x,j}$ is a wave function corresponding to the j -th energy eigenstate $|j\rangle$ and $\psi = [\psi_x]$ is the ground state of the free Hamiltonian \hat{H}_0 . In the last line of (18), the ground state is picked up in the limit $t_f \rightarrow \infty$, or physically speaking, we measure the probe observable after sufficient time passes. Recall that the standard $i\epsilon$ prescription [8] implicitly assumes that the measured system itself is weakly coupled to the bulk system at zero temperature. The equation (18) is the matrix element of the Kraus operator $[\hat{A}_{xx'}]$.

From the Kraus operator, we calculate the POVM as

$$(19) \quad M = \left[\int \hat{A}_{x'x''}^\dagger \hat{A}_{xx''} dx'' \right] = \left[\psi_{x'}^\dagger \cdot \psi_x \exp \left(-ig\tilde{P}\{x(0) - x'(0)\} \right) \right].$$

We identify $g\tilde{P}$ with the measurement outcome P itself of the probe observable to reproduce the optimal covariant POVM (15) on a whole line.

Finally, we consider the case where the extended system is reduced to the original half line system. In the extended system, we obtain the calculated POVM explicitly as

$$(20) \quad \Pi M \Pi_1^\dagger = \left[\psi_{x_+} \cdot \psi_{x'_+}^\dagger e^{i(x_+ - x'_+)p_+} \right] \otimes |0\rangle\langle 0| + \left[\psi_{x_-} \cdot \psi_{x'_-}^\dagger e^{i(x_- - x'_-)p_-} \right] \otimes |1\rangle\langle 1|.$$

By taking the partial trace over \mathcal{H}_2 , we obtain the reduced POVM

$$(21) \quad \tilde{M}_0 \equiv \text{Tr}_2 M = \left[\psi_{x_+} \cdot \psi_{x'_+}^\dagger e^{i(x_+ - x'_+)p_+} \right],$$

up to a normalization constant. Here in Eq. (21), we have transformed (19) back to M by the unitary operator Π_1 and reproduced the optimal covariant POVM (15) restricted to positive parameters x and x' .

REFERENCES

- [1] Y. Shikano and A. Hosoya, e-Print: *arXiv:0710.1724*.
- [2] J. von Neumann, *Mathematische Grundlagen der Quantumechanik* (Springer, Berlin, 1932), [*Mathematical foundations of quantum mechanics* (Princeton University Press, Princeton, 1955).]
- [3] M. Ozawa, *J. Math. Phys.* **25**, 79-87 (1984).
- [4] A. S. Holevo, *Rep. Math. Phys.* **13**, 379-399 (1978).
- [5] C. W. Helstrom, *Int. J. Theor. Phys.* **11**, 357-378 (1974).
- [6] A. S. Holevo, *Rep. Math. Phys.* **16**, 385-400 (1979).
- [7] A. S. Holevo, *Probabilistic and statistical aspects of quantum theory* (North-Holland, Amsterdam, 1982).
- [8] E. S. Abers and B. W. Lee, *Phys. Rep.* **9**, 1-141 (1973).

DEPARTMENT OF PHYSICS, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY
E-mail address: shikano@th.phys.titech.ac.jp

BICOLOR-ELIMINABLE MULTIPLICITIES ON THE BRAID ARRANGEMENT

TAKURO ABE, KOJI NUIDA AND YASUHIDE NUMATA

0. INTRODUCTION

A *hyperplane arrangement* (or simply an *arrangement*) is a finite collection of affine hyperplanes in a fixed vector space V over a field \mathbb{K} , and a map from an arrangement to non-negative integers is called a *multiplicity*. A pair of an arrangement and a multiplicity is called a *multiarrangement*. This is a very simple geometric object, but there are a lot of interesting problems on arrangements. Among them, one of the most interesting problems is the connection between its algebraic and combinatorial structure. In this abstract, we introduce some basic definitions, results and concepts of (multi-)arrangement theory, and give a survey of our recent result which completely classifies some algebraic structure of multi-braid arrangements in terms of the combinatorics of edge-bicolored graphs.

Acknowledgement. The authors are grateful to the CCYR4 organizing committee for giving us an opportunity to talk in this conference. Furthermore, we would like to show our deep gratitude to the COE program in Hokkaido University, not only for holding CCYR4, but also for CCYR2 where all the authors met each other first. Since every author has been indispensable for doing this research, we are sure that the CCYR made an essential contribution to our work.

1. HYPERPLANE ARRANGEMENTS

In this section we introduce some elementary definitions and results on (multi)arrangements of hyperplanes, for which we refer the reader to [6].

1.1. Fundamental Definitions. Let \mathbb{K} be a field of characteristic zero and $V = V^\ell$ be an ℓ -dimensional vector space over \mathbb{K} . A *hyperplane arrangement* \mathcal{A} is a finite collection of affine hyperplanes in V . An arrangement \mathcal{A} is *central* if each hyperplane $H \in \mathcal{A}$ is a vector subspace of V . In this article we assume that every arrangement is central. An (multi)arrangement in V^ℓ is called an ℓ -*(multi)arrangement*.

1.2. Logarithmic vector fields. In this subsection we introduce a module of logarithmic vector fields associated to a multiarrangement. Let $\{x_1, \dots, x_\ell\}$ be a basis for V^* , S the symmetric algebra of V^* (hence $S \simeq \mathbb{K}[x_1, \dots, x_\ell]$) and $\text{Der}_{\mathbb{K}}(S)$ the set of \mathbb{K} -linear derivations of S . For a multiarrangement (\mathcal{A}, m) and each hyperplane $H \in \mathcal{A}$, fix a linear form $\alpha_H \in V^*$ such that $\ker(\alpha_H) = H$.

Definition 1.1. For a multiarrangement (\mathcal{A}, m) , the S -module of logarithmic vector fields $D(\mathcal{A}, m)$ is defined by

$$D(\mathcal{A}, m) := \{\theta \in \text{Der}_{\mathbb{K}}(S) \mid \theta(\alpha_H) \in S\alpha_H^{m(H)} \ (\forall H \in \mathcal{A})\}.$$

Roughly speaking, $D(\mathcal{A}, m)$ consists of the vector fields tangent to each hyperplane in \mathcal{A} with a given multiplicity. In general, $D(\mathcal{A}, m)$ is a reflexive S -module but not necessarily free. For example, (\mathcal{A}, m) is always free if \mathcal{A} is an arrangement of coordinate hyperplanes in V , but (\mathcal{A}, m) is not free for any $m : \mathcal{A} \rightarrow \mathbb{Z}_{>0}$ if \mathcal{A} consists of hyperplanes in a general position. To decide which (\mathcal{A}, m) is free has been paid much attention to as a very important problem.

Definition 1.2. A multiarrangement (\mathcal{A}, m) is free if $D(\mathcal{A}, m)$ is a free S -module of rank ℓ . If $D(\mathcal{A}, m)$ is free with a homogeneous basis $\{\theta_1, \dots, \theta_\ell\}$, then the exponents $\text{exp}(\mathcal{A}, m)$ of (\mathcal{A}, m) are defined by $\text{exp}(\mathcal{A}, m) := (\deg(\theta_1), \dots, \deg(\theta_\ell))$, where $\deg(\theta_i) := \deg(\theta_i(\alpha_i))$ for some linear form α_i with $\theta_i(\alpha_i) \neq 0$.

To determine when a multiarrangement (\mathcal{A}, m) is free is a very difficult problem. Even when $m \equiv 1$ there are only few results. Among them, let us introduce a beautiful characterization of freeness of some arrangements by Stanley in the next subsection.

1.3. Graphic arrangements and their freeness.

Definition 1.3. The braid arrangement \mathcal{A}_ℓ in $V^{\ell+1}$, or the Coxeter arrangement of type A_ℓ is defined as

$$\{H_{ij} := \{x_i - x_j = 0\} \mid 1 \leq i, j \leq \ell + 1\}.$$

A graphic arrangement \mathcal{B} is a subarrangement of the braid arrangement \mathcal{A}_ℓ .

To express a graphic arrangement \mathcal{B} , let us use a graph G consisting of the set of vertices $V_G = \{1, 2, \dots, \ell + 1\}$ and the set of non-directed edges E_G . Define an arrangement \mathcal{A}_G with respect to G by

$$\mathcal{A}_G := \{H_{ij} \mid \{i, j\} \in E_G\},$$

where $\{i, j\}$ denotes the edge between i and j . Then there is a one to one correspondence between graphic arrangements and graphs defined above. Now let us consider whether we can characterize the freeness

of graphic arrangements in terms of graphs. The answer is affirmative due to Stanley. To state his result, we need some definitions.

Definition 1.4. *Let G be a graph as above. A subgraph $C \subset G$ is a cycle if C consists of vertices i_1, \dots, i_s ($s \geq 3$) and $\{\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \dots, \{i_{s-1}, i_s\}, \{i_s, i_1\}\} \subset E_C$. A chord of a cycle C is an edge $\{i, j\}$ for non-consecutive vertices i, j on the cycle C . A graph G is chordal if every cycle $C \subset G$ with $|C| > 3$ has a chord.*

It is known that a graph is chordal if and only if its vertex set admits a vertex elimination order, see [4]. By using chordal graphs, Stanley gave a complete classification of free graphic arrangements as follows:

Theorem 1.1 ([7]). *A graphic arrangement \mathcal{A}_G is free if and only if G is chordal.*

Then it is natural to consider whether we can generalize Stanley's characterization to multi-braid arrangements. In the next section we introduce a generalized chordal graph, i.e., a bicolor-eliminable graph and give a complete classification of free multi-braid arrangements with specific multiplicities.

2. BICOLOR-ELIMINABLE GRAPHS AND THE MAIN RESULT

2.1. Main theorem. Let $2k$ be a constant multiplicity on \mathcal{A}_ℓ and $m : \mathcal{A}_\ell \rightarrow \{-1, 0, 1\}$. We classify the freeness of multiarrangements $(\mathcal{A}_\ell, 2k + m)$. For that purpose, let us introduce a graph G consisting of the set of vertices $V_G = \{v_1, v_2, \dots, v_{\ell+1}\}$ and the set of edges E_G which has the decomposition $E_G = E_G^+ \cup E_G^-$ with $E_G^+ \cap E_G^- = \emptyset$. These two sets of edges correspond to the coloring of edges of G .

Definition 2.1. *The map m_G on the braid arrangement \mathcal{A}_ℓ is defined by*

$$m_G(H_{ij}) := \begin{cases} 1 & \text{if } \{v_i, v_j\} \in E_G^+, \\ -1 & \text{if } \{v_i, v_j\} \in E_G^-, \text{ and} \\ 0 & \text{otherwise.} \end{cases}$$

To characterize the freeness of $(\mathcal{A}_\ell, 2k + m_G)$, let us introduce the following concept of graphs.

Definition 2.2. *The graph G is bicolor-eliminable with a bicolor-elimination ordering $\nu : V_G \rightarrow \{1, 2, \dots, \ell + 1\}$ if ν is bijective, and for every three vertices $v_i, v_j, v_k \in V_G$ with $\nu(v_i), \nu(v_j) < \nu(v_k)$, the induced subgraph $G|_{\{v_i, v_j, v_k\}}$ is not one of the following types:*

- (1) For $\sigma \in \{+, -\}$, $\{v_i, v_k\}$ and $\{v_j, v_k\}$ are edges in E_G^σ and $\{v_i, v_j\} \notin E_G^\sigma$.
- (2) For $\sigma \in \{+, -\}$, $\{v_k, v_i\} \in E_G^\sigma$, $\{v_i, v_j\} \in E_G^{-\sigma}$ and $\{v_k, v_j\} \notin E_G$.

For a bicolor-eliminable graph G , $v \in V_G$ and $i \in \{1, \dots, \ell+1\}$, define the degree $\widetilde{\deg}_i(v)$ by

$$\widetilde{\deg}_i(v) := \deg(v, V_G, E_G^+|_{\nu^{-1}(1,2,\dots,i)}) - \deg(v, V_G, E_G^-|_{\nu^{-1}(1,2,\dots,i)}),$$

where $\deg(w, V_H, E_H) := |\{x \in V_H \mid \{w, x\} \in E_H\}|$ is the degree of the vertex w in the graph $H = (V_H, E_H)$, and $(V_G, E_G^o|_S)$ with respect to $S \subset V_G$ is the induced subgraph of G whose set of edges consists of $\{\{i, j\} \in E_G \mid i, j \in S\}$. Furthermore, define $\widetilde{\deg}_i := \widetilde{\deg}_i(\nu^{-1}(i))$ for each $i \in \{1, \dots, \ell+1\}$.

Then our classification result is as follows:

Theorem 2.1 ([1], Theorem 0.3). *Let \mathcal{A} be the braid arrangement in $V^{\ell+1}$, G an edge-bicolored graph. Let k be a positive integer and $n_1, \dots, n_{\ell+1}$ non-negative integers. Define a multiarrangement $(\mathcal{A}, m) = \mathcal{A}_\ell(n_1, n_2, \dots, n_{\ell+1})[G]$ by $m(H_{ij}) = 2k + n_i + n_j + m_G(H_{ij})$ and put $N = (\ell+1)k + \sum_{i=1}^{\ell+1} n_i$. Then the multiarrangement $\mathcal{A}_\ell(n_1, n_2, \dots, n_{\ell+1})[G]$ is free with*

$$\exp(\mathcal{A}, m) = (0, N + \widetilde{\deg}_2, \dots, N + \widetilde{\deg}_{\ell+1})$$

if and only if G is bicolor-eliminable.

2.2. Tools to prove Theorem 2.1. The proof of Theorem 2.1 requires long and complicated arguments. Hence we only exhibit the results which play the key roles in that proof. For the explicit proof and details, see [1].

First, we introduce the theorem to show the freeness of multiarrangements. Let (\mathcal{A}, m) be a multiarrangement in an ℓ -dimensional vector space and fix $H_0 \in \mathcal{A}$ such that $m(H_0) > 0$. Define the *deletion* (\mathcal{A}', m') of (\mathcal{A}, m) with respect to H_0 by $\mathcal{A}' = \mathcal{A}$ and

$$m'(H) = \begin{cases} m(H) & \text{if } H \neq H_0, \\ m(H_0) - 1 & \text{if } H = H_0. \end{cases}$$

Theorem 2.2 ([3], Theorem 0.4). *If (\mathcal{A}, m) and (\mathcal{A}', m') are both free, then there exists a basis $\{\theta_1, \dots, \theta_\ell\}$ for $D(\mathcal{A}', m')$ such that for some $k \in \{1, \dots, \ell\}$, it holds that $\{\theta_1, \dots, \theta_{k-1}, \alpha_{H_0}\theta_k, \theta_{k+1}, \dots, \theta_\ell\}$ is a basis for $D(\mathcal{A}, m)$.*

For $X \in \mathcal{A}'' := \{H' \cap H_0 \mid H' \in \mathcal{A} \setminus \{H_0\}\}$, let $\mathcal{A}_X := \{H \in \mathcal{A} \mid X \subset H\}$ and $m_X := m|_{\mathcal{A}_X}$. Since \mathcal{A}_X is essentially a 2-multiarrangement, it is free with a basis $\{\zeta_3, \zeta_4, \dots, \zeta_\ell, \theta_X, \psi_X\}$ with $\deg(\zeta_i) = 0$, $\theta_X \notin \alpha_{H_0} \text{Der}_{\mathbb{K}}(S)$ and $\psi_X \in \alpha_{H_0} \text{Der}_{\mathbb{K}}(S)$ by Theorem 2.2. Then we define the *Euler multiplicity* m^* on \mathcal{A}'' by $m^*(X) := \deg(\theta_X)$, and we call (\mathcal{A}'', m^*) the *Euler restriction*.

Theorem 2.3 ([3], Theorem 0.8). *Let (\mathcal{A}, m) , (\mathcal{A}', m') and (\mathcal{A}'', m^*) be the triple with respect to H_0 . Then any two of the following statements imply the third:*

- (i) (\mathcal{A}, m) is free with $\exp(\mathcal{A}, m) = (d_1, \dots, d_{\ell-1}, d_\ell)$.
- (ii) (\mathcal{A}', m') is free with $\exp(\mathcal{A}', m') = (d_1, \dots, d_{\ell-1}, d_\ell - 1)$.
- (iii) (\mathcal{A}'', m^*) is free with $\exp(\mathcal{A}'', m^*) = (d_1, \dots, d_{\ell-1})$.

In particular, if (\mathcal{A}, m) and (\mathcal{A}', m') are both free, then all the statements (i), (ii) and (iii) above hold.

Theorem 2.3 is of an importance when we prove the “if” part of Theorem 2.1. Next, let us introduce the result to prove the non-freeness of multiarrangements, see [2] for details.

Theorem 2.4 ([2], Corollary 4.6). *If a multiarrangement (\mathcal{A}, m) is free, then $GMP(k) = LMP(k)$ ($1 \leq k \leq \ell$), where $GMP(k)$ is the k -th global mixed product of (\mathcal{A}, m) and $LMP(k)$ is the k -th local mixed product of (\mathcal{A}, m) .*

Also, it is very important to investigate the property and characterization of bicolor-eliminable graphs. In particular, the following two theorems play the crucial roles in the proof of Theorem 2.1.

Theorem 2.5 ([1], Theorem 2.5). *If G is bicolor-eliminable, then G always has a complete bicolor-eliminable filtration (see [1] for the definition).*

Theorem 2.6 ([5], Theorem 5.1). *Let G be an edge-bicolored graph. Then G is bicolor-eliminable if and only if the following three conditions are satisfied:*

- (C1) *Both graphs (V_G, E_G^+) and (V_G, E_G^-) are chordal.*
- (C2) *Any induced subgraph of G with four vertices is bicolor-eliminable.*
- (C3) *G contains no mountains nor hills (see [5] for the definitions).*

For details, see [1] and [5]. Also note that Theorems 2.1, 2.5 and 2.6 show that a bicolor-eliminable graph is a generalization of a chordal graph.

REFERENCES

- [1] T. Abe, K. Nuida and Y. Numata, Bicolor-eliminable graphs and free multiplicities on the braid arrangement. arXiv:0712.4110.
- [2] T. Abe, H. Terao and M. Wakefield, The characteristic polynomial of a multiarrangement. *Adv. in Math.* **215** (2007), 825–838.
- [3] T. Abe, H. Terao and M. Wakefield, The Euler multiplicity and addition-deletion theorems for multiarrangements. To appear in *J. London Math. Soc.*, arXiv:math/0612739.
- [4] D. R. Fulkerson and O. A. Gross, Incidence matrices and interval graphs. *Pac. J. Math.* **15**, 835–855 (1965).
- [5] K. Nuida, A characterization of edge-bicolored graphs with generalized perfect elimination orderings. arXiv:0712.4118.
- [6] P. Orlik and H. Terao, Arrangements of hyperplanes. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, **300**. Springer-Verlag, Berlin, 1992.
- [7] R. P. Stanley, Supersolvable lattices. *Algebra Universalis* **2** (1972), 197–217.

ホッジ分解を用いたクォークの閉じ込め問題の解析

Study of quark confinement with Hodge decomposition approach

作道 直幸
京都大学大学院理学研究院

概要

The quark confinement mechanism is one of the most important problems in particle physics, and is listed as the 7 difficult mathematical problems of the New Millennium by Clay Mathematics Institute. In this problem, it is suggested that the monopole singularity of the Yang-Mills field plays a crucial role. To extract the singularity, we introduce the Hodge decomposition of the Yang-Mills field, and numerically study the role of the singularity for confinement in the lattice gauge theory.

1 クォークの閉じ込めの双対超伝導描像

1.1 クォークの閉じ込め

核子はクォーク 3 個からできていることが知られている。しかし、クォークが核子からできている、と言っても、核子をバラバラにして単独のクォークを得ることはできない。このことを、「クォークの閉じ込め」という。実際、クォークは、電荷が $\frac{2}{3}e$ と $-\frac{1}{3}e$ なので、もし単独のクォークが存在すれば、分数の電荷が観測されるはずだが、そのような実験事実はなく、今までに発見されている安定なハドロンは全て、クォークと反クォークの対である中間子、または 3 体のクォークの組であるバリオンとして現れることが知られている。通常、十分大きなエネルギーを加えれば、複合粒子から構成粒子が分離する。しかし、クォークと反クォークの束縛状態である中間子に十分大きなエネルギーを加えても、単独のクォークは観測されない。その代わりに、新たなクォークと反クォークが対生成して、2つの中間子へと分離する。簡単のため粒子の対生成を無視すると、このことは、クォーク・反クォーク間に働くポテンシャルエネルギーが、無限遠で無限大になることを示している。なぜなら、ポテンシャルエネルギーが無限遠で有限になるならば、それ以上のエネルギーを加えれ

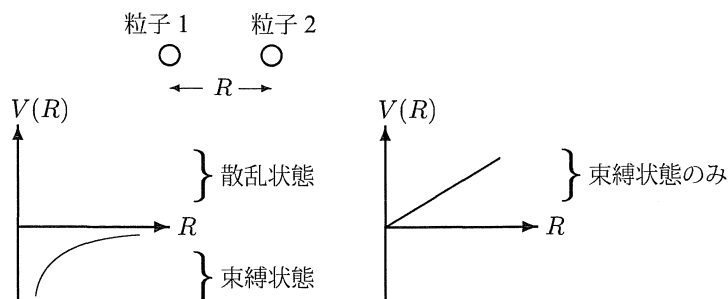


図 1 非閉じ込めポテンシャル (左) と閉じ込めポテンシャル (右) の例

ば、単独のクォークを単離できるからである(図1)。例えば、電子と原子核からなる原子や、核子からなる原子核のような通常の束縛状態では、十分大きなエネルギーを加えれば、構成粒子を分離することができる。このポテンシャルエネルギーの振る舞いをはじめとしたクォークの力学を記述するのは、SU(3)ゲージ場の量子論であり、量子色力学(Quantum Chromodynamics, QCD)と呼ばれる。QCDのような、非可換ゲージ理論では、漸近的自由性という性質があって、長距離の現象は強結合的となり、摂動論が使えない。しかし、後述する格子ゲージ理論を用いれば、長距離での計算もすることができて、ポテンシャルを求めることができる。格子ゲージ理論を用いた数値計算や極限での解析計算によると、ポテンシャルは、

$$V(R) = -\frac{\alpha}{R} + \sigma R + C \quad (\alpha > 0, \sigma > 0) \quad (1)$$

で上手く再現できる。特に、長距離ではポテンシャルは線形に増大し、無限遠で無限大になるので、クォークが閉じ込められていることがわかる。

1.2 双対超伝導描像

長距離で、ポテンシャルが線形になるということは、クォーク・反クォーク間のカラー電気力線は、1次元的に絞られていることを示唆している(表1)。これは、もっと直接的には、場のエネルギーの密度分布の数値計算や、ハドロンのレッジ軌跡などで裏付けられている。ただし、QCDは長距離で摂動論が使えないため、カラー電気力線が絞られる物理的な機構は、現在、完全には明らかにされていない。

空間次元	1	2	3
ポテンシャル	R	$\ln R$	$-1/R$

表1 空間の次元とポテンシャルの関係

この機構の説明として、我々は、南部陽一郎、トーフトラが提唱した、超伝導現象とのアナロジーを用いる。常伝導状態の物質は磁場の侵入を許すのに対して、超伝導体は、磁場の侵入を許さない。その結果、超伝導体中に正磁荷と負磁荷の対を埋め込むと、行き場を失った磁場は、超伝導状態を壊し、1次元的な磁場の束を作る。つまり、本来、3次元的に広がるはずの磁場が、周りの超伝導体によって1次元的に絞られる(図2)。磁荷とカラー電荷、磁場とカラー電場という違いがあるが、QCDの真空も、超伝導体のような性質を持っていて、クォーク・反クォーク間のカラー電場を1次元的に絞っている、という考え方が、クォークの閉じ込めの双対超伝導描像である。現在のところ、この考え方が正しいかどうかはわかっていないが、正しいと考えられるいくつかの証拠は見つかっている。我々の数値計算からも、これを支持する結果が得られた。以下では、この数値計算の基礎となっている格子ゲージ理論について説明する。

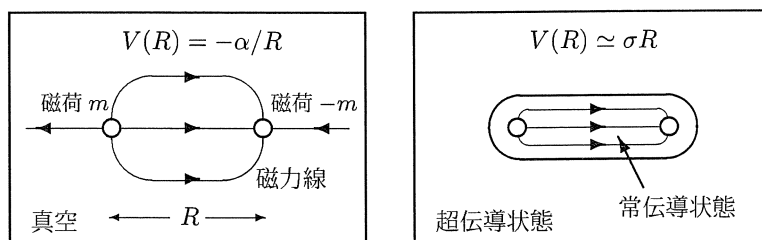


図2 磁荷の対から湧き出る磁場 左：真空中 右：超伝導体中

2 格子ゲージ理論

2.1 格子ゲージ理論のブラケット作用

周期境界条件を持った、格子間隔 $a \in \mathbb{R}$, $N_1 \times N_2 \times N_3 \times N_4 \in \mathbb{Z}^4$ の有限な大きさの 4 次元正方格子を時空とみなして、その格子の上で場の理論を構成する。格子の頂点をサイト、辺をリンクと言う。それぞれ、サイトは $n \in \mathbb{Z}^4$, リンクは $(n, \mu) \in \mathbb{Z}^4 \times \{1, 2, 3, 4\}$ で指定される。格子の単位ベクトルを, $\hat{1} = (1, 0, 0, 0)$, $\hat{2} = (0, 1, 0, 0)$, $\hat{3} = (0, 0, 1, 0)$, $\hat{4} = (0, 0, 0, 1)$ で定義しておく。格子上で定義された場の理論では、通常、その連続極限 $a \rightarrow 0$ での振舞いに興味があるので、 a の高次の項は、必要に応じて無視する。格子上の場の理論の連続極限が、通常、場の理論と呼ばれているものである。

コンパクトリー群 G をゲージ群として一つ固定する。 G のユニタリ表現 r として変換するスカラー場を, $\phi(n) = (\phi^i(n))_{i=1, \dots, d(r)}$ とおく。 $d(r)$ は、表現 r の次元。このとき、局所ゲージ変換は、 $\phi(n) \mapsto \phi'(n) = U(n)\phi(n)$ である。ここで、 $U(n)$ は $d(r) \times d(r)$ のユニタリ行列であり、 $d(r) \times d(r)$ のエルミート行列 $T_{(r)}^a$ を用いて、 $U(n) = e^{i \sum_a \theta^a(n) T_{(r)}^a}$ ($\theta^a(n) \in \mathbb{R}$) と書ける。場 $\phi(n)$ を μ 方向へ距離 a だけ平行移動すると、 $U_\mu(n)\phi(n)$ になるとする。即ち、 $U_\mu(n)$ は場の平行移動演算子である。平行移動演算子は、ゲージ場とも呼ばれる。このとき、ゲージ場はリー群 G の元であり、 $U_\mu(n) \rightarrow 1$ ($a \rightarrow 0$) を満たすことから、 $U_\mu(n) = e^{ia A_\mu^a(n) T_{(r)}^a}$ ($A_\mu^a(n) \in \mathbb{R}$) と書ける。ゲージ場のゲージ変換は、 $U_\mu(n) \mapsto U'_\mu(n) = U(n + \hat{\mu}) U_\mu(n) U^\dagger(n)$ である。

いま、ゲージ場 $U = \{U_\mu(n)\}$ を力学変数とする理論を考えよう。経路積分形式での量子力学によると、物理量 $A[U]$ の期待値は、

$$\langle A \rangle = \frac{\int [\mathcal{D}U] A[U] e^{-S[U]}}{\int [\mathcal{D}U] e^{-S[U]}} \quad (2)$$

となる。ここで、 $\int [\mathcal{D}U] \equiv \int \left[\prod_{n, \mu} dU_\mu(n) \right]$ と置いた。ゲージ場の積分はハール測度であり、規格化は $\int dU_\mu(n) = 1$ である。ここで、

$$S[U_\mu(n)] = -\beta \sum_n \sum_{\mu=1}^4 \sum_{\nu=1}^4 \text{tr} U_{\mu\nu}(n) \quad (3)$$

は、物理量の期待値を与える量であり、作用と呼ばれる。これは、プラケットと呼ばれる、最小のループに関する平行移動演算子 $U_{\mu\nu}(n) \equiv U_\nu^\dagger(n) U_\mu^\dagger(n + \hat{\nu}) U_\nu(n + \hat{\mu}) U_\mu(n)$ からゲージ不変な作用を作ったもので、プラケット作用と呼ばれる。プラケット作用は、連続極限で、QCD の連続理論の作用と一致することが知られている。

距離 R 離れたクォーク・反クォーク対のポテンシャルは、

$$V(R) = - \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \ln \langle W_C[U] \rangle \quad (4)$$

と書けるので、閉じ込めを調べるには、 $\langle W_C[U] \rangle$ を求めれば良い。ここで、 $W_C[U]$ は、 $R \times T$ ($\in a\mathbb{Z} \times a\mathbb{Z}$) の長方形の経路 C にそって、ゲージ場の積をとった演算子である。

2.2 モンテカルロ法による物理量の計算

式 (2) の経路積分は、有限な個数の和なので、原理的には任意の物理量の計算が可能である。しかし、この計算は、取りうる全ての状態の和なので、数が多すぎて実際には数値計算は不可能である。例えば、 10^4 の大きさの格子を持った、 Z_2 ゲージ理論では、リンクの数が $10^4 \times 4$ であることから、 $2^{10^4 \times 4} \approx 10^{10^4 \times 4/3}$ 個の状態の和になるが、これは大きすぎる。よく知られているように、このような多重積分の計算には、モンテカルロ法が力を発揮する。モンテカルロ法では、熱浴法によって、確率分布が、 $P[U] = e^{-S[U]} / \int [DU'] e^{-S[U']}$ となるように、ゲージ場 $U = \{U_\mu(n)\}$ の系列 $U^{(1)}, \dots, U^{(N)}$ をランダムに生成する。すると、

$$\langle A \rangle = \frac{\int [DU] A[U] e^{-S[U]}}{\int [DU] e^{-S[U]}} \simeq \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N A[U^{(i)}] \quad (5)$$

によって、十分たくさんゲージ場を生成すれば、任意の物理量の期待値が計算できる。 N が大きいほど、実際の期待値からの誤差が小さくなり、 $N \rightarrow \infty$ で完全に一致する。

3 可換射影されたゲージ場におけるクォークの閉じ込め

QCD は $SU(3)$ ゲージ理論であり、電磁気学は $U(1)$ ゲージ理論なので、QCD の真空と、超伝導体には、磁荷とカラー電荷、磁場とカラー電場という違いがある。この違いを埋めるためには、 $SU(3)$ ゲージ理論を、カルタン部分群 $U(1) \times U(1)$ に射影した上で、その $U(1)$ ゲージ理論のホッジ双対を考えればよい。射影によって、元のゲージ場が持っていた性質をできる限り損なわないようにするには、 $SU(3)$ ゲージ場の非対角部分ができるだけ小さくなるようなゲージ変換をしたうえで、射影すれば良い。これを MA 射影 (Maximally Abelian projection) と言う。ゲージ群の観点から考えると、MA 射影は、元のゲージ群の持つ対称性を部分的に固定している。この商空間 $SU(3)/U(1) \times U(1)$ が、非自明なホモトピー群 $\pi_2(SU(3)/U(1) \times U(1)) = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ を持つことを反映して、 $U(1)$ ゲージ理論には、通常の電荷のカレントである電流 j の他に、磁荷のカレントである磁流 k が発生する。双対超伝導描像によれば、閉じ込めに重要なのは、磁荷の凝縮である。よって、磁流 k が閉じ込めを担っていて、電流 j だけでは閉じ込めを示さないと考えられる。そこで、 $U(1)$ ゲージ場をホッジ分解することで、電流 j のみを持つゲージ場と磁流 k のみを持つゲージ場にわけてやり、これらのゲージ場を調べればよい (図 3)。格子 QCD を用いた数値計算の結果は、図 4 のようになる。左のグラフは、 $SU(3)$ ゲージ理論

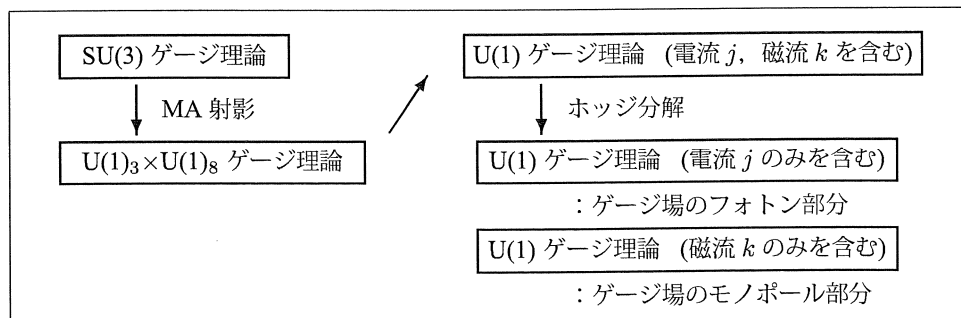


図 3 $SU(3)$ ゲージ理論の MA 射影とホッジ分解。

と、それを MA 射影した $U(1) \times U(1)$ ゲージ理論での、クォーク・反クォーク対のポテンシャルである。長距

離でのグラフの傾きがほとんど一致することから、閉じ込めの性質をほとんど損なっていないことがわかる。また、右のグラフは、左と同じ MA 射影した $U(1) \times U(1)$ 理論と、それをホッジ分解した光子部分、モノポール部分の理論の、クォーク・反クォーク対のポテンシャルである。閉じ込めはモノポール部分が担っており、光子部分は閉じ込めとほとんど関係ないことがわかる。グラフ中の曲線は、関数 $-\frac{\alpha}{R} + \sigma R + C$ 、または $\sigma R + C$ を用いて、 r が大きいときの値を最小二乗法で補間したものである。

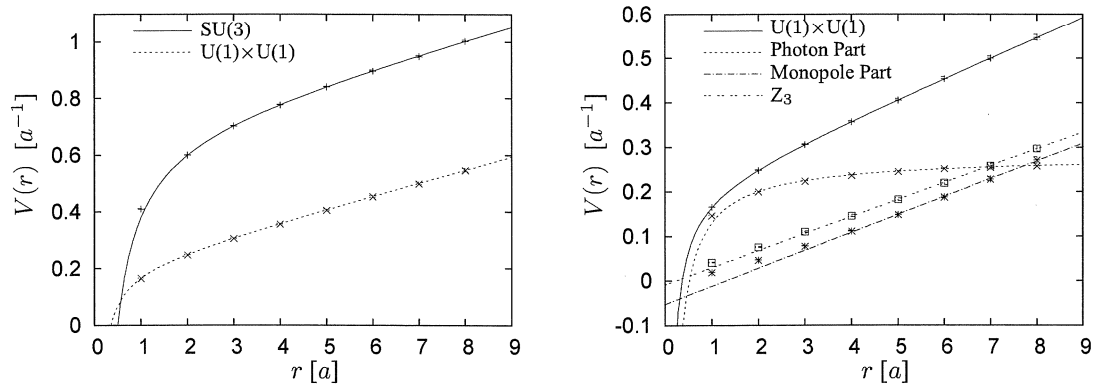


図4 格子 QCD の数値計算によるクォーク・反クォーク対のポテンシャル。時空を、格子間隔 $a \simeq 0.1$ [fm] の 16^4 格子として計算した。左は、 $SU(3)$ ゲージ場と MA 射影された $U(1) \times U(1)$ ゲージ場での計算結果。右は、MA 射影されたゲージ場と、そのホッジ分解である光子部分、モノポール部分、MC 射影されたゲージ場での計算結果。

また、 $SU(N_c)$ ゲージ理論での閉じ込めには、そのセンター群である Z_{N_c} が重要だと考えられている。MA 射影された $U(1)^{N_c-1}$ 理論が閉じ込めの性質を持つのは、部分群として Z_{N_c} を持つことが本質的だと考えるのである (図 5)。これを見るために、 $SU(3)$ ゲージ理論を MC 射影 (Maximally Center projection) した Z_3 ゲージ理論において格子 QCD を用いた数値計算を行った。その結果は、図 4 右のようになる。 Z_3 ゲージ理論のグラフの傾きは、 $U(1) \times U(1)$ 理論でのモノポール部分の傾きとほぼ一致しており、 Z_3 群が重要であることを示唆している。

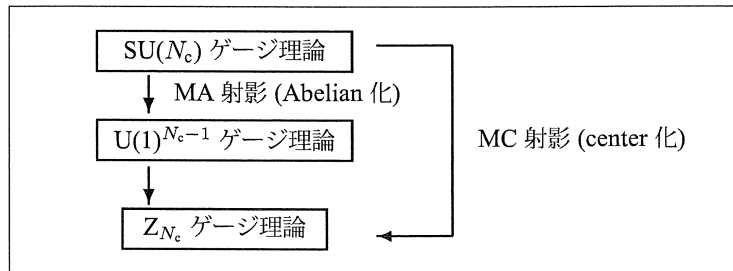


図5 $SU(N_c)$ ゲージ理論の MA 射影と MC 射影。

参考文献

- [1] Gunnar S. Bali. Qcd forces and heavy quark bound states. *Physics Reports*, Vol. 343, p. 1, 2001.
- [2] H. Ichie, V. Bornyakov, T. Streuer, and G. Schierholz. Flux tubes of two- and three-quark system in full qcd. *Nuclear Physics A*, Vol. 721, p. 899, 2003.
- [3] Heinz J. Rothe. *Lattice Gauge Theories: An Introduction (World Scientific Lecture Notes in Physics)*. World Scientific Pub Co Inc, 3rd edition, 6 2005.

情報セキュリティ分野の数学 (Mathematics in Information Security)

縫田 光司 (NUIDA, Koji)
産業技術総合研究所 情報セキュリティ研究センター 研究員
Email: k.nuida@aist.go.jp

February 13, 2008

情報セキュリティ分野とは、その名の通り、情報に関するセキュリティを取り扱う分野です。より詳しく説明するならば、通信や保存、記録、閲覧といった情報の各種取り扱いを安全に行うための方法を追求する分野、ということもできるでしょう。情報セキュリティ分野の研究対象のうち、一般的に最も馴染みのある例は暗号ですが、この分野では通常の暗号以外にも様々な題材が研究の対象となっています。ただ、数学において各分野の境目が必ずしも明確ではないのと同様に、(話者の知る限り)「情報セキュリティ」という分野を規定する明瞭な定義が存在するわけでは必ずしもありません。

本講演の話者は、数学の博士号を取得した後現在の研究所で情報セキュリティの研究を新たに始め、もうすぐ丸二年になります。本講演では、話者の研究を含む情報セキュリティ分野の研究においてどのような形で数学が活用され、また必要とされているのか、また逆に情報セキュリティ分野から数学へのフィードバックがどのようになされているのかについて、具体例を交えつつ話者から見た範囲での概況をご紹介します。

謝辞

本講演の機会を与えて下さり、また旅費の援助もして下さいました北海道大学 数学 COE 並びに CCYR4 世話人の皆様に深く感謝申し上げます。

1 情報セキュリティシステムの成り立ち

上に述べた通り、情報の暗号化方式とその理論は情報セキュリティ分野の代表的な研究対象です。まず、その暗号を例として、情報セキュリティを実現する多くのシステムに共通すると思われる構成要素について紹介します。詳



図 1: 暗号システムの構成要素の例

しく述べると、一つの暗号システムは大まかに分類すると図 1 のような構成要素から成り立っていると考えられます。

暗号システムの根幹を成すのは暗号アルゴリズム、より一般的な用途の場合にはセキュリティアルゴリズムと呼ばれる、データの暗号化や復号 (暗号解除) といったシステムを構成する一つ一つの操作を行うアルゴリズムです。現在広く用いられている代表的な暗号アルゴリズムとしては RSA 暗号が挙げられます。それらセキュリティアルゴリズムを組み合わせることにより、例えば暗号化通信のような情報セキュリティを実現する仕組みである暗号プロトコル、及びそれを利用したアプリケーションが構成されます。有名なものとしては SSH や SSL、また無線 LAN 通信に用いられる WEP 暗号化方式が挙げられます。更に、それ単体では理論上の存在に過ぎない暗号プロトコルやアプリケーションを現実世界で利用するために、ソフトウェアやハードウェアの形での実装を行います。特に、IC カードや (暗号化に対応した) 無線 LAN カードのように暗号プロトコルがハードウェアとして実装されたものは暗号モジュールなどと呼ばれます。

一方、上述したセキュリティアルゴリズムや暗号プロトコルにおいては、さらに細かい部品として擬似乱数やハッシュ関数などの様々な暗号要素技術が用いられています。そして、これら様々な構成要素の定義の妥当性やその安全性は、情報理論や計算量理論、またアルゴリズムの理論や具体的構成手法といった多くの基礎理論によって支えられています。

2 情報セキュリティ分野の研究体系

上に述べたように、暗号システムに代表されるセキュリティシステムは様々な構成要素から成り立っており、情報セキュリティ分野においてはそれぞれの要素に関して幅広い視点とバックグラウンドに基づく研究が行われています。それらの研究は大別すると以下のように分類できるでしょう。(ただし、これはあくまで話者の主観による分類であり、当然ながら全ての研究がこのいずれかに分類できるわけではありませんので、一つの目安とお考え下さい。)

基礎理論 情報セキュリティ研究の基盤となる情報理論や計算量理論などの基礎理論(図1では最下段の部分)の研究です。特に、後に述べるようにアルゴリズムの計算量に関する理論は暗号システムの安全性評価において極めて重要な意味を持っているため、情報セキュリティの観点からも盛んに研究されています。

方式の構成・提案 暗号システムもしくはその部品となる暗号要素技術やセキュリティアルゴリズムなどの具体的な構成を行います。

性能評価・安全性証明 一つ一つの暗号要素技術やセキュリティアルゴリズム、それらを組み合わせた暗号プロトコルなどが意図した安全性を持つことの理論的な証明、及び安全性の定量的な見積もりや実行速度など各種性能の評価を行います。例えば、暗号化通信方式の安全性評価における、攻撃者(通信の傍受を試みる人物など)の暗号解読成功確率の上界の理論的導出などがこの区分に属します。

攻撃手法の研究 上述の安全性評価と関連しますが、暗号システムに理論的な安全性証明を与えることは一般には容易でないため、たとえ実用化された暗号システムであっても後に安全上の欠陥が発覚することも多々あります。従って、悪意のある人物に悪用される前に暗号システムの未知の欠陥を発見し、先んじて対処を講じることは極めて重要です。そのため、情報セキュリティの分野では、暗号システムに対する有効な攻撃法の研究は暗号システムの安全性証明と同様に重視されています。

応用の提案、啓蒙や有効性評価 現実のシステムに対する暗号システムの組み込み方やその適切な利用法について研究や啓蒙を行うこと、また暗号システムの有効性を具体的に評価することも情報セキュリティにおける重要な研究分野です。

これら情報セキュリティの研究分野のうち最も特徴的と思われる、暗号システムの安全性証明に関して詳しく説明します。実は、「安全性証明が与えられている」と認められている多くの暗号システムのうち、最も厳密な意味での安全性(専門用語で「無条件安全性」)が証明されているシステムは極僅かであり、残りのシステムの安全性証明は何らかの数学的な問題の「計算困難

性」を仮定した上で成り立っています¹。例えば、RSA 暗号において攻撃者がメッセージ復号用の秘密鍵（パスワードのようなもの）を正しく推測するのに必要な計算量は、RSA 暗号で用いられる大きな自然数の素因数分解に掛かる計算量と同程度であること²が知られています。標語的に言えば、「RSA 暗号の解読は素因数分解と同じ位難しい³」ということになります。今のところ、素因数分解を行う効率的な（より正確には、多項式時間で実行可能な）アルゴリズムは知られておらず、また今後も見つからないだろうと信じられているので⁴、RSA 暗号は 1978 年に提案されて [1] 以降現在に至るまで極めて多くの場面で利用され続けています。

3 情報セキュリティと数学の関連

以下では、前節で与えた情報セキュリティ研究の分類のそれぞれについて、どのような形で数学が用いられているか具体例を交えて紹介します。なお、それらのうちいくつかの事例では、情報セキュリティの研究に数学が用いられるだけでなく、（物理などの自然科学においてそうであると同様に）新たな研究の動機付けや予想の提示といった形で数学側へのフィードバックも生じている点は特筆に価するでしょう。

3.1 基礎理論

先に述べた情報セキュリティの基礎理論のうち、情報理論に関しては数学がその基盤となっていますし、計算量理論やアルゴリズムはそれ自身数学の一分野です。そのため、これら基礎理論の研究には自ずと数学が利用されることとなります。特に、RSA 暗号に代表される数論を基盤とした暗号系の研究は、素因数分解や素数判定の効率的な方法の研究、また素数分布の研究といった数論ないしアルゴリズム分野の研究と密接に関連しています。

近年、情報セキュリティ分野の基礎理論として特に注目を集めているものの一つが、量子力学の原理に基づく情報処理や計算の理論である量子情報理論および量子計算理論です。Deutsch や Feynman らによって拓かれた量子計

¹では常に無条件安全性を持つ方式を使えばいいじゃないか、と思われる方もおられるかもしれませんが、例えば必要な鍵サイズが大き過ぎるなどの事情で実用化には適さない場合もあります。

²より詳しくは、攻撃者が入手できる公開情報（暗号化の鍵やある大きな自然数など）を入力として復号鍵を出力する問題と、件の大きな自然数を素因数分解する問題とは互いに多項式時間帰着可能、ということ。

³これはあくまで標語的な表現であり、少々厳密さを欠いていることを注意しておきます。なぜなら、復号鍵が判明しないまま暗号解読を行う方法が無いとは言い切れないので、RSA 暗号の復号鍵の計算が RSA 暗号の解読と同値であるとは直には言えないからです。

⁴しかし、後に紹介する通り、量子計算に関する Shor の研究によって、大規模な量子計算が実現した暁には RSA 暗号の安全性が崩れることが示されています。従って、大規模量子計算の実現よりも早く、RSA 暗号に代わる優れた暗号方式を開発し普及させることが情報セキュリティ分野の必須課題となっています。

算の分野は、1994年にShorが発表した量子計算における素因数分解の多項式時間アルゴリズム [2] によって情報セキュリティの分野に大きな衝撃を与えることとなりました。なぜなら、Shorの結果によれば、もし十分に大きな規模の量子計算が実現された暁には、RSA暗号に代表される素因数分解の計算困難性に安全性の根拠を置く暗号方式が全て破られてしまうこととなるからです⁵。以来、量子計算の理論は情報セキュリティの観点からも活発な研究が行われることとなりましたが、ここでは数論のみならず確率論や有限群論、表現論といった様々な分野の数学が活用されています。なお、量子計算や量子情報理論は情報セキュリティ分野に「悪役」としてのみ関わっているわけではなく、BennettとBrassardによって1984年に提案された暗号鍵の共有を行うプロトコル [3] をはじめとする多くのセキュリティシステムが、量子計算や量子情報理論の力を借りて構成されていることを注記しておきます。

また、「量子」の付かない通常の) 情報理論においても、その主要な対象である情報量ないし情報エントロピーに関して、有限群の subgroup lattice との密接な係わりが最近の研究で指摘されています。より詳しくは、情報エントロピーの満たすある種の不等式と、有限群の部分群の位数に関するある種の不等式との間に対応関係があることがLiとChongによって示されました [4]。すると、この対応関係を通じて情報エントロピーに関する既知の不等式から部分群の位数に関する未知の不等式が導かれたり、その逆が起こることが期待されます。この結果は、上述した情報セキュリティ分野から数学へのフィードバックの一例といえるでしょう。

3.2 方式の構成・提案

現在の暗号システムは主にデジタルデータを対象としており、それらは数学的に表現されるため、暗号プロトコルや要素技術の構成にも数学の理論や結果を用いる必要がしばしば生じます。例えば、RSA暗号など現在の主要な暗号化方式の多くは整数剰余環の乗法群や楕円曲線群といった有限可換群上で実現されているため、それらの構成には初等整数論を含めた上述の群に関する理論や結果が多く利用されています。また、近年では前述した量子計算の潜在的脅威を考慮した新たな暗号システムとして、組み紐群をはじめとするある種の非可換群上で実現された暗号化方式がいくつか提案されています [5]。それらに関連して、組み紐群など非可換群の構造や性質が情報セキュリティの観点からも研究され始めています。

また、代表的な暗号要素技術である擬似乱数に関して、真の乱数と判別の付かない（数学的な定義は割愛します）擬似乱数の構成法がいくつか提案

⁵実際には、Shorは「離散対数問題」と呼ばれる別の問題に対する多項式時間量子計算アルゴリズムも同時に発表したため、多くの楕円曲線暗号など離散対数問題に安全性の根拠を置く暗号方式もまた同様の潜在的脅威に曝されることとなりました。

されており [6]、その識別不可能性⁶の証明には数学（主に整数論）の結果が用いられています。

3.3 性能評価・安全性証明

一般的な暗号プロトコルの安全性証明は、まずある条件下での攻撃者による暗号解読作業を数学的な計算問題としてモデル化し、次に例えば素因数分解のような計算困難（と信じられている）問題を前者の問題へ（多項式時間）帰着させる、という手続きで行われます。即ち、暗号解読を行える攻撃者が存在するとしたら計算困難なはずの問題が効率的に解かれてしまう、従ってそのような攻撃者は存在しない、という背理法に基づく証明です。この帰着の過程では、数学と同様の厳密な議論に基づくとはいえ具体的な数学の理論が応用されることはあまりありませんが、帰着先の計算困難問題の性質が暗号プロトコルの安全性に大きく影響するため、計算困難問題の研究という形で数学が関わっているといえます。

一方、安全性や実行速度などの性能評価においては、上述の安全性証明と比較してより多彩な数学が用いられます。まず、評価される暗号システムがある数学的な対象（楕円曲線群や組み紐群など）の上で実現されている場合には、勿論その対象の性質が性能評価に大きく関係してきます。それ以外にも、例えば安全性評価であれば、攻撃者の暗号解読成功確率の上界の計算といった形で確率論的な議論が行われますし、実行速度の見積もりにおいては例えば必要な総ステップ数の計算などに組合せ論の手法が用いられることが多く、さらには同じシステムで暗号化鍵のサイズを大きくした際の実行速度の変化や漸近的挙動の解析といった形で、解析的な手法が有効に用いられることもあります。

3.4 攻撃手法の研究

暗号システムへの攻撃手法の提案やその有効性の評価は、暗号システム自体の構成やその安全性評価と表裏一体であり、用いられる数学の大まかな傾向自体は暗号システムの構成や安全性評価におけるそれとほぼ同様と思われます。ただし、攻撃側の方がシステムを構成する側よりも用いる手法の選択肢や自由度が広い分、登場する数学の具体的な分野はより幅広いものとなり得ます。

例えば、暗号要素技術の一つであるハッシュ関数に対する代表的な攻撃としては、関数の値が等しくなる複数の入力（「衝突」と呼ばれます）を、定

⁶ただし、RSA 暗号などと同様に素因数分解をはじめとする何らかの数学的問題の計算困難性を仮定しています。

義域の総当り⁷よりも有意に短い時間で発見するという攻撃が挙げられます。現在の主要なハッシュ関数である SHA-1 の衝突を探す最近のある研究では、SHA-1 の一部分を線型な関数で近似した上で、グレブナー基底の理論を利用することで衝突を発見するまでの所要時間を短縮する手法が提案されています [7]。

3.5 応用の提案、啓蒙や有効性評価

この項目に関して数学が利用される場面は、主に暗号システムの現実世界へのアプリケーションの有効性を評価する場面と考えられます。特に、近年では情報セキュリティ技術が適用される現実の状況を適切にモデル化し、技術の有効性を数値的かつ客観的に評価することが求められているため、モデル化の能力や統計的な分析手法が重要視されています。

4 話者の研究から

最後に、より具体的な例として話者による情報セキュリティに関する研究成果を大まかに紹介します（詳細は講演もしくは [8] をご参照下さい）。

近年、情報技術の発展に伴って、動画や音楽のインターネット販売サービスなど様々なデジタルコンテンツ配信サービスが普及してきましたが、デジタルコンテンツは複製や配布が容易なため、海賊版の氾濫などの被害も急増しています。これらの被害を食い止めるためにコンテンツの複製自体を技術的に防止する技術も実用化されていますが、そのような技術には正規のユーザーの利便性を低下させてしまう⁸という副作用があります。そのような副作用を防ぐために、コンテンツの複製自体を防止するのではなく、コンテンツを配信する段階でユーザーの識別情報を埋め込んでおき、海賊版が流通した際に埋め込まれた情報から不正ユーザーを特定する「電子指紋」と呼ばれる手法が盛んに研究されています。この電子指紋方式を不正ユーザーによる改竄などの攻撃から守るためには、埋め込む情報を冗長性のある方法で符号化し、一部が改竄されてもなお不正ユーザーを特定可能とする手法が有効と考えられています。話者の研究もこれら電子指紋に用いる符号化方式に関する研究です。

特に、主要な先行結果として、各ユーザーのコンテンツに埋め込む符号語をランダムに生成することを考えると、符号語の各ビット位置に割り振られる 0 と 1 の偏りを上手く調整することで極めて高性能の符号が構成できる、という結果がありました。しかし、提案された方式では各ビットごとに 0 と 1 の偏りをどのように設定したかを記憶しておく必要があり、しかもその分

⁷より正確には、バースデイパラドックスを利用した、定義域上のランダムサンプリングに基づく衝突の探索

⁸例えば、購入した音楽を MD にコピーして持ち運べなくなるなど。

量がかなり大きくなるため、実用上の問題と考えられていました。話者の研究 [8] では、符号の性能を損なわない範囲で記憶すべき偏りの分量を削減するにはどのように偏りを分布させればよいかを調べ、記憶すべき分量が最小となる分布を全て特定し、その具体的な構成を与えました。

その最適な分布の特徴付けおよび構成は、「最適な分布は、Gauss-Legendre の数値積分法における座標点及びその重み付けと、ある具体的な関係によって対応付けられる」という定理を証明することでなされています。このように、話者の研究においても、Gauss-Legendre 数値積分法という一見関係の無さそうな数学が符号の構成と結びつくことで、情報セキュリティに関する新たな結果を得ることができました。この事例も、情報セキュリティと数学との密接な係わりの一端を示していると見ることができるでしょう。

参考文献

- [1] R. L. Rivest, A. Shamir and L. Adelman, A method for obtaining digital signature and public-key cryptosystems, *Comm. ACM* 21(2) (1978) 120–126.
- [2] P. W. Shor, “Algorithms for quantum computation: discrete logarithms and factoring,” In: *Proc. 35th Annual Symposium on Foundations of Comp. Science*, IEEE Press, Los Alamitos, 1994.
- [3] C. H. Bennett and G. Brassard, “Quantum cryptography: Public key distribution and coin tossing,” In: *Proc. IEEE Internat. Conference on Computers, Systems and Signal Processing*, IEEE, New York, 1984.
- [4] H. Li and E. K. P. Chong, A group theoretic model for information, arXiv:0710.1254 .
- [5] D. Garber, Braid group cryptography, arXiv:0711.3941 .
- [6] L. Blum, M. Blum and M. Shub, A simple unpredictable pseudo-random number generator, *SIAM J. Comput.* 15 (1986) 364–383.
- [7] M. Sugita, M. Kawazoe and H. Imai, Gröbner basis based cryptanalysis of SHA-1, IACR e-print archive, <http://eprint.iacr.org/2006/098> .
- [8] K. Nuida, M. Hagiwara, H. Watanabe and H. Imai, Optimal probabilistic fingerprinting codes using optimal finite random variables related to numerical quadrature, arXiv:cs/0610036 . An improved version presented in: 9th Information Hiding, Saint-Malo, France, June 11–13, 2007.

The Spectral Analysis of the Hamiltonian with a Singular Perturbation in Quantum Field Theory

高江洲俊光 九大数理

[概要] 量子力学的な粒子と量子場が相互作用するモデルの一つである GSB-モデルに特異な摂動が加わった作用素の自己共役性、基底状態の存在、および漸近場の存在について考察する。まず始めに量子場について解説し、続いて量子力学的な粒子と量子場が相互作用するモデルについて説明する。そしてスペクトル解析の際の主要な問題と GSB-モデルについて解説し、最後に特異な摂動が加わった作用素について述べる。

[量子場 1 : スカラー場] \mathfrak{G}_n を n 次の対称群とする。このときボーズ粒子が n 個からなる系の状態空間は

$$L^2_{sym}(\mathbf{R}^{3n}) := \{\Psi^{(n)} \in L^2(\mathbf{R}^{3n}) \mid \Psi^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) = \Psi^{(n)}(\mathbf{k}_{\sigma(1)}, \dots, \mathbf{k}_{\sigma(n)}), \forall \sigma \in \mathfrak{G}_n\}$$

と表すことができる。場の量子論では粒子の生成・消滅を説明できるが、数学的には次のようなヒルベルト空間を定義する。

$$\mathcal{H}_{\text{スカラー場}} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2_{sym}(\mathbf{R}^{3n})$$

ただし $L^2_{sym}(\mathbf{R}^0) := \mathbf{C}$ としている。この空間の内積は $\Phi = \{\Phi\}_{n=0}^{\infty}, \Psi = \{\Psi\}_{n=0}^{\infty} \in \mathcal{F}_b(L^2(\mathbf{R}^3))$ に対し

$$\langle \Phi, \Psi \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^{3n}} \Phi^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n)^* \Psi^{(n)}(\mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) d\mathbf{k}_1 \cdots d\mathbf{k}_n$$

で与えられる。特に $\Omega := \{1, 0, 0, \dots\}$ はフォック真空と呼ばれる。場の量子論において最も重要となる作用素は

$$(a_{\mathbf{k}} \Psi)^{(n)} := \sqrt{n+1} \Psi^{(n+1)}(\mathbf{k}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n), \quad (n \geq 0)$$

$$(a_{\mathbf{k}}^{\dagger} \Psi)^{(n)} := \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_j) \Psi^{(n-1)}(\mathbf{k}_1, \dots, \tilde{\mathbf{k}}_j, \dots, \mathbf{k}_n) & (n \geq 1) \\ 0 & (n = 0) \end{cases}$$

の2つの作用素であり、 $a_{\mathbf{k}}$ を消滅作用素、 $a_{\mathbf{k}}^{\dagger}$ を生成作用素と呼ぶ。但し $\tilde{\mathbf{k}}$ はその変数 \mathbf{k} を取り除くことである。上で定義した生成・消滅作用素は形式的な表記であり、数学的には δ 関数が現れないようにそれらの積分形で定義される。しかしこの形式的な表示が本質的に重要であるのでそちらで定義をした。また定義域については特に断らない限り述べないことにする。

生成・消滅作用素は正準交換関係と呼ばれる次の関係式をみます。

$$\begin{aligned} [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] &= \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \\ [a_{\mathbf{k}}, a_{\mathbf{k}'}] &= [a_{\mathbf{k}}^\dagger, a_{\mathbf{k}'}^\dagger] = 0 \end{aligned}$$

[量子場 2 : 量子電磁場] 光の波数ベクトルを \mathbf{k} とする。ここで偏極ベクトルと呼ばれる \mathbf{k} に垂直な 2 つの単位ベクトルを次のように定める。

$$\begin{cases} \mathbf{e}_s(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{e}_{s'}(\mathbf{k}) = \delta_{s,s'} & (s, s' \in \{1, 2\}), \\ \mathbf{e}_s(\mathbf{k}) \cdot \mathbf{k} = 0, & (s \in \{1, 2\}) \end{cases}$$

量子電磁場の状態を記述するためのヒルベルト空間およびその内積は

$$\mathcal{H}_{\text{電磁場}} := \bigoplus_{n=0}^{\infty} L_{\text{sym}}^2(\mathbf{R}_{\mathbf{k}}^{3n} \times \{1, 2\}^n) \quad (1)$$

$$\langle \Phi, \Psi \rangle := \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s_1 \cdots s_n} \int_{\mathbf{R}^{3n}} \Phi^{(n)}(\mathbf{k}_1, s_1, \dots, \mathbf{k}_n, s_n) \Psi^{(n)*}(\mathbf{k}_1, s_1, \dots, \mathbf{k}_n, s_n) d\mathbf{k}_1 \cdots d\mathbf{k}_n \quad (2)$$

で与えられる。消滅作用素および生成作用素は

$$\begin{aligned} (a_{\mathbf{k},s} \Psi)^{(n)} &:= \sqrt{n+1} \Psi^{(n+1)}(\mathbf{k}, s, \mathbf{k}_1, s_1, \dots, \mathbf{k}_n, s_n) \quad (n \geq 0), \\ (a_{\mathbf{k},s}^\dagger \Psi)^{(n)} &:= \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{j=1}^n \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}_j) \delta_{s,s_j} \Psi^{(n-1)}(\mathbf{k}_1, s_1, \dots, \tilde{\mathbf{k}}_j, \tilde{s}_j, \dots, \mathbf{k}_n, s_n) & (n \geq 1) \\ 0 & (n = 0) \end{cases} \end{aligned}$$

で与えられる。正準交換関係は

$$[a_{\mathbf{k},s}, a_{\mathbf{k}',s'}^\dagger] = \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta_{s,s'} \quad (3)$$

$$[a_{\mathbf{k},s}, a_{\mathbf{k}',s'}] = [a_{\mathbf{k},s}^\dagger, a_{\mathbf{k}',s'}^\dagger] = 0 \quad (4)$$

となる。

[粒子と量子場が相互作用するモデル]

まず

$$\omega(\mathbf{k}) := \sqrt{\mathbf{k}^2 + m^2}, \quad (m \geq 0)$$

と定義する。 $m > 0$ のときは massive, $m = 0$ のときには massless と呼ばれる。物理的には m は場を生成する粒子の質量のことである。後ほど解説するが massive よりも massless の方がスペクトル解析が格段に難しくなる。

場の相互作用を記述する作用素を次のように定義する。

$$\begin{aligned}\phi_\rho(\mathbf{x}) &:= \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} (a_{\mathbf{k}}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k}} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) d\mathbf{k} \\ \mathbf{A}_\rho(\mathbf{x}) &:= \sum_{s=1,2} \int_{\mathbf{R}^3} \frac{\rho(\mathbf{k})}{\sqrt{2\omega(\mathbf{k})}} \mathbf{e}_s(\mathbf{k}) (a_{\mathbf{k},s}^\dagger e^{-i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}} + a_{\mathbf{k},s} e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}) d\mathbf{k}\end{aligned}$$

ρ は cut-off 関数と呼ばれ $\frac{\rho}{\omega^{1/2}} \in L^2(\mathbf{R}_k^3)$ をみたすものである。物理的には次のような定義関数を一般化した関数である。

$$\chi_{\Lambda_{\text{赤}}, \Lambda_{\text{紫}}}(\mathbf{k}) := \begin{cases} 0 & (0 \leq |\mathbf{k}| < \Lambda_{\text{赤}}) \\ 1 & (\Lambda_{\text{赤}} \leq |\mathbf{k}| < \Lambda_{\text{紫}}) \\ 0 & (\Lambda_{\text{紫}} < |\mathbf{k}|) \end{cases}$$

$\Lambda_{\text{赤}}$ は赤外切断, $\Lambda_{\text{紫}}$ は紫外切断と呼ばれる。 ω の定義より赤外切断は massive ($m > 0$) のときは外すことができ、massless ($m = 0$) のときにのみ問題となることがわかる。

粒子と量子場が相互作用するモデルにはいくつかのモデルがあるが、まず GSB-モデル以外のモデルについて紹介する。以下、 $\mathbf{P}_\mathbf{x} := (-i\partial_{x_1}, -i\partial_{x_2}, -i\partial_{x_3})$ とする。

(1) Nelson モデル (核子とスカラー場の相互作用, [11])

$$\begin{cases} \mathcal{H}_N = L^2(\mathbf{R}_\mathbf{x}^3) \otimes \mathcal{H}_{\text{スカラー場}} \\ \langle \Phi, \Psi \rangle_N = \sum_{n=0}^{\infty} \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3n}} \Phi^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) \Psi^{(n)*}(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, \dots, \mathbf{k}_n) d\mathbf{x} d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_n \\ H_N = \left(\frac{\mathbf{P}_\mathbf{x}^2}{2M} + V(\mathbf{x}) \right) \otimes I + I \otimes \left(\int_{\mathbf{R}^3} \omega(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} \right) + q\phi_\rho(\mathbf{x}), \quad q \in \mathbf{R} \end{cases}$$

(2) Pauli-Fierz モデル (荷電粒子と量子電磁場の相互作用, [12])

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{PF} = L^2(\mathbf{R}_\mathbf{x}^3) \otimes \mathcal{H}_{\text{電磁場}} \\ \langle \Phi, \Psi \rangle_{PF} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s_1, \dots, s_n} \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3n}} \Phi^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, s_1, \dots, \mathbf{k}_n, s_n) \Psi^{(n)*}(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, s_1, \dots, \mathbf{k}_n, s_n) d\mathbf{x} d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_n \\ H_{PF} = \frac{1}{2M} (\mathbf{P}_\mathbf{x} \otimes I - e\mathbf{A}_\rho(\mathbf{x}))^2 + I \otimes \left(\sum_{s=1,2} \int_{\mathbf{R}^3} \omega(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} d\mathbf{k} \right) + V(\mathbf{x}) \otimes I \end{cases}$$

(3) Dirac-Maxwell モデル (Dirac 粒子と量子電磁場の相互作用, [4])

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{DM} = L^2(\mathbf{R}_\mathbf{x}^3; \mathbf{C}^4) \otimes \mathcal{H}_{\text{電磁場}} \\ \langle \Phi, \Psi \rangle_{DM} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{s_1, \dots, s_n} \int_{\mathbf{R}^3 \times \mathbf{R}^{3n}} \langle \Phi^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, s_1, \dots, \mathbf{k}_n, s_n), \Psi^{(n)}(\mathbf{x}, \mathbf{k}_1, s_1, \dots, \mathbf{k}_n, s_n) \rangle_{\mathbf{C}^4} d\mathbf{x} d\mathbf{k}_1 \dots d\mathbf{k}_n \\ H_{DM} = (\alpha \cdot \mathbf{P}_\mathbf{x} + M\beta + V(\mathbf{x})) \otimes I + I \otimes \left(\sum_{s=1,2} \int_{\mathbf{R}^3} \omega(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k},s}^\dagger a_{\mathbf{k},s} d\mathbf{k} \right) + q\alpha \cdot \mathbf{A}_\rho(\mathbf{x}), \quad q \in \mathbf{R} \end{cases}$$

ただし、 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ であり、 $\alpha_j, j = 1, 2, 3$ と β は 4 次エルミート行列で、反交換関係 $\{\alpha_j, \alpha_l\} = 2\delta_{j,l}, \{\alpha_j, \beta\} = 0, \beta^2 = I$ をみたす。

ここで粒子と量子場が相互作用するモデルのスペクトル解析について一般的な状況の下で説明する。まずヒルベルト空間 $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\text{粒子}} \otimes \mathcal{H}_{\text{場}}$ が与えられてるとする。 $H_{\text{粒子}}$ を $\mathcal{H}_{\text{粒子}}$ 上の自己共役作用素、 $H_{\text{場}} = \left(\int_{\mathbf{R}^3} \omega(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} \right)$ とし、 $\mathcal{H} := \mathcal{H}_{\text{粒子}} \otimes \mathcal{H}_{\text{場}}$ 上の作用素を

$$\begin{aligned} H_0 &= H_{\text{粒子}} \otimes I + I \otimes H_{\text{場}}, \\ H &= H_0 + H' \end{aligned}$$

とする。ただし H' を摂動の作用素とした。 $H_{\text{場}}$ のスペクトルは

$$\sigma(H_{\text{場}}) = \{0\} \cup [m, \infty), \quad \sigma_p(H_{\text{場}}) = \{0\}$$

である。 $H_0 = H_{\text{粒子}} \otimes I + I \otimes H_{\text{場}}$ のスペクトルは

$$\begin{aligned} \sigma(H_0) &= \{\lambda + \mu \mid \lambda \in \sigma(H_{\text{粒子}}), \mu \in \sigma(H_{\text{場}})\}, \\ \sigma_p(H_0) &= \{\lambda + \mu \mid \lambda \in \sigma_p(H_{\text{粒子}}), \mu \in \sigma_p(H_{\text{場}})\} \end{aligned}$$

となっているので massless ($m = 0$) のとき、 H_0 の点スペクトルは連続スペクトル $[\inf \sigma(H_{\text{粒子}}), \infty)$ に埋め込まれていることがわかる。このような固有値を埋蔵固有値と呼ぶが、Kato の analytic perturbation theory は離散固有値の摂動問題に対して有効であり埋蔵固有値には直接適用できない。このことが解析をより難しくさせている。

以下に H の具体的な解析について述べる。

(1) H の自己共役性

物理的には H のスペクトル $\sigma(H)$ はエネルギー分布に対応するものなので実数の部分集合でなくてはならない。

(2) 基底状態の存在

場が相互作用する場合はその影響で真空が励起されるさている。それを数学的に述べると $\inf(\sigma(H))$ は H の固有値であるということであるが、それを示したい。また基底状態の存在がわかった場合、その多重度の評価、および紫外・赤外切断を外した際も基底状態が存在し続けるかということが問題となる。

(3) 漸近場の存在

漸近場とは

$$\lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{itH} e^{-itH_0} (I \otimes a^\sharp(h)) e^{itH_0} e^{-itH}, \quad h \in L^2(\mathbf{R}_x^3)$$

のことであるが、この強極限が存在することを示したい。ただし、 $a^\sharp(h) = a(h)$ または $a^\dagger(h)$ としている。また漸近場から H のスペクトルも調べることができる ([10])。

[GSB モデル]

ここから Generalized spin-boson モデル (GSB-モデル, [2]) について解説する。 \mathcal{K} をヒルベルト空間、 $A, B_j, j = 1, \dots, n$, を \mathcal{K} 上の作用素で次の条件を満たすものとする。

(GSB.1) A は非負で有界な自己共役作用素。

(GSB.2) $B_j, j = 1 \dots n$, は対称作用素で $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(B_j)$ を満たし、次のことが成立する。

$$\exists c_j, d_j \geq 0 \text{ s.t. } \forall \Psi \in \mathcal{D}(A), \|B_j \Psi\| \leq c_j \|A^{1/2} \Psi\| + d_j \|\Psi\| \quad (j = 1, \dots, n).$$

ただし作用素 X の定義域を $\mathcal{D}(X)$ としている。

GSB-モデルは次のように定義される。

$$\begin{cases} \mathcal{H}_{GSB} := \mathcal{K} \otimes \mathcal{H}_{\text{スカラー場}} \\ H_{GSB} := A \otimes I + I \otimes \left(\int_{\mathbf{R}^3} \omega(\mathbf{k}) a_{\mathbf{k}}^\dagger a_{\mathbf{k}} d\mathbf{k} \right) + q \sum_{j=1}^n B_j \otimes \phi_{\rho_j}(\mathbf{0}), \quad \in \mathbf{R}. \end{cases}$$

GSB-モデルは Nelson モデルで $\phi_\rho(\mathbf{x}) = \phi_\rho(\mathbf{0})$ とした作用素、および Pauli-Fierz モデルで $\mathbf{A}_\rho(\mathbf{x}) = \mathbf{A}_\rho(\mathbf{0})$ としてさらに $\mathbf{A}_\rho(\mathbf{x})^2$ の項を落とした作用素に応用できる。また \mathcal{K} は一般的なヒルベルト空間であるので粒子と場が相互作用するモデルではなく、場と場が相互作用するモデルにも適用できる。

条件 **(GSB.1)**, **(GSB.2)** より相互作用項 H'_{GSB} は無摂動作用素 H_0 に対して相対有界となっている。よって Kato-Rellich の定理により H_{GSB} の自己共役性、および本質的自己共役性が次のように示される。

[命題 [2]] **(GSB.1)**, **(GSB.2)** が成り立つとする。このとき H_{GSB} は自己共役であり、特に任意の H_0 の芯上で本質的に自己共役となる。

基底状態の存在を示すために次の条件を仮定する。

$$\textbf{(GSB.3)} \quad \frac{\rho_j}{\omega^{3/2}} \in L^2(\mathbf{R}^3_{\mathbf{k}})$$

(GSB.4) A は compact resolvent を持つ。

有限体積近似法 ([6]) を応用し次のことが示される。

[定理, [2]] (GSB.1)-(GSB.4)、および結合定数 $|q|$ は十分小さいと仮定する。このとき H_{GSB} には基底状態が存在する。

[特異摂動]

ここから特異な摂動が加わった作用素について解説する。GSB モデルの相互作用項 H'_{GSB} は無摂動作用素 H_0 に対して相対有界となっているので小さな摂動と考えられる。そこで、 H'_{GSB} よりも大きな摂動が加わった作用素のスペクトルはどのようになるかということが問題となる。ここで、 H_{GSB} の摂動の項を特異な摂動にした作用素を次のように定義する。

$$\begin{aligned} H'_{\text{特異}} &:= C \otimes \phi_p(\mathbf{0})^4, \\ H &:= H_0 + qH'_{\text{特異}}, \quad q > 0. \end{aligned}$$

この場合 $H'_{\text{特異}}$ は H_0 に対して相対有界ではない。よって Kato-Rellich の定理は適用できないが、([3]) の結果を応用すると以下の条件のもとで H の本質的自己共役性が示される。

(S.1) C は非負で有界な自己共役作用素。

[命題] (GSB.1), (S.1) を仮定する。このとき H は

$$\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}(A) \hat{\otimes} \left(\bigoplus_{n=0}^{\infty} L^2_{\text{sym},0}(\mathbf{R}_k^{3n}) \right)$$

上で本質的に自己共役である。ただし $\hat{\otimes}$ は代数的テンソル積、 $\hat{\oplus}$ は代数的直和、 $L^2_{\text{sym},0}(\mathbf{R}_k^{3n}) = \{f \in L^2_{\text{sym}}(\mathbf{R}_k^{3n}) | \text{supp} f \text{ はコンパクト} \}$ としている。

H は \mathcal{D}_0 上で本質的に自己共役であることがわかったので、

$$\overline{H|_{\mathcal{D}_0}} = \overline{(H_0 + H'_{\text{特異}})|_{\mathcal{D}_0}}$$

のスペクトルを解析する。ただし \bar{X} は作用素 X の閉包を表す。

$\overline{H|_{\mathcal{D}_0}}$ の基底状態の存在については以下の条件を課すと ([2]) と同様に有限体積近似法を応用して示せる。

(S.2) $C(\mathcal{D}(A)) \subset \mathcal{D}(A)$ かつ $C^{1/2}(\mathcal{D}(A)) \subset \mathcal{D}(A)$ かつ

$$\exists v > 0 \text{ s.t. } \forall \Psi \in \mathcal{D}(A), \langle \Psi, [C^{1/2}, [C^{1/2}, A]] \Psi \rangle \geq v \|\Psi\|^2.$$

[定理] (S.1),(S.2),(GSB.1),(GSB.3)-(GSB.4) および結合定数 $|q|$ は十分小さいと仮定する。このとき $\overline{H|_{\mathcal{D}_0}}$ には基底状態が存在する。

最後に漸近場について述べる。本質的には ([10]) の結果を応用する。

$$(S.3) \quad \frac{\rho}{\omega^{1/2}} \in C^\infty(\mathbf{R}_k^3).$$

[定理] (S.1)-(S.3),(GSB.1) を仮定する。このとき $h \in C_0^\infty(\mathbf{R}^3 \setminus \{0\})$ に対し

$$s - \lim_{t \rightarrow \pm\infty} e^{i\overline{H_{\Gamma\mathcal{D}_0}}t} e^{-iH_0} (I \otimes a^\dagger(h)) e^{iH_0} e^{-i\overline{H_{\Gamma\mathcal{D}_0}}t} \Psi, \quad \Psi \in \mathcal{D}(\overline{H_{\Gamma\mathcal{D}_0}})$$

が存在する。

参考文献

- [1] 新井朝雄, フォック空間と量子場 (上, 下), 日本評論社, (2000).
- [2] A.Arai and M.Hirokawa, J. Funct. Anal. **151**, (1997), 455-503.
- [3] A.Arai, J. Math. Phys. **32**, (1991), 2082-2088.
- [4] A.Arai, J. Math. Phys. **41**, (2000), 4271-4283.
- [5] J.Glimm and A.Jaffe, Phys. Review. **176**,(1968), 1945-1951.
- [6] J.Glimm and A.Jaffe, Ann.of. Math. **91**,(1970), 362-401.
- [7] J.Glimm and A.Jaffe, Commun. Pure. Appl. Math. **22**, (1969), 401-414.
- [8] 廣島文生, 場の理論における埋蔵固有値の摂動問題, 数学, **57**, 2004, 70-92.
- [9] F.Hiroshima, Trans. Amer. Math.Soc. **353**, (2001) 4497-4528.
- [10] R.Høegh-Krohn, J. Math. Phys. **9**, (1968), 2075-2080.
- [11] E.Nelson, J. Math Phys. **5** (1964), 1190-1197.
- [12] W.Pauli and M.Fierz, Nuovo Cimento **15** (1938), 167-188.

The approximation of instantons over an arbitrary closed oriented 4-manifold

松尾 信一郎* †

東京大学大学院数理科学研究科 数理科学専攻博士課程一年

1 序

現代幾何学の問題の多くは非線型偏微分方程式の研究に帰着される。よって、幾何学者は非線型偏微分方程式を解かねばならない。幾何学に現れる非線型偏微分方程式は、幾何学に起源を持つというその出自ゆえに、解析学と幾何学の交錯し錯雑とした混沌に住んでおり、ここに幾何学に由来する非線型偏微分方程式の研究のおもしろさがある。筆者は四次元有向多様体上の非線型偏微分方程式である ASD 方程式を研究している。

今回の講演では、前半で ASD 方程式の研究の最高峰の一例として Taubes による解の存在定理を紹介し、後半にはその手法を応用して得られた筆者の結果を紹介したい。講演では Taubes の手法のアイデアの解説に主眼を置き、細かい定義などは行わない予定である。そこで、このレポートでは、講演への補完として、ASD 方程式の定義を詳細に与え、筆者が得た結果の主張を正確に述べる。

筆者に講演の機会を与えてくださったことを感謝いたします。

2 ASD 方程式

X を四次元有向 Riemann 多様体、 G をコンパクト Lie 群として、 P を X 上の G 主束とする。

*exotic@ms.u-tokyo.ac.jp

†He is supported in part by Grant-in-Aid for JSPS Fellows (19-5618).

Lie 代数 \mathfrak{g} に値を持つ P 上の 1 形式 $A \in \Omega^1(P, \mathfrak{g})$ が接続であるとは、次の二つを充たすことである：

1. P への右作用と \mathfrak{g} への随伴作用から誘導される $\Omega^1(P, \mathfrak{g})$ への G 作用に関して、 A は G 不変である。
2. 任意の $\alpha \in \mathfrak{g}$ の無限小作用が定める P 上のベクトル場 α_* に対して、 $i(\alpha_*)A = \alpha$ が成り立つ。

接続全体のなす集合を \mathcal{C} とかく。 G の随伴作用により P と同伴するファイバー \mathfrak{g} の X 上のベクトル束を \mathfrak{g}_P とかく。 一般に、 \mathfrak{g}_P に値を持つ X 上の k 形式は、引き戻しによる単射 $\Omega^k(X, \mathfrak{g}_P) \hookrightarrow \Omega^k(P, \mathfrak{g}_P)$ により、 \mathfrak{g} に値を持つ P 上の k 形式とみなせる。すると、その同一視の下で、 \mathcal{C} は $\Omega^1(X, \mathfrak{g}_P)$ 上のアフィン空間となる。任意の $A \in \mathcal{C}$ に対して、その曲率 $F_A \in \Omega^2(X, \mathfrak{g}_P)$ は

$$F_A = dA + \frac{1}{2}[A \wedge A]$$

と定義される。ここで、 $[\cdot \wedge \cdot]$ は Ω^* の外積と \mathfrak{g} の積から定義される。

また、 X は有向 Riemann 多様体で四次元だったので、Hodge の $*$ 作用素 $*$: $\Omega^k(X, \mathfrak{g}_P) \rightarrow \Omega^{4-k}(X, \mathfrak{g}_P)$ が定義され、特に $*$: $\Omega^2(X, \mathfrak{g}_P) \rightarrow \Omega^2(X, \mathfrak{g}_P)$ は $*^2 = 1$ を充たす。

さて、 P 上の接続 $A \in \mathcal{C}$ が ASD 接続であるとは

$$F_A + *F_A = 0 \tag{1}$$

を充たすことであり、式 (1) を ASD 方程式とよぶ。 Taubes[2] は ASD 方程式 (1) の解の存在定理を確立した。

3 Runge 型近似定理

函数論での Runge の近似定理とは、複素平面の領域上の有理型函数が、定義域をコンパクト部分集合に制限すれば、有理関数でいくらでも近似できる、という定理だった。ところで、有理関数とは Riemann 球面上の有理型函数のことで、有理型関数とは Riemann 球面への正則写像のことである。従って、Runge の近似定理の述べることを言い換えれば、Riemann 球面の領域から Riemann 球面への正則写像は、定義域をコンパクト部分集合に制限すれば、Riemann 球面全体から Riemann 球面への正則写像でいくらでも近似できる。

一般に, Riemann 面上の Cauchy-Riemann 方程式と四次元多様体上の ASD 方程式には類似があるという指導原理があるようだ. 次の定理はその一例であり, ASD 方程式で Runge の近似定理の類似が成り立つことを主張している.

定理: 四次元有向閉 Riemann 多様体 X とその開部分集合 U が与えられ, さらに, U 上の $SU(2)$ 主束 P_U が与えられたとする. また, A_U を P_U 上の ASD 接続とする. このとき, U の任意のコンパクト部分集合 K に対して, X 上の $SU(2)$ 束の列 P_n とその上の ASD 接続 A_n と束写像 $\rho_n: P_U \rightarrow P_n|_U$ が存在して, $\rho_n^*(A_n)$ は K の近傍上で A_U に C^∞ 収束する.

$X = S^4$ のときにはこの定理は Donaldson[1] により示されていた. その証明は Taubes が開発した絶妙なノルムと摂動論的手法の巧妙な応用による. X が一般の場合には, Laplace 型作用素 $d_A^*d_A$ の零固有空間が非自明な可能性があるため, 摂動論的手法を単純に適用するだけでは証明することはできない. しかし, Taubes が発展させた倉西写像の技術 [3] を応用することでその困難は解決できる. この結果については論文 [4] を投稿準備中である. また, 擬正則曲線でも類似の結果が得られており, そちらについては論文を現在執筆中である.

参考文献

- [1] S.K. Donaldson, The approximation of instantons, GAFA 3 (1993), 179-200.
- [2] C.H. Taubes, Self-dual connections on 4-manifolds with indefinite intersection matrix, JDG 19 (1984), 517-560.
- [3] C.H. Taubes, The stable topology of self-dual moduli spaces, JDG 29 (1989), 163-230.
- [4] S. Matsuo, The approximation of instantons over an arbitrary closed oriented four-manifold, in preparation.

単独粘性保存則に対するある 初期・値境界値問題の解の漸近評価について

橋本 伊都子 (阪大・情)

1 序

半直線上における単独粘性保存則に対する次の初期境界値問題

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = u_{xx}, & x > 0, t > 0, \\ u(0, t) = u_-, & t > 0, \\ \lim_{x \rightarrow \infty} u(x, t) = u_+, & t > 0, \\ u(x, 0) = u_0(x), & x > 0, \end{cases} \quad (1)$$

について、大域解の漸近挙動及び大域解の漸近解への定量的時間減衰評価について考察する. ここに、流束 $f(u)$ は C^2 級で $f(0) = f'(0) = 0$ を満たし、初期値 u_0 と定数 u_{\pm} は

$$u_0 - u_+ \in H^1, \quad u(0) = u_-, \quad u_- < 0 < u_+ \quad (2)$$

を満たすとす. f が

$$f''(u) > 0 \text{ for } u \in [u_-, u_+] \quad (3)$$

で表される凸性を満たす場合, Liu-松村-西原 ('98 [3]) は (1) の解 u は (a) $u_- < u_+ \leq 0$, (b) $0 \leq u_- < u_+$, (c) $u_- < 0 < u_+$ の3通りに場合分けされ, (a) の場合は u_- と u_+ を結ぶ定常解に, (b) の場合は u_- と u_+ を結ぶ希薄波に漸近し, (c) の場合は u_- と 0 を結ぶ定常解と 0 と u_+ を結ぶ希薄波 ψ^R の重ね合わせ $\phi + \psi^R$ に漸近することを示した. ここに, 定常解 $\phi = \phi(x)$ は常微分方程式の境界問題

$$f(\phi)_x = \phi_{xx} \quad (x > 0), \quad \phi(0) = u_-, \quad \phi(+\infty) = 0$$

の解で与えられ, 希薄波 $\psi^R = \psi^R(x/t)$ は具体的に

$$\psi^R\left(\frac{x}{t}\right) = \begin{cases} 0, & x \leq 0, \\ (f')^{-1}\left(\frac{x}{t}\right), & 0 \leq x \leq f'(u_+)t, \\ u_+, & x \geq f'(u_+)t. \end{cases}$$

で与えられる. 凸性を緩めた場合の研究としては, 長瀬 [6] が流束 $f(u)$ について $f(u) = u^2(u - u_*)$ (図1参照) のような場合を考察し, 十分小さい $\epsilon > 0$ に対し $u_- \in (\tilde{u}_* - \epsilon, 0)$ かつ $0 < u_+ < \epsilon$ であるなら $\phi + \psi^R$ は漸近安定であることを示した. さらに, 橋本-松村 [1] においてこの結果を $u_- \in (u_*, 0)$ の場合に拡張すると共に, $f(u)$ の凸性を

$$f(0) = f'(0) = 0, \quad f''(0) > 0, \quad f(u) > 0 \quad (u \in [u_-, 0)). \quad (4)$$

の形に弱めても ((図 2) 参照), u_+ が十分小であるならば $\phi + \psi^R$ は漸近安定であることを示した. ここで定理の主張は次の通りである:

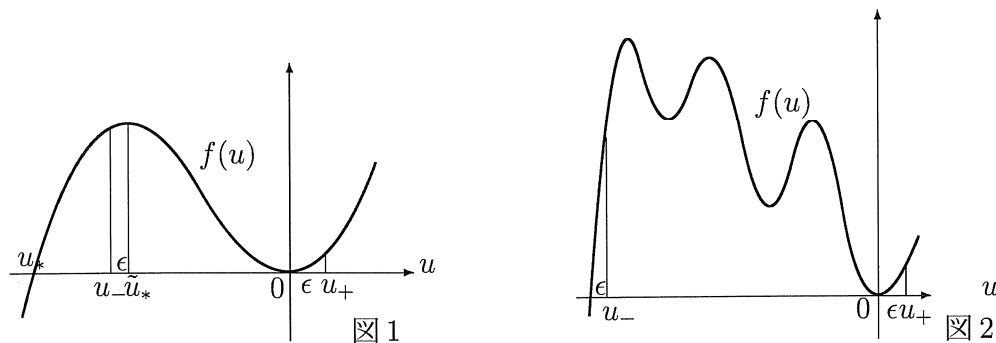
定理 1 (橋本-松村 [1]) 流束 f , 初期値 u_0 及び u_+ について (2), (4) を仮定する. この時, ある正定数 ϵ があって $u_+ \leq \epsilon$ かつ $\|u_0 - \phi - \psi^R(\cdot)\|_1 \leq \epsilon$ であるならば, 初期値境界値問題 (1) は唯一つの大域解 u

$$\begin{cases} u - u_+ \in C([0, \infty); H^1), \\ u_x \in L^2(0, T; H^1), \quad T > 0 \end{cases}$$

を持ち,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > 0} |u(x, t) - \phi(x) - \psi^R\left(\frac{x}{t}\right)| = 0.$$

証明の方法についてはアプリアリ評価が本質的であるが, 長瀬 [6] では Liu-松村-西原 [3] での L^2 エネルギー法に加え松村-西原 [5] に見られるような重みつき L^2 エネルギー法を用いたのに対し, 橋本-松村 [1] はさらに Mei [4] のアイデアも組み合わせ, 未知関数を別の重み関数を用い変換した後, 新しい未知関数に対し改めて重みつき L^2 エネルギー法を適用することで必要なアプリアリ評価を得た.



次に (1) の漸近解への解の減衰度評価について紹介する. まずこれまでの結果を紹介する. (a) で定常解 ϕ が非退化の場合は川島-西畑-西川 [2] によって $u_0 - u_+ \in L^1 \cap H^1$ とすると, $\|u - \phi\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{4}}$ が成り立ち, ϕ が退化している場合も川島-中村-上田 [?] により同じ漸近評価が成り立つことが示されている. また (b) の場合は中村 [7] により $\|u - \psi^R\|_{L^2} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{4}} \log(2+t)$, $\|u - \psi^R\|_{L^\infty} \leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}} \log^3(2+t)$ が成り立つことが示されている. 本研究では (c) の重ね合わせの場合について $\text{flux} f(u)$ が (2), (4) の場合においてそれぞれ次の結果を得た.

定理 2. (川島-上田-橋本) 非線形項 f , 初期値 u_0 及び u_\pm について (2), (3) を仮定する. このとき, 初期・境界値問題 (1) は唯一つの時間大域解 u を持ち, 次の減衰評価が成立する.

$$\begin{aligned} \|(u - \phi - \psi^R)(t)\|_{L^p} &\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \log^2(2+t), \quad (1 \leq p < \infty), \\ \|(u - \phi - \psi^R)(t)\|_{L^\infty} &\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}+\epsilon}, \quad (\forall \epsilon > 0). \end{aligned} \quad (5)$$

定理 3. (川島-上田-橋本) 非線形項 f , 初期値 u_0 及び u_\pm について (2), (4) を仮定

する. このとき, ある正定数 ϵ_0 があって, $u_+ \leq \epsilon_0$ かつ $\|u_0 - \phi - \psi^R(\cdot)\|_{H^1} \leq \epsilon_0$ であるならば, 初期・境界値問題 (1) は唯一つの大域解 u を持ち, 減衰評価 (5) が成り立つ.

証明の方法については, [2] による L^p エネルギー法が本質的であり, [1] と同様に [4] の手法を用いて未知関数を別の重み関数を用いて変換した後, 新しい未知関数に対し改めて重み付き L^p エネルギー法を適用することで, 必要なアприオリ評価を得た.

2 問題の再定式化

まず問題 (1) を再定式化する.

$$\Phi(x, t) := \phi(x) + \psi(x, t)$$

と置き, 摂動を

$$v(x, t) = u(x, t) - \Phi(x, t)$$

と定義し, v が 0 に漸近することを示すことによって u が $\psi + \phi$ に近づくことを示すという問題に帰着させる. ここに $\psi(x, t)$ は $\psi^R(x/t)$ の滑らかな近似とする. ここで, 次のような v に関する初期値境界値問題を得る:

$$\begin{cases} v_t + \{f(\Phi + v) - f(\Phi)\}_x - v_{xx} = F(\phi, \psi), \\ v(0, t) = 0, \quad t > 0, \quad x > 0, \\ v(x, 0) = v_0(x) := u_0(x) - \phi(x) - \psi(x, 0). \end{cases} \quad (6)$$

ただし

$$F(\phi, \psi) = -(f'(\phi + \psi) - f'(\phi))\phi_x - (f'(\phi + \psi) - f'(\psi))\psi_x + \psi_{xx}.$$

ここに, 定理 1., 定理 2., 定理 3. に対して示すべき定理はそれぞれ次のようになる:

定理 4. 非線形項 f , 初期値 u_0 及び u_{\pm} について (2), (4) を仮定する. この時, ある正定数 $\epsilon > 0$ があって, $0 < u_+ \leq \epsilon$ かつ $\|v_0\|_1 \leq \epsilon$ であるならば, 初期値境界値問題 (6) はただ一つの大域解 v

$$\begin{cases} v \in C([0, \infty); H_0^1), \\ v_x \in L^2(0, \infty; H^1), \end{cases} \quad (7)$$

を持ち,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \sup_{x > 0} |v(x, t)| = 0.$$

定理 5. 非線形項 f , 初期値 u_0 及び u_{\pm} について (2), (3) を仮定する. このとき, 初期・境界値問題 (6) は唯一つの時間大域解 u を持ち, 次の減衰評価が成立する.

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{L^p} &\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \log^2(2+t), \quad (1 \leq p < \infty), \\ \|v(t)\|_{L^\infty} &\leq C(1+t)^{-\frac{1}{2}+\epsilon}, \quad (\forall \epsilon > 0). \end{aligned} \quad (8)$$

定理 6. (川島-上田-橋本) 非線形項 f , 初期値 u_0 及び u_{\pm} について (2), (5) を仮定する. このとき, ある正定数 ϵ_0 があって, $u_+ \leq \epsilon_0$ かつ $\|u_0 - \phi - \psi^R(\cdot)\|_{H^1} \leq \epsilon_0$ であるならば, 初期・境界値問題 (6) は唯一つの大域解 u を持ち, 減衰評価 (8) が成り立つ.

3 証明の概略

L^p のエネルギー不等式の導出が証明の主要となるので, その部分を説明する.

$$v(x, t) := w(\phi(x))\tilde{v}(x, t)$$

と置く. ここに w は後で決める重み関数である. これを (6) 式:

$$v_t + (f(\Phi) - f(\Phi))_x - v_{xx} = F(\phi, \psi)$$

に代入すると

$$(w(\Phi)\tilde{v})_t + (f(\Phi + w(\Phi)\tilde{v}) - f(\Phi))_x - (w(\Phi)\tilde{v})_{xx} = F(\phi, \psi). \quad (9)$$

(9) の両辺に $|\tilde{v}|^{p-2}\tilde{v}$ を掛け x で積分すると, 等式:

$$\left(\frac{1}{p} \int_0^\infty w(\Phi)|\tilde{v}|^p dx\right)_t + \int_0^\infty \frac{p-1}{p} (wf'' - w''f)(\Phi)\Phi_x |\tilde{v}|^p dx + \int_0^\infty w|\tilde{v}|^{p-2}\tilde{v}_x^2 dx \quad (10)$$

$$= \int_0^\infty (F\tilde{v}|\tilde{v}|^{p-2} + \frac{p-1}{p} w'F|\tilde{v}|^p) dx + \int_0^\infty O(|\tilde{v}| + |\psi| + |\psi_x|)\Phi_x |\tilde{v}|^p dx$$

を得る. ここで右辺第一項は

$$\left| \int_0^\infty (F\tilde{v}|\tilde{v}|^{p-2} + \frac{p-1}{p} w'F|\tilde{v}|^p) dx \right| \leq C \int_0^\infty |\tilde{v}|^{p-1}|F| dx$$

と評価され, 右辺第二項は

$$\int_0^\infty O(|\tilde{v}| + |\psi| + |\psi_x|)\Phi_x |\tilde{v}|^p dx \leq C(\epsilon + |u_+|) \int_0^\infty \Phi_x |\tilde{v}|^p dx.$$

と評価される. ここで $\Phi_x > 0$ に注意する. 又, 次の命題を用いる:

命題. $w(u) := f(u) + \delta g(u)$, $g(u) := -u^{2m} + r^{2m}$, ($u \in [u_-, r]$, $1 \leq m$) と置く. ここに δ 及び m は正定数. この時条件 (4) のもと δ を十分に小さく取り m を十分に大きく取れば $\frac{1}{2}(f''(u)w(u) - f(u)w''(u))$ と $w(u)$ は $u \in [u_-, r]$ において真に正となる.

ここに r はある正定数 c に対して $f''(u) > c$ ($u \in [-r, r]$) を満たす r を一つ取り固定したものである. ここに $u_+ < r$ を仮定する.

よって (10) 式は

$$\left(\frac{1}{p} \int_0^\infty w(\Phi)|\tilde{v}|^p dx\right)_t + c \frac{p-1}{p} \int_0^\infty |\tilde{v}|^p \Phi_x dx + \frac{4}{p^2} \int_0^\infty (|\tilde{v}|^{\frac{p}{2}-1}\tilde{v})_x^2 w dx \leq \int_0^\infty |\tilde{v}|^{p-1}|F| dx. \quad (11)$$

と評価される. ここで (11) の両辺に $(1+t)^\alpha$ ($\alpha > (p-1)/2$) を掛け $[0, t]$ で積分

すると,

$$\begin{aligned}
& (1+t)^\alpha |\tilde{v}|_p^p + \int_0^t (1+\tau)^\alpha |\tilde{v} \Phi_x^{\frac{1}{p}}|_p^p d\tau + \int_0^t (1+\tau)^\alpha |(|\tilde{v}|^{\frac{p}{2}-1} \tilde{v})_x|_2^2 d\tau \\
& \leq |\tilde{v}_0|_p^p + c \int_0^t (1+\tau)^{\alpha-1} |\tilde{v}|_p^p d\tau + c \int_0^t (1+\tau)^\alpha \int_0^\infty |\tilde{v}|^{p-1} |F| dx d\tau.
\end{aligned} \tag{12}$$

ここで補間不等式

$$\begin{aligned}
|\tilde{v}|_p^p & \leq C |(|\tilde{v}|^{\frac{p}{2}-1} \tilde{v})_x|_2^{\frac{2(p-1)}{p+1}} |\tilde{v}|_1^{\frac{2p}{p+1}}, \\
|\tilde{v}|_\infty & \leq C |(|\tilde{v}|^{\frac{p}{2}-1} \tilde{v})_x|_2^{\frac{2}{p+1}} |\tilde{v}|_1^{\frac{1}{p+1}}.
\end{aligned}$$

を用いて (12) の右辺を評価し, 両辺に再び $(1+t)^{-\alpha}$ を掛けると

$$|\tilde{v}|_p \leq c (1+t)^{-\frac{1}{2}(1-\frac{1}{p})} \log^2(2+t) \tag{13}$$

を得る. □

参考文献

- [1] I. Hashimoto and A. Matsumura, *Large time behavior of solutions to an initial boundary value problem on the half line for scalar viscous conservation law*, to appear in *Methods and Applications of Analysis*.
- [2] S. Kawashima, S. Nishibata and M. Nishikawa, *L^p energy method for multi-dimensional viscous conservation laws and application to the stability of planar waves*, *J. Hyperbolic Diff. Equ.*, **1** (2004), 581-603.
- [3] T.-P. Liu, A. Matsumura and K. Nishihara, *Behaviors of solutions for the Burgers equation with boundary corresponding to rarefaction waves*, *SIAM J. Math. Anal.* **29** (1998), 293-308.
- [4] A. Matsumura and M. Mei, *Nonlinear stability of viscous shock profile for a non-convex system of viscoelasticity*, *Osaka J. Math.* **34**(1997), 589-603.
- [5] A. Matsumura and K. Nishihara, *Asymptotic stability of traveling waves for scalar viscous conservation laws with non-convex nonlinearity*, *Commun. Math. Phys.* **165**(1994), 83-96.
- [6] J. Nagase, *Large time behavior of solutions to an initial-boundary value problem on the half space for the generalized Burgers equation*, Master thesis of Department of Mathematics, Graduate School of Science, Osaka University, 2000.
- [7] T. Nakamura, *Asymptotic decay toward the rarefaction waves of solutions for viscous conservation laws in one-dimensional half space*, *SIAM J. Math. Anal.*, **34** (2003), 1308-1317.

Chow rings of Complex Algebraic Groups

鍛冶 静雄*(joint with 中川 征樹†)

2008年2月13日 CCYR4 北海道大学

1 導入

Chow ring とは代数多様体に対して定義される, コホモロジー環に良く似た不変量である. (その基本的な性質等は [7] を参照) ここでは, 単連結単純複素 Lie 群 G の Chow ring を決定する事が目標である.

単連結単純複素 Lie 群 G は, その分類定理により $SL_n, Spin_n, Sp_n, G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$ の族のうちいずれかと同型であることが知られている.

問題 1.1. 全ての単連結単純複素 Lie 群 G について, Chow ring $A^*(G)$ を決定せよ.

この問題は, 1950 年代に Grothendieck, Chevalley らによって研究され, 後に述べる Grothendieck の結果 [8] により, G に付随する flag variety の整係数コホモロジー環から計算できる事が示された. そして, その簡単な帰結として $G = SL_n, Sp_n$ に対して $A^*(G)$ は自明であることが示された.

torsion part $A^*(G) \otimes \mathbf{Z}/p$ に関しては全ての G について, Kac [9] が決定した. 但しその生成元は具体的には与えられていない.

更に, $G = Spin_n, G_2, F_4$ については, R.Marlin [11] が Schubert calculus を用いて $A^*(G)$ を決定した. また共同研究者の中川氏 [14] は, ここで扱う方法で Marlin の結果を再確認した.

そこで我々は, 次の問題を考える事により問題 1.1 を完成する.

問題 1.2. 単連結例外型複素 Lie 群 $G = E_6, E_7, E_8$ について, Chow ring $A^*(G)$ を決定せよ.

我々の方法は, 代数的位相幾何学の古典的な計算を Schubert calculus の道具を用いて翻訳したものである.

2 基本事項

G を単連結単純複素 Lie 群とし, その Borel 部分群 (極大可解群) を B とする. 全ての Borel 部分群は互いに共役なので, B としてはどれを選んでも良い. この時, 等質空間 G/B は projective variety の構造を持ち, これを (G に付随する) flag variety (旗多様体) と呼ぶ. 例えば, G を n 次 special linear group SL_n とすると, B は行列式が 1 の上三角行列のなす部分群に取れる.

flag variety G/B のコホモロジー環 (より一般には (equivariant) K-theory や quantum cohomology) の積構造は代数幾何学, 組合せ論, 表現論等の様々な観点からの豊かな解釈を持ち, それを調べるのが Schubert calculus と呼ばれる分野である.

さて, 非同変代数多様体 X の Chow ring $A^*(X)$ とは何か簡単に見てみる. 非負整数の次数 $A^*(X) =$

* 京都大学大学院理学研究科

† 高松工業高等専門学校

$\bigoplus_{i \geq 0} A^i(X)$ を持つ環であり, 各次数に於いて $A^i(X)$ は余次元 i の algebraic cycle の rational equivalence class と呼ばれるある同値類集合である. ここで algebraic cycle とは, (特異でも良い) 部分多様体の整数係数線形和であり, その基本類をとる写像は *cycle map* と呼ばれる環準同型 $cl: A^*(X) \rightarrow H^{2*}(X; \mathbf{Z})$ を誘導することが知られている.

次に導入部で挙げた全ての計算で使われている, Grothendieck の結果を紹介する.

定理 2.1 ([8], 証明は [2] の §3 を参照). *cycle map* は環同型 $A^*(G/B) \xrightarrow{\cong} H^{2*}(G/B; \mathbf{Z})$ を導く. また, 射影 $p: G \rightarrow G/B$ による引き戻し $p^*: A^*(G/B) \rightarrow A^*(G)$ は全射で, その核は $A^1(G/B)$ で生成されるイデアルである.

この簡単な系として次を得る.

系 2.2. $A^*(G) \cong H^*(G/B; \mathbf{Z}) / (H^2(G/B; \mathbf{Z}))$

つまり $A^*(G)$ の環構造を決定するには, $H^*(G/B; \mathbf{Z})$ の環構造と 2 次の元で生成されるイデアルが分かれば良い.

ここで系 2.2 の簡単な帰結を二つ述べる. 全ての G について $H^*(G/B; \mathbf{Q})$ は 2 次の元で生成される事が知られているので, $A^*(G) \otimes \mathbf{Q} = \mathbf{Q}$ を得る. また同様の理由から, $G = SL_n, Sp_n$ の場合 $A^*(G) = \mathbf{Z}$ を得る.

3 flag variety のコホモロジー環

系 2.2 によると, $A^*(G)$ の決定は $H^*(G/B; \mathbf{Z})$ の環構造の決定に帰着されるが, 次にその二通りの表示を紹介する. それぞれ一長一短あり, 我々の目的には両方必要となる.

3.1 Borel 表示

一つ目は Borel 表示と呼ばれる, 多項式環の剰余環としての表示である.

これを紹介する為には幾つか準備が必要である. (詳しくは [12] 等を参照) K を G の極大コンパクト部分群, T を極大トーラス, W を Weyl 群, $\{\omega_i\}_{1 \leq i \leq l}$ を基本ウェイトとする. また, BT で T の分類空間を表す. この時, $H^*(BT; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[\omega_1, \dots, \omega_l]$ である事, $K \hookrightarrow G$ が微分同相 $K/T \cong G/B$ を誘導する事が知られている. 特に $A^*(G/B) \simeq H^*(G/B; \mathbf{Z}) \simeq H^*(K/T; \mathbf{Z})$ である. 主 T 束 $T \hookrightarrow K \rightarrow K/T$ の分類写像 $K/T \xrightarrow{\hookrightarrow} BT$ がコホモロジーに誘導する写像 $\iota^*: H^*(BT; \mathbf{Z}) \rightarrow H^*(K/T; \mathbf{Z})$ は *characteristic map* と呼ばれる.

定理 3.1 ([3]). ι^* は全射で, 同型 $H^*(K/T; \mathbf{Q}) \simeq H^*(BT; \mathbf{Q}) / (H^+(BT; \mathbf{Q})^W)$ を導く. 但し, $(H^+(BT; \mathbf{Q})^W)$ は正次数の W 不変多項式で生成されるイデアルである.

更にこの仕事は Toda [16] により整係数コホモロジー $H^*(K/T; \mathbf{Z})$ の Borel 表示と呼ばれる, 多項式環の剰余環による表示を与える方法に拡張され, 中川氏を含む数人の代数的位相幾何学者達の手で, 全てのコンパクト単連結単純 Lie 群 K について, $H^*(K/T; \mathbf{Z})$ の具体的な表示が与えられた. ([3], [17], [5], [13], [15])

ここに具体的な例を挙げてみる. 例えば $H^*(E_6/T; \mathbf{Z})$ の場合次の様な形をしている.

定理 3.2 ([17]).

$$H^*(E_6/T; \mathbf{Z}) = \frac{\mathbf{Z}[t_1, t_2, \dots, t_6, t, \gamma_3, \gamma_4]}{(\rho_1, \rho_2, \rho_3, \rho_4, \rho_5, \rho_6, \rho_8, \rho_9, \rho_{12})} \quad (|t_i| = |t| = 2, |\gamma_i| = 2i)$$

$$\begin{aligned} \rho_1 &= c_1 - 3t, & \rho_2 &= c_2 - 4t^2, & \rho_3 &= c_3 - 2\gamma_3, & \rho_4 &= c_4 + 2t^4 - 3\gamma_4, & \rho_5 &= c_5 - 3t\gamma_4 + 2t^2\gamma_3 \\ \rho_6 &= \gamma_3^2 + 2c_6 - 3t^2\gamma_4 + t^6, & \rho_8 &= 3\gamma_4^2 - 6t\gamma_3\gamma_4 - 9t^2c_6 + 15t^4\gamma_4 - 6t^5\gamma_3 - t^8, & \rho_9 &= 2c_6\gamma_3 - 3t^3c_6 \\ \rho_{12} &= 3c_6^2 - 2\gamma_4^3 + 6t\gamma_3\gamma_4^2 + 3t^2c_6\gamma_4 + 5t^3c_6\gamma_3 - 15t^4\gamma_4^2 - 10t^6c_6 + 19t^8\gamma_4 - 6t^9\gamma_3 - 2t^{12} \end{aligned}$$

この表示では、 $H^*(K/T; \mathbf{Z}) = H^*(G/B; \mathbf{Z})$ は多項式環の剰余環であるので、系 2.2 を用いると簡単に (抽象的な代数として) $A^*(G)$ が求まるが、問題はその生成元を代表する algebraic cycle が決定できないと言う所にある。これを打破する為に、次により幾何学的な表示を紹介する。

3.2 Schubert presentation

もう一つの表示は、Schubert 表示と呼ばれる、Schubert variety という特異多様体を \mathbf{Z} 上の基底とする、自由加群 $H^*(G/B; \mathbf{Z})$ の "Z-module" としての表示である。

G は Bruhat 分解 ([4])

$$G = \coprod_{w \in W} BwB$$

と呼ばれる Weyl 群によってインデックス付けされた、 B による double coset 分解を持ち、それは同じく Bruhat 分解と呼ばれる次の G/B の胞体分割を誘導する。

$$G/B = \coprod_{w \in W} BwB/B.$$

この時、Weyl 群 W の元 w に対応する胞体 $BwB/B \cong \mathbb{C}^{l(w)}$ の閉方 X_w は Schubert variety と呼ばれる複素 $l(w)$ 次 (特異) 多様体となる。但し $l(w)$ は、Weyl 群を Coxeter 群と見なしたときの元 w の長さを表すものとする。

Weyl 群の最長元を w_0 とすると、 $l(w_0w) = l(w_0) - l(w) = \dim_{\mathbb{C}} G/B - l(w)$ となるので、 X_{w_0w} の基本類の Poincare 双対は $H^{2l(w)}(G/B; \mathbf{Z})$ の元 Z_w を定める。これを w に対応する Schubert class と呼ぶ。

Bruhat 分解と Schubert class の定義から明らかに、 $\{Z_w\}_{w \in W}$ は $H^*(G/B; \mathbf{Z})$ の \mathbf{Z} -module 基底をなす。この表示ではコホモロジー類の代表元は subvariety であるので特に algebraic cycle である。しかし問題は、この表示では環構造を捉えることは難しい為、系 2.2 を適用する事が難しい。(実際 Marlin [11] はこの表示のみを使って計算した為、階数の高い例外型 Lie 群の計算ができなかった。)

つまり、環構造の見やすい Borel 表示と、代表元の素性の良い Schubert 表示の両方を行き来できれば、我々の目標は達成できる。

4 Divided difference operator

flag variety のコホモロジー環の Borel 表示と Schubert 表示を相互に書き換える為には、Demazure [6] と Bernstein-Gelfand-Gelfand [1] によって独立に開発された *divided difference operator* が有効である。これは Schubert calculus に於いて一つの重要な道具であり非常に応用範囲も広いが、ここでは我々の目的に絞って解説する。

まず記号を準備する。(詳しくは [12] 等を参照) $\Pi = \{\alpha_i\}_{1 \leq i \leq l}$ を K の simple root とし、対応する simple reflection を $\{s_i\}_{1 \leq i \leq l}$ とかくと、 K の Weyl 群 W は $\{s_i\}_{1 \leq i \leq l}$ で生成される有限群である。

これらを用いて、divided difference operator の定義を述べることができる。

定義 4.1 ([6], [1]). まず *simple reflection* s_i に対しては、対応する *divided difference operator* $\Delta_i : H^*(BT; \mathbf{Z}) \rightarrow H^{*-2}(BT; \mathbf{Z})$ は次式で定義される。

$$\Delta_i(f) = \frac{f - s_i(f)}{\alpha_i}, \quad f \in H^*(BT; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}[\omega_1, \dots, \omega_l]$$

更に、任意の Weyl 群の元に対しては、その *simple reflection* の積による最短表示 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ を一つ選ぶと、対応する *divided difference operator* $\Delta_w : H^*(BT; \mathbf{Z}) \rightarrow H^{*-2l(w)}(BT; \mathbf{Z})$ は次式で定義される。

$$\Delta_w = \Delta_{i_1} \circ \Delta_{i_2} \circ \cdots \circ \Delta_{i_k}$$

一般に Weyl 群の元に対して最短表示 $w = s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ は一意的ではないが, divided difference operator の定義が well-defined であることは保証されている.

定理 4.2 ([6], [1]). • $\Delta_w : H^*(BT; \mathbf{Z}) \rightarrow H^{*-2l(w)}(BT; \mathbf{Z})$ は well-defined.

• $c : H^{2k}(BT; \mathbf{Z}) \rightarrow H^{2k}(K/T; \mathbf{Z})$ を次式

$$c(f) = \sum_{l(w)=k} \Delta_w(f) Z_w \quad (\text{注意: } \Delta_w(f) \in \mathbf{Z})$$

で定義する時, c は Borel 表示の characteristic map ι^* に等しい.

• (Giambelli formula) 任意の Schubert class Z_w に対して次が成り立つ.

$$Z_w = c \left(\Delta_{w^{-1}w_0} \left(\frac{\prod_{\alpha \in \Delta^+} \alpha}{|W|} \right) \right)$$

但しここで, Δ^+ は positive root の集合である.

この定理により, 原理的には Borel 表示で与えられている多項式を Schubert class の線形和で書き下す事, 逆に与えられた Schubert class に対応する Borel 表示の元 (多項式) を与えることができる.

実際にこの定理を適用するには, 次の帰納的な公式が有効である.

補題 4.3. $\Delta_i(fg) = \Delta_i(f)g + s_i(f)\Delta_i(g), \quad \Delta_i(\omega_j) = \delta_{ij}.$

後は計算の困難を除いては, 難しいところは無い.

5 結果

以上の事柄を用いて, 問題 1.2 を解決することができる.

定理 5.1.

$$A^*(E_6) = \mathbf{Z}[X_3, X_4]/(2X_3, 3X_4, X_3^2, X_4^3)$$

ここで生成元は, $X_3 = p^*(X_{w_0 s_5 s_4 s_2}) = \overline{B(w_0 s_5 s_4 s_2)B} \subset G$

$X_4 = p^*(X_{w_0 s_6 s_5 s_4 s_2}) = \overline{B(w_0 s_6 s_5 s_4 s_2)B} \subset G$ という Schubert variety の引き戻しとしてとることができる.

Proof. 系 2.2 により, $A^*(G) = H^{2*}(G/B; \mathbf{Z})/(H^2(G/B; \mathbf{Z})) = H^{2*}(K/T; \mathbf{Z})/(H^2(K/T; \mathbf{Z}))$ であるが, Borel 表示を与える定理 3.2 と, $H^2(K/T; \mathbf{Z}) = \mathbf{Z}\{t_1, \dots, t_l, t\}$ である事から, $A^*(G)$ は $H^*(K/T; \mathbf{Z})$ の Borel 表示において $t = 0, t_i = 0, (1 \leq i \leq l)$ とすれば良い. 更に定理 4.2 を使い, Borel 表示の元を Schubert class で表すことができる. 実際,

$$H^*(E_6/T; \mathbf{Z})/(t_1, \dots, t_6, t) = \mathbf{Z}[\gamma_3, \gamma_4]/(2\gamma_3, 3\gamma_4, \gamma_3^2, \gamma_4^3) = \mathbf{Z}[Z_{542}, Z_{6542}]/(2Z_{542}, 3Z_{6542}, Z_{542}^2, Z_{6542}^3)$$

となる. 但し, $s_{i_1} s_{i_2} \cdots s_{i_k}$ を $i_1 i_2 \cdots i_k$ と略記した. □

同様にして,

定理 5.2.

$$A^*(E_7) = \mathbf{Z}[X_3, X_4, X_5, X_9]/(2X_3, 3X_4, 2X_5, X_3^2, 2X_9, X_5^2, X_4^3, X_9^2)$$

但し, $X_3 = p^*(X_{w_0 s_5 s_4 s_2}), X_4 = p^*(X_{w_0 s_6 s_5 s_4 s_2}), X_5 = p^*(X_{w_0 s_7 s_6 s_5 s_4 s_2}), X_9 = p^*(X_{w_0 s_6 s_5 s_4 s_3 s_7 s_6 s_5 s_4 s_2}).$

定理 5.3.

$$A^*(E_8) = \mathbf{Z}[X_3, X_4, X_5, X_6, X_9, X_{10}, X_{15}]/(2X_3, 3X_4, 2X_5, 5X_6, 2X_9, X_5^2 - 3X_{10}, X_4^3, 2X_{15}, X_9^2, 3X_{10}^2, X_3^8, X_{15}^2, X_{10}^3, 2X_6^5)$$

但し, $X_i (i = 3, 4, 5, 6, 9, 10, 15)$ は codimension i の Schubert variety の引き戻しのある線形和.

参考文献

- [1] I.N. Bernstein, I.M. Gelfand and S.I. Gelfand, *Schubert cells and the cohomology of the spaces G/P* , L.M.S. Lecture Notes vol.69 Cambridge Univ. Press, 1982, 115-140.
- [2] M.Brion, *Equivariant cohomology and equivariant intersection theory*, arXiv:math.AG/9802063v1.
- [3] A. Borel, *Sur la cohomologie des espaces fibrés principaux et des espaces homogènes de groupes de Lie compacts*, Ann. of Math. **57** (1953), 115-207.
- [4] C. Chevalley, *Sur les décomposition cellulaires des espaces G/B* , Algebraic Groups and their Generalizations: Classical Methods (W. Haboush, ed.), Proc. Sympos. Pure Math., vol. 56, Part 1, Amer. Math. Soc., 1994, 1-23.
- [5] R. Bott and H. Samelson, *Application of the theory of Morse to the symmetric spaces*, Amer. J. Math. **80** (1958), 964-1029.
- [6] M. Demazure, *Invariants symétriques des groupes de Weyl et torsion*, Invent. Math. **21** (1973), 287-301.
- [7] W.Fulton, *Intersection theory*, volume 2 of Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics [Results in Mathematics and Related Areas. 3rd Series. A Series of Modern Surveys in Mathematics]. Springer-Verlag, Berlin, second edition, **1998**.
- [8] A. Grothendieck, *Torsion homologique et sections rationnelles*, Exposé 5 in Anneaux de Chow et applications, Séminaire C. Chevalley, 1958, Multigraphié, Secrétariat Mathématique, Paris.
- [9] V. Kac, *Torsion in cohomology of compact Lie groups and Chow rings of reductive algebraic groups*, Invent. Math. **80** (1985), 69-79.
- [10] S. Kaji and M. Nakagawa, *The Chow rings of the algebraic groups E_6 and E_7* , preprint, arXiv:math.AT/07093702
- [11] R. Marlin, *Anneaux de Chow des groupes algébriques $SO(n)$, $Spin(n)$, G_2 et F_4* , Publications Math. d'Orsay, 95-7419 (1974).
- [12] 戸田宏, 三村護. リー群の位相 (上)(下), 紀伊國屋数学叢書. 紀伊國屋書店, 東京, 1978.
- [13] M. Nakagawa, *The integral cohomology ring of E_7/T* , J. Math. Kyoto Univ. **41** (2001), 303-321.
- [14] M. Nakagawa, *A description based on Schubert classes of cohomology of flag manifolds*, preprint, arXiv:math.AT/07090785v1.
- [15] M. Nakagawa, *The integral cohomology ring of E_8/T* , preprint.
- [16] H. Toda, *On the cohomology ring of some homogeneous spaces*, J. Math. Kyoto Univ. **15** (1975), 185-199.
- [17] H. Toda and T. Watanabe, *The integral cohomology ring of F_4/T and E_6/T* , J. Math. Kyoto Univ. **14** (1974), 257-286.

Pin structures and spin structures on surfaces and its applications

Masahiro KAWAMI *

E-mail : kawami@sci.osaka-cu.ac.jp

The 4th COE Conference for Young Researchers

Abstract

For a closed orientable (resp. non-orientable) surface, we can always give finite numbers of spin (resp. pin^\pm) structures. And it is known that there are some algebraic or geometric counterparts for them. In this talk and article, we see their relationships and discuss some applications.

1 Preliminaries

1.1 The notions of spin and pin structures in general dimensions

First of all, we review general facts on spin and pin structures on smooth manifolds. (For more details, consult, for example, [1], [2] and [3].) Let $n \geq 3$ be an integer. For the special orthogonal group $SO(n)$, it is well-known that $\pi_1(SO(n)) \cong \mathbb{Z}_2$, which implies that there is a universal double covering space over $SO(n)$. We denote it by $Spin(n)$, which is a compact, connected, and simply-connected Lie group called *the spinor group*. We denote this covering mapping by $\xi : Spin(n) \rightarrow SO(n)$. Now, let $p : E \rightarrow X$ be a n -dimensional smooth oriented real vector bundle over a manifold X and $E_x \cong \mathbb{R}^n$ be its each fiber. If we give each E_x a Riemannian metric, we can regard the structure group of this vector bundle as $SO(n)$. In addition, if we take the frame bundle of p , which is denoted by $\pi : P(E) \rightarrow X$, it is easy to see that each fiber $P(E)_x$ of this bundle is isomorphic to $SO(n)$. We define a *spin structure* of the (oriented) vector bundle $p : E \rightarrow X$ as the double covering space of $\Pi : \widetilde{P(E)} \rightarrow P(E)$ whose restriction maps onto each fiber $\Pi_x : \widetilde{P(E)}_x \rightarrow P(E)_x$ is equivalent to the covering map ξ . That is, the following diagram commutes:

$$\begin{array}{ccccc}
 \widetilde{P(E)} & \xleftarrow{\text{fiber inclusion}} & \widetilde{P(E)}_x & \cong & Spin(n) \\
 \downarrow \Pi & & \downarrow \Pi_x & & \downarrow \xi \\
 P(E) & \xleftarrow{\text{fiber inclusion}} & P(E)_x & \cong & SO(n) \\
 \downarrow \pi & & & & \\
 X & & & &
 \end{array}$$

*Osaka City University Advanced Mathematical Institute COE Researcher

We also define *the equivalence classes of spin structures of $p : E \rightarrow X$* as the equivalence classes of double covering spaces of $P(E)$. We define *a spin structure of a manifold M* as a spin structure of its tangent vector bundle TM . We call manifold M *a spin manifold* if M admits a spin structure.

Example 1.1. An oriented vector bundle $p : E \rightarrow S^1$ has exactly two spin structures.

Remark. Note that *not every* orientable manifold admits a spin structure. For a counterexample, the 4-manifold $\mathbb{C}P^2$, the complex projective plane, is not a spin manifold. On the other hand, it is known that every orientable surface (= 2-manifold) and orientable 3-manifold admit spin structures. It is also well-known that an orientable manifold M admits a spin structure if and only if the second Stiefel-Whitney class w_2 of TM vanishes. On the other hand, Rochlin[4] showed that the signature of an oriented closed simply-connected 4-manifold is zero modulo 16 if the 4-manifold is spin.

Proposition 1.2. *If an oriented vector bundle $p : E \rightarrow X$ has a spin structure, then, $\text{Spin}(X)$, the set of spin structures of X , correspondends bijectively to the cohomology group $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ as sets.*

This proposition follows from the fact that $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ acts on $\text{Spin}(X)$ in a simple transitive manner, which means that the bijection is never canonical. (i.e., the bijection between them is defined if any one spin structure is fixed) That is, $\text{Spin}(X)$ is isomorphic to $H^1(X; \mathbb{Z}_2)$ as an affine space. On the other hand, we can set up *pin structures* on *non-oriented* vector bundles as we have set up *spin structures* on *oriented* vector bundles. However, the theory of pin structures is complicated because there are two different possibilities ; they are *pin⁺ structures* and *pin⁻ structures*. (Note also that $O(n)$ is not connected; they are composed of two connected components.) Let $\bar{p} : \bar{E} \rightarrow \bar{X}$ be a n -dimensional smooth *non-oriented* real vector bundle and \bar{E}_x be its each fiber. If we give a metric on each \bar{E}_x , we can see the structure group of this vector bundle as $O(n)$. In addition, if we take the frame bundle of \bar{p} , which is denoted by $\bar{\pi} : P(\bar{E}) \rightarrow \bar{X}$, each fiber $P(\bar{E})_x$ of this bundle is isomorphic to $O(n)$. We define *a pin⁺ structure* (resp. *a pin⁻ structure*) of the (non-oriented) vector bundle \bar{p} as the double covering space of $\bar{\Pi} : \widetilde{P(\bar{E})} \rightarrow P(\bar{E})$ whose restriction map to each fiber $\bar{\Pi}_x : \widetilde{P(\bar{E})}_x \rightarrow P(\bar{E})_x$ is equivalent to the covering map $\xi_+ : \text{Pin}^+(n) \rightarrow O(n)$ (resp. $\xi_- : \text{Pin}^-(n) \rightarrow O(n)$). We also define *the equivalence classes of pin structures of \bar{p}* as the equivalence classes of double covering spaces of $P(E)$. We define *a pin⁺ (resp. a pin⁻) structure of a manifold M* as a pin⁺ (resp. a pin⁻) structure of its tangent vector bundle TM . We call manifold M *a pin⁺ (resp. a pin⁻) manifold* if M admits a pin⁺ (resp. a pin⁻) structure.

Example 1.3. $\mathbb{R}P^2$ admits two pin⁻ structures, whereas, admits no pin⁺ structures. Moreover, there are pin⁻ structures but no pin⁺ structures on closed non-orientable *odd* genus surfaces. On the other hand, there are both pin⁻ structures and pin⁺ structures on closed non-orientable *even* genus surfaces. In general, it is known that $\mathbb{R}P^n$ admits a pin⁻ structure if $n \equiv 2 \pmod{4}$, and admits a pin⁺ structure if $n \equiv 0$

mod 4. These follow from the fact that the existence of a pin^+ structure corresponds to the vanishing of the second Stiefel-Whitney class w_2 of TM , and the existence of a pin^- structure corresponds to the vanishing of $w_2 + w_1^2$, where w_1 of TM is the first Stiefel-Whitney class.

Remark. The groups $Spin(n)$ and $Pin(n)$ are also constructed via the *Clifford algebra*, which is closely related to the spin and pin structure. (See [3]).

1.2 In the case of surfaces

Let Σ_g be a closed orientable surface of genus g , which is the connected sum of g -copies of the torus. It is already known that there are 2^{2g} spin structures on Σ_g . (See Proposition 1.2 above.) On the other hand, for a closed non-orientable surface P_g of genus g , which is the connected sum of g -copies of the real projective plane, it is known that there are 2^g numbers of pin structures on it. In this subsection, we review some algebraic counterparts for spin structures and pin structures. Related references are, for example, [5], [6] and [7].

We fix a symplectic basis of $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$ satisfying $(x_i, x_j)_2 = (y_i, y_j)_2 = 0$, $(x_i, y_j)_2 = \delta_{ij}$ (for all $1 \leq i, j \leq g$) with respect to the \mathbb{Z}_2 -intersection form $(\ , \)_2$. A *quadratic form* on $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$ (associated with the \mathbb{Z}_2 -intersection form $(\ , \)_2$) is a map $Q : H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ which satisfies $Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + (x, y)_2$ for all x and $y \in H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$. The *Arf invariant* of a quadratic form $Q : H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ is defined as $\text{Arf}(Q) := \sum_{i=1}^g Q(x_i)Q(y_i)$. It is also known that the value of the Arf invariant does not depend on choices of the symplectic basis. Two quadratic forms Q and $Q' : H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ are *equivalent* (we write $Q \sim Q'$) if we have $Q' = Q \circ \varphi_*$, where φ_* is an element of $Sp(2g; \mathbb{Z}_2)$ induced by a diffeomorphism $\varphi \in \mathcal{M}_g$. Here the group \mathcal{M}_g is the *mappping class group (of a surface)*, which consists of isotopy classes of self-diffeomorphisms of Σ_g . It is also known that we have $Q \sim Q'$ if and only if $\text{Arf}(Q) = \text{Arf}(Q')$, which means that the Arf invariant is a complete invariant for the equivalence classes of quadratic forms. A quadratic form is called *even* (resp. *odd*) if $\text{Arf}(Q) = 0$ (resp. $\text{Arf}(Q) = 1$).

Proposition 1.4. ([5]) *The set of quadratic forms on $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$ corresponds bijectively to the set of spin structures on Σ_g as affine spaces over $H^1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$.*

The non-orientable version of this proposition is as follows. Here, a map $q : H_1(P_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_4$ is called a \mathbb{Z}_4 -quadratic form associated with the intersection form $(\ , \)_2$ if it satisfies $q(x + y) = q(x) + q(y) + 2(x, y)_2$, where $2 : \mathbb{Z}_2 \rightarrow \mathbb{Z}_4$ is a unique inclusion.

Proposition 1.5. ([6]) *There is a canonical bijective correspondence between the set of \mathbb{Z}_4 -quadratic forms on $H_1(P_g; \mathbb{Z}_2)$ and the set of pin structures on P_g as affine spaces over $H^1(P_g; \mathbb{Z}_2)$.*

We have to mention that a *Brown invariant* is a complete invariant for the equivalence classes of \mathbb{Z}_4 -quadratic forms, just as a Arf invariant is a complete invariant for the equivalence classes of quadratic forms. See also [6].

2 Applications and problems

We introduce a surface-knot invariants as an application of a spin structure. First of all, we review that the Rochlin quadratic form associated with any smooth embedding of Σ_g into S^4 is an even quadratic form. Let $f : \Sigma_g \rightarrow S^4$ be a smooth embedding, and F_g the image $F_g = f(\Sigma_g)$. The Rochlin quadratic form (associated with a smooth embedding f) is the quadratic form $Q_f : H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow \mathbb{Z}_2$ defined in the following way: We embed a compact surface P in S^4 so that P is normal to F_g along its boundary ∂P and ∂P is contained in F_g . Let P' also be a surface obtained by sliding P on F_g so that P' intersects with P transversely. Then we define

$$Q_f([\partial P]) = \#(\text{int}P \cap (P' \cup F_g)) \pmod{2}.$$

It is known that this is a well-defined quadratic form, which was originally introduced by Rochlin, and known to be an *even* quadratic form for any embedding $f : \Sigma_g \rightarrow S^4$. For a quadratic form Q on $H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)$, we define the subgroup

$$\mathcal{M}_g(Q) = \{\varphi \in \mathcal{M}_g \mid Q(x) = Q(\varphi_*(x)) \quad \forall x \in H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2)\}$$

of \mathcal{M}_g , which is commonly called *the spin mapping class group*. If $Q \sim Q'$, then we can check that $\mathcal{M}_g(Q)$ is conjugate to $\mathcal{M}_g(Q')$ in \mathcal{M}_g . It is well-known that the group

$$S_g = \{\varphi_* : H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2) \mid \varphi \in \mathcal{M}_g\}$$

is isomorphic to the \mathbb{Z}_2 -symplectic group $Sp(2g; \mathbb{Z}_2)$. For a quadratic form Q , we define the subgroup

$$S_g(Q) = \{\varphi_* \in S_g \mid \varphi \in \mathcal{M}_g(Q)\}$$

of $S_g \cong Sp(2g; \mathbb{Z}_2)$. This group is just the (\mathbb{Z}_2) -orthogonal group $O(2g; \mathbb{Z}_2)$. Likewise, if $Q \sim Q'$, then $S_g(Q)$ is conjugate to $S_g(Q')$ in $Sp(2g; \mathbb{Z}_2)$. Next we define

$$\mathcal{M}(f) = \{\varphi \in \mathcal{M}_g \mid \exists \text{ an orientation-preserving diffeomorphism } \Phi \text{ of } S^4 \text{ with } \Phi|_{F_g} = f\varphi f^{-1} : F_g \rightarrow F_g\}.$$

Note that, in this definition, f is a diffeomorphism from Σ_g to F_g , and note also that, if φ_0 is isotopic to φ_1 , then $f\varphi_0 f^{-1}$ is isotopic to $f\varphi_1 f^{-1}$. This implies that, if $f\varphi_0 f^{-1}$ extends to the diffeomorphism of S^4 , then $f\varphi_1 f^{-1}$ also extends to the diffeomorphism of S^4 by the isotopy extension theorem. An embedding $f : \Sigma_g \rightarrow S^4$ is *trivial* if F_g bounds a handlebody of genus g in S^4 and its image, the trivial surface, is unique up to ambient isotopy. In [8], Hirose showed

Lemma 2.1. *For a trivial embedding f , we have $\mathcal{M}(f) = \mathcal{M}_g(Q_f)$.*

Let Q_0 be an even quadratic form defined by $Q_0(x_i) = Q_0(y_i) = 0$ on each symplectic basis. Then $Q_f \sim Q_0$, which induces that $\mathcal{M}_g(Q_f)$ is conjugate to $\mathcal{M}_g(Q_0)$ in \mathcal{M}_g , which implies that $\mathcal{M}_g(Q_f)$ is isomorphic to $\mathcal{M}_g(Q_0)$. Hence, for any smooth embedding $f : \Sigma_g \rightarrow S^4$, the group $\mathcal{M}(f)$ is isomorphic to a subgroup of $\mathcal{M}_g(Q_0)$. So we define the following group.

$$S(f) = \{\varphi_* : H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2) \rightarrow H_1(\Sigma_g; \mathbb{Z}_2) \mid \varphi \in \mathcal{M}(f)\}.$$

Then, it is easy to see that for any smooth embedding $f : \Sigma_g \rightarrow S^4$, the group $S(f)$ is isomorphic to a subgroup of $S_g(Q_0)$. As in [7], $S_1(Q_0) \cong \mathbb{Z}_2$, which leads the following theorem.

Theorem 2.2. ([7]) *For embeddings $f : \Sigma_g \rightarrow S^4$, the groups $S(f)$ are surface-knot invariants. Especially, for every smooth embedding $f : \Sigma_1 \rightarrow S^4$, $S(f)$ is isomorphic to $\{1\}$ or \mathbb{Z}_2 .*

We can ask which group listed above is “realizable”, that is, which surface-knot has a group listed above? For the case of $g = 1$, this question is answered as follows.

Example 2.3. If $f : \Sigma_1 \rightarrow S^4$ is a trivial embedding, then $S(f) \cong \mathbb{Z}_2$. If $f : \Sigma_1 \rightarrow S^4$ is a smooth embedding for the spun-torus of a non-trivial knot, then $S(f) \cong \{1\}$.

For every smooth embedding $f : \Sigma_g \rightarrow S^4$, the groups $S(f)$ also define surface-knot invariants. This is a generalization of the results in subsection 1.3, however, the calculations do not seem so easy. (For example, calculate the group $S(f)$ for the ribbon surface knots.) On the other hand, we can set up the groups $S(f)$ for a smooth embedding P_g into some 4-space, which should introduce some non-orientable surface-knot invariants.

References

- [1] Lawson, H. Blaine, Jr.; Michelsohn, Marie-Louise Spin geometry. Princeton Mathematical Series, 38. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1989.
- [2] Kirby, Robion C. The topology of 4-manifolds. Lecture Notes in Mathematics, 1374. Springer-Verlag, Berlin, 1989.
- [3] Atiyah, M. F.; Bott, R.; Shapiro, A. Clifford modules. Topology 3, 1964 suppl. 1, 3–38.
- [4] Rokhlin, Vladimir A, New results in the theory of four-dimensional manifolds, Doklady Acad. Nauk. SSSR (N.S.) 84 (1952) 221-224.
- [5] D. Johnson, Spin structures and quadratic forms on surfaces. J. London Math. Soc. (2)22(1980), no. 2, 365-373.
- [6] Kirby, R. C.; Taylor, L. R. Pin structures on low-dimensional manifolds. Geometry of low-dimensional manifolds, 2 (Durham, 1989), 177–242, London Math. Soc. Lecture Note Ser., 151, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [7] M. Kawami, On the spin-preserving symplectic groups modulo two, Kobe journal of Mathematics, vol.24; (2007) no.1, pp.53-66.
- [8] S. Hirose, On diffeomorphisms over surfaces trivially embedded in the 4-sphere. Algebr. Geom. Topol. 2(2002), 791-824.

Siegel disks with bounded type rotation number

Koh Katagata

Interdisciplinary Graduate School of Science and Engineering
Shimane University, Matsue 690-8504, Japan
katagata@math.shimane-u.ac.jp

Abstract

We give a brief survey of results on Siegel disks of some rational functions with bounded type rotation number. A Siegel disk of some polynomial with bounded type rotation number has the quasicircle boundary containing its critical point. In order to construct such a Siegel disk not of a polynomial but of a rational function, we consider some Blaschke product and employ the quasiconformal surgery.

1 Preliminaries

We denote by $\hat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ the Riemann sphere and denote by \mathbb{D} the unit disk.

1.1 Fatou sets and Julia sets

Definition 1.1. Let Ω be an open set in $\hat{\mathbb{C}}$ and let \mathcal{F} be a family of maps from Ω to $\hat{\mathbb{C}}$. The family \mathcal{F} is *normal* in Ω if every infinite sequence of maps in \mathcal{F} contains a subsequence which converges uniformly on every compact subset in Ω .

Let $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ be a rational function. The rational function f can be written as

$$f(z) = \frac{p(z)}{q(z)},$$

where p and q are polynomials with no common roots. The rational function f is continuous with respect to the spherical distance. The *degree* $\deg(f)$ of f is the maximum of the degrees of p and q . We denote by

$$f^n = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n\text{-times}}$$

the n -th iteration of the rational function f . The degree $\deg(f^n)$ of f^n is equal to $(\deg(f))^n$.

Definition 1.2. Let $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ be a non-constant rational function. The *Fatou set* $F(f)$ of f is defined as

$$F(f) = \left\{ z \in \hat{\mathbb{C}} : \text{the family } \{f^n\}_{n=1}^{\infty} \text{ is normal in some open neighborhood of } z \right\}.$$

The *Julia set* $J(f)$ of f is the complement $J(f) = \hat{\mathbb{C}} \setminus F(f)$. The Fatou set $F(f)$ is open and the Julia set $J(f)$ is closed.

1.2 Siegel disks

Let $f : \hat{\mathbb{C}} \rightarrow \hat{\mathbb{C}}$ be a rational function of degree greater than one and let $z_0 = f^n(z_0)$ be a periodic point of period n . Since the Fatou set and the Julia set of f^n is equal to those of f , we can assume that $n = 1$. Taking the Möbius conjugation into account, we can assume that $z_0 = 0$. The power series expansion of f near the origin is that

$$f(z) = \lambda z + az^2 + \dots.$$

We call the complex number λ the multiplier at the origin. We assume that $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ and α is an irrational number.

Definition 1.3. The rational function f is *linearizable* near the origin if there exists a conformal (holomorphic and bijective) map ψ near the origin with $\psi(0) = 0$ such that $\psi \circ f \circ \psi^{-1}(z) = R_{\alpha}(z) = e^{2\pi i\alpha}z$. The rational function f is linearizable near the origin if and only if the origin belongs to the Fatou set. The Fatou component Δ containing the origin is called the *Siegel disk* centered at the origin. The Siegel disk Δ is the largest domain on which f is conformally conjugate to the rotation R_{α} .

We consider the continued fraction expansion

$$\alpha = a_0 + \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots}}}$$

of the irrational number α , where a_0 is an integer and a_n is a positive integer uniquely determined by α for all $n \geq 0$.

Definition 1.4. The irrational number α is of *bounded type* if the sequence $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ is bounded.

Theorem 1.5. *If the irrational number α is of bounded type, then f is linearizable near the origin.*

2 Results

Let $P_\alpha(z) = z^2 + e^{2\pi i \alpha} z$. Then the following theorem holds if α is of bounded type.

Theorem 2.1 (Ghys-Douady-Herman-Shishikura-Świątek, [6]). *If an irrational number $\alpha \in [0, 1]$ is of bounded type, then the boundary of the Siegel disk Δ of P_α centered at the origin is a quasicircle containing its critical point $-e^{2\pi i \alpha}/2$.*

Let $Q_{\alpha,m}(z) = e^{2\pi i \alpha} z(1 + z/m)^m$. Geyer showed the following theorem which is extended to some polynomials. Note that P_α is conformally conjugate to $Q_{\alpha,1}$.

Theorem 2.2 (Geyer, [1]). *Let $m \geq 1$ be a positive integer. If an irrational number $\alpha \in [0, 1]$ is of bounded type, then the boundary of the Siegel disk Δ of $Q_{\alpha,m}$ centered at the origin is a quasicircle containing its critical point $-m/(m+1)$.*

For complex numbers λ and μ with $\lambda\mu \neq 1$ and a positive integer m , we consider two rational functions

$$E_{\lambda,\mu,m}(z) = z \left(\frac{z^m + \lambda}{\mu z^m + 1} \right)$$

and

$$F_{\lambda,\mu,m}(z) = z \left(\frac{z + \lambda}{\mu z + 1} \right)^m.$$

The two rational functions $E_{\lambda,\mu,m}$ and $F_{\lambda,\mu,m}$ are semiconjugate via $S_m(z) = z^m$, namely

$$F_{\lambda,\mu,m} \circ S_m = S_m \circ E_{\lambda,\mu,m}.$$

It is clear that $E_{\lambda,\mu,1} = F_{\lambda,\mu,1}$. The origin is a fixed point of both $E_{\lambda,\mu,m}$ and $F_{\lambda,\mu,m}$ of multiplier λ and λ^m respectively, and the point at infinity is a fixed point of both $E_{\lambda,\mu,m}$ and $F_{\lambda,\mu,m}$ of multiplier μ and μ^m respectively. In the case that $\mu = 0$,

$$F_{\lambda,0,m}(z) = z(z + \lambda)^m.$$

Therefore the rational function $F_{\lambda,\mu,m}$ is considered as a perturbation of the polynomial $F_{\lambda,0,m}$. It is clear that $F_{\lambda,0,m}$ is conformally conjugate to $Q_{\alpha,m}$ if $\lambda^m = e^{2\pi i \alpha}$.

Main Theorem 1. *Let m be a positive integer and let $\mu \in \overline{\mathbb{D}}$. If an irrational number $\alpha \in [0, 1]$ is of bounded type and $e^{2\pi i \alpha} \mu \neq 1$, then the boundary of the Siegel disk of $E_{\lambda,\mu,m}$ centered at the origin is a quasicircle containing its critical point, where $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$.*

Main Theorem 2. *Let m be a positive integer and let $\mu \in \overline{\mathbb{D}}$. If an irrational number $\alpha \in [0, 1]$ is of bounded type and $e^{2\pi i\alpha} \mu^m \neq 1$, then the boundary of the Siegel disk of $F_{\lambda, \mu, m}$ centered at the origin is a quasicircle containing its critical point, where λ satisfies that $\lambda^m = e^{2\pi i\alpha}$.*

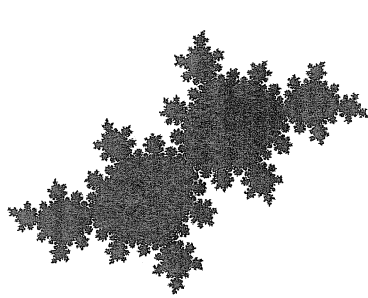
Main Theorem 2 contains Theorems 2.1 and 2.2. Moreover we obtain the following two corollaries.

Corollary 1. *Let m be a positive integer. If α and β in $[0, 1]$ are irrational of bounded type and $e^{2\pi i(\alpha+\beta)} \neq 1$, then the boundary of the Siegel disk of $E_{\lambda, \mu, m}$ centered at the origin and that of the Siegel disk of $E_{\lambda, \mu, m}$ centered at the point at infinity are quasicircles containing its critical point, where $\lambda = e^{2\pi i\alpha}$ and $\mu = e^{2\pi i\beta}$.*

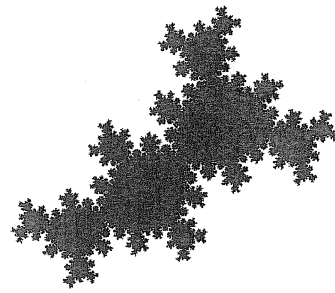
Corollary 2. *Let m be a positive integer. If α and β in $[0, 1]$ are irrational of bounded type and $e^{2\pi i(\alpha+\beta)} \neq 1$, then the boundary of the Siegel disk of $F_{\lambda, \mu, m}$ centered at the origin and that of the Siegel disk of $F_{\lambda, \mu, m}$ centered at the point at infinity are quasicircles containing its critical point, where λ and μ satisfy that $\lambda^m = e^{2\pi i\alpha}$ and $\mu^m = e^{2\pi i\beta}$.*

References

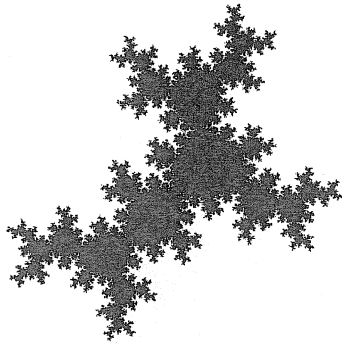
- [1] L. Geyer, Siegel discs, Herman rings and the Arnold family, *Trans. Amer. Math. Soc.* 353 (2001), no. 9, 3661–3683.
- [2] K. Katagata, Some cubic Blaschke products and quadratic rational functions with Siegel disks, *Int. J. Contemp. Math. Sci.*, to appear.
- [3] K. Katagata, Blaschke products and rational functions with Siegel disks, submitted.
- [4] J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, Vieweg, 2nd edition, 2000.
- [5] M. Yampolsky and S. Zakeri, Mating Siegel quadratic polynomials, *J. Amer. Math. Soc.* 14 (2001), no. 1, 25–78 (electronic).
- [6] S. Zakeri, Old and new on quadratic Siegel disks, <http://www.math.qc.edu/~zakeri/papers/papers.html>.



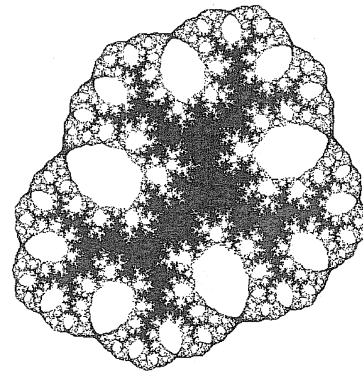
$r = 0$



$r = 0.5$



$r = 0.9$



$r = 1$

Figure 1: Golden Siegel disks of the rational function $F_{\lambda, \mu, 1}$ centered at the origin, where $\lambda = e^{2\pi i(\sqrt{5}-1)/2}$ and $\mu = re^{2\pi i(\sqrt{5}-1)/2}$. In the case that $r = 1$, the point at infinity is the center of another golden Siegel disk.

Non-uniform asymptotic stability for linear time-varying second-order differential equations

島根大学 総合理工学研究科 鬼塚 政一

減衰項をもつ 2 階線形微分方程式

$$x'' + a(t)x' + b(t)x = 0 \tag{E}$$

と同値な 2 次元線形微分方程式系

$$\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}, \quad A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -b(t) & -a(t) \end{pmatrix} \tag{S}$$

を考える。ただし、行列 $A(t)$ の成分 $a(t), b(t)$ は $t > 0$ において連続微分可能な関数とし、ベクトル $\mathbf{x} = {}^t(x, y)$ とする。このとき、方程式系 (S) (もしくは方程式 (E)) は零解 $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ (もしくは平衡点 $x = x' = 0$) をもつ。方程式系 (S) と方程式 (E) は同値であるから、零解は平衡点 $x = x' = 0$ と一致する。

これまで多くの研究者によって、方程式系 (S) の零解が一樣漸近安定 (uniformly asymptotically stable) や漸近安定 (asymptotically stable) であるための十分条件の研究がなされてきた [2-5, 7]。行列 $A(t)$ の成分 $a(t), b(t)$ がいずれも定数または周期関数である場合は零解の一樣漸近安定性と漸近安定性が一致する。それ等の定義から分かるように、一般に、一樣漸近安定ならば漸近安定である (定義は後に記す)。ところが、漸近安定であるからといって一樣漸近安定とは限らない。例えば、線形微分方程式

$$x'' + \frac{2}{1+t}x' + x = 0$$

の平衡点 $x = x' = 0$ は漸近安定であるが、一樣漸近安定でない。この事実は、この方程式の基本解行列を具体的に求めることができることから導かれる。実際、基本解行列は

$$\begin{pmatrix} \frac{\sin t}{1+t} & \frac{\cos t}{1+t} \\ \frac{\cos t}{1+t} - \frac{\sin t}{(1+t)^2} & -\frac{\sin t}{1+t} - \frac{\cos t}{(1+t)^2} \end{pmatrix}$$

であるから、Coppel の定理 [1] を用いて一樣漸近安定性と漸近安定性をそれぞれ判定することができる。Coppel の定理の詳細については割愛するが、簡単に述べると、その主張は一樣漸近安定 (もしくは、漸近安定) であるための必要十分条件が基本解行列を用いた式で与えられることである。ところが、この例のように基本解行列を求めることができ

る方程式は非常に稀である。すなわち、基本解行列を求めることができない方程式に対しては Coppel の定理を適用できない。この理由から、今日に至るまで多くの研究者が一様漸近安定性や漸近安定性といった安定性の研究に鎬を削って取り組んできた。さて、上記の例が示すように、一様漸近安定と漸近安定の間には隔たりがある。ところが、それらの差に関する研究はこれまで殆どなされていない。別の言葉で言うと、零解が一様漸近安定でないための十分条件に関する研究は数少ない。一般に肯定的な(何々であるための)十分条件は諸科学の応用に求められて数多く存在するが、否定的な(何々でないための)十分条件は研究の対象とするものが乏しい。しかしながら、漸近安定が一様漸近安定を含むことから、この否定的な(一様漸近安定でないための)十分条件を見つけることで漸近安定であるための十分条件の良さ(漸近安定であるが一様漸近安定でない領域)を知る手掛かりとなる。そこで、本研究では方程式系 (S) の零解が一様漸近安定でないための十分条件に焦点を当て、議論を展開する。

便宜上、初期時刻 $t_0 > 0$ とし、初期条件 $\mathbf{x}(t_0; t_0, \mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0 = {}^t(x_0, y_0)$ をみたす方程式系 (S) の解を $\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)$ と表す。また、 $\|\mathbf{x}\|$ は \mathbf{x} の任意のノルムとする。以下に、方程式系 (S) の零解の安定性の定義を記載する。

定義.

- (i) 方程式系 (S) の零解が安定 (*stable*) とは、任意の $\varepsilon > 0$ と任意の初期時刻 $t_0 > 0$ に対して、ある $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ が存在し、 δ -近傍内の任意の \mathbf{x}_0 と任意の $t \geq t_0$ において $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ となることをいう;
- (ii) 定義 (i) の δ が初期時刻 t_0 に依存しないとき、零解は一様安定 (*uniformly stable*) という;
- (iii) 零解が吸収的 (*attractive*) とは、任意の初期時刻 $t_0 > 0$ に対して、ある $\delta_0(t_0) > 0$ が存在し、任意の $\varepsilon > 0$ と δ_0 -近傍内の任意の \mathbf{x}_0 に対して、ある $T(t_0, \varepsilon, \mathbf{x}_0) > 0$ が存在し、任意の $t \geq t_0 + T$ において $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon$ となることをいう;
- (iv) 定義 (iii) において、 δ が初期時刻 t_0 に依存せず、 T が ε のみに依存するとき、零解は一様吸収的 (*uniformly attractive*) という;
- (v) 零解が漸近安定 (*asymptotically stable*) とは、零解が安定かつ吸収的であるときをいう;
- (vi) 零解が一様漸近安定 (*uniformly asymptotically stable*) とは、零解が一様安定かつ一様吸収的であるときをいう;
- (vii) 零解が指数漸近安定 (*exponential asymptotically stable*) とは、ある $\lambda > 0$ が存在し、任意の $\varepsilon > 0$ に対して、ある $\delta(\varepsilon) > 0$ が存在し、任意の初期時刻 $t_0 > 0$ と δ -近傍内の任意の \mathbf{x}_0 及び任意の $t \geq t_0$ において $\|\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\| < \varepsilon e^{-\lambda(t-t_0)}$ となることをいう。

線形微分方程式において、零解の一様漸近安定性と指数漸近安定性は同値であることが知られている(例えば, [1]を参照)。本研究では、方程式系 (S) の零解が一様漸近安定でないことを示す代わりに、その零解が指数漸近安定でないことを示す。

以後、方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ が漸近安定であるための十分条件を 2 つ紹介し、それぞれの定理に適用できる例を挙げる。非負値関数 $\phi(t)$ が *integrally positive* であるとは、 $\tau_n + \omega \leq \sigma_n \leq \tau_{n+1}$ をみたす任意の集合 $I = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\tau_n, \sigma_n]$ において

$$\int_I \phi(t) dt = \infty$$

となることをいう ([3, 4, 6-8] を見よ)。さらに、 I の条件に加えて

$$\tau_{n+1} \leq \sigma_n + \Omega$$

をみたす $\Omega > 0$ が存在するとき、 $\phi(t)$ は *weakly integrally positive* であるという ([3, 7] を参照)。例えば、 $1/(1+t)$ や $\sin^2 t/(1+t)$ は *weakly integrally positive* であるが、*integrally positive* でない。

Sugie and Onitsuka [7] は線形微分方程式 (E) を含む 2 階半線形微分方程式の大域的漸近安定性 (Global asymptotic stability) について考察した。線形微分方程式 (E) の場合に限った彼等の結果は次の通りである。

定理 A. ある数 $\bar{a}, \bar{b}, \underline{b} > 0$ が存在し、任意の $t > 0$ に対して

$$|a(t)| \leq \bar{a} \tag{1}$$

かつ

$$\underline{b} \leq b(t) \leq \bar{b} \tag{2}$$

が成り立つと仮定とする。このとき、関数 $2a(t)b(t) + b'(t)$ が非負で *weakly integrally positive* ならば、方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ は漸近安定。

定理 A を用いれば、方程式

$$x'' + \frac{1}{1+t}x' + x = 0 \tag{E-1}$$

の平衡点 $x = x' = 0$ は漸近安定であることがわかる。実際、 $a(t) = 1/(1+t)$ は有界で $b(t) = 1$ より、条件 (1) と (2) をみたす。また

$$2a(t)b(t) + b'(t) = \frac{2}{1+t}$$

であるから、 $2a(t)b(t) + b'(t)$ は非負で *weakly integrally positive* となる。したがって、定理 A の条件をすべて満足するので、方程式 (E-1) の平衡点は漸近安定である。

次に、Duc 等 [2] が与えた方程式 (E) の平衡点が漸近安定であるための十分条件を紹介する。

定理 B. 条件 (1) と

$$\int_0^{\infty} b(t) dt = \infty \tag{3}$$

を満足すると仮定する. このとき, ある数 $\bar{b}, K, k > 0$ が存在し, 任意の $t > 0$ に対して

$$0 < b(t) \leq \bar{b}, \quad (4)$$

$$|a'(t)| \leq Kb(t) \quad \text{かつ} \quad kb^2(t) \leq 2a(t)b(t) + b'(t) \quad (5)$$

が成り立つならば, 方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ は漸近安定.

彼等は, 方程式

$$x'' + \frac{1}{1+t}x' + \frac{1}{1+t}x = 0 \quad (E-2)$$

を例に挙げている. 係数 $a(t) = b(t) = 1/(1+t)$ であるから, 明らかに条件 (1), (3) そして (4) は成立する. また, $K = k = 1$ と選べば

$$|a'(t)| = \frac{1}{(1+t)^2} < \frac{1}{1+t} = Kb(t) \quad \text{かつ} \quad kb^2(t) = \frac{1}{(1+t)^2} = 2a(t)b(t) + b'(t)$$

となるので, 条件 (5) を満足する. よって, (E-2) の平衡点は漸近安定である.

以上のことをまとめると, 方程式 (E-1) と (E-2) の平衡点は共に漸近安定であることがわかった. それでは, これ等の平衡点は一樣漸近安定であるのか否か?

Ignatyev [5] が与えた一樣漸近安定であるための十分条件を方程式 (E-1) と (E-2) にそれぞれ適用できるかどうかを確認する.

定理 C. 条件 (1) と (2) をみたすとする. このとき, $L, l > 0$ が存在し, 任意の $t > 0$ に対して

$$|b'(t)| \leq L \quad \text{かつ} \quad l \leq 2a(t)b(t) + b'(t) \quad (6)$$

が成り立つならば, 方程式 (E) の平衡点 $x = x' = 0$ は一樣漸近安定.

まず, 方程式 (E-1) において $a(t) = 1/(1+t), b(t) = 1$ であるから, 条件 (1) と (2) を満足する. ところが, $b'(t) = 0$ より, $2a(t)b(t) + b'(t) = 2/(1+t)$ となるから, (6) をみたす $l > 0$ を選ぶことができない. よって, 方程式 (E-1) に定理 C は適用できない. 一方, 方程式 (E-2) において $a(t) = b(t) = 1/(1+t)$ である. このとき, 条件 (1) を満足するが, 条件 (2) をみたさない. よって, 方程式 (E-2) にも定理 C は適用できない. それでは, 方程式 (E-1) や (E-2) の平衡点は一樣漸近安定でないのか? この問いに答えるのが本研究で得られた結果である.

定理 1. 変数 $a(t), b(t)$ は

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} a(t) \leq 0 \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} b(t) \quad (7)$$

かつ

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} (2a^2(t) + a'(t)) \geq 0 \geq \limsup_{t \rightarrow \infty} (2a(t)b(t) + b'(t)) \quad (8)$$

をみたすとする. このとき, 方程式系 (S) の零解は一樣漸近安定でない.

定理 1 を方程式 (E-1) と (E-2) にそれぞれ適用できるかどうかを確認する。まず、方程式 (E-1) において $a(t) = 1/(1+t)$, $b(t) = 1$ であるから、条件 (7) を満足する。また

$$2a^2(t) + a'(t) = \frac{1}{(1+t)^2} \quad \text{かつ} \quad 2a(t)b(t) + b'(t) = \frac{2}{1+t}$$

なので、条件 (8) もみたす。よって、方程式 (E-1) の平衡点は一様漸近安定でない。次に、方程式 (E-2) において $a(t) = b(t) = 1/(1+t)$ であるから、明らかに、条件 (7) はみたされる。また、 $a'(t) = b'(t) = -1/(1+t)^2$ より

$$2a^2(t) + a'(t) = 2a(t)b(t) + b'(t) = \frac{1}{(1+t)^2}$$

となるので、条件 (8) も満足する。故に、方程式 (E-2) の平衡点は一様漸近安定でない。以上のことから、「方程式 (E-1) と (E-2) の平衡点は一様漸近安定でないのか？」の問いに対する答えは “yes” であることが本研究により明らかとなった。

参考文献

- [1] W. A. Coppel, *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, Heath, Boston, 1965. MR0190463 (32 #7875)
- [2] L. H. Duc, A. Ilchmann, S. Siegmund and P. Taraba, On stability of linear time-varying second-order differential equations, *Quart. Appl. Math.* 64 (2006), no. 1, 137–151. MR2211381 (2006m:34126)
- [3] L. Hatvani, On the asymptotic stability for a two-dimensional linear nonautonomous differential system, *Nonlinear Anal.* 25 (1995), 991–1002. MR1350721 (96k:34105)
- [4] L. Hatvani, The effect of damping on the stability properties of the equilibria of nonautonomous systems, (Russian) *Prikl. Mat. Mekh.* 65 (2001), no. 4, 725–732; translation in *J. Appl. Math. Mech.* 65 (2001), no. 4, 707–713. MR1883809 (2002h:34097)
- [5] A. O. Ignatyev, Stability of a linear oscillator with variable parameters, *Electron. J. Differential Equations* 1997, no. 17, 6 pp. (electronic). MR1476064 (98i:34076)
- [6] V. M. Matrosov, On the stability of motion, *J. Appl. Math. Mech.* 26 1963 1337–1353. MR0153934 (27 #3895)
- [7] J. Sugie and M. Onitsuka, Global asymptotic stability for damped half-linear differential equations, *Acta Sci. Math. (Szeged)*, in press.
- [8] B. Zhang, Asymptotic behavior of solutions of a nonlinear damped wave equation, *Differential Equations Dynam. Systems* 2 (1994), no. 3, 173–204. MR1386268 (97d:35152)

ON TORIC FACE RINGS

RYOTA OKAZAKI

1. INTRODUCTION

This is a joint work with Kohji Yanagawa.

Combinatorial commutative algebra is a branch of combinatorics, discrete geometry, and commutative algebra. On the one hand problems from combinatorics or discrete geometry are studied using techniques from commutative algebra. On the other hand questions in combinatorics motivated various results in commutative algebra. In this field, Stanley-Reisner rings and affine semigroup rings are classes mainly studied (see [2, 6] for definition). The first rings are associated with simplicial complexes, and the second with affine semigroups or cones.

The concept of toric face rings are first appeared in Stanley's paper [5] to study h -vectors of some kind of partially ordered sets (abbrv. posets). In Stanley's definition, these rings, which are called *embedded* toric face rings for some reasons latter, are associated with fans, and their concept is a common generation of Stanley-Reisner rings and affine semigroup ones ([3]). Indeed, Ichim and Römer ([3]) showed that embedded toric face rings combine the properties of Stanley-Reisner rings and those of affine semigroup ones.

Recently, toric face rings are generalized more by Bruns, Koch, and Römer in their paper [1]. (Henceforth the term "toric face ring" refers to toric face rings of their sense.) But their study is devoted to the aspects of toric ideals, or only a part of properties, such as Hochster's formula, which embedded ones have, of toric face rings.

Squarefree modules over Stanley-Reisner rings and affine semigroup ones, which are defined by Yanagawa ([7]), are a valid concept to study these rings; in fact the category of squarefree modules has nice properties, which are valid for homological study (e.g. argument using derived categories or sheaves ([8])).

In this talk, the speaker will introduce some results of his joint work with Yanagawa. These results are concerned with the homological aspects, as stated above, of toric face rings. Even for embedded cases, these aspects have not considered.

2. TORIC FACE RINGS

Definition 2.1. A (*pointed*) *conical complex* consists of the following data:

- (1) a finite regular cell complex \mathcal{P} with \emptyset and the intersection property, i.e. $\sigma \cap \tau \in \mathcal{P}$ for $\sigma, \tau \in \mathcal{P}$;
- (2) a finitely generated cone $C_\sigma \subseteq \mathbb{R}^{\dim \sigma + 1}$ with $\dim C_\sigma = \dim \sigma + 1$, for each cell $\sigma \in \mathcal{P}$;
- (3) there is an injection $\iota_{\tau, \sigma} : C_\sigma \rightarrow C_\tau$ for $\sigma, \tau \in \mathcal{P}$ with $\sigma \subseteq \tau$ such that
 - (a) $\iota_{\tau, \sigma}(C_\sigma)$ is equal to a face C' of C_τ and $\iota_{\tau, \sigma}$ gives an isomorphism of cones $C_\sigma \cong C'$;
 - (b) conversely, for $\tau \in \mathcal{P}$ and a face C' of C_τ , there is a face σ of τ such that $\iota_{\tau, \sigma}(C_\sigma) = C'$;
 - (c) $\iota_{\sigma, \sigma} = \text{id}_{C_\sigma}$ and $\iota_{v, \tau} \circ \iota_{\tau, \sigma} = \iota_{v, \sigma}$ for $\sigma, \tau, v \in \mathcal{P}$ with $\sigma \subseteq \tau \subseteq v$.

We denoted it by Σ or more precisely (Σ, \mathcal{P}) .

Let (Σ, \mathcal{P}) be a conical complex. Each cone C_σ with $\sigma \in \mathcal{P}$ is said to be a *face* of Σ . A maximal face C_σ , which means that σ is maximal in \mathcal{P} with respect to inclusion, is called a *facet* of Σ . The *dimension* of Σ , denoted by $\dim \Sigma$, is the maximal value of dimensions of the faces of Σ ; that is, $\dim \Sigma := \max\{\dim C_\sigma \mid \sigma \in \mathcal{P}\}$. (Σ, \mathcal{P}) is said to be *rational* if so is each cone C_σ with $\sigma \in \mathcal{P}$.

Note that our definition implies that each cones C_σ are pointed, i.e. has 0 as its face. Bruns-Koch-Römer's original definition differs from ours, but pointed conical complexes of their definition coincides with ours.

A typical example of a conical complex is a pointed fan, i.e. a finite collection Σ of pointed cones in \mathbb{R}^n such that $C' \subset C$ with $C \in \Sigma$ is a face of C if and only if $C' \in \Sigma$, and for $C, C' \in \Sigma$, $C \cap C'$ is a common face of C and C' . In this case, a finite set is Σ itself, and the bijections π are identity maps.

To grasp the image of a conical complex $(\Sigma, \mathcal{P}, \pi)$, it is helpful to regard the conical complex as the object given by “gluing” each cones along the injections $\iota_{\tau, \sigma}$.

Example 2.2. Of course, there exists a conical complex which is not a fan: in fact, consider the Möbius strip as follows.

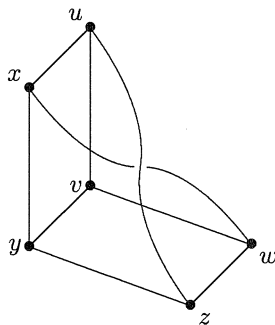


FIGURE 1. Möbius strip

Regarding each rectangles as (cross-sections of) cones and gluing these cones according to the figure, we have a conical complex that is not a fan.

Definition 2.3. A monoidal complex \mathcal{M} supported by a pointed conical complex (Σ, \mathcal{P}) is a set of monoids $\{\mathbf{M}_\sigma\}_{\sigma \in \mathcal{P}}$ with the following conditions:

- (1) \mathbf{M}_σ is an affine semigroup and $\mathbf{M}_\sigma \subseteq \mathbb{Z}^{\dim \sigma + 1}$ for each $\sigma \in \mathcal{P}$;
- (2) $\mathbf{M}_\sigma \subseteq C_\sigma$ and $\mathbb{R}_+ \mathbf{M}_\sigma = C_\sigma$ for each $\sigma \in \mathcal{P}$;
- (3) for $\sigma, \tau \in \mathcal{P}$ with $\sigma \subseteq \tau$, $\iota_{\tau, \sigma} : C_\sigma \rightarrow C_\tau$ gives an isomorphism $\mathbf{M}_\sigma \cong \mathbf{M}_\tau \cap \iota_{\tau, \sigma}(C_\sigma)$ of monoids.

In the rest of this paper, “a conical complex” always means pointed one.

For a conical complex (Σ, \mathcal{P}) and a monoidal complex \mathcal{M} supported by Σ , we set

$$|\mathcal{M}| := \varinjlim_{\sigma \in \mathcal{P}} \mathbf{M}_\sigma, \quad |\mathbb{Z}\mathcal{M}| := \varinjlim_{\sigma \in \mathcal{P}} \mathbf{M}_\sigma,$$

where the direct limits are taken with respect to the inclusions $\iota_{\tau, \sigma} : \mathbf{M}_\sigma \rightarrow \mathbf{M}_\tau$ and induced map $\mathbb{Z}\mathbf{M}_\sigma \rightarrow \mathbb{Z}\mathbf{M}_\tau$ respectively, for $\sigma, \tau \in \mathcal{P}$ with $\sigma \subseteq \tau$.

Let \mathbb{k} be a field.

Definition 2.4. Let (Σ, \mathcal{P}) be a conical complex, and \mathcal{M} a monoidal complex supported by Σ . Then \mathbb{k} -vector space

$$\mathbb{k}[\mathcal{M}] := \bigoplus_{a \in |\mathcal{M}|} t^a,$$

where t is a variable, equipped with the following multiplication

$$t^a \cdot t^b = \begin{cases} t^{a+b} & \text{if } a, b \in \mathbf{M}_\sigma \text{ for some } \sigma \in \mathcal{P}; \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

has a \mathbb{k} -algebra structure. We call $\mathbb{k}[\mathcal{M}]$ the toric face ring of \mathcal{M} over \mathbb{k} .

When Σ is a fan, $\mathbb{k}[\mathcal{M}]$ coincides with a toric face ring of Ichim-Römer's sense ([3]), and with an original one due to Stanley ([5]) if moreover we choose $C_\sigma \cap \mathbb{Z}^{\dim C_\sigma}$ as \mathbf{M}_σ for each σ , (which is possible since Σ is a fan). Henceforth we refer a toric face ring of \mathcal{M} supported by a fan as an *embedded* toric face ring. Most difference between an embedded toric face ring and a non-embedded one, is whether it has a \mathbb{Z}^n -grading or not; an embedded toric face ring always has a suitable \mathbb{Z}^n -grading but a non-embedded one does not always.

For a ring R , let $\text{Mod } R$ (resp. $\text{mod } R$) denote the category of (resp. finitely generated) R -modules.

Definition 2.5. Let $R := \mathbb{k}[\mathcal{M}]$ be a toric face ring of a monoidal complex \mathcal{M} supported by a conical complex (Σ, \mathcal{P}) .

- (1) $M \in \text{Mod } R$ is said to be $\mathbb{Z}\mathcal{M}$ -graded if the following conditions are satisfied;
 - (a) $M = \bigoplus_{a \in |\mathbb{Z}\mathcal{M}|} M_a$ as \mathbb{k} -vector spaces;
 - (b) $R_a \cdot M_b \subseteq M_{a+b}$ if $a \in \mathbf{M}_\sigma$ and $b \in \mathbb{Z}\mathbf{M}_\sigma$, for some $\sigma \in \mathcal{P}$, and $R_a \cdot M_b = 0$ otherwise.
- (2) $M \in \text{Mod } R$ is said to be \mathcal{M} -graded if it is $\mathbb{Z}\mathcal{M}$ -graded and $M_a = 0$ for $a \notin |\mathcal{M}|$.

Let $\text{Mod}_{\mathbb{Z}\mathcal{M}} R$ (resp. $\text{mod}_{\mathbb{Z}\mathcal{M}} R$) denote the subcategory of $\text{Mod } R$ (resp. $\text{mod } R$) whose objects are $\mathbb{Z}\mathcal{M}$ -graded R -modules and morphisms are degree preserving maps, i.e. R -homomorphisms $f : M \rightarrow N$ such that $f(M_a) \subseteq N_a$ for $a \in |\mathbb{Z}\mathcal{M}|$. It is clear that $\text{Mod}_{\mathbb{Z}\mathcal{M}} R, \text{mod}_{\mathbb{Z}\mathcal{M}} R$ are abelian.

Note that the ideals $\mathfrak{p}_\sigma := (t^a \mid a \notin \mathbf{M}_\sigma)$ of R , associated with each $\sigma \in \mathcal{P}$, are prime since $R/\mathfrak{p}_\sigma \cong \mathbb{k}[\mathbf{M}_\sigma]$. Moreover it is $\mathbb{Z}\mathcal{M}$ -graded. Conversely, every $\mathbb{Z}\mathcal{M}$ -graded prime ideals are of this form.

3. MAIN RESULTS

Let (Σ, \mathcal{P}) be a conical complex, and \mathcal{M} a monoidal complex. For $\sigma \in \mathcal{P}$, set $T_\sigma := \{t^a \mid a \in \mathbf{M}_\sigma\} \subseteq R := \mathbb{k}[\mathcal{M}]$. Then T_σ forms a multiplicatively closed subset (abbrv. m.c.s.).

In the sequel, for $\sigma \in \mathcal{P}$, we set $R_\sigma := T_\sigma^{-1}R$ and $\mathcal{P}^i := \{\sigma \in \mathcal{P} \mid \dim \sigma = i\}$, for simplicity. Now set $L^i := \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}^{i-1}} R_\sigma$ for $i = 0, \dots, \dim \Sigma$ and define $\partial : L^i \rightarrow L^{i+1}$ by

$$\partial(x) = \sum_{\tau \in \mathcal{P}^i, \tau \supseteq \sigma} \varepsilon(\tau, \sigma) \text{nat}(x)$$

for $x \in R_\sigma \subseteq L^i$, where ε is an incidence function on \mathcal{P} and nat is a natural map $R_\sigma \rightarrow R_\tau$ for $\sigma \subseteq \tau$. Then (L^\bullet, ∂) forms a complex in $\text{Mod}_{\mathbb{Z}\mathcal{M}} R$:

$$L^\bullet : 0 \longrightarrow L^0 \xrightarrow{\partial} L^1 \xrightarrow{\partial} \dots \xrightarrow{\partial} L^{\dim \Sigma} \longrightarrow 0.$$

L^\bullet is an analogy of Čech complex of Stanley-Reisner or affine semigroup rings.

Proposition 3.1. *Let \mathfrak{m} be the maximal ideal of R . Then for every R -module M ,*

$$H_{\mathfrak{m}}^i(M) \cong H^i(L^\bullet \otimes_R M),$$

for all i .

Corollary 3.2. $H_{\mathfrak{m}}^i(M) \in \text{Mod}_{\mathbb{Z}\mathcal{M}} R$ for $M \in \text{Mod}_{\mathbb{Z}\mathcal{M}} R$.

For $a \in |\mathcal{M}|$, there exists a unique cell $\sigma \in \mathcal{P}$ such that $\text{rel-int } C_\sigma \ni a$. We denote C_σ or σ by $\text{supp}(a)$.

Definition 3.3. Let Σ be a conical complex, \mathcal{M} a monoidal complex supported by Σ , and $R := \mathbb{k}[\mathcal{M}]$ the toric face ring of \mathcal{M} . An R -module $M \in \text{mod}_{\mathbb{Z}\mathcal{M}} R$ is said to be squarefree if it is \mathcal{M} -graded and multiplication $M_b \rightarrow M_{a+b}$ by t^a is an isomorphism of \mathbb{k} -vector spaces, for $a, b \in |\mathcal{M}|$ with $\text{supp}(a+b) = \text{supp}(b)$.

Let $\text{Sq } R$ denote the full subcategory of $\text{mod}_{\mathbb{Z}\mathcal{M}} R$ whose objects are squarefree R -modules.

$\text{Sq } R$ has nice properties, as in the case of affine semigroup rings or Stanley-Reisner rings ([7]).

Proposition 3.4. *Sq R is abelian, and enough injective. Any indecomposable injective object in $\text{Sq } R$ is isomorphic to R/\mathfrak{p}_σ for some $\sigma \in \mathcal{P}$.*

Since there is a polynomial ring S and a surjection $S \twoheadrightarrow R$, Sharp's result ([4]) guarantees the existence of dualizing complex of R . We denote the normalized dualizing complex of R by D_R^\bullet .

Well, set $I_{\mathcal{M}}^{-i} := \bigoplus_{\sigma \in \mathcal{P}^{i-1}} R/\mathfrak{p}_\sigma$ for $i = 0, \dots, d = \dim R = \dim \Sigma$, and define $I_{\mathcal{M}}^{-i} \rightarrow I_{\mathcal{M}}^{-i+1}$ by

$$x = \sum_{\tau \in \Sigma^i, \tau \supseteq \sigma} \varepsilon(\tau, \sigma) \text{nat}(x),$$

for $x \in R/\mathfrak{p}_\tau \subseteq I_{\mathcal{M}}^{-i}$, where nat is a natural projection $R/\mathfrak{p}_\tau \rightarrow R/\mathfrak{p}_\sigma$. Then

$$I_{\mathcal{M}}^\bullet : 0 \rightarrow I_{\mathcal{M}}^{-d} \rightarrow I_{\mathcal{M}}^{-d+1} \rightarrow \dots \rightarrow I_{\mathcal{M}}^0 \rightarrow 0$$

is a complex. Theorem 3.5 in the below states that $I_{\mathcal{M}}^\bullet$ is an analogy of an *Ishida complex* of embedded toric face rings.

A monoidal complex \mathcal{M} supported by a conical complex Σ is said to be *locally normal* if $\mathbb{k}[\mathcal{M}_\sigma]$ is normal for each $\sigma \in \Sigma$

Theorem 3.5. *Let $(\Sigma, \mathcal{P}), \mathcal{M}, R$ be the above, and assume that \mathcal{M} is locally normal. Then $I_{\mathcal{M}}^\bullet$ is quasi-isomorphic to D_R^\bullet .*

REFERENCES

- [1] W. Bruns, R. Koch, and T. Römer, *Gröbner bases and Betti numbers of monoidal complexes*, arXiv:0707.4527.
- [2] W. Bruns and J. Herzog, *Cohen-Macaulay rings*, rev. ed., Cambridge Studies in Advanced Mathematics **39**, Cambridge University Press, 1988.
- [3] B. Ichim and T. Römer, *On toric face rings*, J. Pure Appl. Algebra **210** (2007), 249–266.
- [4] R. Y. Sharp, *Dualizing complexes for commutative Noetherian rings*, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. **78** (1975), 369–386.
- [5] R. P. Stanley, *Generalized H -vectors, intersection cohomology of toric varieties, and related results*: in *Commutative algebra and combinatorics*, Adv. Stud. Pure Math., **11**, 1987, 187–213.
- [6] R. P. Stanley, *Combinatorics and commutative algebra*, 2nd ed., Progress in Mathematics **41**, Birkhäuser, 2005.
- [7] K. Yanagawa, *Squarefree modules and local cohomology modules at monomial ideals*. in: *Local cohomology and its applications*, Lecture Notes in Pure and Appl. Math., **226**, 207–231, Dekker, New York, 2002.
- [8] K. Yanagawa, *Stanley-Reisner rings, sheaves, and Poincaré-Verdier duality*, Math. Res. Lett. **10** (2003), 635–650.

DEPARTMENT OF PURE AND APPLIED MATHEMATICS, GRADUATE SCHOOL OF INFORMATION SCIENCE AND TECHNOLOGY, OSAKA UNIVERSITY, TOYONAKA, OSAKA 560-0043, JAPAN

E-mail address: u574021d@ecs.cmc.osaka-u.ac.jp

Homotopy type of the box complexes of graphs without 4-cycles

筑波大学 数理物質科学研究科 上別府 陽 (Akira Kamibepu)

Institute of Mathematics, University of Tsukuba

A *graph* G is a pair $(V(G), E(G))$, where $V(G)$ is a finite set and $E(G)$ is a family of 2-elements subsets of $V(G)$. We assume that graphs are connected. We follow [3] with respect to the standard notation in graph theory. For a graph G , an abstract simplicial complex $\mathbf{B}(G)$ which is called the box complex of G is introduced by J. Matoušek and G. M. Ziegler in [5]. We define the box complex of a graph following [5].

Let G be a graph and U a subset of $V(G)$. A vertex $v \in V(G)$ which is adjacent to each $u \in U$ is called a *common neighbor* of U in G . The set of all common neighbors of U in G is denoted by $\text{CN}_G(U)$. For convenience, we define $\text{CN}_G(\phi) = V(G)$. For $U_1, U_2 \subseteq V(G)$ such that $U_1 \cap U_2 = \phi$, we define $G[U_1, U_2]$ as the bipartite subgraph of G with

$$V(G[U_1, U_2]) = U_1 \cup U_2 \text{ and } E(G[U_1, U_2]) = \{u_1u_2 \mid u_1 \in U_1, u_2 \in U_2, u_1u_2 \in E(G)\}.$$

The graph $G[U_1, U_2]$ is said to be *complete* if $u_1u_2 \in E(G)$ for all $u_1 \in U_1$ and $u_2 \in U_2$. For convenience, $G[\phi, U_2]$ and $G[U_1, \phi]$ are also said to be complete.

Let U_1, U_2 be subsets of $V(G)$. The subset $U_1 \uplus U_2$ of $V(G) \times \{1, 2\}$ is defined as

$$U_1 \uplus U_2 := (U_1 \times \{1\}) \cup (U_2 \times \{2\}).$$

For vertices $u_1, u_2 \in V(G)$, $\{u_1\} \uplus \phi$, $\phi \uplus \{u_2\}$, and $\{u_1\} \uplus \{u_2\}$ are simply denoted by $u_1 \uplus \phi$, $\phi \uplus u_2$ and $u_1 \uplus u_2$ respectively.

The *box complex* of a graph G is an abstract simplicial complex with the vertex set $V(G) \times \{1, 2\}$ and the family of simplices

$$\mathbf{B}(G) = \{U_1 \uplus U_2 \mid U_1, U_2 \subseteq V(G), U_1 \cap U_2 = \phi, \\ G[U_1, U_2] \text{ is complete, } \text{CN}_G(U_1) \neq \phi \neq \text{CN}_G(U_2)\}.$$

An abstract simplex $U_1 \uplus U_2$ and its geometric simplex are denoted by the same symbol $U_1 \uplus U_2$. The simplicial isomorphism $\nu : V(\mathbf{B}(G)) \rightarrow V(\mathbf{B}(G))$ is defined by

$$u \uplus \phi \mapsto \phi \uplus u \text{ and } \phi \uplus u \mapsto u \uplus \phi$$

for each $u \in V(G)$. This induces a homeomorphism on $\|\mathbf{B}(G)\|$ satisfying $\nu \circ \nu = \text{id}_{\|\mathbf{B}(G)\|}$. Moreover, we notice that this homeomorphism has no fixed point. In general, a homeomorphism ν on a topological space X satisfying $\nu \circ \nu = \text{id}_X$ is called the \mathbb{Z}_2 -action on X and the pair (X, ν) is called the \mathbb{Z}_2 -space. For two \mathbb{Z}_2 -spaces (X, ν_X) and (Y, ν_Y) , a continuous map $f : X \rightarrow Y$ satisfying $f \circ \nu_X = \nu_Y \circ f$ is called a \mathbb{Z}_2 -map from X to Y . We define the \mathbb{Z}_2 -index of a \mathbb{Z}_2 -space (X, ν) as

$$\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X, \nu) := \min\{n \mid \text{there is a } \mathbb{Z}_2\text{-map } f : X \rightarrow S^n\},$$

where $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ with the \mathbb{Z}_2 -action on S^n given by $x \mapsto -x$. If there exists a \mathbb{Z}_2 -map from X to Y , then we have $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X) \leq \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(Y)$.

In [5], J. Matoušek and G. M. Ziegler pointed out the following:

- (1) For any graph G ,

$$\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\mathbf{B}(G)\|) \leq \chi(G) - 2,$$

where ${}^1\chi(G)$ is the chromatic number of G

(2) If a graph G has no 4-cycle, there is a \mathbb{Z}_2 -retraction of $\|\text{sd } \mathbf{B}(G)\|$ onto a 1-dimensional subcomplex $\|\mathbf{L}\|$ of $\|\text{sd } \mathbf{B}(G)\|$ defined in [5], p.81, (H1). Then, we have $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\mathbf{B}(G)\|) \leq 1$. This indicates that the difference between $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\mathbf{B}(G)\|)$ and $\chi(G) - 2$ can be arbitrarily large.

Let \overline{G} be the following 1-dimensional subcomplex of $\mathbf{B}(G)$:

$$\overline{G} := \{u \uplus \phi, v \uplus \phi, \phi \uplus u, \phi \uplus v, u \uplus v, v \uplus u \mid uv \in E(G)\}.$$

Then, $\|\overline{G}\|$ is the \mathbb{Z}_2 -space with the restriction of the \mathbb{Z}_2 -action on $\|\mathbf{B}(G)\|$. This \mathbb{Z}_2 -action also has no fixed point. The preceding 1-dimensional subcomplex \mathbf{L} of $\text{sd } \mathbf{B}(G)$ equals to $\text{sd } \overline{G}$.

Example 1. Let G be the graph illustrated in Figure 1. We see $\chi(G) = 2$. On the other hand, we have $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\mathbf{B}(G)\|) = 0$. The polyhedron $\|\overline{G}\|$ is illustrated with the thick line in $\|\mathbf{B}(G)\|$.

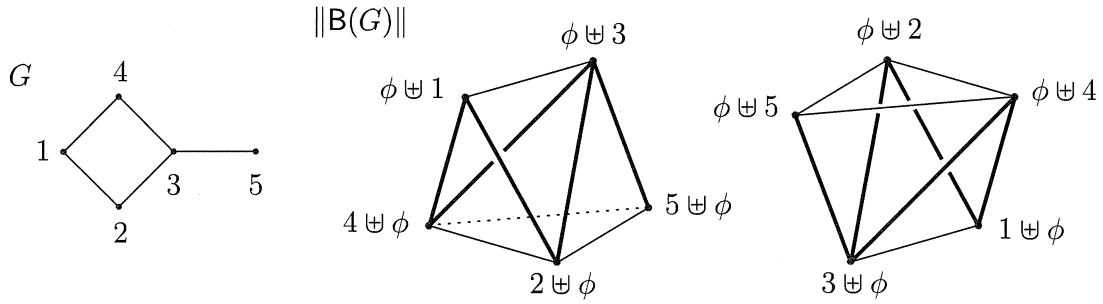


Figure 1. The graph G and its box complex $\|\mathbf{B}(G)\|$

We are interested in the relation between the combinatorics of G and the topology of $\|\mathbf{B}(G)\|$. In what follows, we consider the topology of the box complex of a graph without 4-cycles. Such a box complex has the following two properties:

Lemma 2 ([2], **Lemma 4.1**). A graph G contains no 4-cycle if and only if for any simplices $U_1 \uplus U_2 \in \mathbf{B}(G)$, we have $|U_1| \leq 1$ or $|U_2| \leq 1$. For such a graph G , each maximal simplex $U_1 \uplus U_2 \in \mathbf{B}(G)$ satisfies $|U_1| = 1$ or $|U_2| = 1$.

Lemma 3 ([2], **Lemma 4.2**). Let G be a graph without 4-cycles. For any two distinct maximal simplices of $\mathbf{B}(G)$ with nonempty intersection, the intersection is a simplex of \overline{G} .

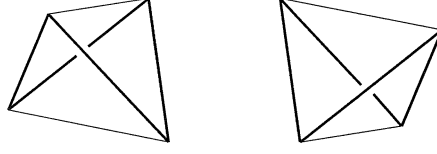
Let X be a \mathbb{Z}_2 -space and A a \mathbb{Z}_2 -subspace of X . A strong deformation retraction $\{f_t\}_{t \in [0,1]}$ of X onto A such that each $f_t : X \rightarrow X$ is a \mathbb{Z}_2 -map is called a strong \mathbb{Z}_2 -deformation retraction of X onto A . Then, we notice that the retraction f_1 of X onto A and the inclusion of A into X are \mathbb{Z}_2 -maps, so we have $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(X) = \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(A)$.

Theorem 4 ([2], **Theorem 4.3**). A graph G contains no 4-cycle if and only if $\|\overline{G}\|$ is a strong \mathbb{Z}_2 -deformation retract of $\|\mathbf{B}(G)\|$.

Sketch of proof. If a graph G contains a 4-cycle C_4 , then $\|\mathbf{B}(C_4)\|$ ($\subseteq \|\mathbf{B}(G)\|$) is the disjoint union of two 3-simplices and $\|\overline{C_4}\|$ is the disjoint union of two circles, each of which is contractible in $\|\mathbf{B}(G)\|$.

¹A map $c : V(G) \rightarrow \{1, \dots, k\}$ such that $c(u) \neq c(v)$ whenever $uv \in E(G)$ is called a k -coloring of G . The chromatic number of G is defined by $\chi(G) = \min\{k \mid \text{there exists a } k\text{-coloring of } G\}$.

$\|\mathbf{B}(C_4)\|$



(The polyhedron $\|\overline{C_4}\|$ is illustrated with --- .)

Figure 2. The box complex $\|\mathbf{B}(C_4)\|$

Suppose that there is a retraction $r : \|\mathbf{B}(G)\| \rightarrow \|\overline{G}\|$. We consider the nullhomotopic loop l in $\|\mathbf{B}(G)\|$ which goes around one of two circles of $\|\overline{C_4}\|$. Then, we see that $r \circ l$ is the circle in $\|\overline{G}\|$ which must be nullhomotopic. This is impossible since $\|\overline{G}\|$ is the 1-dimensional complex.

Conversely, we assume that a graph G has no 4-cycle. Then, by Lemma 2, we can divide all maximal simplices of $\mathbf{B}(G)$ into the two sets of simplices

$$B_1 = \{v \uplus U \mid v \uplus U \text{ is maximal}\} \text{ and } B_2 = \{U \uplus v \mid U \uplus v \text{ is maximal}\}.$$

The \mathbb{Z}_2 -action ν on $\|\mathbf{B}(G)\|$ induces a one-to-one correspondence between B_1 and B_2 . For each simplex $v \uplus U \in B_1$, we define a strong deformation retraction $\{f_t^v\}_{t \in [0,1]}$ of $v \uplus U$ onto $K_v^- := \|\overline{G}\| \cap (v \uplus U)$ starting with a collapsing from the free face $\phi \uplus U$ of $v \uplus U$ (see Figure 3):

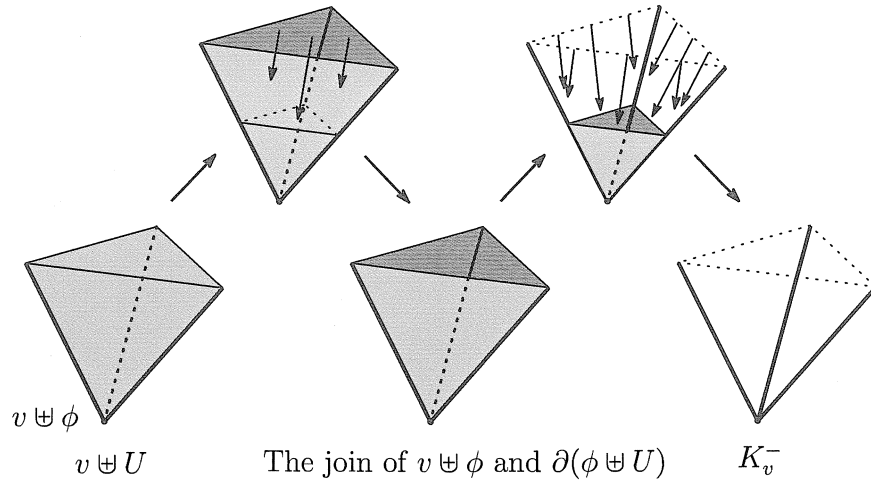


Figure 3. The strong deformation retraction $\{f_t^v\}_{t \in [0,1]}$ of $v \uplus U$ onto K_v^- .

For each simplex $U \uplus v \in B_2$, a strong deformation retraction of $U \uplus v$ onto $K_v^+ := \|\overline{G}\| \cap (U \uplus v)$ is defined as $\{\nu \circ f_t^v \circ \nu\}_{t \in [0,1]}$. Let $X_v = (v \uplus U) \cup (U \uplus v)$, for any $v \in V(G)$. Then, a strong \mathbb{Z}_2 -deformation retraction F_v of X_v onto $K_v^- \cup K_v^+$ is defined as

$$F_v(x, t) = \begin{cases} f_t^v(x) & \text{if } x \in v \uplus U, \\ \nu \circ f_t^v \circ \nu(x) & \text{if } x \in U \uplus v, \end{cases}$$

where $t \in [0, 1]$. Since the homotopies F_u and F_v are stationary on $X_u \cap X_v$ for $u, v \in V(G)$ by Lemma 3, we see that the homotopies $\{F_v \mid v \in V(G)\}$ induce a strong \mathbb{Z}_2 -deformation retraction of $\|\mathbf{B}(G)\|$ onto $\|\overline{G}\|$. \square

For (2) above, this theorem shows that $\|\mathbf{L}\|$ is indeed a strong \mathbb{Z}_2 -deformation retract of $\|\mathbf{B}(G)\|$ if G contains no 4-cycle. The theorem also shows that the converse of this also holds and that we have $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\mathbf{B}(G)\|) = \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\mathbf{L}\|) = \text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\overline{G}\|)$. On the other hand, $\|\overline{G}\|$ is the 1-dimensional complex with the \mathbb{Z}_2 -action which has no fixed point, so that we have ${}^2\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\overline{G}\|) \leq 1$. The homotopy type of $\|\overline{G}\|$ and the \mathbb{Z}_2 -index of $\|\overline{G}\|$ are determined by the following theorem:

Theorem 5 ([1], Theorem 4.4). Let G be a connected graph with k induced cycles of G .

- (1) If G has no cycle of odd length, we have $\|\overline{G}\| \simeq \bigvee_k S^1 \amalg \bigvee_k S^1$ and $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\overline{G}\|) = 0$.
- (2) If G has at least one cycle of odd length, we have $\|\overline{G}\| \simeq \bigvee_{2k-1} S^1$ and $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\overline{G}\|) = 1$. \square

As a conclusion, if a graph G contains no 4-cycle, the homotopy type of $\|\mathbf{B}(G)\|$ and the \mathbb{Z}_2 -index of $\|\mathbf{B}(G)\|$ is determined by Theorem 4 and 5.

Corollary 6 ([2], Corollary 4.5). Let G be a graph without 4-cycles and k the number of induced cycles of G .

- (1) If G has no cycle of odd length, we have $\|\mathbf{B}(G)\| \simeq \bigvee_k S^1 \amalg \bigvee_k S^1$ and $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\mathbf{B}(G)\|) = 0$.
- (2) If G has at least one cycle of odd length, we have $\|\mathbf{B}(G)\| \simeq \bigvee_{2k-1} S^1$ and $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\mathbf{B}(G)\|) = 1$. \square

References

- [1] A. Kamibeppu. The box complex of graphs without 3 and 4-cycles, preprint.
- [2] A. Kamibeppu. Homotopy type of the box complexes of graphs without 4-cycles, preprint.
- [3] R. Diestel. Graph Theory. 3rd ed. Graduate Texts in Mathematics 173, Springer-Verlag, 2005.
- [4] J. Matoušek. Using the Borsuk-Ulam Theorem. Lectures on Topological Methods in Combinatorics and Geometry, Universitext, Springer-Verlag, 2003.
- [5] J. Matoušek and G. M. Ziegler. Topological lower bounds for the chromatic number: A hierarchy. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 106 (2004), no.2, 71-90.

Institute of Mathematics University of Tsukuba, Tsukuba-shi, Ibaraki 305-8571, Japan
E-mail address: akira04k16@math.tsukuba.ac.jp

²Let $\|\mathbf{K}\|$ be an n -dimensional simplicial complex with a \mathbb{Z}_2 -action which has no fixed point, then we have $\text{ind}_{\mathbb{Z}_2}(\|\mathbf{K}\|) \leq n$ (see [4], p.96).

Generalized arcsine law in an infinite measure system

早稲田大学 先進理工学部 秋元 琢磨¹

不変測度が規格化できない、所謂、無限測度、においていくつかの観測関数の長時間平均に対する極限定理を紹介する。Rayleigh-Benard 対流や Belousov-Zhabotinsky 反応などの間欠的な現象は、無限測度を持つ力学系で記述されることが知られている。我々は、不変測度に関する平均が有限でないような観測関数の長時間平均が逆正弦分布に収束することを示す。このような観測関数は、物理的な観測では一般的であり、相関関数はこのクラスの観測関数である。したがって、観測関数は根本的にランダムになり、減衰しないという新しい見解がもたらされる。

1 Introduction

Boltzmann により導き出された H 定理は熱力学第二法則の証明を与えたが、力学の可逆性や Poincaré の再帰定理による矛盾が指摘された。そして、力学的体系にはそもそも平衡状態が存在するのかという問題が湧き上がった。この問題に対して、Boltzmann はエルゴードという概念により次のように解決しようとした。巨視的な観測量は微視的な力学の観測関数の長時間平均であるということを前提にすれば、平衡状態は観測関数の長時間平均が一定となることにより実現される。換言すれば、「長時間平均」＝「空間平均」が成立すれば、巨視的な観測量が一定になるという平衡状態を保障するのである。この性質をエルゴード性という。観測関数を $g(x)$ 、長時間平均の長さを N 、力学の時間発展を T とすれば、時刻 n のときの観測量 $F(n)$ は、

$$F(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^n g(T^k x) \quad (1)$$

と書くことができる [1]。²不変測度が有限であり、強いカオス系ではほとんどすべての初期点に対して $F(n)$ は、任意の時刻 n で一定値となり、その値は力学系の不変測度に関する平均値と一致する [2]。したがって、巨視的な観測量は一定値となり平衡状態が実現されている。

Rayleigh-Benard 対流や Belousov-Zhabotinsky 反応などの間欠的な現象では、中立不動点を持つ非双曲型力学系で記述されることが知られている [3]。この力学系では、 $1/f$ スペクトルやベキ的な滞在時間分布を示すが、不変測度が規格化できない場合には、長時間平均が異常な振る舞い、つまり、長時間平均が一定値に収束せずランダムになることも知られてきている [4]。半導体のナノクリスタルの実験でも長時間平均の異常性³が実際に観測されている [5]。

¹E-mail: k0-1law@toki.waseda.jp

² N は巨視的な観測における微視的な時間の長さを表し、比較的長い時間である。

³物理では、エルゴード性の破れと表現する場合もあるが、たとえ長時間平均が一定値にならなくても力学系自身はエルゴード的である場合がある。

本研究の目的は、不変測度に関する平均が有限でないような観測関数に対して長時間平均の振る舞いを明らかにすることである。これまでの研究では、不変測度に関する平均が有限である関数（これを $L^1(m)$ 関数と書く）に対してスケールされた長時間平均が Mittag-Leffler 分布に収束し [4]、 $L^1(m)$ 関数でない特別な観測関数に対しては、長時間平均が一般化された逆正弦分布に収束することが示されている [6]。本論文では、一般化された逆正弦分布に収束する観測関数のクラスを明確にすることとそれ以外の $L^1(m)$ 関数でない観測関数の長時間平均の振る舞いを無限測度を持つ力学系として変形ベルヌーイ写像を用いて解析する。

2 変形ベルヌーイ写像

ここでは、変形ベルヌーイ写像の統計的性質のまとめを行う。変形ベルヌーイ写像は、

$$x_{n+1} = Tx_n = \begin{cases} x_n + 2^{B-1}x_n^B & X_n \in I_0 = [0, 1/2] \\ x_n - 2^{B-1}(1-x_n)^B & X_n \in I_1 = (1/2, 1], \end{cases} \quad (2)$$

で定義される一次元写像である。 B はパラメタであり、ここでは $B > 1$ とする。この場合、 $x = 0, 1$ は中立不動点であり、不変密度はこの二つの点でピークを持ち、Frobeniu-Perron 方程式を近似的に解くことにより不変密度 $\rho(x)$ は

$$\rho(x) \sim x^{1-B} + (1-x)^{1-B} \quad (3)$$

となることがわかっている [7]。したがって、 $B < 2$ では不変密度を規格化することができるが、 $B \geq 2$ ではもはや不変密度を規格化することができなくなる。

変形ベルヌーイ写像から更新過程と以下のように構築することができる [8]。まず、時系列を $\sigma_n = \sigma(x_n)$ で記号化を行う。ここで、 $\sigma(x) = -1$ ($x \in I_0$)、 $\sigma(x) = 1$ ($x \in I_1$) である。すると、更新が起きることを σ_n の符号が変わることと定義する。つまり、 $\sigma_n \sigma_{n+1} = -1$ 。 $r-1$ 回と r 回の更新が起きるまでの時間 \mathbf{X}_r ($r \geq 2$) は、独立同一分布を持つ確率変数であり、その確率密度関数は、 $f(n)$ は、 $n \gg 1$ に対して $f(n) \propto (n-1)^{-\beta}$ ($\beta = B/(B-1)$) で与えられる [9]。したがって、この点過程は、更新過程として解析することができる。以下、確率変数 \mathbf{X}_r は連続値を持つものとする。

$$f(x) = (\beta-1)(x-1)^{-\beta} \quad (\beta = B/(B-1)). \quad (4)$$

3 長時間平均の振る舞い

まず初めに、次のような観測関数の長時間平均の振る舞いを解析する。

$$I(x) = \begin{cases} a & (x \leq \frac{1}{2}) \\ b & (x > \frac{1}{2}), \end{cases} \quad (5)$$

ここで、 $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-\infty, \infty\}$ である。関数 $I(x)$ は、 $L^1(m)$ 関数でない。

ここで、変形ベルヌーイ写像に対する Lamperti の一般化された逆正弦定理を紹介する [10, 11]。

定理 1 (Lamperti's generalized arcsine law) \mathbf{X}_n を変形ベルヌーイ写像から構築された更新過程における更新と更新の間の時間とし、 N_n を n 回の更新までに時系列 x_n が区間 I_0 に滞在している時間とする。つまり、 $x_0 \in I_0$ かつ n が奇数のとき、 $N_n = \mathbf{X}_1 + \mathbf{X}_3 + \dots + \mathbf{X}_n$ である。このとき、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \Pr(N_n/n \leq x) = G_\alpha(x) \quad (6)$$

となる。ここで、 $\alpha = \beta - 1$ であり、確率密度関数 $G'_\alpha(x)$ は

$$G'_\alpha(x) = \frac{\sin \pi \alpha}{\pi} \frac{x^\alpha(1-x)^{\alpha-1} + x^{\alpha-1}(1-x)^\alpha}{x^{2\alpha} + 2x^\alpha(1-x)^\alpha \cos \pi \alpha + (1-x)^{2\alpha}}. \quad (7)$$

で与えられる。

この定理から直ちに次の事が言える。

定理 2 $I(x)$ の長時間平均は、一般化された逆正弦分布に収束する。

$$\frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} I(T^k \cdot) \rightarrow Y_{\alpha,a,b} \quad (8)$$

ここで、確率変数 $Y_{\alpha,a,b}$ は、確率密度関数

$$G'_{\alpha,a,b}(x) = \begin{cases} \frac{(a-b) \sin \pi \alpha}{\pi} \frac{(x-b)^{\alpha-1} (a-x)^{\alpha-1}}{(x-b)^{2\alpha} + 2(x-b)^\alpha (a-x)^\alpha \cos \pi \alpha + (a-x)^{2\alpha}} & (a > b) \\ \frac{(b-a) \sin \pi \alpha}{\pi} \frac{(b-x)^{\alpha-1} (x-a)^{\alpha-1}}{(b-x)^{2\alpha} + 2(b-x)^\alpha (x-a)^\alpha \cos \pi \alpha + (x-a)^{2\alpha}} & (a < b), \end{cases} \quad (9)$$

を持ち、 $\alpha = \beta - 1$ である。

定義 1 ($L^1_{loc,m}$ function with finite mean)

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\int_\epsilon^{1-\epsilon} |g| dm}{\int_\epsilon^{1-\epsilon} dm} < \infty \quad (10)$$

を満たし、任意の $\epsilon > 0$ に対して

$$\int_\epsilon^{1-\epsilon} |g| dm < \infty \quad (11)$$

が満たされるならば、関数 g を $L^1_{loc}(0,1)$ function with finite mean with respect to m と呼び、 $L^1_{loc,m}(0,1)$ function with finite mean と書く。

定理 2 と $\epsilon - \delta$ 論法により、次の定理が示される。

定理 3 $g(x)$ を $L^1_{loc}(0,1)$ function with finite mean w.r.t. the invariant measure m とし、 $g(0) = a, g(1) = b$ とする。さらに、 $g(x)$ が $[0, \delta] \cup [1 - \delta, 1]$ 上で連続となるような $0 < \delta < 1$ が存在するとする。このとき、 $g(x)$ の長時間平均は、分布として $Y_{\alpha,a,b}$ に収束する。ここで、 $\alpha = \beta - 1$ である。

この定理から、相関関数

$$C(n) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} g(x) h(T^k x). \quad (12)$$

は、 $g(x)h(T^k x)$ が定理 3 の条件を満たすならば、一般化された逆正弦分布に収束する。

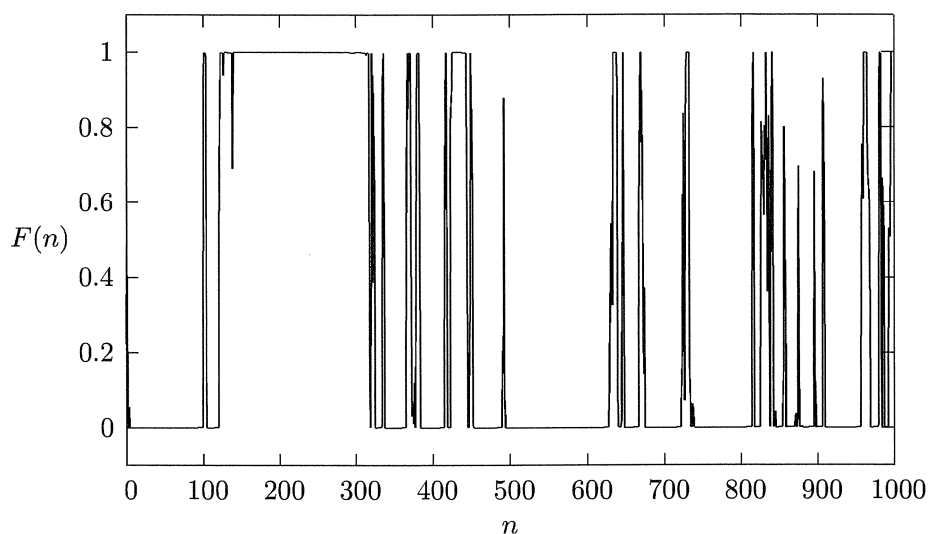


図 1: $F(n)$ の振る舞い. ($g(x) = x, B = 3.0, x = 0.1, N = 10^6$)

4 まとめと展望

この論文では、 $L_{loc,m}^1(0,1)$ function with finite mean の長時間平均に対する極限定理を明らかにした. 従来の極限定理では、観測関数は特別なものだけを扱っていたが、この結果は、長時間平均が一般化された逆正弦分布に収束する観測関数のクラスを明確にした. 一般的に、相関関数はこのクラスの関数になるため、相関関数がランダムであり、減衰しないという新しい見解が得られた. 最近得られた観測関数に応じた長時間平均に関する極限定理を表 1 にまとめた [11].

Boltzmann によって提案されたエルゴード性の概念は、力学的体系の平衡状態を保障するものであるが、非平衡状態におけるエルゴードなる概念は、現在の所、議論がされていない.⁴ 図 1 に示してあるように、無測度系での巨視的な観測量 $F(n)$ の時間発展はランダムであり、一般化された逆正弦分布と関係した測度になると考えられる. このように、無限測度系での長時間平均に対する極限定理は、長時間平均のランダム性を保障するものであり、非平衡状態におけるエルゴード問題に向けた議論を推進させると期待している. 実際に、Mittag-Leffler 分布や逆正弦分布は、拡散過程やその一般化された過程などの非平衡現象に普遍的に現れ、注目を集めている [12].

謝辞

本研究の一部は、早稲田大学 21COE プログラム「多元要素からなる自己組織系の物理」から助成を受けております.

⁴非平衡定常状態に対しては、Sinai-Ruelle-Bowen 測度が提案されているが、非定常状態に対する測度は議論されていない.

表 1: 長時間平均の普遍分布.

Invariant measure	$g(x)$	Distribution
Finite ($B < 2$)	$L^1(m)$	<i>Delta</i>
Finite ($B < 2$)	$L_{loc}^1(m)$ with infinite mean	<i>Stable</i>
Infinite ($B \geq 2$)	$L^1(m)$	<i>Mittag-Leffler</i>
Infinite ($B \geq 2$)	$L_{loc,m}^1$ with finite mean	<i>Generalized arcsine</i>
Infinite ($B \geq 2$)	$L_{loc,m}^1$ with infinite mean	<i>Stable</i>

参考文献

- [1] T. Akimoto, Dr. Thesis, Faculty of Science and Engineering, Waseda University, 2007.
- [2] G. D. Birkhoff, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **17** 656-660 (1931).
- [3] Y. Pomeau and P. Manneville, Intermittent Transition to Turbulence in Dissipative Dynamical Systems, *Comm. Math. Phys.* **74** 189-197 (1980).
- [4] J. Aaronson, *An Introduction to Infinite Ergodic Theory*, AMS, 1997.
- [5] X. Brokmann et al, Statistical aging and nonergodicity in the fluorescence of single nanocrystals, *Phys. Rev. Lett.* **90**, 12061 (2003).
- [6] M. Thaler, The Dynkin-Lamperti arc-sine laws for measure preserving transformations, *Trans. Amer. Math. Soc.* **350**, 4593-4607 (1998).
- [7] M. Thaler, Transformations on $[0, 1]$ with infinite invariant measures, *Isr. J. Math.* **46**, 67-96 (1983).
- [8] D. R. Cox, *Renewal Theory* (Methuen, New York, 1962).
- [9] Y. Aizawa and T. Kohyama, *Kyoto Summer Institute "Chaos and Statistical Mechanics"*, ed. Y. Kuramoto, 109-116, Springer, (1983).
- [10] J. Lamperti, An occupation time theorem for a class of stochastic processes, *Trans. Amer. Math. Soc.* **88**, 380-387 (1958).
- [11] T. Akimoto, Generalized Arcsine Law and Stable Law in an Infinite Measure Dynamical System, arXiv:0801.1382v.
- [12] E. Barkai, Residence time statistics for normal and fractional diffusion in a force field, *J. Stat. Phys.* **123**, 883-907 (2006).

THE MODELING IN THE EQUATIONS OF FLUID MECHANICS AT THE DAWN OR NAVIER-STOKES

(黎明期における流体力学ないしは NAVIER-STOKES 方程式のモデリング)

増田 茂 (首都大学東京 大学院理学研究科 数学専攻 D3)

ABSTRACT. The original Navier-Stokes equations (NS) or Navier equations were introduced in the prime of *the second period of molecules* in 1821 and also Stokes' in 1845 respectively. The heated arguments for modeling in the formulations of NS, based on or not on the then current topics on actions of molecules among the *géomètres* about the elastic solid/fluid, were published in the then journals. Helmholtz and Thomson discovered the theories of vortices in 1850s, in not using NS. Moreover, "until Reynold's[29] and Boussinesq's studies of turbulent flow in 1880s, NS remained completely irrelevant to hydraulics" (Darrigol[11]). We would like to report on these modeling after fluid mechanics at the dawn, from the three points of view : two parameters in the equations of the elastic solid/fluid, the boundary conditions, and at last, the modeling from exact differential to vortices.

1. TWO PARAMETERS IN ELASTIC SOLID AND FLUID EQUATIONS BY POISSON, NAVIER, CAUCHY AND STOKES

We introduce the tables from Table 1 to Table 4, in which we show the equations, tensors and relations of coefficients in each other. We can summarize such as :

- The partial differential equations of the elastic solid or elastic fluid are expressed by using one or the pair of C_1 and C_2 such that : in the elastic solid : $\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2} - (C_1 T_1 + C_2 T_2) = \mathbf{f}$. In the elastic fluid : $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - (C_1 T_1 + C_2 T_2) + \dots = \mathbf{f}$, where T_1, T_2, \dots are the tensors or terms consisting our equations. For example, in modern notation of the incompressible Navier-Stokes equations, the kinetic equation and the equation of continuity are conventionally described as follows :

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \nabla p = \mathbf{f}, \quad \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (1)$$

- Moreover, C_1 and C_2 are described as follows :

$$\begin{cases} C_1 \equiv \mathcal{L} r_1 g_1 S_1, \\ C_2 \equiv \mathcal{L} r_2 g_2 S_2, \end{cases} \quad \begin{cases} S_1 = \iint g_3 \rightarrow C_3, \\ S_2 = \iint g_4 \rightarrow C_4, \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} C_1 = C_3 \mathcal{L} r_1 g_1 = \frac{2\pi}{15} \mathcal{L} r_1 g_1, \\ C_2 = C_4 \mathcal{L} r_2 g_2 = \frac{2\pi}{3} \mathcal{L} r_2 g_2. \end{cases}$$

- C_1 and C_2 are two coefficients, for example, k and K by Poisson, or ε and E by Navier, or R and G by Cauchy, and which are expressed by the infinite operator $\mathcal{L} (\sum_0^\infty \text{ or } \int_0^\infty)$ by personal principles or methods, where r_1 and r_2 are the functions related to the radius of the active sphere of the molecules, rised to the power of n , for Poisson's and Navier's case, the relation of function in expressing by logarithm to the base of r exists such that : $\log_r \frac{r_1}{r_2} = 2$.
- g_1 and g_2 are the certain functions which are dependent on r and are described with attraction &/or repulsion.
- S_1 and S_2 are the two expressions which describe the surface of active unit-sphere at the center of a molecule by the double integral (or single sum in case of Poisson's fluid).¹
- g_3 and g_4 are certain compound triangular-functions to compute the moment in the unit sphere.
- C_3 and C_4 are indirectly determined as the common coefficients from the invariant tensor. Except for Poisson's fluid case, C_3 of C_1 is $\frac{2\pi}{3}$, and C_4 of C_2 is $\frac{2\pi}{15}$, which are computed from the total moment of the active sphere of the molecules in computing only by integral, and which are independent on personal manner. In Poisson's case, after multiplying by $\frac{1}{4\pi}$, we get the same as above.
- The ratio of the two coefficients including Poisson's case is always same as : $\frac{C_3}{C_4} = \frac{1}{5}$.

2. NAVIER'S BOUNDARY CONDITION

About $\mathbf{S} ds^2 E(u\delta u + v\delta v + w\delta w)$ in Table 4 and the total of the rest terms, Navier explains as follows : regarding the conditions which react at the points of the surface of the fluid, if we substitute

- $dydz \rightarrow ds^2 \cos l$, l : the angles by which the plane tangents on the surface frame with the plane yz ,
- $dx dz \rightarrow ds^2 \cos m$, m : samely, the angles with the plane xz ,
- $dx dy \rightarrow ds^2 \cos n$, n : samely, the angles with the plane xy ,
- $\iint dydz, \iint dx dz, \iint dx dy \rightarrow \mathbf{S} ds^2$,

Date: 2008/01/09.

¹We use "→" which means that it can not be described in using "=", because C_3 and C_4 are not always deduced directly, but as the common factor of the tensor.

TABLE 1. C_1, C_2, C_3, C_4 : the constant of definitions and computing of total moment of molecular actions by Poisson, Navier, Cauchy & Stokes

no	name	elastic solid	elastic fluid	polar system
1	Poisson [24, 26]	$C_1 = k \equiv \frac{2\pi}{15} \sum \frac{r^5}{\alpha^5} \frac{d \cdot \frac{1}{2} f r}{dr}$ $C_2 = K \equiv \frac{2\pi}{3} \sum \frac{r^3}{\alpha^3} f r$ $C_3 = \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \beta \sin \beta d\beta g_3 \Rightarrow \{\frac{2\pi}{5}, \frac{2\pi}{15}\} \Rightarrow \frac{2\pi}{15}$ $C_4 = \int_0^{2\pi} d\gamma \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos \beta \sin \beta d\beta g_4 \Rightarrow \frac{2\pi}{3}$ Remark: C_3 is choiced as the common factor of $\{\cdot, \cdot\}$	$C_1 = -k \equiv -\frac{1}{30\epsilon^3} \sum r^3 \frac{d \cdot \frac{1}{2} f r}{dr}$ $= -\frac{2\pi}{15} \sum \frac{r^3}{4\pi\epsilon^3} \frac{d \cdot X S \frac{1}{2} f r}{dr}$ $C_2 = -K \equiv -\frac{1}{6\epsilon^3} \sum r f r$ $= -\frac{2\pi}{3} \sum \frac{r^3}{4\pi\epsilon^3} f r$ $C_3 : \begin{cases} G = \frac{1}{10} \sum r^3 \frac{d \cdot \frac{1}{2} f r}{dr}, \\ E = F = \frac{1}{30} \sum r^3 \frac{d \cdot \frac{1}{2} f r}{dr} \end{cases}$ $\Rightarrow \{\frac{1}{10}, \frac{1}{30}\} \Rightarrow \frac{1}{30}$ $C_4 : (3-2) p f N = \frac{1}{6\epsilon^3} \sum r f r \Rightarrow \frac{1}{6}$	$x_1 = r \cos \beta \cos \gamma,$ $y_1 = r \sin \beta \sin \gamma,$ $\zeta = -r \cos \beta$
2	Navier [22, 23]	$C_1 = \epsilon \equiv \frac{2\pi}{15} \int_0^\infty d\rho \cdot \rho^4 f \rho$ $C_3 = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} d\psi \int_0^{2\pi} \cos \varphi d\varphi g_3 \Rightarrow \{\frac{16}{15}, \frac{4}{15}, \frac{2}{5}\}$ $\Rightarrow \frac{1}{2} \frac{\pi}{4} \frac{16}{15} = \frac{2\pi}{15}$	$C_1 = \epsilon \equiv \frac{2\pi}{15} \int_0^\infty d\rho \cdot \rho^4 f(\rho)$ $C_2 = E \equiv \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty d\rho \cdot \rho^2 F(\rho)$ $C_3 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi g_3$ $\Rightarrow \{\frac{\pi}{10}, \frac{\pi}{30}\} \Rightarrow \frac{2\pi}{15}$ $C_4 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi \int_0^{2\pi} \cos \psi d\psi g_4 \Rightarrow \frac{2\pi}{3}$	$\alpha = \rho \cos \psi \cos \varphi,$ $\beta = \rho \cos \psi \sin \varphi,$ $\gamma = \rho \sin \psi$
3	Cauchy [5]	$C_1 = R = \frac{2\pi\Delta}{15} \int_0^\infty r^3 f(r) dr$ $= \pm \frac{2\pi\Delta}{15} \int_0^\infty [r^4 f'(r) - r^3 f(r)] dr$ $C_2 = G = \pm \frac{2\pi\Delta}{3} \int_0^\infty r^3 f(r) dr$ $C_3 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 q dq \int_0^\pi \cos^2 \alpha \cos^2 \beta dp,$ $= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 q dq \int_0^\pi \cos^2 p \sin^2 p \sin p dp = \frac{2\pi}{15},$ $C_4 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 p \sin p dp = \frac{2\pi}{3},$		$\cos \alpha = \cos p,$ $\cos \beta = \sin p \cos q,$ $\cos \gamma = \sin p \sin q$
4	Stokes[31]		$C_1 = \mu, C_2 = \frac{\mu}{3}$	

TABLE 2. The expression of the total moment of molecular actions by Poisson, Navier, Cauchy & Stokes

no	name	problem	C_1	C_2	C_3	C_4	\mathcal{L}	r_1	r_2	g_1	g_2	S_1, S_2, g_3, g_4	remark
1	Poisson [24]	elastic solid	k	K	$\frac{2\pi}{15}$	$\sum \frac{1}{\alpha^5}$	r^5	r^5		$\frac{d \cdot \frac{1}{2} f r}{dr}$	$f r$	cf. Table 3	
2	Poisson [26]	fluid	k	K	$\frac{1}{30}$	$\sum \frac{1}{\epsilon^3}$	r^3	r^3		$\frac{d \cdot \frac{1}{2} f r}{dr}$	$f r$		$C_3 = \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi}{15} = \frac{1}{30}$ $C_4 = \frac{1}{4\pi} \frac{2\pi}{3} = \frac{1}{6}$
3	Navier [22]	elastic solid	ϵ		$\frac{2\pi}{15}$		$\int_0^\infty d\rho$	ρ^4		$f \rho$			ρ : radius
4	Navier fluid [23]	fluid	ϵ	E	$\frac{2\pi}{15}$		$\int_0^\infty d\rho$	ρ^4		$f(\rho)$			ρ : radius
5	Cauchy [5]	system	R	G	$\frac{2\pi}{15}$		$\int_0^\infty dr$	r^3		$f(r)$			$f(r) \equiv \pm [r f'(r) - f(r)]$ $f(r) \neq f(r)$
6	Stokes[31]	fluid	μ	$\frac{\mu}{3}$			$\int_0^\infty dr$	r^3					

then because the affected terms by the quantities $\delta u, \delta v$ and δw respectively reduce to zero, the following determined equations should hold for any points of the surface of the fluid :

$$\begin{cases} E u + \epsilon [\cos l 2 \frac{du}{dx} + \cos m (\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}) + \cos n (\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx})] = 0, \\ E v + \epsilon [\cos l (\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx}) + \cos m 2 \frac{dv}{dy} + \cos n (\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy})] = 0, \\ E w + \epsilon [\cos l (\frac{du}{dz} + \frac{dw}{dx}) + \cos m (\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy}) + \cos n 2 \frac{dw}{dz}] = 0, \end{cases} \quad (2)$$

here the value of the constant E which verifies following the nature of the solid with which the fluid is in contact. (2) express the boundary condition. The first terms of the left-hand side of (2) are defined by $C_2 = E \equiv \frac{2\pi}{3} \int_0^\infty d\rho \cdot \rho^2 F(\rho)$ in Table 1 for the expression which we seek for the sum of the moments of the total actions which caused between the molecules of the boundary and the fluid, and the second terms are the normal derivatives of the component of the fluid velocity parallel to the surface. Moreover, by using Darrigol's simple notation², we can express this condition as $E \mathbf{v} + \epsilon \partial_\perp \mathbf{v}_\parallel = \mathbf{0}$, where ∂_\perp is the normal derivative, and \mathbf{v}_\parallel is the component of the fluid velocity parallel to the surface.

3. FROM THE EXACT DIFFERENTIAL TO VORTECES

In the fluid mechanics, it is an important concept to analyze it, for example in three variables, for $u dx + v dy + w dz$ to be satisfied with an *exact differentiability* or a *complete differentiability*. By D'Alembert, Euler, Lagrange,

²cf. Darrigol [10, p.115]

TABLE 3. S_1, S_2, g_3, g_4 : the triangular functions computing of total moment of molecular actions in unit sphere by Poisson, Navier, Cauchy & Stokes

no	name	S_1, S_2, g_3, g_4
1	Poisson [24]	g_3 and g_4 are in the following tensor : $\begin{cases} g = a \sin \beta \cos \gamma + b \sin \beta \sin \gamma - c \cos \beta, & g' = g \frac{dx}{dx} + h \frac{dy}{dy} + l \frac{dz}{dz}, \\ h = a' \sin \beta \cos \gamma + b' \sin \beta \sin \gamma - c' \cos \beta, & h' = g \frac{dy}{dx} + h \frac{dy}{dy} + l \frac{dz}{dz}, \\ l = a'' \sin \beta \cos \gamma + b'' \sin \beta \sin \gamma - c'' \cos \beta, & l' = g \frac{dz}{dx} + h \frac{dz}{dy} + l \frac{dz}{dz} \end{cases}$ $\begin{cases} P = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} [(g + g') \sum \frac{r^3}{\alpha^5} fr + (gg' + hh' + ll')g \sum \frac{r^5}{\alpha^5} \frac{d \cdot \frac{1}{r} fr}{dr}] \Delta, \\ Q = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} [(h + h') \sum \frac{r^3}{\alpha^5} fr + (gg' + hh' + ll')h \sum \frac{r^5}{\alpha^5} \frac{d \cdot \frac{1}{r} fr}{dr}] \Delta, \\ R = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} [(l + l') \sum \frac{r^3}{\alpha^5} fr + (gg' + hh' + ll')l \sum \frac{r^5}{\alpha^5} \frac{d \cdot \frac{1}{r} fr}{dr}] \Delta, \end{cases}$ i.e. $\Rightarrow \begin{bmatrix} P \\ Q \\ R \end{bmatrix} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \Delta \left(\begin{bmatrix} g + g' & (gg' + hh' + ll')g \\ h + h' & (gg' + hh' + ll')h \\ l + l' & (gg' + hh' + ll')l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum \frac{r^3 fr}{\alpha^5} \\ \sum \frac{r^5 d \cdot \frac{1}{r} fr}{\alpha^5 dr} \end{bmatrix} \right)$ $= \int_0^{2\pi} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\beta d\gamma \left(\begin{bmatrix} g_4 & g_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} K' \\ k' \end{bmatrix} \right),$ where $\Delta := \cos \beta \cdot \sin \beta d\beta d\gamma$, $K' := \sum \frac{r^3 fr}{\alpha^5}$, $k' := \sum \frac{r^5 d \cdot \frac{1}{r} fr}{\alpha^5 dr}$. S_1 and S_2 are given from above.
2	Navier elastic solid [22]	$g_3 :$ $g_3 = \frac{1}{2} \delta f^2$ $f \equiv \rho \left[\frac{dx}{da} \cos^2 \psi \cos^2 \varphi + \left(\frac{dx}{db} + \frac{dx}{dc} \right) \cos^2 \psi \sin \varphi \cos \varphi + \left(\frac{dx}{dc} + \frac{dx}{da} \right) \cos \psi \sin \psi \cos \varphi + \frac{dy}{db} \cos^2 \psi \sin^2 \varphi + \left(\frac{dy}{dc} + \frac{dy}{db} \right) \sin \psi \cos \psi \sin \varphi + \frac{dy}{dc} \sin^2 \psi \right].$
3	Navier fluid [23]	$g_3 :$ $\alpha = \rho \cos \psi \cos \varphi, \quad \beta = \rho \cos \psi \sin \varphi, \quad \gamma = \rho \sin \psi$ $g_3 = V \delta V = \left[\alpha \left(\frac{dx}{dx} \alpha + \frac{dy}{dy} \beta + \frac{dz}{dz} \gamma \right) + \beta \left(\frac{dx}{dx} \alpha + \frac{dy}{dy} \beta + \frac{dz}{dz} \gamma \right) + \gamma \left(\frac{dx}{dx} \alpha + \frac{dy}{dy} \beta + \frac{dz}{dz} \gamma \right) \right] \times$ $\left[\alpha \left(\frac{dx}{dx} \alpha + \frac{dy}{dy} \beta + \frac{dz}{dz} \gamma \right) + \beta \left(\frac{dx}{dx} \alpha + \frac{dy}{dy} \beta + \frac{dz}{dz} \gamma \right) + \gamma \left(\frac{dx}{dx} \alpha + \frac{dy}{dy} \beta + \frac{dz}{dz} \gamma \right) \right],$ $g_4 :$ $\alpha' = \rho \cos \psi \cos \varphi = \rho \cos r \cos s, \quad \beta' = \rho \cos \psi \sin \varphi = \rho \cos r \sin s, \quad \gamma' = \rho \sin \psi = \rho \sin r.$ $g_4 = V \delta V = \begin{cases} \alpha'^2 \left\{ \begin{aligned} &(u \sin^2 r - v \sin r \cos r) \delta u, \\ &(-u \sin r \cos r + v \cos^2 r) \delta v \end{aligned} \right\}, \\ \beta'^2 \left\{ \begin{aligned} &(u \cos^2 r \sin^2 s + v \sin r \cos r \sin^2 s + w \cos r \sin s \cos s) \delta u, \\ &(u \sin r \cos r \sin^2 s + v \sin^2 r \sin^2 s + w \sin r \sin s \cos s) \delta v, \\ &(u \cos r \sin s \cos s + v \sin r \sin s \cos s + w \cos^2 s) \delta w \end{aligned} \right\}, \\ \gamma'^2 \left\{ \begin{aligned} &(u \cos^2 r \cos^2 s + v \sin r \cos r \cos^2 s - w \cos r \sin s \cos s) \delta u, \\ &(u \sin r \cos r \cos^2 s + v \sin^2 r \cos^2 s - w \sin r \sin s \cos s) \delta v, \\ &(-u \cos r \sin s \cos s - v \sin r \sin s \cos s + w \sin^2 s) \delta w \end{aligned} \right\} \end{cases}$
4	Cauchy [5]	$g_3 = g_4 = \frac{\pi}{2} :$ $(44)_C \begin{cases} G = G(\cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1) \equiv GA_1, \\ L = L(\cos^4 \alpha_1 + \cos^4 \beta_1 + \cos^4 \gamma_1) \\ \quad + 6R(\cos^2 \beta_1 \cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_1 \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \beta_1) \equiv LB + 6RC, \\ R = R(\cos^2 \beta_1 \cos^2 \gamma_2 + \cos^2 \beta_2 \cos^2 \gamma_1 + \cos^2 \gamma_1 \cos^2 \alpha_2 \\ \quad + \cos^2 \gamma_2 \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \beta_2 \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \beta_1) \\ \quad + 4R(\cos \beta_1 \cos \beta_1 \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \\ \quad + \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 \cos \beta_1 \cos \beta_2) \\ \quad + L(\cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_1 \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_1 \cos^2 \gamma_2) \equiv RD + 4RE + LF \end{cases}$ where $\begin{cases} \cos^2 \alpha_1 + \cos^2 \beta_1 + \cos^2 \gamma_1 = 1, & \cos^2 \alpha_2 + \cos^2 \beta_2 + \cos^2 \gamma_2 = 1, \\ \cos \alpha_1 \cos \alpha_2 + \cos \beta_1 \cos \beta_2 + \cos \gamma_1 \cos \gamma_2 = 0 \end{cases}$ From (49) _C $G = \frac{\Delta}{2} \mathbf{S}[\pm r \cos^2 \alpha f(r)v]$, $R = \frac{\Delta}{2} \mathbf{S}[r \cos^2 \alpha \cos^2 \beta f(r)v]$ and (50) _C $\begin{cases} G = \pm \frac{\Delta}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^3 f(r) \cos^2 \alpha \sin p dr dq dp, \\ R = \frac{\Delta}{2} \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^3 f(r) \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \sin p dr dq dp \end{cases}$ $\begin{cases} S_1 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \alpha \cos^2 \beta \sin p dp = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 q dq \int_0^\pi \cos^2 p (1 - \cos^2 p) \sin p dp \\ \quad = \frac{1}{2} \pi \left(\frac{2}{3} - \frac{2}{5} \right) = \frac{2\pi}{15} \equiv C_3, \\ S_2 = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \alpha \sin p dq dp = \frac{1}{2} 2\pi \int_0^\pi \cos^2 p \sin p dp = \frac{2\pi}{3} \equiv C_4. \end{cases}$

Laplace, Cauchy, Poisson and Stokes succeeded its theoretical side. Stokes proposed his lemma as *the objections to Lagrange's proof of the theorem that if $udx + vdy + wdz$ is an exact differential at any one instant it is always so, the pressure being supposed equal in all directions* as follows :

Lemma (Stokes) If $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_n$ are n functions of t , which satisfy the n differential equations

$$\frac{d\omega_1}{dt} = P_1\omega_1 + Q_1\omega_2 + \dots + V_1\omega_n, \quad \dots, \quad \frac{d\omega_n}{dt} = P_n\omega_1 + Q_n\omega_2 + \dots + V_n\omega_n,$$

where P_1, Q_1, \dots, V_n may be functions of $t, \omega_1, \dots, \omega_n$, and if when $\omega_1 = 0, \omega_2 = 0, \dots, \omega_n = 0$, none of the quantities P_1, \dots, V_n is infinite for any value of t from 0 to T , and if $\omega_1, \dots, \omega_n$ are each zero when $t = 0$, then shall each of these quantities remain zero for all values of t from 0 to T .

TABLE 4. T_1 & T_2 : the tensors & equations by Poisson, Navier, Cauchy & Stokes in fluid

no	name	tensor & equations
1	Poisson fluid [26]	<p>· Poisson's tensor : $t_{ij} = -p\delta_{ij} + \lambda v_{k,k} \delta_{ij} + \mu(v_{i,j} + v_{j,i})$:</p> $\begin{bmatrix} U_1 & U_2 & U_3 \\ V_1 & V_2 & V_3 \\ W_1 & W_2 & W_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \epsilon \left(\frac{du}{dx} + \frac{dw}{dz} \right) & \epsilon \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dz} \right) & p - \alpha \frac{d\psi t}{dt} - \frac{\epsilon'}{\chi t} \frac{d\chi t}{dt} + 2c \frac{du}{dx} \\ \epsilon \left(\frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dz} \right) & p - \alpha \frac{d\psi t}{dt} - \frac{\epsilon'}{\chi t} \frac{d\chi t}{dt} + 2c \frac{dv}{dy} & \epsilon \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dz} \right) \\ p - \alpha \frac{d\psi t}{dt} - \frac{\epsilon'}{\chi t} \frac{d\chi t}{dt} + 2c \frac{dw}{dz} & \epsilon \left(\frac{dv}{dx} + \frac{dw}{dz} \right) & \epsilon \left(\frac{du}{dx} + \frac{dw}{dz} \right) \end{bmatrix},$ <p>($k + K$)$\alpha = \epsilon$, ($k - K$)$\alpha = \epsilon'$, $p = \psi t = K$, then $\epsilon + \epsilon' = 2k\alpha$.</p> <p>$\varpi \equiv -\alpha \frac{d\psi t}{dt} - \frac{\epsilon + \epsilon'}{\chi t} \frac{d\chi t}{dt}$.</p> <p>· Poisson's equations in incompressible fluid :</p> <p>If $\psi t (= \text{density})$, $\chi t (= \text{pressure}) \equiv \text{const.}$ and incompressible</p> $\Rightarrow (9)_{Pf} \begin{cases} \rho(X - \frac{d^2x}{dt^2}) = \frac{d\varpi}{dx} + \epsilon \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2} \right) = 0, \\ \rho(Y - \frac{d^2y}{dt^2}) = \frac{d\varpi}{dy} + \epsilon \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2} \right) = 0, \\ \rho(Z - \frac{d^2z}{dt^2}) = \frac{d\varpi}{dz} + \epsilon \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2} \right) = 0. \end{cases}$ <p>i.e. $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \frac{\epsilon}{\rho} \Delta \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla \varpi = \mathbf{f}$</p> <p>· Coincidence with Stokes' equations : by $\varpi = p + \frac{2}{3}(K + k) \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right)$</p> <p>$\Rightarrow \nabla \varpi = \nabla p + \frac{2}{3} \nabla \cdot (\nabla \cdot \mathbf{u})$, (9)$_{Pf} \cong$ (12)$_S$ of Stokes.</p>
2	Navier incomp. fluid [23]	<p>· Navier's tensor : $t_{ij} = -\epsilon(\delta_{ij} u_{kk} + u_{ji} + u_{ij})$</p> <p>· Navier's equations :</p> $\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = X + \epsilon \left(3 \frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2} + 2 \frac{d^2v}{dx dy} + 2 \frac{d^2w}{dx dz} \right) - \frac{du}{dt} - \frac{du}{dx} \cdot u - \frac{du}{dy} \cdot v - \frac{du}{dz} \cdot w ; \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dy} = Y + \epsilon \left(\frac{d^2u}{dx^2} + 3 \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2} + 2 \frac{d^2u}{dx dy} + 2 \frac{d^2w}{dy dz} \right) - \frac{dv}{dt} - \frac{dv}{dx} \cdot u - \frac{dv}{dy} \cdot v - \frac{dv}{dz} \cdot w ; \\ \frac{1}{\rho} \frac{dp}{dz} = Z + \epsilon \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + 3 \frac{d^2w}{dz^2} + 2 \frac{d^2u}{dx dz} + 2 \frac{d^2v}{dy dz} \right) - \frac{dw}{dt} - \frac{dw}{dx} \cdot u - \frac{dw}{dy} \cdot v - \frac{dw}{dz} \cdot w ; \end{cases}$ <p>i.e. $\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} - \epsilon \Delta \mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + \frac{1}{\rho} \nabla p = \mathbf{f}$, $\text{div } \mathbf{u} = 0$</p> <p>· Equations with ϵ and E :</p> $0 = \iiint dx dy dz \begin{cases} \left[P - \frac{dp}{dx} - \rho \left(\frac{du}{dt} + u \frac{du}{dx} + v \frac{du}{dy} + w \frac{du}{dz} \right) \right] \delta u \\ \left[Q - \frac{dp}{dy} - \rho \left(\frac{dv}{dt} + u \frac{dv}{dx} + v \frac{dv}{dy} + w \frac{dv}{dz} \right) \right] \delta v \\ \left[R - \frac{dp}{dz} - \rho \left(\frac{dw}{dt} + u \frac{dw}{dx} + v \frac{dw}{dy} + w \frac{dw}{dz} \right) \right] \delta w \\ 3 \frac{du}{dx} \frac{\delta du}{dx} + \frac{du}{dy} \frac{\delta du}{dy} + \frac{du}{dz} \frac{\delta du}{dz} + \frac{dv}{dy} \frac{\delta du}{dx} + \frac{dv}{dx} \frac{\delta du}{dy} + \frac{dw}{dx} \frac{\delta du}{dz} + \frac{dw}{dy} \frac{\delta du}{dx} + \frac{dw}{dz} \frac{\delta du}{dy} \\ \frac{du}{dx} \frac{\delta dv}{dy} + \frac{du}{dy} \frac{\delta dv}{dx} + \frac{dv}{dx} \frac{\delta dv}{dx} + 3 \frac{dv}{dy} \frac{\delta dv}{dy} + \frac{dv}{dz} \frac{\delta dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \frac{\delta dv}{dx} + \frac{dw}{dz} \frac{\delta dv}{dy} \\ \frac{du}{dx} \frac{\delta dw}{dz} + \frac{du}{dy} \frac{\delta dw}{dx} + \frac{dv}{dy} \frac{\delta dw}{dz} + \frac{dv}{dz} \frac{\delta dw}{dy} + \frac{dw}{dx} \frac{\delta dw}{dx} + \frac{dw}{dy} \frac{\delta dw}{dy} + 3 \frac{dw}{dz} \frac{\delta dw}{dz} \end{cases}$ <p>+ $S ds^2 E(u\delta u + v\delta v + w\delta w)$.</p>
3	Stokes fluid [31]	<p>· Stokes' tensor : $t_{ij} = \{p - 2\mu(v_{k,k} - \delta) + \gamma\} \delta_{ij} - \gamma$, $3\delta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$, $\gamma = \mu(v_{i,j} + v_{j,i})$</p> <p>i.e.</p> $\begin{bmatrix} P_1 & T_3 & T_2 \\ T_3 & P_2 & T_1 \\ T_2 & T_1 & P_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p - 2\mu \left(\frac{du}{dx} - \delta \right) & -\mu \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) & -\mu \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) \\ -\mu \left(\frac{du}{dy} + \frac{dv}{dx} \right) & p - 2\mu \left(\frac{dv}{dy} - \delta \right) & -\mu \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) \\ -\mu \left(\frac{dw}{dx} + \frac{du}{dz} \right) & -\mu \left(\frac{dv}{dz} + \frac{dw}{dy} \right) & p - 2\mu \left(\frac{dw}{dz} - \delta \right) \end{bmatrix},$ <p>where $3\delta = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz}$.</p> <p>· Stokes' equations with μ :</p> $(12)_S \begin{cases} \rho \left(\frac{Dv}{Dt} - X \right) + \frac{dp}{dx} - \mu \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2} \right) - \frac{\mu}{3} \frac{d}{dx} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0, \\ \rho \left(\frac{Dv}{Dt} - Y \right) + \frac{dp}{dy} - \mu \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2} \right) - \frac{\mu}{3} \frac{d}{dy} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0, \\ \rho \left(\frac{Dv}{Dt} - Z \right) + \frac{dp}{dz} - \mu \left(\frac{d^2u}{dx^2} + \frac{d^2v}{dy^2} + \frac{d^2w}{dz^2} \right) - \frac{\mu}{3} \frac{d}{dz} \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dy} + \frac{dw}{dz} \right) = 0. \end{cases}$ <p>i.e. $\rho \left(\frac{D\mathbf{u}}{Dt} - \mathbf{f} \right) + \nabla p - \mu \left(\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{3} \nabla (\nabla \cdot \mathbf{u}) \right) = 0$</p> <p>i.e.</p> $\begin{cases} \rho \left(\frac{Dv}{Dt} - X \right) + \frac{dp}{dx} - \frac{\mu}{3} \left(4 \frac{d^2u}{dx^2} + 3 \frac{d^2v}{dy^2} + 3 \frac{d^2w}{dz^2} + \frac{d^2v}{dx dy} + \frac{d^2w}{dx dz} \right) = 0, \\ \rho \left(\frac{Dv}{Dt} - Y \right) + \frac{dp}{dy} - \frac{\mu}{3} \left(3 \frac{d^2u}{dx^2} + 4 \frac{d^2v}{dy^2} + 3 \frac{d^2w}{dz^2} + \frac{d^2u}{dx dy} + \frac{d^2w}{dy dz} \right) = 0, \\ \rho \left(\frac{Dv}{Dt} - Z \right) + \frac{dp}{dz} - \frac{\mu}{3} \left(3 \frac{d^2u}{dx^2} + 3 \frac{d^2v}{dy^2} + 4 \frac{d^2w}{dz^2} + \frac{d^2u}{dx dz} + \frac{d^2v}{dy dz} \right) = 0, \end{cases}$

From the geometrical point of view, Gauss and Riemann applied it. Moreover Helmholtz and W.Thomson applied it to the theory of vorticity. To Helmholtz's vorticity equation, Bertrand criticized but Saint-Venant sided. We show it from the historical view of fluid mechanics according to Table 5.

REFERENCES

- [1] M.J.Bertrand, *Théorème relatif au mouvement le plus général d'un fluides*, Académie des Sciences, *Compte-rendus hebdomadaires des séances*, **66**(1868) 1227-1230.
- [2] M.J.Bertrand, *Note relative à la théorie des fluides. Réponse à la communication de M.Helmholtz*, Académie des Sciences, *Compte-rendus hebdomadaires des séances*, **67**(1868) 267-269.
- [3] M.J.Bertrand, *Observation nouvelles sur un Mémorial de M.Helmholtz*, Académie des Sciences, *Compte-rendus hebdomadaires des séances*, **67**(1868) 469-472.
- [4] M.J.Bertrand, *Réponse à la note de M.Helmholtz*, Académie des Sciences, *Compte-rendus hebdomadaires des séances*, **67**(1868) 773-775.
- [5] A.L.Cauchy, *Sur l'équilibre et le mouvement d'un système de points matériels sollicités par des forces d'attraction ou de répulsion mutuelle*, *Exercices de Mathématique*, **3**(1828); (*Œuvres complètes D'Augustin Cauchy* (Ser. 2) **8**(1890), 227-252.
- [6] A.L.Cauchy, *Mémoire sur la Théorie des Ondes*, 1815, *Savants étrangers*, **1**(1827), 1 partie §§3,4 et 2 partie §§4,5. (Remark : although according to Stokes[31] and Saint-Venant[30], we can not get these papers so far.)
- [7] A.C.Clairaut, *Théorie de la figure de la terre, tirée des principes de l'hydrostatique*, Paris, 1743, second ed. 1808.

TABLE 5. Theories, applications and discussions about an exact differentiability of $udx + vdy + wdz$ for the fluid mechanics

no	name	read-published	cf.	statement of key word	application	discussion
1	Clairaut	1741-43,1808	[7, p.37]	$Pdy + Qdx$		
2	D'Alembert	1749-52	[8]	$(u - iv)(dx + idy) = d(\varphi + i\psi)$		
3	Euler	1752-55	[13, p.97,127]	$dp = Ldx + Mdy + Ndz$		
4	D'Alembert	1761	[9, p.138]	$pdz + qdx, pdx - qdz$		
5	Maupertuis	1768	[20]			
6	Lagrange	1781-1869	[17, p.701]	$d\Pi = \Delta(udx + vdy + wdz)$		
7	Laplace	1806/07-29	[18, p.95]	$P\delta x + Q\delta y + R\delta z$		
8	Cauchy	1815-27	[6]			
9	Navier	1822-27	[23, p.396]	$dp = Pdx + Qdy + Rdz$		
10	Gauss	1828	[14, p.223]	$dW = Pdx + Qdy + Rdz$	curvature in the capillary	
11	Poisson	1829-31	[26, p.174]	$udx + vdy + wdz$		
12	Power	1842-42	[28, p.454,460]	$udx + vdy + wdz$		
13	Stokes	1845-49	[31, p.111]	$\omega' = \frac{1}{2}(\frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz})$, &		
14	Green	1850	[15, p.82]	$Xdx + Ydy + Zdz$	electricity & magnetism	
15	Riemann	1857	[27, p.105]	$Xdx + Ydy$	topology	
16	Helmholtz	1858	[16, p.31]	$\begin{cases} \frac{dv}{dy} - \frac{dw}{dz} = 2\xi, \frac{dw}{dz} - \frac{du}{dx} = 2\eta, \\ \frac{du}{dy} - \frac{dv}{dx} = 2\zeta. \end{cases}$	vorticity equation	
17	Thomson	1867-69	[32, p.17]	$udx + vdy + wdz$	vortex motion	
18	Bertrand	1868	[1, 2, 3, 4]			criticize Helmholtz'
19	Saint-Venant	1868	[30]			side to Helmholtz'
20	Leray	1934	[19, p.385]		Navier's system	

- [8] D'Alembert, *Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides*, Paris, 1752. Reprint 1996.
- [9] D'Alembert, *Remarques sur les Loix du mouvement des fluides*, Opuscles mathématiques, Tome 1 137-168. → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k62349p>
- [10] O.Darrigol, *Between hydrodynamics and elasticity theory : the first five births of the Navier-Stokes equation*, Arch. Hist. Exact Sci., **56**(2002), 95-150.
- [11] O.Darrigol, *Worlds of flow : a history of hydrodynamics from the Bernoullis to Prandtl*, Oxford Univ. Press, 2005.
- [12] L.Euler, *Principia motus fluidorum*, Mémoires de l'Académie des Science, Berlin, **6**(1756/7), 1761, Leonhardi Euleri Opera Omnia. Edited by C.Truesdell III : Commentationes Mechanicae. Volumen prius, **2-12**(1954), 133-168. (Latin)
- [13] L.Euler, *Sectio secunda de principiis motus fluidorum*, E.396. (1752-1755), Acta Academiae Imperialis Scientiarum Petropolitensis, **6**(1756-1757), 271-311(1761). Leonhardi Euleri Opera Omnia. Edited by C.Truesdell III : Commentationes Mechanicae. Volumen posterius, **2-13**(1955) 1-72, 73-153. (Latin)
- [14] C.F.Gauss, *Disquisitiones generales circa superficies curvas*, Gottingac, 1828, *Carl Friedrich Gauss Werke VI*, Göttingen, 1867. (We can see today in : "Carl Friedrich Gauss Werke VI", Georg Olms Verlag, Hildesheim, New York, 1973, 219-258. Also, *Anzeigen eigner Abhandlungen, Göttingische gelehrte Anzeigen*, 1927, "Werke VI", 341-347.) (Latin)
- [15] G.Green, *An essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism*, J. Reine Angew. Mat., **39**(1850) 73-89 (Also we can see : Edited by N.M.Ferrers, *Mathematical Papers of the late George Green, Fellow of Gonville and Caius College, Cambridge*, Macmillan, 1871.)
- [16] H.v.Helmholtz, *Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen*, J. Reine Angew. Math., **55**(1858) 25-55.
- [17] J.L.Lagrange, *Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides*, (Œuvres de Lagrange publiées par les soins de M.J.-A. Serret, Vol. 4 1869, 695-748. (Lu : 22/nov/1781.)
- [18] P.S.Laplace, *Equilibrium of fluid*, Celestial Mechanics, translated by N. Bowditch, Vol. I §4 90-95.
- [19] J.Leray, *Essai sur les mouvements plan d'un liquide visqueux que limitent des parois*, J.Math.Pures Appl., **13**(1934), 331-418.
- [20] T.G.Maupertuis, *Oeuvres : avec l'Examen philosophique de la preuve de l'existence de Dieu employée dans l'essai de cosmologie*, G. Olms. (Reprint) 1965-74.
- [21] C.L.M.H.Navier, *Sur les lois du mouvement des fluides, en ayant égard à l'adhésion des molécules*, Ann. chimie phys., **19**(1822), 244-260.
- [22] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques*, Mémoires de l'Académie des Science de l'Institut de France, **7**(1827), 375-393. (Lu : 14/mai/1821.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k32227>, 375-393.
- [23] C.L.M.H.Navier, *Mémoire sur les lois du mouvement des fluides*, Mémoires de l'Académie des Science de l'Institut de France, **6**(1827), 389-440. (Lu : 18/mar/1822.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3221x>, 389-440.
- [24] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre et le Mouvement des Corps élastiques*, Mémoires de l'Académie royale des Sciences, **8**(1829), 357-570, 623-27. (Lu : 14/apr/1828.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3223j>
- [25] S.D.Poisson, *Mémoire sur l'Équilibre des fluides*, Mémoires de l'Académie royale des Sciences, **9**(1830), 1-88. (Lu : 24/nov/1828.) → <http://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k3224v>, 1-88.
- [26] S.D.Poisson, *Mémoire sur les équations générales de l'équilibre et du mouvement des corps solides élastiques et des fluides*, (1829), J. École Polytech., **13**(1831), 1-174. (Lu : 12/oct/1829.)
- [27] B.Riemann, *Lehrsätze aus der analysis situs für die Theorie der Integrale von zweigliedrigen vollständigen Differentialien*, J. Reine Angew. Math., **55**(1857) 105-110.
- [28] J.Power, *On the truth of the hydrodynamical theorem, that if $udx + vdy + wdz$ be a complete differential with respect to x, y, z , at any instant, it is always so*, Cambridge Philosophical Transactions, **7**(1842), (Part 3), 464-464.
- [29] O.Reynolds, *An experimental investigation of the circumstances which determine whether motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels*, Phil. Trans. Roy. Soc., **174**(1883), 935-982, also Osborne Reynolds, *Papers on mechanical physical subjects*, 3 vols(1900-1903), Scientific Papers, **2**, 51-105.
- [30] A.B. de Saint-Venant, *Note complémentaire sur le problème des mouvements que peuvent prendre les divers points d'un solide ductile ou d'un liquide contenue dans un vase, pendant son écoulement par un orifice inférieur*, Académie des Sciences, *Compte-rendus hebdomadaires des séances*, **67**(1868) 278-282.
- [31] G.G.Stokes, *On the theories of the internal friction of fluids in motion, and of the equilibrium and motion of elastic solids*, 1845, (From the *Transactions of the Cambridge Philosophical Society* Vol. VIII. p.287), Johnson Reprint Corporation, New York and London, 1966, 75-129.
- [32] W.Thomson, *On vortex motion*, Mathematical and physical papers (From the *Transactions of the Royal Society of Edinburgh* **25**(1869) 217-260, Read 29/apr/1867), Cambridge : at the univ press **6**(1910) 13-66.

クイバーの表現型の非可換代数幾何学的特徴付け

源 泰幸 (京大理) minamoto@kusm.kyoto-u.ac.jp.

♡ 非可換代数幾何学って？

非可換代数幾何学という分野には幾つかの流派がある様ですが、そこでの主流な研究姿勢のひとつは、「ある性質を満たすアーベル圏を何らかの空間 X 上の (準) 連接層の圏とみなして研究しよう。」というものです。

その拠り所となるのは次の定理です。

定理 1 (Gabriel, Rosenberg). 任意のスキーム X はその準連接層の圏 $\mathrm{Qcoh}(X)$ から同型をのぞいて一意的に復元される。

この定理によれば、可換環 R とスキーム X に対して

$$\mathrm{Mod} R \simeq \mathrm{Qcoh}(X)$$

であれば

$$X \simeq \mathrm{Spec} R$$

となります。

非可換環 R に対してはアフィンスキーム $\mathrm{Spec} R$ は、今のところ、定義されてるわけではありませんが、定義されたあかつきには

$$\mathrm{Mod} R \simeq \mathrm{Qcoh}(\mathrm{Spec} R)$$

であろうと予想されるわけです。

この様にある種のアーベル圏 \mathcal{C} は何らかの環付き空間 (か、それに類するもの) X が存在して

$$\mathcal{C} \simeq \mathrm{Qcoh}(X)$$

となっているだろうと考える訳です。

この路線では連接層の圏と構造層 \mathcal{O}_X の組 $(\mathrm{Qcoh}(X), \mathcal{O}_X)$ をモデルとして、アーベル圏 \mathcal{C} とその対象 $\mathcal{O} \in \mathcal{C}$ の組 $(\mathcal{C}, \mathcal{O})$ が準スキーム (quasi-scheme) と呼ばれ研究されています。

「"アーベル" 圏を扱ってるのになんで "非可換" 幾何って名乗るんだっ!?" ってインネンをつけられるから、という訳ではないんですが、導来圏の研究が盛んなこともあって、「ある種の三角圏 \mathcal{T} を空間 X 上の準連接層の導来圏 $D(\mathrm{Qcoh}(X))$ とみなそう」って思想も流行しています。

(最近、Toën、Tabuada らにより DG 圏のなす圏のホモトピー理論が研究され目覚ましい成果を上げています (例えば [To])。そこからすると三角圏よりも DG 圏を空間とみなすのがリーズナブルと思えます。)

♣ 非可換射影幾何学とは、、、

非可換射影幾何学は近年盛んに研究されています ([AZ, SvB])。その出発点となるのは次の定理です。

定理 2 (Serre). R を有限個の次数 1 の元で k 上生成されている k 上の連結な可換次数環とし、 X を通常の R の射影的スキーム $\mathrm{proj} R$ とする。有限生成次数 R 加群の圏を $\mathrm{gr} R$ 、 k 上有限次元な次数 R 加群の圏を $\mathrm{tor} R$ と書く。そして次の様に定める。

$$\mathrm{qgr} R := \mathrm{gr} R / \mathrm{tor} R$$

このとき、次の関手は圏同値を与える。

$$\begin{aligned}\bar{\Gamma}_* &: \text{coh } X \xrightarrow{\sim} \text{qgr } R, \\ \bar{\Gamma}_*(\mathcal{F}) &:= \bigoplus_{n \geq 0} H^0(X, \mathcal{F}(n)) \text{ mod tor } R\end{aligned}$$

上の圏同値の右辺 $\text{qgr } R$ の定義には R の可換性を用いていない事がポイントです。そこで（可換とは限らない）次数環 R に対しても同様にアーベル圏 $\text{qgr } R$ を対応させます。

定義 3. k を体、 A を k 上の有限次元代数とする。 A 上の連結な連接的次数環 R に対して連接的次数右 R 加群の圏を $\text{gr } R$ 、 k 上有限次元な次数右 R 加群の圏を $\text{tor } R$ と書く。そして次の様に定める。

$$\text{qgr } R := \text{gr } R / \text{tor } R$$

これを（未定義な）非可換射影的スキーム $\text{proj } R$ 上の接続層の圏と見做します。

注意 3.1. 1. 上の定義においては有限次元代数 A 上の次数環を考えましたが、これは今回の研究で初めて必要になったものです。普通は体 k 上の次数環を考えます。

2. 上の定義においては R を連接的と仮定しましたが、非可換射影幾何学において主に研究されているのは更に強く R にネーター性を仮定した場合です。しかし、A.Connes 流の非可換幾何学との関係をつけるためには連接的な場合にまで考察を広げる事が不可欠なのだそうです。([Po] 参照) ■

代数多様体 X とその上の直線束 \mathcal{L} が与えられた時の三つ組 $(\text{coh } X, \mathcal{O}_X, - \otimes_X \mathcal{L})$ をモデルとして次の様に三つ組 $(\mathcal{E}, \mathcal{O}, s)$ を定義します。（これを「準射影的スキーム」と呼ぶと混乱するので、ここでは「三つ組」と呼ぶことにします。）

k を体、 A を k 上の有限次元代数とします。 A 線形圏 \mathcal{E} と $\text{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}, \mathcal{O}) \cong A$ を満たす対象 $\mathcal{O} \in \mathcal{E}$ とその自己同値 $s: \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ の三つ組 $(\mathcal{E}, \mathcal{O}, s)$ を考えます。 $\mathcal{F} \in \mathcal{E}$ に対して $\mathcal{F}(n) := s^n(\mathcal{F})$ と記すことにします。そして

$$\Gamma_*(\mathcal{F}) := \bigoplus_{n \geq 0} \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}, \mathcal{F}(n)), \quad \Gamma_n(\mathcal{F}) := \text{Hom}_{\mathcal{E}}(\mathcal{O}, \mathcal{F}(n))$$

と定めます。そして、特に次の様に定めます。

$$R := \Gamma_*(\mathcal{E}, \mathcal{O}, s) := \Gamma_*(\mathcal{O}), \quad R_n := \Gamma_n(\mathcal{O})$$

$x \in \Gamma_l(\mathcal{F}), b \in R_m, a \in R_n$ に対して

$$x \cdot a := s^n(x) \circ a \quad a \cdot b := s^m(a) \circ b.$$

と定めると R は A 上連結な次数環になり $\Gamma_*(\mathcal{F})$ は次数右 R 加群になります。

（通常の）射影幾何学では豊富性の概念が大切でした。三つ組み $(\mathcal{E}, \mathcal{O}, s)$ が与えられたとき、（通常の）豊富性を抽象化することにより (\mathcal{O}, s) の組に対しても豊富性が定義されます。定義は省略しますが、次の定理が基本的です。

定理 4 (Artin-Zhang, Polishchuk). 三つ組 $(\mathcal{E}, \mathcal{O}, s)$ があって (\mathcal{O}, s) が豊富であるとする。このとき、 R は連接的であり、 $\Gamma_*(\mathcal{F})$ は連接的右次数 R 加群となる。そして関手を次の様に定めると

$$\bar{\Gamma}_*: \mathcal{E} \rightarrow \text{qgr } R, \bar{\Gamma}_*(\mathcal{F}) := \Gamma_*(\mathcal{F}) \text{ mod tor } R$$

これは三つ組 $(\mathcal{E}, \mathcal{O}, s)$ と $(\text{qgr } R, \bar{R}, (1))$ との同値を与える。すなわち、 $\bar{\Gamma}_*$ は圏同値であり $\bar{\Gamma}_*(\mathcal{O}) \cong \bar{R}$ と $\bar{\Gamma}_* \circ s = (1) \circ \bar{\Gamma}_*$ とが成り立つ。

例 5 ([SvB]). 射影直線 \mathbb{P}^1 の自己同型 $\sigma : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1, [a : b] \mapsto [b : -a]$ を考えて $s = \sigma_*(- \otimes_{\mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}(1))$ とおきます。すると s は三つ組 $(\text{coh}(\mathbb{P}^1), \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, s)$ 上で豊富になります。またこの三つ組から決まる次数環は次のようになります。

$$\Gamma_*(\mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, s) \cong \frac{k\langle X_1, X_2 \rangle}{(X_1^2 + X_2^2)}$$

故に定理 4 により三つ組 $(\text{coh} \mathbb{P}^1, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1}, s)$ と $\text{proj} \left(\frac{k\langle X_1, X_2 \rangle}{(X_1^2 + X_2^2)} \right)$ とは同値になります。特に次の圏同値がなりたちます。

$$\bar{\Gamma}_* : \text{coh} \mathbb{P}^1 \xrightarrow{\sim} \text{qgr} \left(\frac{k\langle X_1, X_2 \rangle}{(X_1^2 + X_2^2)} \right).$$

◇ 導来圏を介した道代数と非可換射影幾何学の関係。

代数多様体上の接続層の導来圏は近年盛んに研究されています。その出発点の一つである次の Beilinson の定理 ([Be]) は、圏を仲介として幾何と代数の関係を調べる という非可換代数幾何の思想からも重要です。

定理 6 (Beilinson). n 次元射影空間 \mathbb{P}^n に対してある有限次元代数 B_n が存在して、次の自然な三角圏の同値が存在する。

$$D^b(\text{mod-}B_n) \xrightarrow{\sim} D^b(\text{coh} \mathbb{P}^n)$$

定理 6 の有限次元代数 B_n は Beilinson クイバーの道代数として具体的に得られます。Beilinson クイバーは次の様な関係式付きのクイバーです。

$$\text{クイバー} : 0 \begin{array}{c} \xrightarrow{x_1^{(0)}} \\ \xrightarrow{x_{n+1}^{(0)}} \end{array} 1 \begin{array}{c} \xrightarrow{x_1^{(1)}} \\ \xrightarrow{x_{n+1}^{(1)}} \end{array} 2 \begin{array}{c} \xrightarrow{x_1^{(2)}} \\ \xrightarrow{x_{n+1}^{(2)}} \end{array} \cdots \begin{array}{c} \xrightarrow{x_1^{(n-2)}} \\ \xrightarrow{x_{n+1}^{(n-2)}} \end{array} n-1 \begin{array}{c} \xrightarrow{x_1^{(n-1)}} \\ \xrightarrow{x_{n+1}^{(n-1)}} \end{array} n$$

$$\text{関係式} : x_i^{(l+1)} x_j^{(l)} = x_j^{(l+1)} x_i^{(l)} \quad \text{for } i, j \in \{1, \dots, n\} \text{ and } l = 0, \dots, n-2.$$

$n = 1$ の時には Beilinson クイバーは Kronecker クイバー $\Omega : \circ \rightrightarrows \circ$ になっていて、その道代数 B_1 は次の様に行列型にも表示できます。

$$B_1 = \begin{pmatrix} k & V \\ 0 & k \end{pmatrix}$$

ここで V は 2 次元ベクトル空間です。

定理 6 は拡張され、代数多様体 X に対してある有限次元代数 A が存在して自然な三角圏の同値

$$D^b(\text{mod-}A) \xrightarrow{\sim} D^b(\text{coh } X)$$

が存在する、というカタチの定理はいろいろとあります。

では、さて、「ある有限次元代数 A が与えられたときに対応する代数多様体 X は存在するのか？」という疑問が湧いて来ます。

今回の主結果は、ある種のクイバーの道代数には対応する (非可換ではあるけれども) 射影多様体が存在するという事を主張するものです。

以下、少しだけ用語の説明です。

クイバー Q の道代数 $A = kQ$ といえば k 上有限次元なもの考える事にします。道代数が有限生成直既約加群 (= 直和分解できない加群) を有限個しか持たないとき、 Q は有限表現型と呼ばれ、そうでないときは無限表現型と呼ばれます。有限表現型の道代数については次が有名です。

定理 7 (Gabriel).

$$Q \text{ は有限表現型} \iff Q \text{ の下部グラフは ADE 図形}$$

裏を返せば、大概の道代数は無有限表現型になっているといえます。
主定理は次です。

主定理 8. クイバー Q は道代数 kQ が有限次元であり無限表現型とする。 $\Pi(Q)$ を *preprojective algebra* とする。このとき次の自然な三角圏の同値が存在する。

$$D^b(\text{mod-}kQ) \xrightarrow{\sim} D^b(\text{qgr } \Pi(Q))$$

注意 8.1. 1. 主定理の証明には定理 4 を用います。大まかに言えば、Serre 関手 S の -1 シフトの逆関手が豊富であることを示し、それを根拠に主張を証明します。

2. 手法は全く異なりますが、[Le] の中でこの定理は実質的には Lenzing さんによって示されていました。

3. この原稿を書いている現在、主定理の証明を書いたものはありません。しかし、その元となった定理が [Mi] に載っています。興味を持たれた方はご覧になって下さい。 ■

Q が Kronecker クイバー $\Omega : \circ \rightrightarrows \circ$ の場合には、圏同値

$$\text{qgr } \Pi(\Omega) \xrightarrow{\text{圏同値}} \text{qgr} \left(\frac{k\langle X_1, X_2 \rangle}{(X_1^2 + X_2^2)} \right) \xrightarrow{\text{例 5 の圏同値}} \text{coh } \mathbb{P}^1$$

が成り立ちます。この圏同値によって、主定理 8 の三角同値は先の Beilinson の定理によって与えられる三角同値

$$D^b(\text{mod-}B_1) \xrightarrow{\sim} D^b(\text{coh } \mathbb{P}^1)$$

になります。

◆ クイバーの表現型の非可換代数幾何学的特徴付け。

三角圏 \mathcal{T} は Serre 関手 S を持ちある自然数 m, n に対し $S^m \cong [n]$ を満たすとき分数次元 Calabi-Yau 圏と呼ばれます。例としては、宮地-Yekutieli による導来 Picard 群の結果 ([MY]) から、有限表現型の道代数 kQ の導来圏 $D^b(\text{mod-}kQ)$ は Calabi-Yau 圏であるということが分かります。Calabi-Yau 圏の定義は、もちろん、Calabi-Yau 多様体の導来圏の性質を抽象化したものですが、冒頭に述べた「非可換幾何学の対象として三角圏を考察する」という精神から出てきたものでしょう。同じ精神からすれば、Serre 関手のシフトの逆関手 ρ が豊富であることから、無限表現型の道代数 kQ の導来圏 $D^b(\text{mod-}kQ)$ を **Fano** と呼んでも良いと思われます。

以上から、クイバーの表現型の非可換代数幾何学的特徴付けが得られます。

系 9. Q を道代数 kQ が k 上有限次元なクイバーとする。このとき

$$Q \text{ は有限表現型} \iff D^b(\text{mod-}kQ) \text{ は Calabi-Yau}$$

$$Q \text{ は無限表現型} \iff D^b(\text{mod-}kQ) \text{ は Fano}$$

⊗ おまけ：Fano な曲線は沢山ある !?

代数幾何学では有史以来代数曲線 (=滑らかな 1 次元射影的代数多様体) は詳しく研究されて来ました。

大まかな曲線の分類を述べると以下のようになります。標準束 ω_X が豊富な曲線は沢山あります。位相的には二人以上の乗れる浮き輪であり、さらにそれに代数構造を入れる自由度があってかなり沢山あると言え

ます。標準束 ω_X が自明な曲線つまり Calabi-Yau な曲線は楕円曲線とよばれますが、これは位相的には一
種類、トーラスだけなんです。代数構造の変形が j 不変量の方もあります。つまり少なくとも非加算無
限個あります。しかし、標準束 ω_X の逆が豊富な曲線つまり Fano な曲線は射影直線 \mathbb{P}^1 だけしかありませ
ん。位相的には球面であって、それに入れる代数構造も同型を除いて一種類のみです。他の二種に比べると
Fano な曲線だけ一人ぼっちなんです。

しかし、しかし、主定理に出てきた非可換射影的スキーム $\text{qgr } \Pi$ は、実は、大局次元 1 のアーベル圏に
なっています。そうだから $\text{qgr } \Pi$ は " 曲線 " であるといっているでしょう。つまり、可換の世界だと Fano
曲線は一つしか無いんですが、果敢に非可換の世界に飛込むと Fano な曲線も沢山存在するという訳です。

参考文献

- [AZ] M. Artin, and J.J. Zhang, Noncommutative projective schemes, *Advances in Math.* **109** (1994), pp. 228-287.
- [Be] A.A. Beilinson, Coherent sheaves on \mathbb{P}^n and problems of linear algebras, *Func. Anal. Appl.* **12** (1978), pp. 214-216.
- [Le] H. Lenzing, Curve singularities arising from the representation theory of tame hereditary algebras, *Representation theory, I* (Ottawa, Ont., 1984), 199–231, LNM., 1177, Springer, Berlin, 1986.
- [Mi] H. Minamoto, A noncommutative version of Beilinson's Theorem, [math/0702861](https://arxiv.org/abs/math/0702861)
- [MY] J. Miyachi, and A. Yekutieli, Derived Picard groups of finite dimensional hereditary algebras, *Compositio Math.* **129** (2001), no. 3, pp. 341-368.
- [Po] A. Polishchuk, Noncommutative proj and coherent algebras, *Math. Res. Lett.*, **12** (2005), 1, pp. 63-74.
- [SvB] J.T. Stafford, and M. Van den Bergh, Noncommutative curves and noncommutative surfaces, *Bull. AMS* **38** (2001), pp. 171-216.
- [To] B. Toën, The homotopy theory of dg-categories and derived Morita theory, *Inventiones math.*, **167**(2007), pp. 615-667

On the boundary of the moduli space of log Hodge structure

巴山 竜来*

1 Introduction

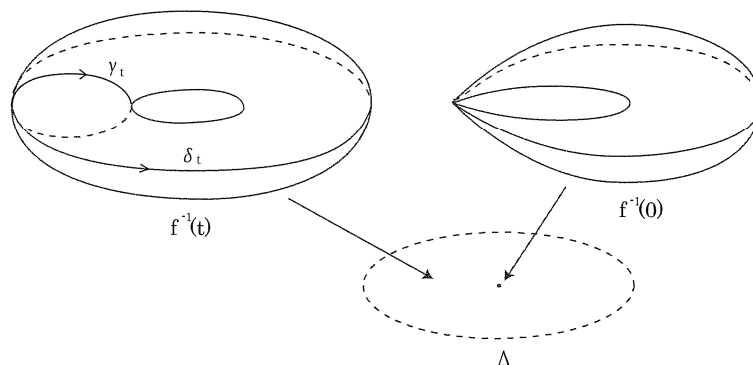
例えば 0 で半安定退化するような単位円盤 Δ 上の楕円曲線の族 $f: E \rightarrow \Delta$ が与えられたとする. このとき $t \neq 0$ 上のファイバー $f^{-1}(t)$ に対して, そのサイクル γ_t, δ_t 上での 1 次微分形式 ω_t の積分値をとることに
より, 穴あき円盤 Δ^* から上半平面 \mathcal{H}_1 への写像

$$\Delta^* \rightarrow \mathcal{H}_1 \quad ; t \rightarrow \int_{\gamma_t} \omega_t / \int_{\delta_t} \omega_t \quad (\gamma_t \cdot \delta_t = 1)$$

が定まる. $t \in \Delta^*$ が 0 のまわりを一周することによりサイクルが変わってしまうため, この写像は多価である (モノドロミー作用). これは上半平面に一次分数変換により作用していて, そのモノドロミー群を Γ とすれば, 一価の正則写像 $\varphi: \Delta^* \rightarrow \Gamma \backslash \mathcal{H}_1$ が得られる. とくに今の場合, このモノドロミー作用素はベキ単であり, $\Gamma \backslash \mathcal{H}_1 \cong \Delta^*$ である.

ここで自然な発想として, $\Gamma \backslash \mathcal{H}_1 \cong \Delta^*$ に 0 を付け加えることにより, φ を原点まで拡張させたい. トーリック多様体の理論を使えば, \mathbb{C}^* を \mathbb{C} に錘を使って埋め込むことができ, その中での Δ^* の閉包の内部をとることで Δ^* の自然な拡張 Δ が得られる [♣]. しかし原点上では $f^{-1}(t)$ のサイクルがつぶれてしまうため, サイクル上の積分による写像は定義されない. Δ に log 構造を与え, それに付随する Δ^{\log} 上で消失サイクルを回復させ, φ の原点への延長を考える, というのが加藤和也・白井三平によるアイデアである.

以上の例は一般の代数多様体の場合に拡張することができる. サイクル上の積分, 上半平面, 写像 φ はそれぞれ一般に周期積分, 周期領域, 周期写像と呼ばれる. 私の研究対象は一般の周期領域の場合における $(\Gamma \backslash \mathcal{H}_1) \sqcup \{0\}$ に当たるもので, それは log Hodge 理論の観点からは, ‘偏極 log Hodge 構造のモジュライ空間’である. 簡単に言ってしまうと, 周期領域が対称領域の場合は易しく, 非対称領域の場合は難しい¹. 対称領域の場合は上の例における [♣] と同様の操作によってそれは得られるが, 一般の場合にはもっと複雑である.



*大阪大学大学院理学研究科 t-hayama@cr.math.sci.osaka-u.ac.jp

¹周期領域が対称領域になるのは代数多様体の族が曲線や K3 曲面などの限られた場合のみで, 例えば一般型曲面や Calabi-Yau 多様体の場合は非対称領域である.

2 偏極 log Hodge 構造のモジュライ空間

2.1 偏極 Hodge 構造, 分類空間, 周期写像

そもそも偏極 Hodge 構造はコンパクト Kähler 多様体のコホモロジー群の性質を線形代数的に抽象化したものとして導入された。

Definition 2.1. \mathbb{Z} 自由加群 H と $H_{\mathbb{C}} := H \otimes \mathbb{C}$ の減少フィルター $F = \{F^p\}_p$ が次を満たすとき, (H, F) を重さ w , Hodge 型 $\{h^{p,q}\}_{p,q}$ の **Hodge 構造** という。

$$(1) \dim_{\mathbb{C}} F^p = \sum_{r \geq p} h^{r, w-r} \quad \text{for all } p.$$

$$(2) H_{\mathbb{C}} = \bigoplus_p F^p \cap \overline{F^{w-p}}.$$

Hodge 分解により, コンパクト Kähler 多様体 X に対して $H = H^w(X, \mathbb{Z})$, $F^p = \bigoplus_{q < p} H^{w-q}(X, \Omega^q)$ とすれば, (H, F) は重さ w の Hodge 構造である. さらに $H^w(X, \mathbb{C})$ ($1 \leq w \leq \dim X$) の原始的部分には, Hodge-Riemann の双線形関係式より, ある性質を持った双線形形式が定義される. これを一般化して, 次を定義する.

Definition 2.2. 重さ w , Hodge 型 $\{h^{p,q}\}_{p,q}$ の Hodge 構造 (H, F) に対して, $H_{\mathbb{Q}} := H \otimes \mathbb{Q}$ 上の双線形形式 $\psi(\cdot, \cdot)$ が次を満たすとき, ψ を (H, F) の **偏極** といい, (H, F, ψ) を **偏極 Hodge 構造** という。

(1) w が奇数のとき ψ は交代形式, w が偶数のとき ψ は対称形式.

$$(2) \psi(F^p, F^q) = 0 \quad \text{for } p + q > w.$$

$$(3) (\sqrt{-1})^{p-q} \psi(v, \bar{v}) > 0 \quad \text{for all } v \in F^p \cap \overline{F^q}, p + q = w. \quad (\text{ここで } \psi \text{ は } H_{\mathbb{C}} \text{ 上への自然な拡張.})$$

重さ w , Hodge 型 $\{h^{p,q}\}_{p,q}$ の偏極 Hodge 構造 (H_0, F_0, ψ_0) を固定する. それと同じ型の偏極 Hodge 構造すべての集合 D , すなわち,

$$D := \{F : H_{\mathbb{C}} \text{ の減少フィルター} \mid (H_0, F, \psi_0) \text{ は重さ } w, \text{ Hodge 型 } \{h^{p,q}\}_{p,q} \text{ の偏極 Hodge 構造}\}$$

を $(\{w, \{h^{p,q}\}_{p,q}, H_0, \psi_0\}$ 型の) **偏極 Hodge 構造の分類空間** と呼ぶ. D は旗多様体の閉部分多様体の開部分集合である. さらに D のコンパクト双対 \check{D} を次のように定める.

$$D^{\text{open}} \check{D} := \{F : H_{\mathbb{C}} \text{ の減少フィルター} \mid \dim_{\mathbb{C}} F^p = \sum_{p' < p} h^{p', w-p'}, \psi_0(F^p, F^q) = 0 \text{ for } p + q > w\}.$$

とくに D (resp. \check{D}) には $G_{\mathbb{R}} := \text{Aut}(H_0, \mathbb{R}, q_0) = \{g \in \text{Aut} H_0, \mathbb{R} \mid q_0(gx, gy) = q_0(x, y)\}$ (resp. $G_{\mathbb{C}}$) が推移的に作用している.

代数多様体の滑らかな族 $\pi : X \rightarrow S$ が与えられたとき, それに付随して偏極 Hodge 構造の変形が得られるが, それは写像 $\phi : S \rightarrow \Gamma \backslash D$ (Γ はモノドロミー群) を導く. これを **周期写像** と呼ぶ. 周期写像は水平的な正則写像である.

Example 2.3. $w = 1$, $\{h^{1,0} = h^{0,1} = g, 0 \text{ otherwise}\}$, H_0 を rank $2g$ の \mathbb{Z} -自由加群とする. H_0 の適当な基底をとって H_0 上の双線形形式を

$$\psi_0(u, v) = {}^t u \begin{pmatrix} 0 & -I_g \\ I_g & 0 \end{pmatrix} v \quad (u, v \in H_0)$$

と定義すれば,

$$D = \left\{ F^0 = H_0, \mathbb{C} \supset F^1 = \text{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{pmatrix} \tau \\ I_g \end{pmatrix} \text{ の縦ベクトル} \right\} \supset F^2 = \{0\} \mid \tau \in \mathcal{H}_g \right\} \\ \cong \mathcal{H}_g \quad (g \text{ 次 Siegel 上半空間}).$$

以降断りがない限り, フィルター $F = \left(F^0 = H_{0,\mathbb{C}} \supset F^1 = \text{span}_{\mathbb{C}} \left\{ \begin{pmatrix} \tau \\ I_g \end{pmatrix} \text{の縦ベクトル} \right\} \supset F^2 = \{0\} \right)$ を単に $\begin{pmatrix} \tau \\ I_g \end{pmatrix}$ と書く. とくに $g = 1$ のとき

$$\check{D} = \left\{ \begin{pmatrix} \tau \\ 1 \end{pmatrix} \mid \tau \in \mathbb{C} \right\} \sqcup \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \cong \mathbb{P}^1(\mathbb{C}).$$

2.2 分類空間の拡張, 偏極 log Hodge 構造のモジュライ空間

しかし退化した代数多様体を考えた場合, そのコホモロジー群は一般に Hodge 分解が成り立たないため, 退化した族に対しては周期写像が定義できない. Griffiths は次のような問題提議をしている: D に「無限遠点」を付け加えることにより, それを退化した Hodge 構造の分類空間と見なすことはできないか?—この問題に解答を与えるのが加藤・白井による共同研究である.

半安定な退化族が与えられたとき, その周期写像の極限の挙動があるベキ零軌道によって近似できる, という結果が Schmid らにより得られていた. 例えば単位円盤 Δ 上 $\{0\}$ で半安定退化する退化族が与えられたとき, $\Delta^* = \Delta - \{0\}$ 上の周期写像 $\phi: \Delta^* \rightarrow \Gamma \backslash D$ について, モノドロミー群 Γ はあるベキ単元 T によって $\Gamma = \mathbb{Z}T$ と書ける. このとき ϕ の上半平面 \mathcal{H}_1 への持ち上げ $\tilde{\phi}: \mathcal{H}_1 \rightarrow D$ に対し,

$$\tilde{\tau}(w) := \exp(-wN)\tilde{\phi}(w) \quad (N = \log T/2\pi\sqrt{-1})$$

と定めれば, $\tilde{\tau}$ は一価正則な写像 $\tau: \Delta^* \rightarrow \check{D}$ を定める. このとき $\tau(0) \in \check{D}$ が存在し,

$$\mathcal{H}_1 \rightarrow \check{D}; w \mapsto \exp(wN)\tau(0)$$

は $\text{Im } w \gg 0$ において元の周期写像の持ち上げ $\tilde{\phi}$ を近似する (ベキ零軌道定理). このとき $\exp(CN)\tau(0)$ をベキ零軌道と呼ぶ.

一般にベキ零錘, ベキ零軌道を次のように定義する. §2 で定めた記号 $\{w, \{h^{p,q}\}_{p,q}, H_0, \psi_0\}$ に対して,

Definition 2.4. $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}} = \text{Lie}(G_{\mathbb{R}})$ ($G_{\mathbb{R}} = \text{Aut}(H_{0,\mathbb{R}}, \psi_0)$) の錘 σ が次を満たすとき, **ベキ零錘**と呼ぶ.

- (1) 任意の $N \in \sigma$ は $\text{End}(H_{0,\mathbb{R}})$ としてベキ零.
- (2) 任意の $N, N' \in \sigma$ に対し, $NN' = N'N$.

Definition 2.5. ベキ零錘 $\sigma = \sum_j \mathbb{R}_{\geq 0} N_j$ に対して, $Z = \exp(\sigma_{\mathbb{C}})F \subset \check{D}$ ($F \in \check{D}$) が次を満たすとき, Z を σ -**ベキ零軌道**という. 任意の $F \in Z$ に対して,

- (1) $NF^p \subset F^{p-1}$ for all $p \in \mathbb{Z}, N \in \sigma$.
- (2) $\exp(\sum_j \sqrt{-1}y_j N_j)F \in D$ for $y_j \gg 0$.

ベキ零錘のなす扇 Σ に対して, その方向のベキ零軌道すべての集合

$$D_{\Sigma} := \{(\sigma, Z) \mid \sigma \in \Sigma, Z \text{ is a } \sigma\text{-nilpotent orbit}\}$$

が定義できる. 加藤・白井は, $G_{\mathbb{Z}}$ の neat 部分群³ Γ に対して, $\Gamma \backslash D_{\Sigma}$ は**偏極 log Hodge 構造のファインモジュライ**であることを示している ([KU] 主定理 B).

Example 2.6 (Exm.2.3 からの継続). $g = 1$ のとき, $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \sigma = \mathbb{R}_{\geq 0}N$ とすれば,

$$D_{\sigma} = \left\{ \left(\{0\}, \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right) \mid z \in \mathcal{H}_1 \right\} \sqcup \left(\sigma, \begin{pmatrix} \mathbb{C} \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

²単に錘と書いたときは, 強凸かつ有限生成な有理多面錘を指すものとする.

³ $\Gamma \ni \forall \gamma$ の固有値で生成される \mathbb{C}^{\times} の部分群が振れ元を持たないとき, Γ を neat という.

2.3 $\Gamma \backslash D_\Sigma$ の幾何的な構造

主結果を述べるために必要なため, $\Gamma \backslash D_\Sigma$ の幾何的構造について簡単に述べる.

Definition 2.7. $\mathfrak{g}_\mathbb{R}$ の扇 Σ に対し, $G_\mathbb{Z}$ の部分群 Γ が次の二つを満たすとき, Γ は Σ と強く両立する, という.

任意の $\sigma \in \Sigma$ に対して,

- (1) $\gamma\sigma\gamma^{-1} \in \Sigma$ for all $\gamma \in \Gamma$,
- (2) $\sigma = \sum_i \mathbb{R}_{\geq 0} \log(\gamma_i)$ for some $\gamma_i \in \Gamma \cap \exp(\sigma)$.

扇 Σ と Γ が強く両立しているとする. 錘 $\sigma \in \Sigma$ に対し, $\Gamma(\sigma) := \Gamma \cap \exp(\sigma)$ は fs 半群である. $\Gamma(\sigma)$ からトーラス, およびトーリック多様体

$$\text{toric}_\sigma := \text{Spec}(\mathbb{C}[\Gamma(\sigma)^\vee])_{\text{an}}, \quad \text{torus}_\sigma := \text{Spec}(\mathbb{C}[\Gamma(\sigma)^{\text{gp}}])_{\text{an}}$$

を得る. とくに toric_σ は単連結である. また Γ は Σ と強く両立することより $\sigma = \sum_i \mathbb{R}_{\geq 0} \log(\gamma_i)$ と書けるから, $\sigma_\mathbb{C} := \sigma \otimes \mathbb{C}$ から $\text{torus}_\sigma \cong \mathbb{C}^* \otimes \Gamma(\sigma)^{\text{gp}}$ への全射

$$e: \sigma_\mathbb{C} \rightarrow \text{torus}_\sigma \cong \mathbb{C}^* \otimes \Gamma(\sigma)^{\text{gp}}; z \otimes \log(\gamma) \mapsto \exp(2\pi\sqrt{-1}z) \otimes \gamma$$

を得る. トーラス軌道分解 $\text{toric}_\sigma = \bigsqcup_{\tau \prec \sigma} \text{torus}_\sigma \cdot 1_\tau$ より toric_σ の元は $e(z) \cdot 1_\tau$ ($\tau \prec \sigma$) の形に書ける. このとき $z \in \sigma_\mathbb{C}$ の取り方は $\log(\Gamma(\sigma)^{\text{gp}}) + \tau_\mathbb{C}$ を法として唯一に決まる.

以上の準備の下, 次を定義する.

$$\check{E}_\sigma := \text{toric}_\sigma \times \check{D}, \quad E_\sigma := \{(e(z) \cdot 1_\tau, F) \in \check{E}_\sigma \mid \exp(\tau_\mathbb{C}) \exp(z)F \text{ は } \tau\text{-ベキ零軌道.}\}$$

集合 E_σ は well-defined である. また toric_σ には自然に \log 構造が入り, 射影 $\check{E}_\sigma \rightarrow \text{toric}_\sigma$ による引き戻しにより \check{E}_σ に \log 構造が入る. \check{E}_σ は \log 解析空間である. しかしここで厄介なことに, E_σ は一般に解析空間ではない. [KU] では 'strong topology' なる位相を E_σ に定義し, $E_\sigma \hookrightarrow \check{E}_\sigma$ による引き戻しにより, E_σ に \log 局所環付き空間の構造を与えている. E_σ から次の自然な写像が決まる.

$$\begin{aligned} \pi_\sigma: E_\sigma &\rightarrow \Gamma(\sigma)^{\text{gp}} \backslash D_\sigma \rightarrow \Gamma \backslash D_\Sigma, \\ (e(z) \cdot 1_\tau, F) &\mapsto (\tau, \exp(\tau_\mathbb{C}) \exp(z)F) \bmod \Gamma(\sigma)^{\text{gp}} \mapsto (\tau, \exp(\tau_\mathbb{C}) \exp(z)F) \bmod \Gamma. \end{aligned}$$

任意の $\sigma \in \Sigma$ に対し, π_σ が連続となるような最も強い位相を $\Gamma \backslash D_\Sigma$ の位相として定める. さらに, 任意の $\sigma \in \Sigma$ に対して π_σ が正則となるように $\Gamma \backslash D_\Sigma$ の構造層を定める. すなわち, 開集合 $U \subset \Gamma \backslash D_\Sigma$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathcal{O}_{\Gamma \backslash D_\Sigma}(U) \text{ (resp. } M_{\Gamma \backslash D_\Sigma}(U)) \\ := \{\text{map } f: U \rightarrow \mathbb{C} \mid f \circ \pi_\sigma \in \mathcal{O}_{E_\sigma}(\pi^{-1}(U)) \text{ (resp. } M_{E_\sigma}(\pi^{-1}(U))) \text{ } (\forall \sigma \in \Sigma)\} \end{aligned}$$

により構造層 $\mathcal{O}_{\Gamma \backslash D_\Sigma}$, および半群の層 $M_{\Gamma \backslash D_\Sigma}$ が決まり, $\Gamma \backslash D_\Sigma$ に \log 局所環付き空間としての構造が入る. [KU] 主定理 A より, E_σ は \log 多様体, さらに Γ が neat のとき $\Gamma \backslash D_\Sigma$ は \log 多様体, $E_\sigma \rightarrow \Gamma(\sigma)^{\text{gp}} \backslash D_\sigma$ は \log 多様体の圏 $\sigma_\mathbb{C}\text{-torsor}^4$ であることが知られている.

Example 2.8 (Exm.2.6 からの継続). $\Gamma = SL(2, \mathbb{Z})$ とすれば $\Gamma(\sigma) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & s \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid s \in \mathbb{N} \right\}$. このとき

$$\begin{aligned} \text{torus}_\sigma &= \mathbb{C} - 0, \quad \text{toric}_\sigma = \mathbb{C}, \quad \check{E}_\sigma = \mathbb{C} \times \check{D}, \\ E_\sigma &= \left\{ \left(\exp(2\pi\sqrt{-1}z_1), \begin{pmatrix} z_2 \\ 1 \end{pmatrix} \right) \in \mathbb{C}^* \times \check{D} \mid z_1 + z_2 \in \mathcal{H}_1 \right\} \sqcup \left\{ \left(0, \begin{pmatrix} z \\ 1 \end{pmatrix} \right) \in \{0\} \times \check{D} \mid z \in \mathbb{C} \right\}. \end{aligned}$$

⁴主ファイバー束の概念を他の圏で考えたもの.

3 主結果

Theorem 3.1. D が対称領域の場合, ベキ零錘 σ に対して次の図式は可換.

$$\begin{array}{ccc}
 & & \begin{array}{c} E_\sigma \\ \pi_\sigma \downarrow \text{trivial bundle} \\ \Gamma(\sigma)^{\text{gp}} \backslash D_\sigma \end{array} \\
 & & \subset \\
 & \text{toric}_\sigma \times Y & \supset (\text{toric}_\sigma \times Y) \cap E_\sigma \cong \\
 & \cup & \parallel (\spadesuit) \\
 \sigma_{\mathbb{C}} \times Y & \longrightarrow & \text{torus}_\sigma \times Y & (\Gamma(\sigma)^{\text{gp}} \backslash D)^{\circ} \\
 \Downarrow & & \Downarrow & \cup \\
 \exp(\sigma_{\mathbb{C}}) \cdot D & \longrightarrow & \Gamma(\sigma)^{\text{gp}} \backslash (\exp(\sigma_{\mathbb{C}}) \cdot D) & \supset \Gamma(\sigma)^{\text{gp}} \backslash D \\
 \rho_\sigma \downarrow \text{trivial bundle} & & & \\
 \exp(\sigma_{\mathbb{C}}) \backslash (\exp(\sigma_{\mathbb{C}}) \cdot D) & & &
 \end{array}$$

ただしここで Y は ρ_σ の切断の像, $(\Gamma(\sigma)^{\text{gp}} \backslash D)^{\circ}$ は $\text{toric}_\sigma \times Y$ での $\Gamma(\sigma)^{\text{gp}} \backslash D$ の閉包の内部.

Example 3.2 (Exm.2.8 からの継続). $Y = \{p\}$ where $p \in \check{D} - \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

証明はトロイダル部分コンパクト化の理論の中の結果を使う ([H]). D が一般の場合, π_σ の自明性, (\spadesuit) の等号性は成立するとは限らず, それは錘の取り方に依存する. 現在, 錘 σ と ρ_σ の性質の関係を計算していて, 発表時にはその結果について話したい.

参考文献

- [H] 巴山竜来, Siegel 上半空間のトロイダル部分コンパクト化と偏極 log Hodge 構造のモジュライ空間について, 第4回城崎新人セミナー報告集, 2007.
- [KU] K. Kato and S. Usui, *Classifying space of degenerating polarized Hodge structures*, to appear in Ann. Math. Studies, Princeton University Press.

進化ゲーム理論の数理

A Mathematical Principle of Evolutionary Game Theory

* 吉川 満 (mitsurukikkawa@hotmail.co.jp)

* 関西学院大学大学院経済学研究科 経済学専攻

The basic concepts in the modern economics of today was constructed by the great mathematician (von Neumann, Nash, Smale, etc). This paper deals with EVOLUTIONARY GAME THEORY in order to pursue the new developments. It is said that it can explain the anomaly in the economics and it will be important field in the future. This paper formulates it rigorously and rearranged by our researches. We propose the direction of the new research (Equilibrium Concept, etc).

1. はじめに

現在の経済学における重要な手法は偉大な数学者, von Neumann, Nash, Debreu, Itô, Smale, etc. の貢献によって構築されたと言っても過言ではない。

そこで本稿ではゲーム理論¹⁾ (特に進化ゲーム理論) を Kolmogorov 流の公理的確率論の立場から厳密に定式化 (§2) し, 筆者の研究を振り返ることによって新たな研究の方向性を探る (§3)。

2. 進化ゲーム理論: 基礎篇

2.1. 準備: ゲームの定式化

まずゲームの定式化を行う。

2.1. 定義. 戦略形 (strategic form) n 人ゲームとは次の要素の組によって定義される。

$$(2.1) \quad G = (N, \{S_i\}_{i \in N}, \{f_i\}_{i \in N})$$

ここで, (i) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ はプレイヤーの集合, (ii) S_i はプレイヤー i の選択可能な行動あるいは戦略の集合, また全員の手は戦略セット $\vec{s} = s_1, \dots, s_n$ と表記する. (iii) f_i は直積集合 $\vec{S} = S_1 \times \dots \times S_n$ から実数への可測関数であり, プレイヤー i の利得関数を表す. —

このゲームは次のようにプレイされる. すべてのプレイヤー $1, \dots, n$ は他のプレイヤーの選択を知らずにそれぞれの戦略 $s_1 \in S_1, \dots, s_n \in S_n$ を選択する. つまり独立性の仮定がある. そのゲームの結果, プレイヤー i は利得 $f_i(\vec{s})$ を得る. またこのような戦略 s_i をプレイヤー i の純粋戦略 (pure strategy) という。

2.2. 仮定. $\forall i, S_i$ は可分完備距離空間である²⁾. —

2.3. 仮定. $\forall i, f_i: \vec{S} \rightarrow \mathbb{R}$ は有界連続関数である. —

2.4. 仮定. プレイヤーの目的は自己の利得最大化である. —

2.5. 仮定. 共有知識 (common knowledge): プレイヤー全員は自分に関してはもちろん, プレイヤー全員の利得関数を知っている. —

2.6. 定義. 戦略形 n 人ゲーム G の混合拡大 (mixed extension) とは, 次の要素の組で定義される。

$$(2.2) \quad G^* = (N, \{Q_i\}_{i \in N}, \{F_i\}_{i \in N})$$

ここで, (i) $N = \{1, 2, \dots, n\}$ はプレイヤーの集合, (ii) Q_i は S_i 上の確率分布の全体であり, S_i 上の確率分布 q_i をプレイヤー i の混合戦略といい, 確率変数³⁾を表している. また確率ベクトル $\vec{q} = q_1, \dots, q_n$ と表記する. (iii) F_i は直積集合 $\vec{Q} = Q_1 \times \dots \times Q_n$ 上の実数値関数であり, 次のように定義される。

$$(2.3) \quad F_i(\vec{q}) = \int_{\vec{Q}} f_i(\vec{s}) d\mu(\vec{s})$$

ここで μ は \vec{q} の分布である. また $F_i(\vec{q})$ をプレイヤー i の期待利得関数 (expected payoff function) という. また期待利得関数のセットを $\vec{F} = F_1, \dots, F_n$ と表記する. —

2.7. 仮定. 確率変数 $q_i, i = 1, \dots, n$ は独立 (independent) であるとする⁴⁾. —

2.8. 注意. q_1, \dots, q_n が独立 (仮定 2.7.) で各 q_k の分布を $\mu_k \in Q_k$ とすると, (2.3) は次のように変更できる。

$$(2.3') \quad F_i(\vec{q}) = \int_{\vec{Q}} f_i(\vec{s}) d\mu(s_1) \dots \mu_n(s_n).$$

またここで \vec{Q} を \vec{S} 上の確率測度の全体, $\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2$ を混合戦略のセット q^1, q^2 の分布とする. そこで $\vec{\mu}_1, \vec{\mu}_2 \in \vec{Q}$ に対して,

$$\vec{\mu}_\alpha = \alpha \vec{\mu}_1 + (1 - \alpha) \vec{\mu}_2, \quad 0 \leq \alpha \leq 1$$

とすることができ, 新しい確率測度 $\vec{\mu}_\alpha \in \vec{Q}$ が定義できるので, \vec{Q} は凸集合である. なお \vec{Q} は \vec{Q} 中の閉集合である. —

2.9. 定義. ゲーム $G^* = (N, \{Q_i\}_{i \in N}, \{F_i\}_{i \in N})$ の実現可能集合 (feasible set) U は, 次のように定義される。

$$U = \{\vec{F}(\vec{q}) \mid \vec{q} \in \vec{Q}\} \text{ —}$$

2.10. 注意. 実現可能集合 U は, 期待利得関数 \vec{F} の連続性より, 可分完備距離空間の有界な閉集合 (コンパクト集合) である. —

2.11. 定義. プレイヤー i の戦略 $q_i \in Q_i$ が他の $n - 1$ 人のプレイヤーの戦略の組 $q_{-i} = (q_1, \dots, q_{i-1}, q_{i+1}, \dots, q_n)$ に対する最適応答 (best response) であるとは,

$$(2.4) \quad F_i(q_i, q_{-i}) = \max_{r_i \in Q_i} F_i(r_i, q_{-i})$$

であるときをいう. 戦略の組 q_{-i} に対するプレイヤー i の

¹⁾ ゲーム理論とは自然, 社会における様々なゲーム的狀況においてプレイヤーの意思決定は相互に関連し, プレイヤーが得る利得は自分自身の戦略だけでなく他のプレイヤーの戦略にも依存するようなプレイヤーの相互依存関係を表現する一般的な数学的手法のことである。

²⁾ 後述する戦略を確率的に選ぶという, 混合戦略という概念を導入するためには可測空間である必要がある。

³⁾ 形式的には可測空間 (Ω, S_i) (ただし Ω は空間, S_i を空間 Ω の部分集合の σ -加法族とする) 上の S_i を定義域とする実数値関数 q_i が確率変数となっていることを表している。

⁴⁾ この独立性を仮定しない研究が現在盛んに進められている. 例えば今後情報不完備ゲームをマルチンゲールの概念を用いた分析が重要となるであろう。

最適応答の全体を, $B_i(q_{-i})$ とおく. —

2.12. 定義. 戦略形 n 人ゲーム G^* において, プレイヤーの戦略の組 $\bar{q}^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ が Nash 均衡点 (equilibrium point) であるとは, すべてのプレイヤー $i (= 1, \dots, n)$ に対して戦略 q_i^* が他のプレイヤーの戦略の組 q_{-i}^* に対する最適応答であるときをいう. —

2.13. 注意. 写像 $B_i(q_{-i})$ は直積集合 $Q_1 \times \dots \times Q_{i-1} \times Q_{i+1} \times \dots \times Q_n$ から集合 Q_i への点対集合写像となり, プレイヤー i の最適応答対応 (best response correspondence) と呼ばれる. —

ここで戦略の組 \bar{q} に対して, 集合 $B(\bar{q}) = B_1(q_{-1}) \times \dots \times B_n(q_{-n})$ とする.

2.14. 定理. ゲーム G^* において混合戦略の組 $\bar{q}^* = (q_1^*, \dots, q_n^*)$ が Nash 均衡点であるための必要十分条件は次が成り立つことである.

$$(2.5) \quad \bar{q}^* \in B(\bar{q}^*) \text{ —}$$

2.15. 定理. ゲーム G^* において, 混合戦略の範囲で少なくとも 1 つの Nash 均衡点が存在する. —

2.16. 定理. (Kakutani's fixed point theorem⁵⁾) S を可分完備距離空間の非空, コンパクト, 凸集合とし, $F(\cdot)$ を S から S への点対集合写像で, 次の 2 条件を満たすとする.

(i) すべての $x \in S$ に対して $F(x)$ は S の非空な凸部分集合である.

(ii) S 内の任意の点列 $\{x_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ と $\{y_\nu\}_{\nu=1}^\infty$ に対して, $y_\nu \in F(x_\nu)$, $\nu = 1, 2, \dots$, $x_\nu \rightarrow x_0, y_\nu \rightarrow y_0$ ($\nu \rightarrow \infty$) ならば, $y_0 \in F(x_0)$ である.

このとき, $x^* \in F(x^*)$ となる写像 $F(\cdot)$ の不動点 x^* が少なくとも 1 つ存在する. —

2.17. 注意. 上述では純粋戦略が有限集合であると仮定したが, 実現可能集合のコンパクト性を仮定すれば, 本質的には純粋戦略が無限集合でも構わない (河野 (2003)). —

2.18. 定義. ゲームが次の条件を満たすとき, **ゼロ和 (zero sum) ゲーム** という.

$$\sum_{i=1}^2 F_i(j, k) = 0, \quad \forall j = 1, 2, \dots, m_1, \forall k = 1, 2, \dots, m_2.$$

2.19. 定理. (Minimax theorem) ゼロ和 2 人ゲームにおいて次が成立する.

$$\max_{q_1 \in Q_1} \min_{q_2 \in Q_2} F(q_1, q_2) = \min_{q_2 \in Q_2} \max_{q_1 \in Q_1} F(q_1, q_2). \text{ —}$$

この Minimax 定理を満たす平衡点は, 鞍点である.

2.2. 進化ゲーム理論

ここでは進化ゲーム理論について取り上げる. 進化ゲーム理論とは大きな集団において様々なプレイヤーが 1 対 1 でランダムに遭遇し, それぞれの戦略に基づき, 次期にその戦略を採用する人が決まり, さらに次期において, ... というプロセスが無限に繰り返す状況をいう. まず進化ゲーム理論における解概念を定義する.

2.20. 定義. $q_i \in Q_i$ が進化的に安定な戦略 (Evolution-

⁵⁾ 原論文 Kakutani(1941) では R^l の場合だけが扱われているが, ここではより一般的に可分完備距離空間の場合を考える.

ary Stable Strategy: ESS) であるとは, どのような戦略 $q_j \neq q_i$ に対しても, ある $\bar{\epsilon}_q \in (0, 1)$ が存在し, すべての $\epsilon \in (0, \bar{\epsilon}_q)$ について次の不等式が成り立つことをいう.

$$(2.6) \quad F[q_i, \epsilon q_j + (1-\epsilon)q_i] > F[q_j, \epsilon q_j + (1-\epsilon)q_i]. \text{ —}$$

2.21. 命題. Bishop and Cannings(1976) 定義 2.20. で定義した進化的安定な戦略は以下の条件と同値である.

$$(2.7) \quad F(q_j, q_i) \leq F(q_i, q_i), \quad \forall q_j,$$

$$(2.8) \quad F(q_j, q_i) = F(q_i, q_i) \Rightarrow F(q_j, q_j) < F(q_i, q_j), \quad \forall q_j \neq q_i. \text{ —}$$

(2.7) は Nash 均衡の条件であり, (2.8) は漸近安定性の条件である.

以上で論じた ESS は動学的なプロセスにおける安定した状態を直感的に定式化したものである. そこでここでは動学的なプロセスを明示的に与える. そのためにまず次の仮定を置く.

2.22. 定義. 写像 $\pi: \bar{q} \rightarrow \mathbb{R}$. そのとき以下の条件を満たすとき, すべての $q_i \in Q_i$ で, **選択ダイナミクス (selection dynamics)** という.

$$(2.9) \quad \dot{\bar{q}} = \pi(\bar{q}),$$

(2.10) (i) π は Lipschitz 連続である.

$$(2.11) \quad (ii) \quad \sum_{i=1}^n \pi_i(\bar{q}) = 0.$$

$$(2.12) \quad (iii) \quad \forall q_i \in Q_i, q_i = 0 \Rightarrow \pi(\bar{q}) \geq 0. \text{ —}$$

2.23. 定義. π は (2.10)–(2.12) と以下の条件を満たすとき, **正則選択方程式 (regular selection dynamics)** と言う.

$$(2.13) \quad \frac{\pi}{0} \equiv \lim_{q_i \rightarrow 0} \frac{\pi}{q_i}. \text{ —}$$

2.24. 定義. π_i は以下の条件を満たすとき, **単調 (monotonic)** である. $i, i' \in N$,

$$(2.14) \quad F(q_i, q_{-i}) \geq F(q_{i'}, q_{-i'}) \Rightarrow \frac{\pi_i(\bar{q})}{q_i} \geq \frac{\pi_{i'}(\bar{q}')}{q_{i'}}. \text{ —}$$

これは利得が高い方がその選択ダイナミクスの増加分も大きいことを示している.

2.25. 定義. 正則選択方程式 π が単調性を持つとき, 次のように変形することができ, この方程式を **Replicator 方程式⁶⁾** という.

$$(2.15) \quad \frac{\dot{\pi}_i(\bar{q})}{q_i} = F(q_i, q_{-i}) - \sum_{k=1}^n q_k F(q_k, q_{-k}). \text{ —}$$

2.26. 定理. (Picard-Lindelöf theorem) $X \subset \mathbb{R}^k$ が開, ベクトル場 $\varphi: X \rightarrow \mathbb{R}^k$ が Lipschitz 連続であるとする. このとき (2.9) は, あらゆる状態 $x^0 \in X$ を通る一意解 $\xi(\cdot, x^0): T \rightarrow X$ をもつ. さらに $\xi(t, x^0)$ は $t \in T$ と $x \in X$ について連続である. —

よってこの Replicator 方程式は (局所) 解の存在と一意性に関して保証されている.

また特に利得行列 $A = A^T$ のとき対称 2 人ゲーム (symmetric two person game), 利得行列 $A \neq A^T$ のとき非対称

⁶⁾ この方程式はある戦略 i を取ったときの自分の利得が平均利得よりも大きい場合には, その戦略を取る確率が高くなり, またゲームをしている周りのプレイヤーがその戦略を取る確率が高いほどその増加率も高くなる (外部性 (externality) の存在), ということを示している. この方程式の平衡点は Nash 均衡となり, その平衡点が漸近安定であるとき ESS である.

2人ゲーム (asymmetric two person game) という (利得表 1).

2.27. 例. 戦略の数が2つの場合の対称2人ゲームの場合 Replicator 方程式は

$$\dot{x} = (ax - by)xy, \quad y = 1 - x.$$

となり, 非対称2人ゲームの場合 Replicator 方程式は次のようになる.

$$(2.16) \quad \begin{aligned} \dot{y} &= y(1-y)\{a - (a+c)x\}, \\ \dot{x} &= x(1-x)\{d - (b+d)y\}. \end{aligned}$$

ただし, y をプレイヤー1が戦略1をとる確率, x をプレイヤー2が戦略2をとる確率とする.

1 \ 2	戦略1	戦略2
戦略1	a, b	$0, 0$
戦略2	$0, 0$	c, d

利得表1(非対称2人ゲーム)

この利得表の a, b, c, d の符号によってゲームは次の4つの場合に部類することができる.

(I) 非ジレンマ, (II) 囚人のジレンマ型, (III) コーディネーション型, (IV) タカ=ハト型.

(I), (II) は純粋戦略の ESS が1つであり, (III) は純粋戦略の ESS が2つ, (IV) は混合戦略の ESS が1つある. —

3. 進化ゲーム理論：発展篇

3.1 Milnor Attractor

この節では新しい均衡概念を提案し, Nash 均衡, ESS, CSS との関係調べる. そのために純粋戦略が無数存在する場合を考える.

3.1. 仮定. 純粋戦略は無数集合であり, その実現可能集合 U は有界閉集合 (コンパクト) であるとする (注意 2.17.)⁷⁾.

3.2. 仮定. 利得関数 $F(q_i, q_j)$ は q_i, q_j 共に2回微分可能である. —

3.3. 定義. Eshel(1983) 戦略 q_u が連続的に安定な戦略 (Continuously Stable Strategy, CSS) であるとは, (1) ESS である, (2) 任意の q_v について $|q_v - q_u| < \varepsilon$ を満たすような $\varepsilon > 0$ が存在し, 任意の q_i について $|q_v - q_i| < \eta$ を満たすような $\eta > 0$ が存在し, 次の関係を満たすときをいう.

$$(3.1) \quad F(q_v, q_i) > F(q_i, q_i) \\ \text{if and only if } |q_v - q_u| < |q_i - q_u|. \text{ —}$$

平衡点 q_i^* からずれているとき q_i^* より q_i^* に近い突然変異戦略が必ず侵入できる. したがって戦略は突然変異戦略の侵入と置換の繰り返しによって平衡点 q_i^* に近づく.

3.4. 命題. Eshel(1983) \hat{q}_i が ESS であるための必要条件は, 次の条件を満たすときである.

$$(3.2) \quad (i) \quad \left. \frac{\partial}{\partial q_j} F(q_j, \hat{q}_i) \right|_{q_j=\hat{q}_i} = 0,$$

⁷⁾このときの Replicator 方程式は, 次のようなものとなる (Bomze(1990)).

$$\frac{dP}{dt}(B) = \int_B (\pi(x, P, \mu(S)) - \pi(P, P, \mu(S))) P(dx).$$

$$(ii) \quad \left. \frac{\partial^2}{\partial q_j^2} F(q_j, \hat{q}_i) \right|_{q_j=\hat{q}_i} \leq 0. \text{ —}$$

この条件は利得関数が極大であるための必要条件である.

3.5. 命題. Eshel(1983)

(i) ESS q_i が $q_i = q_j = \hat{q}_i$ において, CSS となる必要条件是, 次の条件を満たすときである.

$$(3.3) \quad \frac{\partial^2 F}{\partial q_i \partial q_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial q_i^2} \leq 0.$$

(ii) ESS \hat{q}_i が CSS であるための十分条件は, (3.2)-(ii), (3.3) の等号を除いたものが成り立つことである. —

よって ESS と CSS の関係から次のような表1に分類することができる.

場合分け	(3.3)	not (3.3)
(3.2)-(ii)	(i) 漸近安定	(ii) Lyapunov 安定
not (3.2)-(ii)	(iii)?	(iv) 漸近不安定

表1

(i):到達可能で安定に維持される平衡である. (iv):不安定な平衡状態である. (ii): ESS だが CSS ではない平衡状態は, もし最初からその平衡状態にあれば, 安定であるが, 最初にその平衡状態から少しでもずれていると, ますますずれる方向に突然変異体の侵入と置換が起きる. (iii): ESS でないが CSS である平衡状態は戦略の2極分化など興味深い現象が指摘されている (Sasaki and Ellner(1995)). そこでこの部分を次のアトラクターによって特徴付ける.

3.6. 定義. Milnor(1985) 閉部分集合 $A \subset M$ は次の2つの条件を満たすとき (Milnor) アトラクター (Attractor) と呼ばれる.

(1) 吸収領土 (realm of attraction) $\rho(A)$, すなわち $\omega(x) \subset A$ なる点 $x \in M$ すべての集合, は厳密に正の測度を持つ.

(2) 厳密に小さな閉集合 $A' \subset A$ で $\rho(A')$ が $\rho(A)$ と測度ゼロの集合の不安定性を除いて一致するものはない. —
この定義には, その近傍の全ての軌道がそこに吸引されるという条件が含まれていない. よってアトラクター⁸⁾ の近傍から離れていく軌道が存在してもよい.

3.7. 例. 次の \mathbb{R} 上の1次元写像 $f: [0, 2\pi] \rightarrow [0, 2\pi]$ は $x = 0, \pi$ に Milnor アトラクターを持つ.

$$x_{n+1} = f(x_n) = x_n + \sin^2 x_n \pmod{2\pi}. \text{ —}$$

3.8. 命題. ある均衡 \hat{q}_i が Milnor Attractor であるための必要条件は次を満たすことをいう.

$$(3.4) \quad (i) \quad \left. \frac{\partial^2}{\partial q_j^2} F(q_j, \hat{q}_i) \right|_{q_j=\hat{q}_i} > 0.$$

$$(3.5) \quad (ii) \quad \left. \frac{\partial^2 F}{\partial \hat{q}_i \partial q_j} + \frac{\partial^2 F}{\partial \hat{q}_i^2} \right|_{q_i=q_j=\hat{q}_i} \leq 0. \text{ —}$$

これは均衡は不安定であるが, 均衡に近づいてくる軌道の集合が存在することを意味している.

⁸⁾従来の意味でのアトラクターとは次のことをいう.

定義. 力学系 f の閉不変集合 Λ がアトラクターであるとは, Λ の近傍 U で,

$$f(U) \subset U \text{ かつ } \Lambda = \bigcap_{n>0} f^n(U)$$

となるものが存在することをいう. —

よって従来の意味でのアトラクターとは, Λ の近傍 U 内の点 f で写像された後も Λ の近傍内に留まり続けることを意味している.

3.2. 近可積分系

ここでは前節に定義した Replicator 方程式に決定論のノイズを次のように導入する. そこで近可積分 (nearly integrability) 系の議論を導入することで今まで非線形項をも考慮に入れた分析を行う.

3.9. 定義. 非対称 2 人ゲームにおけるノイズがある Replicator 方程式⁹⁾とは次のことをいう.

$$(3.6) \quad \dot{y} = (1 - \delta_1)y(1 - y)\{a - (a + c)x\} + \delta_1\left(\frac{1}{2} - y\right)$$

$$(3.7) \quad \dot{x} = (1 - \delta_2)x(1 - x)\{d - (b + d)y\} + \delta_2\left(\frac{1}{2} - x\right)$$

ただし $0 < \delta_1, \delta_2 \ll 1$. —

3.10. 命題. 方程式 (2.16) において, 各純粋戦略の均衡の局所安定性は次の条件を満たすとき, 各純粋戦略の均衡は漸近安定である. また混合戦略の均衡, 内点均衡は $\frac{abcd}{(a+c)(b+d)}$ が負となるときは, リミットサイクル (limit cycle) となり, 正となるときは, 鞍点となる.

$$(y^*, x^*) = (0, 0) \text{ のときは, } a < 0, d < 0,$$

$$(y^*, x^*) = (0, 1) \text{ のときは, } c > 0, d > 0,$$

$$(y^*, x^*) = (1, 0) \text{ のときは, } a > 0, b > 0,$$

$$(y^*, x^*) = (1, 1) \text{ のときは, } b < 0, c < 0.$$

またノイズが存在する Replicator 方程式 (3.6), (3.7) において, $\frac{abcd}{(a+c)(b+d)} < 0$ のとき, 内点均衡は漸近安定となり, その均衡は存在し, リミットサイクルとなっている. また均衡が純粋戦略のみのときの局所安定性は変わらない¹⁰⁾.

3.11. 定理. 純粋戦略と混合戦略という複数均衡を持つ大域不安定なゲームに, ノイズが存在し, $\frac{abcd}{(a+c)(b+d)} < 0$ を満たすとき, Arnold 拡散 (Arnold(1964)) が存在する. —

3.12. 定理. (Kolmogorov-Arnold-Moser の定理, Arnold and Avez(1968) を変更) ほとんどすべての δ_1, δ_2 に対して, ノイズが存在する不変トーラスでノイズが存在しない場合の不変トーラスに近いものが正の測度で存在する. —

証明 第 1 積分¹¹⁾を用い, 近可積分系の議論を導入すればよい.

3.13. 例. (1) 上記の条件を満たす例として最終提案ゲーム (the ultimatum game) がある. 最終提案ゲームとは提案者と応答者の 2 タイプのプレイヤーがおり, その間でお金の分配を考え, 提案者はどのような提案をするのかを考えたゲームである. 伝統的なゲーム理論からは提案者は応答者に最

⁹⁾Replicator 方程式 (2.16) において, タイプ 1 については, $\delta_1\left(\frac{l^1 + l^2}{2}\right)$, タイプ 2 については, $\delta_2\left(\frac{l^1 + l^2}{2}\right)$, という新規参加者の数, さらには退出者の数を考慮した方程式である.

¹⁰⁾数学の問題として考えた場合, 局所安定性は変更する可能性が存在するが, ゲーム理論の枠組みで考えたとき, つまりある戦略 1 を取った時の利得と, 戦略 2 を取った時の利得差が十分小さい (ノイズは十分小さい) 時は, 各プレイヤーは戦略的に行動することはないので, 符号が変更する場合は考えていない. ただし戦略の集合が無限の場合にはこのことを考慮すべきであろう.

¹¹⁾この第 1 積分は, 次の正準方程式 (canonical equation) を満たすので, Hamilton 系となることが分かる.

$$\dot{x} = P(x, y) \frac{\partial H(x, y)}{\partial y}, \quad \dot{y} = -P(x, y) \frac{\partial H(x, y)}{\partial x}$$

ただし, $P(x, y) = x(1-x)y(1-y)$ である.

小単位を提案するが, 実験では公平な提案が存在することが知られている (吉川 (2005)).

(2) 上記の条件を満たす例として共有資源 (common pool resource) のゲームがある. これでは利得が環境変動により変化することによって, 一般的な非対称 2 人ゲームとなる. 伝統的なゲーム理論からはプレイヤーが利己的に行動し, 共有地の悲劇 (tragedy of commons) となることが知られている. しかし上記のようなノイズが存在すると, 共有地の悲劇を回避する可能性がある (吉川 (2006)). —

3.3. 伊藤解析

前節では決定論のノイズであったが, この節では確率微分方程式 (Langevin 方程式) を用いた分析を行う.

3.14. 定義. 確率空間 (Ω, \mathcal{F}, P) 上の確率過程 $w := (w_t)_{t \in T}$ で以下の 3 条件 (i)-(iii) を満たすものを (T 上標準) ブラウン運動 (Brownian motion) と呼ぶ.

$$(i) \quad w_0 = 0. \quad (ii) \quad w \text{ は連続過程.}$$

(iii) w は独立で正規分布する増分をもつ, すなわち, $0 = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_n$ に対して

$$(a) \quad w_{t_{i+1}} - w_{t_i} (i = 0, \dots, n-1) \text{ は互いに独立,}$$

$$(b) \quad (w_{t_{i+1}} - w_{t_i}) \sim N(0, t_{i+1} - t_i). \text{ —}$$

ここで次のような確率微分方程式を考える (Fudenberg and Harris(1992)).

$$(3.8) \quad dr_i(t) = r_i(t) [u_i(r(t))dt + \sigma_i dW_i(t)].$$

ただし, $u_i(r)$ はタイプ i の期待利得, W を分散が 1 で, 分散 0 の n 次元 Wiener 過程である. これを次の伊藤の公式を利用すると, 次のような Replicator 方程式を得ることができる.

$$(3.9) \quad ds_i = \sum_j \left[\frac{\partial f_i(r)}{\partial r_j} \right] dr_j + \frac{1}{2} \sum_{j,k} \left[\frac{\partial^2 f_i(r)}{\partial r_j \partial r_k} \right] dr_k dr_k,$$

ただし $dr_j dr_k = r_j^2 \sigma_j^2 dt$ if $j = k$, and 0 otherwise.

3.15. 定理. (Ito's Formula) $a = a(t, \omega)$ は t に関して連続な適合過程とし, $v = \{v(t, \omega)\} \in \mathcal{L}^*$ とする. 確率過程 $X = \{X_t\}$ を

$$dX_t = a dt + v dB_t, \quad B_0 = 0, \text{ a.s.}$$

とする. すなわち, a.s. で, X は次で定義される.

$$(3.10) \quad X_t(\omega) = X_0(\omega) + \int_0^t a(s, \omega) ds + \int_0^t v(s, \omega) dB_s.$$

\mathbb{R}^2 上の C^2 級数 $f(x, t)$ と $x = X$ の合成で得られる確率過程を $Y = f(X, t)$ とする. このとき次が成立する.

$$(3.11) \quad dY_t = \frac{\partial f}{\partial t} dt + \frac{\partial f}{\partial x} dX_t + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} (dX_t)^2$$

ただし, $(dX_t)^2 = (adt + vdB_t)^2$ は

$$(3.12) \quad dt \cdot dt = dt \cdot dB_t = dB_t \cdot dt = 0, \quad dB_t \cdot dB_t = dt$$

として計算する. すなわち, $(dX_t)^2 = v^2 dt$ になる. 確率過程の微分式 (3.9) は, 任意の $T \geq 0$ について, 次が成立することを意味する. 等式はすべて a.s. の意味である.

$$(3.13) \quad f(X_T, T) - f(X_0, 0) = \int_0^T \left\{ \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \cdot v^2 + \frac{\partial f}{\partial x} a \right\} dt + \int_0^T \frac{\partial f}{\partial x} v dB_t. \text{ —}$$

3.16. 例. 戦略が 2 つ場合, (3.9) は次のようになる.

$$ds_1 = s_1 s_2 [(u_1(s) - u_2(s))dt + (\sigma_2^2 s_2 - \sigma_1^2 s_1)dt]$$

$$(3.14) \quad + \sigma_1 dW_1 - \sigma_2 dW_2], \\ = s_1 s_2 [(u_1(s) - u_2(s))dt + (\sigma_2^2 s_2 - \sigma_1^2 s_1)dt \\ + \sigma d\widetilde{W}],$$

ただし $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$, $\widetilde{W} = (W_1 - W_2)/\sigma$ は標準 Wiener 過程である。――

特に各プレイヤーの戦略が2つで、対称2人ゲームの場合は次の命題が成り立つ。

3.17. 命題. Fudenberg and Harris(1992)

(i) $a - c > (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2$, $d - b < (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2$ のとき, $t \rightarrow \infty$ のとき, 確率1で, $s_1(t) \rightarrow 1$ となる。

(ii) $a - c < (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2$, $d - b > (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2$ のとき, $t \rightarrow \infty$ のとき, 確率1で, $s_1(t) \rightarrow 0$ となる。

(iii) $a - c > (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2$, $d - b > (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)/2$ のとき, $t \rightarrow \infty$ のとき, 確率 $I_1/(I_1 + I_2)$ で, $s_1(t) \rightarrow 1$ となり, 確率 $1 - I_1/(I_1 + I_2)$ で, $s_1(t) \rightarrow 0$ となる。ただし $I_1 = \int_0^{s_1(0)} \exp[-\int_z^x [2\alpha(y)/\beta^2(y)]dy]dx$, $I_2 = \int_{s_1(0)}^1 \exp[-\int_z^x [2\alpha(y)/\beta^2(y)]dy]dx$ である。――

3.4. 統計力学

本節では統計力学を用いて、進化ゲーム理論を構築する。ここでは戦略の分布に着目し、その分布で均衡が有無を調べた。ここでは正方形格子上にかなり多数のプレイヤーがいて、最近接のプレイヤーと戦略を2つを持ち、ゲームを行うとする。

具体的には1からNまでの整数の集合 $V = \{1, 2, \dots, N\} \equiv \{x\}_{1, \dots, N}$ を格子, その要素 x をサイト (site) あるいは格子点と呼ぶことにする。サイト2個の組を適当に集めた集合 $B = \{(xy); x, y \in \mathbb{Z}^2, |x - y| = 1\}$ を作り, その各要素 (xy) (ボンドあるいは結合) は隣同士の組 (最近接 (nearest neighbor) 格子点对) でゲームを行う。そこゲームの結果, 各プレイヤーの利得が対応する。ただしこのモデルでは同時 (one-shot) にゲームを行うので, 動学理論ではなく, 静学理論である。

3.18. 命題. 仮定 2.4. のもとでのプレイヤー x のある戦略 $\{s_i\}, i = 1, \dots, N$ を取り, ある利得 f を得るというゲームの状況下に戦略 $\{s_i\}$ の確率分布は次のようになる。

$$(3.15) \quad P(\{s_i\}) = Z^{-1} \exp(\gamma f).$$

ただし $\{s_i\}$ はプレイヤー i の戦略, γ は変数¹²⁾, f はある戦略 $\{s_i\}$ を取ったときの利得, Z は規格化定数を表している。よって $\sum_{i=1}^N P(\{s_i\}) = 1$ となる。――

この命題 3.18. は, 利得 f が大きければ, その戦略をとる確率が高くなることを表している。また形式的には戦略の空間 $\Omega = \{-1, +1\}^{\mathbb{Z}^2}$, ただし $\{-1, +1\}$ は戦略の添え字を表し, $\{+1, +2\}$ でも構わない。それ上の確率測度 μ は $\mu(ds) \propto \exp[\gamma f(s)]ds$ によって与えられる (命題 3.18.). た

¹²⁾ γ は変数であるが, このモデルではゲームを一斉に行い, 他者がどのような戦略を用いているのか分からない。そこでこの変数 γ が他者の行動を知らせる, 例えば正の情報量などを表している。よって変数 γ が最大のとき, 既存の進化ゲーム理論と同様になる。ただし外部性は存在しない。

だし ds は Ω 上の一様分布とする。

3.19. 定義. 戦略が一定の秩序を持っているかどうかを判断する量を秩序パラメータ (order parameter) という概念を次のように導入する。

$$(3.16) \quad m = \langle s_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N s_i \equiv \left(\sum_i s_i P(\{s_i\}) \right).$$

ただし $\langle \rangle$ は平均を表している。――

3.20. 命題. 統計力学を用いた進化ゲーム理論における進化的に安定な戦略とは次の条件を満たす。

$$(3.17) \quad f(y, x) \leq f(x, x), \quad \forall y,$$

$$(3.18) \quad |m - m^*| < \varepsilon.$$

ただし m^* は戦略の添え字の値を示している。――

また上記のものは最近接とのみのゲームであったが, ランダムにマッチしてゲームを行うモデルも構築することができる。詳しくは吉川 (2008) を参照。

4. 終わりに

以上のように伝統的なゲーム理論を厳密に定式化し, 筆者の研究を交えることによって, 今までの既存のゲーム理論の限界と今後の発展の可能性を考察した。

このゲーム理論は生物現象や社会現象への応用や本稿で展開した理論的な内容がある。von Neumann が経済学に関心をもつようになった背景には, 当時の数学の発展段階や, 彼の数学観による。彼は数学者はさまざまな領域のどれを選んで研究してもよいし, その選択やその結果としての成功の度合いは, 主として審美的な価値によって影響されるのが普通であるけれども, 経験的な源泉からあまりに遠く離れると, 数学はその創造的な力を失うと警告している¹³⁾。これらが別々に発展するのではなく, 共に相互関係を保ちつつ, 発展することを期待し, 本稿を閉じたい。

参考文献

- Arnol'd, V.I. (1964): *Soviet Math. Dokl.* **5**, 581.
 Arnol'd, V.I. and Avez, A. (1968): *Ergodic Problems of Classical Mechanics*, Benjamin, New York.
 Bishop, D.T. and Cannings, C. (1976): *Adv. Appl. Prob.* **8**, 616.
 Bomze, I. (1990): *Monatsch. Math.* **110**, 189.
 Eshel, I. (1983): *J. Theor. Biol.* **103**, 99.
 Fudenberg, D. and Harris, C. (1992): *J. Econ. The.* **57**, 420.
 Kakutani, S. (1941): *Duke Math. J.* **8**, 457.
 吉川満 (2005): 『関西学院 経済学研究』, **36**, 21.
 吉川満 (2006): 『関西学院 経済学研究』, **37**, 305.
 吉川満 (2007): 『進化経済学論集』, **11**, 450.
 吉川満 (2008): 『京都大学数理解析研究所講義録』印刷中.
 河野敬雄 (2003): 『Rokko Lectures in Mathematics』, **13**.
 Milnor, J. (1985): *Comm. in Math. Phys.* **99**, 177.
 Sasaki, A. and Ellner, S. (1995): *Evolution*, **49**, 337.
 鈴木光男 (1994): 『新ゲーム理論』勁草書房。

¹³⁾ このようなゲーム理論に関する記述は鈴木 (1994) が詳しい。

Large Time Decay of Solutions to Isentropic Gas Dynamics

柘植 直樹 (広島工業大学)

1 導入

圧縮性非粘性気体の運動を表わす isentropic gas dynamics を一次元で考える:

$$\begin{cases} \rho_t + m_x = 0, \\ m_t + \left(\frac{m^2}{\rho} + p(\rho) \right)_x = 0, \quad p(\rho) = \rho^\gamma / \gamma. \end{cases} \quad (1.1)$$

ここで ρ は密度, m は運動量, $p(\rho) = \rho^\gamma / \gamma$ は圧力, $1 < \gamma < 3$ は比熱比を表す. 速度を $v = m/\rho$ とする. (1.1)₁ と (1.1)₂ は, それぞれ質量保存則, 運動量保存則と呼ばれている.

(1.1) を簡単のために

$$u_t + f(u)_x = 0, \quad u = {}^t(\rho, m) \quad (1.2)$$

とかく.

初期値として

$$u|_{t=0} = u_0(x) := (\rho_0(x), m_0(x)) \quad (1.3)$$

を与えて, 初期値問題 (1.2)–(1.3) を考える.

(1.1) はどんなに滑らかな初期値を与えても, 不連続解即ち衝撃波を持つことが知られている. そのため解の範囲を, 不連続性を許容する弱解の範囲まで広げなければならない. ここで $u(x, t)$ が初期値問題 (1.2)–(1.3) の弱解であるとは, 任意の $\phi \in C_0^1(\mathbf{R} \times \mathbf{R})$ に対して, 以下の積分等式

$$\int_{\mathbf{R}_+} \int_{\mathbf{R}} \{u\phi_t + f(u)\phi_x\} dxdt + \int u_0(x)\phi(x, 0)dx = 0 \quad (1.4)$$

が成り立つことである. ここで初期値問題 (1.2)–(1.3) の C^1 級の解は, (1.4) を満たすことに注意されたい.

関連する結果

まず初期値問題 (1.2)–(1.3) の解の存在に関する結果について述べる. Ding-Chen-Luo [4],[2],[3, Section 4] によれば, 初期値が $\rho_0, v_0 \in L^\infty(\mathbf{R})$ を満たせば, 初期

値問題 (1.2)–(1.3) は時間大域解をもつ. 彼らは Lax-Friedrichs 差分法によって近似解 (以下この近似解のことを **Lax-Friedrichs 近似解** と呼ぶ) を構成し, compensated compactness の方法によってその近似解が弱解に収束することを示した.

次に解の漸近挙動について述べる. Glimm-Lax [5] は, 初期値が (i) ある有限区間の外では定数であり, (ii) 局所有界変動であり, (iii) 十分小さな振幅をもてば, 解の全変動が $t^{-1/2}$ のオーダーで減衰することを示した. 本講演では, これとは別のタイプの漸近挙動について考える.

さて主定理を述べるために, 力学的エネルギー

$$\eta(u) = \frac{m^2}{\rho} + \frac{p(\rho)}{\theta}$$

を導入する.

定理 1 (主定理 (Tsuge [9])) 定数 $B \geq 0$ および $C \geq 0$ に対して, 初期値 (1.3) が

$$|v_0(x)| \leq B, \quad 0 \leq \rho_0(x) \leq B, \quad (1.5)$$

$$\int_{\mathbf{R}} x^2 \rho_0(x) dx \leq C, \quad \int_{\mathbf{R}} \eta(u_0(x)) dx \leq C \quad (1.6)$$

を満しているとする.

このとき, ほとんどすべての $t > 1$ に対して, Lax-Friedrichs 近似解の極限として得られた (1.2)–(1.3) の弱解は,

$$\int_{\mathbf{R}} p(\rho(x, t)) dx \leq \frac{\theta}{t^{\gamma-1}} \left(\int_{\mathbf{R}} x^2 \rho_0(x) dx + \frac{3-\gamma}{2} \int_{\mathbf{R}} \eta(u_0(x)) dx \right) \quad (1.7)$$

を満す.

注意 1 (定理 1 の下線部について) 弱解は一意ではないので, 物理的に適切は解を選ぶために, 次の付加条件が必要である:

(1.2)–(1.3) の弱解 $u(x, t)$ は, (超関数の意味で) エントロピー条件

$$\eta_t + q_x \leq 0 \quad (1.8)$$

を満たさなければならない. ここで

$$q(u) = \left(\frac{m^2}{\rho} + \frac{\gamma p(\rho)}{\theta} \right) \frac{m}{\rho}$$

である.

エントロピー条件を満たす (1.2)–(1.3) の弱解を, **エントロピー解** と呼ぶ. 主定理中の Lax-Friedrichs 近似解の極限として得られた弱解は, 実はこのエントロピー解である. しかしながらこのエントロピー解の一意性は, 今だ示されていない. したがって主定理と同じ条件を満す初期値に対して, その任意のエントロピー解が, (1.7) を満すかは今だわからない.

注意 2 (1.7) の減衰評価は, kinetic formulation を用いて, Perthame [7] で議論されている.

2 形式的な計算と証明の方針

この節では、形式的な計算によって (1.7) を導くことにする。
まず (1.1)₁ × x² − (1.1)₂ × 2xt + (1.8) × t² より、

$$F_t + G_x \leq H \quad (2.1)$$

を得る。ここで

$$\begin{aligned} F(x, t, u) &= x^2\rho - 2xtm + t^2\eta(u), \\ G(x, t, u) &= x^2m - 2xt(m^2/\rho + p(\rho)) + t^2q(u), \\ H(x, t, u) &= 2t(1/\theta - 1)p(\rho) \end{aligned}$$

である。このとき (2.1) を $t^{\gamma-3}$ 倍して、

$$(t^{\gamma-3}F)_t + (t^{\gamma-3}G)_x \leq -(3-\gamma)t^{\gamma-4}(x-tv)^2\rho \leq 0.$$

この不等式を領域 $\mathbf{R} \times [1, t]$ で積分すると、

$$\int_{\mathbf{R}} t^{\gamma-3}F(x, t)dx \leq \int_{\mathbf{R}} F(x, 1)dx \quad (2.2)$$

を得る。

他方、(2.1) を領域 $\mathbf{R} \times [0, 1]$ で積分すると、

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{R}} F(x, 1)dx &\leq \int_{\mathbf{R}} F(x, 0)dx + \int_0^1 dt \int_{\mathbf{R}} H(x, t)dx \\ &\leq \int_{\mathbf{R}} F(x, 0)dx + (3-\gamma) \int_0^1 tdt \int_{\mathbf{R}} \eta(x, t)dx \\ &\leq \int_{\mathbf{R}} F(x, 0)dx + (3-\gamma) \int_0^1 tdt \int_{\mathbf{R}} \eta(x, 0)dx \\ &\leq \int_{\mathbf{R}} F(x, 0)dx + \frac{3-\gamma}{2} \int_{\mathbf{R}} \eta(x, 0)dx \end{aligned} \quad (2.3)$$

を得る。ここで2番目の不等式でエネルギー不等式を用いた。

よって、(2.2)–(2.3) より、

$$\int_{\mathbf{R}} t^{\gamma-3}F(x, t)dx \leq \int_{\mathbf{R}} F(x, 0)dx + \frac{3-\gamma}{2} \int_{\mathbf{R}} \eta(x, 0)dx.$$

この不等式から、 $t^{\gamma-3}F(x, t) \geq t^{\gamma-3}p(\rho)/\theta$ により、(1.7) が従う。

しかしながら上記の議論は、以下の仮定の下おこなわれている。

- (i) 解が C^1 級であること。
- (ii) $x^2\rho(x, t) \rightarrow 0$ ($|x| \rightarrow \infty$)。

前述したように (i) は，方程式が不連続解をもつので，仮定することができない．また (ii) も，初期値に (1.6) を仮定したとしても，弱解に対して成り立つことを示すのは難しい．

上記の形式的な計算を弱解に対して正当化したいのであるが，それは非常に難しい．弱解の定義 (1.4) のみからでは，弱解の性質が全くわからないのである．

そこで方針を転換する．すなわち弱解を直接評価するのではなく，まず Lax-Friedrichs 近似解に対して，上記の形式的な計算をする．弱解に比べて，この近似解の性質はよくわかっている．その性質を用いて，まずこの近似解に対して (1.7) を導出する．他方，compensated compactness の方法から，この近似解は (1.2)–(1.3) の弱解に収束する．結果的にその収束先である弱解に対しても (1.7) が成り立つだろうという予想が立つ．

3 Lax-Friedrichs 近似解とその関係式

この節では，まず最初に Lax-Friedrichs の差分法を紹介し，それを用いて，Lax-Friedrichs 近似解を構成する．次にその近似解から導かれるいくつかの関係式および評価を紹介する．

3.1 Lax-Friedrichs の差分法

まず最初に近似解を $u^\Delta(x, t) = (\rho^\Delta(x, t), m^\Delta(x, t))$ とかく．さらに空間差分 Δx および時間差分 Δt を， $0 < \Delta t < 1$ および以下の Courant-Friedrichs-Lewy 条件:

$$\Lambda := \max_{i=1,2} \left(\sup_{0 \leq t, x \in \mathbf{R}} |\lambda_i(u^\Delta(x, t))| \right) \leq \frac{\Delta x}{\Delta t} \leq 2\Lambda, \quad (3.1)$$

を満たすようにとる．ここで λ_1, λ_2 は，特性速度 $\lambda_1 := v - \rho^\theta$, $\lambda_2 := v + \rho^\theta$ である．

さて近似解 $u^\Delta(x, t)$ を構成する．

$$(j, n) \in \mathbf{Z} \times \mathbf{Z}_{\geq 0}, \quad J_n = \{j \in \mathbf{Z} : n + j = \text{偶数}\}$$

とおく．

ステップ 1 まず，

$$u^\Delta(x, -0) = u_0(x)\chi^\Delta(x),$$

と定義する．ここで

$$\chi^\Delta(x) = \begin{cases} 1, & x \in [-\alpha(1/\Delta x), \alpha(1/\Delta x)], \\ 0, & \text{otherwise} \end{cases}$$

であり, $\alpha: \mathbf{R}_+ \mapsto \mathbf{R}_+$ は $\alpha(x) \rightarrow \infty (x \rightarrow \infty)$ を満たす滑らかな関数である.

ステップ2次に $u^\Delta(x, t)$ が $t < n\Delta t$ において定義されていると仮定する. このとき $j \in J_n$ に対して, $u_j^n := (\rho_j^n, m_j^n)$ を

$$\begin{cases} \rho_j^n := \frac{1}{2\Delta x} \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} \rho^\Delta(x, n\Delta t - 0) dx, & (j-1)\Delta x \leq x \leq (j+1)\Delta x, \\ m_j^n := \frac{1}{2\Delta x} \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} m^\Delta(x, n\Delta t - 0) dx, & (j-1)\Delta x \leq x \leq (j+1)\Delta x \end{cases}$$

とする.

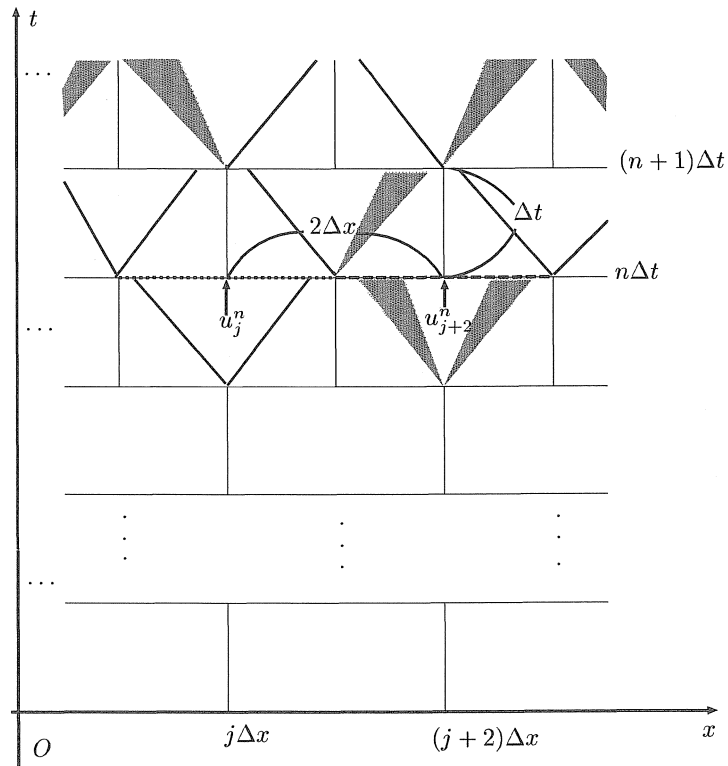


図 3.1: Lax-Friedrichs 近似解

ステップ3最後に $n\Delta t \leq t < (n+1)\Delta t$, $j\Delta x \leq x < (j+2)\Delta x$ において, $u^\Delta(x, t)$ を初期値問題

$$\begin{cases} u_t + f(u)_x = 0, & j\Delta x \leq x < (j+2)\Delta x, \\ u|_{t=n\Delta t} = \begin{cases} u_j^n, & x < (j+1)\Delta x, \\ u_{j+2}^n, & x > (j+1)\Delta x \end{cases} \end{cases}$$

の解と定義する. このように $x = (j+1)\Delta x$ において不連続な定数を初期値とする初期値問題を, $x = (j+1)\Delta x$ を中心とするリーマン問題 ([1],[8]) という. これで近似解の定義を終える.

3.2 Lax-Friedrich 近似解から導かれる関係式および評価

この小節では, Lax-Friedrichs 近似解から導かれる関係式および評価を紹介する. まず前小節において定義した近似解は以下を満たす:

(1)

$$\begin{aligned} \{\rho^\Delta(x, t)\}^\theta / \theta &\leq B, \quad -B \leq u^\Delta(x, t) \leq B \quad (\text{近似解の有界性}), \\ \Lambda &\leq B \quad (\text{有限伝播性}). \end{aligned}$$

(2) $j \in J_{n+1}$ に対して,

$$\begin{aligned} \rho_j^{n+1} &= \frac{\rho_{j+1}^n + \rho_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (m_{j+1}^n - m_{j-1}^n), \\ m_j^{n+1} &= \frac{m_{j+1}^n + m_{j-1}^n}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} \left\{ \frac{(m_{j+1}^n)^2}{\rho_{j+1}^n} + p(\rho_{j+1}^n) - \frac{(m_{j-1}^n)^2}{\rho_{j-1}^n} - p(\rho_{j-1}^n) \right\}, \\ \eta(v_j^{n+1}) &\leq \frac{\eta(v_{j+1}^n) + \eta(v_{j-1}^n)}{2} - \frac{\Delta t}{2\Delta x} (q(v_{j+1}^n) - q(v_{j-1}^n)). \end{aligned}$$

(1) は, 有界な不変領域の存在を示すことによって得られる. (2) は各セルにおいて, (1.1) に Green の公式を適用することによって得られる. 特に (2) は数値計算でも用いられる重要な関係式 ([10]) である.

この (2) と初期値の仮定から, 以下の補題を得る.

補題 2 Lax-Friedrichs 近似解は以下を満たす.

(1) 質量保存:

$$\sum_{j \in J_{n+1}} \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} \rho_j^{n+1} dx = \sum_{j \in J_n} \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} \rho_j^n dx.$$

B と C にのみ依存する定数 $M_{B,C}$ が存在して,

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_n} \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} \rho_j^n dx &\leq M_{B,C}, \\ \sum_{j \in J_0} \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} x^2 \rho_j^0 dx &\leq \int_{\mathbf{R}} x^2 \rho_0(x) dx + O(\Delta x) \end{aligned}$$

を満たす. ここでランダウの記号 $O(\Delta x)$ は B と C にのみ依存する.

(2) エネルギー不等式:

$$\begin{aligned} \sum_{j \in J_{n+1}} \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} \eta(v_j^{n+1}) dx &\leq \sum_{j \in J_n} \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} \eta(v_j^n) dx, \\ \sum_{j \in J_0} \int_{(j-1)\Delta x}^{(j+1)\Delta x} \eta(v_j^0) dx &\leq \int_{\mathbf{R}} \eta(v_0(x)) dx \leq C. \end{aligned}$$

4 この講演について

講演では, 3.2 で得られた関係式を用いて, 2 節でおこなった形式的な計算を近似解に対して行う. そのとき Key になる評価を紹介する.

参考文献

- [1] A. Bressan, *Hyperbolic Systems of Conservation Laws*, (Oxford University Press, 2000).
- [2] G. Q. Chen, Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (III), *Acta Mathematica Scientia* **8** (1988) 243–276 (in Chinese), **6** (1986) 75–120 (in English).
- [3] G.-Q. Chen, The compensated compactness method and the system of isentropic gas dynamics, *MSRI preprint 00527-91*, Berkeley (1990).
- [4] X. Ding, G. Q. Chen and P. Luo, Convergence of the Lax-Friedrichs scheme for isentropic gas dynamics (I)–(II), *Acta Mathematica Scientia* **7** (1987) 467–480, **8** (1988) 61–94 (in Chinese), **5** (1985) 415–432, 433–472 (in English).
- [5] J. Glimm and P. D. Lax, *Decay of solutions of systems of nonlinear hyperbolic conservation laws*, Amer. Math. Soc. Mem., No. 101, A. M. S., Providence, R.I. 1970.
- [6] R. J. DiPerna, Convergence of the viscosity method for isentropic gas dynamics, *Comm. Math. Phys.* **91** (1983) 1–30.
- [7] B. Perthame, *Kinetic formulation of conservation laws. Oxford Lecture Series in Mathematics and its Applications, 21.*, (Oxford University Press, Oxford, 2002).
- [8] J. Smoller, *Shock Waves and Reaction-Diffusion Equations* (Springer-Verlag, New York, 1983).
- [9] N. Tsuge, Large time decay of solutions to isentropic gas dynamics, *Quarterly of Applied Mathematics* **65** (2007), no. 1, 135–143.
- [10] 山口昌哉, 野木達夫, 「数値解析の基礎 偏微分方程式の初期値問題」, 共立講座現代の数学, 1969.

Irrational rotation algebras and real quadratic fields

縄田 紀夫

九州大学大学院数理学府数理学専攻修士2年

Abstract. Irrational rotation algebras are objects in C^* -algebra theory. They are also called noncommutative tori. Y. Manin proposed the use of noncommutative tori as geometric framework for the study of abelian class field theory of real quadratic fields. In this talk, we introduce C^* -algebra theory and explain the reason why Y. Manin proposed.

1 C^* -環

この章では、 C^* -環の定義と基本的な例を紹介する。証明等は、[1],[3]などを参照のこと。

定義 1.1. $*$ -環とは \mathbb{C} 上の環であって以下を満たす $*$ -演算を持つときにいう。

$$(1) (a^*)^* = a. \quad (2) (a + b)^* = a^* + b^*.$$
$$(3) (\alpha a)^* = \bar{\alpha} a^* (\alpha \in \mathbb{C}). \quad (4) (ab)^* = b^* a^*.$$

定義 1.2. A が C^* -環とは $*$ -環であって以下を満たすノルム $\|\cdot\|$ を持つときにいう。

- (1) A はノルム $\|\cdot\|$ からできる距離で完備である。
- (2) $\|ab\| \leq \|a\| \|b\|$ ($a, b \in A$).
- (3) $\|a^*a\| = \|a\|^2$ ($a \in A$).

条件 (3) は C^* -条件と呼ばれる。この条件は単純な条件だがとても強い条件でいろいろな性質を成り立たせる。 C^* -環の基本的な例について述べる。

例 1.3. $n \times n$ 複素行列全体 $M_n(\mathbb{C})$ は通常の演算で \mathbb{C} 上の環であり, $*$ -演算を行列の転置共役で定義すると $*$ -環になる. ノルムを $\|a\|^2 = \max\{|\lambda| : \lambda \text{ は } a^*a \text{ の固有値}\}$ により定義すると C^* -環である.

上の例の無限次元版について考える.

例 1.4. H を複素ヒルベルト空間, つまり内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を持ちそれから作られるノルム $\|\cdot\|_H$ で完備な複素線形空間とする. 線形写像 $T : H \rightarrow H$ は, $\sup_{\xi \in H - \{0\}} \frac{\|T\xi\|_H}{\|\xi\|_H}$ が有限であるとき**有界線形作用素**という. また, 上記の値を T の作用素ノルムと言い, $\|T\|$ で表す. H の有界線形作用素全体を $B(H)$ で表す. $B(H)$ は自然に \mathbb{C} 上の環の構造を持つ. 任意の $T \in B(H)$ に対し, $\langle T\xi, \eta \rangle = \langle \xi, S\eta \rangle$ を満たす $S \in B(H)$ が唯一存在する. この S を T^* と表し, **共役作用素**という. $B(H)$ は共役作用素を $*$ -演算とすれば C^* -環になる. また, H が有限次元の時は上の例と一致する. 一般に C^* -環は $B(H)$ の C^* -部分環となる.(Gelfand-Naimark の定理)

この例により C^* -環の元の名前を定義する.

定義 1.5. A を C^* -環とする. A の元 a が $aa^* = a^*a = 1$ を満たすとき**ユニタリ**, $a^* = a, a^2 = a$ を満たすとき**射影**と呼ばれる.

もう一つの基本的な例について述べる.

例 1.6. X を局所コンパクトハウスドルフ空間とする. X 上の \mathbb{C} 値連続関数 f で無限遠点で 0 になるもの, つまり任意の $\epsilon > 0$ に対し $\{x \in X; |f(x)| \geq \epsilon\}$ がコンパクト集合になるもの全体を $C_0(X)$ と書く. $C_0(X)$ は各点での演算によって \mathbb{C} 上の環であり, $*$ -演算として各点の共役をとることとすることによって $*$ -環になる. ノルムを $\|f\| := \sup\{|f(x)|; x \in X\}$ で定義すると $C_0(X)$ は可換な C^* -環になる. 特にこの環は Hilbert 空間 $L^2(X)$ の掛け算作用素として $B(H)$ の部分環と見れる. 一般に可換な C^* -環はこの例と同じ形となる.(Gelfand-Naimark の定理)

上の例により C^* -環は非可換位相空間と呼ばれる.

2 C^* -環の同値関係

この章では, C^* -環の同値関係について述べる. まず最も自然な同型について定義する.

定義 2.1. C^* -環 A, B が同型であるとは以下を満たす全単射線形写像 $\pi : A \rightarrow B$ が存在するときという.

- (1) $\pi(ab) = \pi(a)\pi(b)$ ($a, b \in A$). (2) $\pi(a^*) = \pi(a)^*$ ($a \in A$).
 (3) $\|\pi(a)\| = \|a\|$ ($a \in A$).

C^* -環の強い性質として実は, (3) の条件は (1),(2) を満たす全単射線形写像に対しては勝手に成り立つことが知られている. つまり C^* -環のノルムは代数的条件によって完全に決まる. この同型を可換 C^* -環 $C_0(X), C_0(Y)$ で考えると Gelfand-Naimark の定理より同型になる必要十分条件は X と Y が同相になることであることがわかる. また, $M_n(\mathbb{C})$ と $M_k(\mathbb{C})$ が同型になるのは当然 $n = m$ の時である. 一般に C^* -環論では, この同型について分類が考えられている.

C^* -環には, M. Rieffel により誘導表現の研究のために導入された森田同値という同型より弱い同値関係がある. この関係は非可換幾何学で大事なものである. 森田同値は環論で森田紀一によって導入されたものの類似として考えられたものであるが, C^* -環を環として見たときのものとは異なっている. 定義には多くの準備があるので省略する. ([8] を参照のこと.) 例でどのようなものか説明する.

例 2.2. 可換 C^* -環 $C_0(X), C_0(Y)$ について考える. 森田同値になる必要十分条件は X と Y が同相であることということがわかる. つまりこのとき, 森田同値は同型と同じになる.

例 2.3. C^* -環 $M_n(\mathbb{C}), M_k(\mathbb{C})$ について考える. このとき, 任意の自然数 n, k に対して $M_n(\mathbb{C})$ と $M_k(\mathbb{C})$ は森田同値になることがわかる. つまり, 非可換なものと同値なものも同値になってしまうこともあることを注意しておく.

3 変換群 C^* -環

この章では, 局所コンパクト位相空間 X , 可算離散群 G と群作用 σ から C^* -環を構成する. この構成法は, 作用素環論において最も基本的なものである. またこの構成から作られる C^* -環は他の分野への応用の観点からも重要であることを説明する.

まず可算離散群 G の局所コンパクト位相空間 X への群作用 σ について説明する. $\text{Hom}(X)$ を X の自己同相写像全体から作られる群とする. 群作用 σ とは群準同型写像 $G \ni t \rightarrow \sigma_t \in \text{Hom}(X)$ のことである. (X, G, σ)

を位相力学系と呼ぶ。特に $G = \mathbb{Z}$ の時は、一つの自己同相写像 σ に対して σ_t は σ を t 回作用させる σ^t と考えられる。 G の X への群作用は $C_0(X)$ の元 f に対して $(\alpha_t(f))(x) = f(\sigma_t^{-1}(x))$ ($x \in X$) とすることで C^* -環 $C_0(X)$ への作用 α と見れる。 $(C_0(X), G, \alpha)$ は C^* -力学系と呼ばれる。この C^* -力学系から作られる $*$ -環 $C_0(X)G$ を以下のように定義する。集合としては $\sum_{t \in G} f_t u_t$ ($f_t \in C_0(X)$, 有限個の $t \in G$ を除いて $f_t = 0$) という形式的な和の集まりとする。積と $*$ -演算を以下のように定義する。

$$\left(\sum_{t \in G} f_t u_t \right) \left(\sum_{r \in G} g_r u_r \right) = \sum_{t \in G} \sum_{r \in G} f_t \alpha_t(g_r) u_{tr}.$$

$$\left(\sum_{t \in G} f_t u_t \right)^* = \sum_{t \in G} \alpha_t(f_{t^{-1}})^* u_t.$$

この演算は $u_t^* = u_{t^{-1}}$ と $u_t f u_t^* = \alpha_t(x)$ という関係に基づいている。つまり、 u_t はユニタリと考え α_t を u_t によって表している $*$ -環と考えられる。ノルムは $*$ -環 $C_0(X)G$ をヒルベルト空間の有界線形作用素全体の部分環として具体的に実現していきその中から一番大きいものを取ってくるということをやって定義する。そのようなことができるのかを証明する必要があるがそれは [10] を参照すること。 $C_0(X)G$ をこのノルムで完備化したものを (普遍) 変換群 C^* -環と言ひ、 $C_0(X) \rtimes_{\alpha} G$ と書く。この構成による代表的な例を挙げる。

例 3.1. θ を実無理数とする。 $X = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $G = \mathbb{Z}$, $\sigma([x]) = [x - \theta]$ ($x \in \mathbb{R}$) と定義する。この時、 $(\alpha(f))([x]) = f([x + \theta])$ ($f \in C_0(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$, $x \in \mathbb{R}$) となる。ここでフーリエ級数論の結果より $C_0(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ は $g([x]) = e^{2\pi i x}$ という一つのユニタリ元で生成されている C^* -環である。また、 $u_1 g u_1^* = \alpha(g) = e^{2\pi i \theta} g$ となる。つまり $C_0(\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \rtimes_{\alpha} \mathbb{Z}$ は $uv = e^{2\pi i \theta} vu$ を満たすユニタリ元 u, v で生成されている C^* -環である。この C^* -環を無理数回転環と言ひ、 A_{θ} と書く。また、仮に θ を整数とするとこの C^* -環は可換になりトーラス上の連続関数環と同型になる。このことから無理数回転環は非可換トーラスとも呼ばれる。

変換群 C^* -環の森田同値について考える。準備としてよい群作用の名前を定義する。 (X, G, σ) を位相力学系とする。作用 σ が自由とは任意の $g \in G - \{e\}$ と $x \in X$ に対して、 $\sigma_g(x) \neq x$ となる時に言う。作用 σ が固有とは任意の X のコンパクト部分集合 C に対して、 $\{t \in G; \sigma_t(C) \cap C \neq \emptyset\}$ がコンパクト集合になる時に言う。上の例は自由だが固有ではない位相力学系の例になっている。固有な作用の特徴としては軌道空間 X/σ が局

所コンパクトハウスドルフ空間になるということがある。つまり、このとき C^* -環 $C_0(X/\sigma)$ を考えることができる。次に述べる定理はこの講演で最も重要なものである。

定理 3.2. (Rieffel)

(X, G, σ) を作用が自由かつ固有な位相力学系とする。このとき、 $C_0(X/\sigma)$ と $C_0(X) \rtimes_{\alpha} G$ は森田同値である。

上の定理で固有という条件がなかった時について考える。すると一般には X/σ という空間はハウスドルフ空間にならないために通常の幾何学をやることはできない。しかし、そのような空間を考えたい状況が存在する。(次の章でその例を挙げる。) そのとき、上の定理より $C_0(X) \rtimes_{\alpha} G$ という C^* -環を考えることで X/σ のことがわかるのではないかという考えが生まれる。これは、A. Connes による考え方である。また彼は、 C^* -環に微分構造を導入している。詳細については [2] を参照せよ。

注意 3.3.

- (1) 変換群 C^* -環には上で定義したノルムではなく群の左正則表現を利用して作られる $B(H)$ の部分環への特別な実現からのノルムによる完備化もあり被約変換群 C^* -環と呼ばれる。 G が可換群の時はこのノルムは上で定義したノルムと一致することが知られている。
- (2) この章でやったことは一般の局所コンパクト位相群と連続作用でも同様のことが行える。ただし定義には群の調和解析の知識を必要とする。
- (3) 定理 3.2 は軌道空間と変換群 C^* -環から同値関係でわった空間と垂群 C^* -環というもので一般化されている。

(1),(2) については, [10] を (3) については, [6] を参照すること。

4 実二次体

この章では、 C^* -環を使って代数的整数論の問題にアプローチできないかという Y. Manin の予想について説明する。代数的整数論については [4], Y. Manin の予想については [5] を参照せよ。

まず代数的整数論について簡単に説明する。有理数体 \mathbb{Q} の有限次拡大体 \mathbb{K} のことを代数体という。特に $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = 2$ となる代数体を二次体と言う。このとき、1 でない平方因子を持たない整数 d により $\mathbb{K} = \mathbb{Q}(\sqrt{d})$ と書くことが出来る。 $d > 0$ のとき実二次体と言い、 $d < 0$ のとき虚二次体と言

う. 代数体 \mathbb{K} の**整数環** $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ とは \mathbb{K} の元であって \mathbb{Z} 上のモニックな多項式の根となるものの全体が作る環である. K が二次体のときは $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\sqrt{d}]$ ($d \equiv 2, 3 \pmod{4}$) または, $\mathcal{O}_{\mathbb{K}} = \mathbb{Z}[\frac{1+\sqrt{d}}{2}]$ ($d \equiv 1 \pmod{4}$) となる.

代数的整数論とは何か簡単に述べると, 代数体の拡大 \mathbb{L}/\mathbb{K} があつた時, $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ から $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ へ環としてどのように変化するかということを考える理論である. 変化とは例えば素元分解がどのくらい成り立たなくなるかということや $\mathcal{O}_{\mathbb{K}}$ の素イデアル p を $p\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ として $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ のイデアルとした時, どのように準素イデアル分解されるかということである. 準素イデアル分解とは $p\mathcal{O}_{\mathbb{L}} = p_1^{e_1} p_2^{e_2} \cdots p_n^{e_n}$ (p_i は, $\mathcal{O}_{\mathbb{L}}$ の素イデアル, $e_i \geq 1$) の形で表すことである. 特に $e_1 = \cdots = e_n = 1$ の時, p は \mathbb{L} において**不分岐**と言い, 不分岐でないとき**分岐**すると言う. また, $[\mathbb{K} : \mathbb{Q}] = n$ となるとき, p は \mathbb{L} において**完全分解**すると言う. 素イデアルの分解は \mathbb{L}/\mathbb{K} がアーベル拡大であつた時にきれいなことが起きることが知られている. また, 逆に素イデアルの分解を決めるとそのアーベル拡大がどのくらい存在するのかわることが出来る. とても雑な言い方であるがこれらが類体論の言っていることである. アーベル拡大がどのくらい存在するのかわることが出来るといったが, 類体論では具体的にどのようにすればアーベル拡大が構成できるかということあまりわからない. そこで次のような問題がある.

問題 4.1. \mathbb{K} を代数体とする. このとき, \mathbb{K} の最大アーベル拡大を構成せよ. (ただし \mathbb{K} の最大アーベル拡大とは, \mathbb{K} の代数閉包においてすべての有限次アーベル拡大の合併をとってできる体である.)

この問題は, 有理数体 \mathbb{Q} と虚二次体に対しては解かれているが, 実二次体の時はまだ未解決である. 虚二次体の時にこの問題はクロネッカーの青春の夢と呼ばれていて, 最大アーベル拡大は虚数乘法をもつ楕円曲線を使って構成される. 楕円曲線にはいろいろな見方があるが, この応用で使う場合は $\mathbb{C}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d})$ という商空間として楕円曲線を考える事が大切になる. この状況を実二次体で同じように考えてみると $\mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d})$ という空間を考えれば虚二次体の類似で最大アーベル拡大がわかりそうな気がする. ただしこの空間はハウスドルフ空間にならないために普通の幾何学をすることができない. そこで定理 3.2 の考え方を使う. つまり, $\mathbb{R}/(\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\sqrt{d})$ を $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})/\mathbb{Z}\sqrt{d}$ と見て Y. Manin は次のような予想をした.

予想 4.2. (Manin)

実二次体 $\mathbb{Q}(\sqrt{d})$ の最大アーベル拡大は無理数回転環 $A_{\sqrt{d}}$ を使って作られる.

ただし、どのように構成するかということは全くわかってない。

5 無理数回転環

この章では、無理数回転環の性質を紹介する。また、それらを使って得られる数論と無理数回転環が関連していると思われる結果を紹介する。証明などは [3],[9] を参照すること。

C^* -環 A 上のトレースとは A 上の有界線形汎関数で $\tau(1) = 1$ と $\tau(ab) = \tau(ba)$, $(a, b \in A)$ を満たすものである。 $M_n(\mathbb{C})$ では通常のトレースを正規化したものである。トレースは作用素環論で大切なものであり射影の次元をはかることができる。特に無理数回転環 A_θ は唯一つのトレース τ_θ を持つ。トースは連結空間なのでトース上の連続関数環は自明でない射影を持たない。しかし、無理数回転環には自明でない射影があることが示されている。また、その結果を利用して θ による同型や森田同値の分類ができる。

定理 5.1. (Rieffel, Pimsner-Voiculescu)

- (1) $\{\tau_\theta(q); q \in A_\theta, q \text{ は射影}\} = (\mathbb{Z} + \mathbb{Z}\theta) \cap [0, 1]$.
- (2) A_θ と A_η が同型であるための必要十分条件はある整数 l があって $\theta = \eta + l$ または $\theta = -\eta + l$ となることである。
- (3) A_θ と A_η が森田同値であるための必要十分条件はある $g \in GL(2, \mathbb{Z})$ があって $g\theta = \eta$ となることである。

ただし、 $g\theta = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \theta = \frac{a\theta+b}{c\theta+d}$.

- (4) A を単位元を持つ C^* -環とする。
 A と A_θ が森田同値になる必要十分条件はある自然数 n とある $g \in GL(2, \mathbb{Z})$ があって A と $M_n(\mathbb{C}) \otimes A_{g\theta}$ が同型になることである。

これらの結果を利用して次が示せる。

定理 5.2.

θ を二次無理数で $p\theta^2 + l\theta + m = 0$ を満たすものとする。ただし、 p は素数。また、 \mathbb{K} を有理数体に θ を加えて生成される代数体とする。このとき、 A_θ が同型でない森田同値な部分環をもつならば p は \mathbb{K} で分岐または完全分解する。

注意 5.3. この定理は作用素環論的な動機をもつ問題を考える上で系として出てくるものである。詳細は [7] を参照すること。また、上の定理の数論

的な性質は実二次体の最大アーベル拡大に関する性質ではなく有理数体から実二次体への拡大の性質である. そのために Manin の予想とは直接関係があるかどうかはわからない. さらに数論の方ではこの性質は Gauss の時代からよく知られていることである.

参考文献

- [1] B. Blackadar, *Operator Algebras : Theory of C^* -Algebras and von Neumann Algebras*, Encyclopaedia of Mathematical Sciences, **122**, Springer, 2006.
- [2] A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press Inc. SanDiego, CA, 1994.
- [3] K.R. Davidson, *C^* -algebras by Example*, Fields Institute monographs , **6**, Amer. Math. Soc. , Providence, 1996.
- [4] 加藤和也, 黒川信重, 斉藤毅, 「数論 I Fermat の夢と類体論」, 岩波書店, 2005
- [5] Y. Manin, *Real multiplication and noncommutative geomtry*, In: The legacy of Niels Henrik Abel, Springer Verlag, Berlin (2004) 685-727.
- [6] P. Muhly, *Coordinates in Operator Algebra*, Book in preparation.
- [7] N. Nawata, *Morita equivalent subalgebras of irrational rotation algebras and real quadratic fields*, Preprint.
- [8] I. Raeburn and D. Williams, *Morita Equivalence and Continuous-Trace C^* -Algebras*, Mathematical Surveys and Monographs **60**, American Mathematical Society, Providence, RI, 1998.
- [9] M. A. Rieffel, *The cancellation theorem for projective modules over irrational rotation C^* -algebras*, Proc. London Math. Soc. (3) **47** (1983) 285-302.
- [10] D. Williams, *Crossed Products of C^* -Algebras*, Mathematical Surveys and Monographs **134**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2007.

Generating functions for multiple zeta values with fixed weight, depth and generalized height

若林 徳子 (近畿大学大学院総合理工学研究科)

多重ゼータ値とは、古くは Euler の時代から研究されている実数値である。近年、数論だけではなく物理学など様々な分野で不変量として多重ゼータ値が現れ興味を引いている。多重ゼータ値が有理数体上で生成するベクトル空間や代数の構造を解明することが研究目的としてあげられ、様々な手法を用いて研究されている。研究の手法の一つとして、多重ゼータ値を係数に持つ母関数について考えるというのがある。これは大野-Zagier([3]), 青木-昆布-大野 ([1]) や Li([4]) の研究によって知られている。今回は、weight, depth および Li([4]) によって導入された一般化された height を固定した等号付き多重ゼータ値の母関数が一般超幾何関数を用いて現されることを報告する。この結果は、近畿大学の青木貴史と大野泰生との共同研究で得られたものである。

1 Introduction

歴史上、最初に多重ゼータ値の研究を始めたのは Euler([2]) であり、Riemann zeta function

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}, \quad (\operatorname{Re}(s) > 1)$$

が原形となっている。Riemann zeta function の正の整数点での値は Euler の研究によって知れている。例えば、

$$\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}, \quad \zeta(4) = \frac{\pi^4}{90}, \quad \zeta(6) = \frac{\pi^6}{945}, \dots,$$

となり、一般に Bernoulli number B_{2k} ($\in \mathbf{Q}$) を用いて

$$\zeta(2k) = \frac{(-1)^{k-1} 2^{2k-1} B_{2k} \pi^{2k}}{(2k)!} \quad (k \in \mathbf{N})$$

と書き表される。多重ゼータ値とは Riemann zeta function の特殊値 (Riemann zeta values) を拡張したものである。多重ゼータ値には拡張の方法により 2 種類の定義がある。正整数 k_1, k_2, \dots, k_n (ただし収束の為 $k_1 \geq 2$ とする) に対し、

$$\zeta(\mathbf{k}) = \zeta(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{m_1 > m_2 > \dots > m_n > 0} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}},$$
$$\zeta^*(\mathbf{k}) = \zeta^*(k_1, k_2, \dots, k_n) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 1} \frac{1}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \dots m_n^{k_n}}$$

で定義される。通常，前者の ζ を多重ゼータ値，後者の ζ^* を等号付き多重ゼータ値と呼ぶ。Eulerが最初に研究を始めたのは等号付き多重ゼータ値 ζ^* の方であったが，最近では多重ゼータ値 ζ の方が多く研究されている。どちらも互いに他の有理数係数の線形結合で書き表されるので，互いに張るベクトル空間は一致する。 $n = 1$ ならば Riemann zeta values であるが，その他の多重ゼータ値の値は殆どの場合が具体的な値はわかっていない。本稿では等号付き多重ゼータ値 ζ^* について議論する。

自然数の組 $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ を index と呼び， $\text{wt}(\mathbf{k}) = k_1 + k_2 + \dots + k_n = k$ ， $\text{dep}(\mathbf{k}) = n$ ， $i\text{-ht}(\mathbf{k}) = \#\{l | k_l \geq i + 1\} = h_i$ をそれぞれ \mathbf{k} の weight, depth, i -height と呼ぶ。 i -height は $i = 0$ の時は depth であり， $i = 1$ の時は通常 height と呼ばれるものである。 $r \geq 1$ を固定し，整数 $k, n, h_1, h_2, \dots, h_r (k, n, h_i \geq 0)$ ， $j = 0, 1, 2, \dots, r - 1$ に対して index set I, I_j を次で定める。

$$I(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r) = \{\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) | \text{wt}(\mathbf{k}) = k, \text{dep}(\mathbf{k}) = n, \\ 1\text{-ht}(\mathbf{k}) = h_1, 2\text{-ht}(\mathbf{k}) = h_2, \dots, r\text{-ht}(\mathbf{k}) = h_r\}, \\ I_j(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r) = \{\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n) | \mathbf{k} \in I(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r), k_1 \geq j + 2\}.$$

$j = -1$ の時は $I_{-1} = I$ となる。等号付き多重ゼータ値の index になりうるのは I_0 に含まれる index である。整数 $k, n, h_1, h_2, \dots, h_r (k, n, h_i \geq 0)$ に対し， x_j をパラメーターとして次のような和 $G_0(1)$ ， $\Phi_0^*(1)$ を定義する。

$$G_0(1) = G_0(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r) = \sum_{\mathbf{k} \in I_0(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r)} \zeta^*(\mathbf{k}),$$

$$\Phi_0^*(1) = \Phi_0^*(x_1, x_2, \dots, x_{r+2}) \\ = \sum_{\substack{k \geq n + \sum_{i=1}^r h_i \\ n \geq h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_r \geq 0, h_1 \geq 1}} G_0(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r; 1) \\ \cdot x_1^{k-n-\sum_{i=1}^r h_i} x_2^{n-h_1} x_3^{h_1-h_2} \dots x_{r+1}^{h_{r-1}-h_r} x_{r+2}^{h_r}.$$

r を正整数とし， b_1, b_2, \dots, b_{r+1} を次により定める：

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + \dots + b_{r+1} = -(x_1 + x_2), \\ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_j \leq r+1} b_{i_1} b_{i_2} \dots b_{i_j} = -(x_{j+1} - x_1 x_j), \quad j = 2, 3, \dots, r+1. \end{cases}$$

Theorem 1 整数 r, m ($0 \leq m \leq r - 1$) に対し A_m を

$$A_m = \sum_{j=m}^{r-1} (x_{r+2-j} - x_1 x_{r+1-j}) \begin{Bmatrix} j \\ m \end{Bmatrix} + x_1 x_2 \begin{Bmatrix} r-1 \\ m \end{Bmatrix}$$

により定める。ただし， $\begin{Bmatrix} m \\ n \end{Bmatrix}$ は第2種スターリング数である。このとき次が成り立つ。

$$\Phi_0^*(1) = \left\{ 1 - (x_1 + x_2) - \sum_{q=0}^{r-1} (x_{r+2-q} - x_1 x_{r+1-q}) \right\}^{-1}$$

$$\times \sum_{m=0}^{r-1} A_m \left(\frac{d}{dt} \right)^m t {}_{r+2}F_{r+1} \left(\begin{matrix} 1-x_1, \overbrace{1, 1, 1, \dots, 1}^{r+1} \\ b_1+2, b_2+2, \dots, b_{r+1}+2 \end{matrix}; t \right) \Big|_{t=1},$$

ここで ${}_{r+2}F_{r+1} \left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r+2} \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r+1} \end{matrix}; t \right)$ は級数

$${}_{r+2}F_{r+1} \left(\begin{matrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r+2} \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r+1} \end{matrix}; t \right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha_1)_n (\alpha_2)_n \cdots (\alpha_{r+2})_n}{(\beta_1)_n (\beta_2)_n \cdots (\beta_{r+1})_n n!} t^n$$

で定義される一般超幾何関数である。

大野-Zagier([3]) では, weight, depth および height を固定した多重ゼータ値の和の母関数から多重ゼータ値間の関係式を導く研究がなされ, 通常の高重ゼータ値の和の母関数が Gauss の超幾何関数で表され, さらに Riemann zeta values を係数とする多項式で書けることが示されている. 青木-昆布-大野 ([1]) では, 等号付き多重ゼータ値の和の母関数が一般超幾何関数 ${}_3F_2$ を用いて表され, 特殊化することで等号付き多重ゼータ値間の関係式が導かれている. さらに Li[4] によって, 一般化された height の概念を用いて大野-Zagier([3]) が拡張され, weight, depth および一般化された height を固定した多重ゼータ値の和の母関数が一般超幾何関数 ${}_{r+1}F_r$ を用いて表されている. 我々の結果は, 青木-昆布-大野 ([1]) を Li([4]) が導入した一般化された height の概念を用いて拡張したものである.

2 Proof of main Theorem1

Theorem1 は, Li([4]) と同様の手法で証明することができる.

任意の index $\mathbf{k} = (k_1, k_2, \dots, k_n)$ に対し, 等号付き多重対数関数 $Li_{\mathbf{k}}^*(t)$ を次のように定義する.

$$Li_{\mathbf{k}}^*(t) = Li_{k_1, k_2, \dots, k_n}^*(t) = \sum_{m_1 \geq m_2 \geq \dots \geq m_n \geq 1} \frac{t^{m_1}}{m_1^{k_1} m_2^{k_2} \cdots m_n^{k_n}}.$$

ただし, 収束の為 $|t| < 1$ とする. $k_1 \geq 2$ の時 $t = 1$ に対し収束し, $Li_{\mathbf{k}}^*(1) = \zeta^*(\mathbf{k})$ となる. 次に, 以下のような和を定める. 正整数 $r, k, n, h_1, h_2, \dots, h_r$ ($k, n, h_i \geq 0$) に対し,

$$G(t) = G(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r; t) = \sum_{\mathbf{k} \in I(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r)} Li_{\mathbf{k}}^*(t),$$

$$G_j(1) = G_j(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r) = \sum_{\mathbf{k} \in I_j(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r)} \zeta^*(\mathbf{k}),$$

$$G_j(t) = G_j(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r; t) = \sum_{\mathbf{k} \in I_j(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r)} Li_{\mathbf{k}}^*(t),$$

ここで, $j = 0, 1, 2, \dots, r-1$ とする. index の集合が空のとき和は 0 とみなし,
 $G(\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{r+2}; t) = 1$ とする. $j = 0, 1, 2, \dots, r-1$ に対し,

$$G_j(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r) = G_j(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r; 1)$$

とする. 等号付き多重対数関数の微分公式として知られている

$$\frac{d}{dt} Li_{\mathbf{k}}^*(t) = \frac{d}{dt} Li_{k_1, k_2, \dots, k_n}^*(t) = \begin{cases} \frac{1}{t} Li_{k_1-1, k_2, \dots, k_n}^*(t) & (k_1 \geq 2 \text{ の時}), \\ \frac{1}{t(1-t)} Li_{k_2, k_3, \dots, k_n}^*(t) & (k_1 = 1 \text{ の時}), \end{cases}$$

および

$$\frac{d}{dt} Li_1^*(t) = \frac{1}{1-t}$$

を用いることで次のような Lemma を得る.

Lemma 1 (1) 任意の $k \geq n + \sum_{i=1}^r h_i$ および $n \geq h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_r \geq 1$ に対し,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} G_{r-1}(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r; t) \\ &= \frac{1}{t} \{G_{r-1}(k-1, n, h_1, h_2, \dots, h_r; t) \\ & \quad + G_{r-2}(k-1, n, h_1, h_2, \dots, h_r-1; t) - G_{r-1}(k-1, n, h_1, h_2, \dots, h_r-1; t)\} \end{aligned}$$

が成り立つ.

(2) j を $0 \leq j \leq r-2$ の整数とする. 任意の $k \geq n + \sum_{i=1}^r h_i$, $n \geq h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_r \geq 0$ および $h_{j+1} \geq 1$ に対し,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{G_j(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r; t) - G_{j+1}(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r; t)\} \\ &= \frac{1}{t} \{G_{j-1}(k-1, n, h_1, h_2, \dots, h_j, h_{j+1}-1, h_{j+2}, \dots, h_r; t) \\ & \quad - G_j(k-1, n, h_1, h_2, \dots, h_j, h_{j+1}-1, h_{j+2}, \dots, h_r; t)\} \end{aligned}$$

が成り立つもし $j = 0$ ならば,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{G_0(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r; t) - G_1(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r; t)\} \\ &= \frac{1}{t} \{G(k-1, n, h_1-1, h_2, \dots, h_r; t) - G_0(k-1, n, h_1-1, h_2, \dots, h_r; t)\} \end{aligned}$$

となる.

(3) 任意の $k \geq n + \sum_{i=1}^r h_i$ および $n \geq h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_r \geq 0$ に対し,

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \{G(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r; t) - G_0(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r; t)\} \\ &= \frac{1}{t(1-t)} G(k-1, n-1, h_1, h_2, \dots, h_r; t) \end{aligned}$$

が成り立つ.

次に母関数 $\Phi_j^*(t)$ を定義する.

$$\begin{aligned}\Phi_j^*(t) &= \Phi_j^*(x_1, x_2, \dots, x_{r+2}; t) \\ &= \sum_{\substack{k \geq n + \sum_{i=1}^r h_i \\ n \geq h_1 \geq h_2 \geq \dots \geq h_r \geq 0, h_{j+1} \geq 1}} G_j(k, n, h_1, h_2, \dots, h_r; t) \\ &\quad \cdot x_1^{k-n-\sum_{i=1}^r h_i} x_2^{n-h_1} x_3^{h_1-h_2} \dots x_{r+1}^{h_{r-1}-h_r} x_{r+2}^{h_r}.\end{aligned}$$

ここで $j = 0, 1, 2, \dots, r-1$ とする. $D = t \frac{d}{dt}$ と置くと, 次の Proposition のような微分方程式が得られる.

Proposition 1 r を正整数とすると,

$$\begin{cases} D\Phi_{r-1}^*(t) = x_1\Phi_{r-1}^*(t) + \frac{x_{r+2}}{x_{r+1}}(\Phi_{r-2}^*(t) - \Phi_{r-1}^*(t)), \\ D(\Phi_j^*(t) - \Phi_{j+1}^*(t)) = \frac{x_{j+3}}{x_{j+2}}(\Phi_{j-1}^*(t) - \Phi_j^*(t)), \quad j = 1, 2, \dots, r-2, \\ D(\Phi_0^*(t) - \Phi_1^*(t)) = \frac{x_3}{x_2}(\Phi^*(t) - 1 - \Phi_0^*(t)), \\ D(\Phi^*(t) - \Phi_0^*(t)) = \frac{t}{1-t}x_2 + \frac{1}{1-t}x_2(\Phi^*(t) - 1), \end{cases}$$

が得られる.

ここで $y_0 = \Phi_{r-1}^*(t)$, $y_j = \Phi_{r-1-j}^*(t) - \Phi_{r-j}^*(t)$ ($j = 1, 2, \dots, r-1$) および $y_r = \Phi^*(t) - \Phi_0^*(t)$ と置くと, 上の微分方程式は

$$\begin{cases} Dy_0 = x_1y_0 + \frac{x_{r+2}}{x_{r+1}}y_1, \\ Dy_j = \frac{x_{r+2-j}}{x_{r+1-j}}y_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, r-2, \\ Dy_{r-1} = \frac{x_3}{x_2}(y_r - 1), \\ Dy_r = \frac{1}{1-t}x_2(y_0 + y_1 + \dots + y_{r-1}) + \frac{t}{1-t}x_2, \end{cases}$$

となり, 次のような式が導かれる.

$$\begin{cases} y_j = \frac{x_{r+2-j}}{x_{r+2}}D^jy_0 - \frac{x_1x_{r+2-j}}{x_{r+2}}D^{j-1}y_0, \quad j = 1, 2, \dots, r-1, \\ y_r = \frac{x_r}{x_{r+2}}D^ry_0 - \frac{x_1x_2}{x_{r+2}}D^{r-1}y_0 + 1. \end{cases}$$

したがって次のような微分方程式が得られる.

$$\frac{x_2}{x_{r+2}}D^{r+1}y_0 - \frac{x_1x_2}{x_{r+2}}D^ry_0 = \frac{1}{1-t}x_2 \left(\sum_{j=0}^{r-1} \frac{x_{r+2-j} - x_1x_{r+1-j}}{x_{r+2}}D^jy_0 + \frac{x_2}{x_{r+2}}D^ry_0 \right) + \frac{t}{1-t}x_2.$$

これらより, 次のような Proposition を得る.

Proposition 2 $\Phi_{r-1}^*(t)$ は次の微分方程式を満たす.

$$\left\{ D^{r+1} - (x_1 + x_2)D^r - \sum_{j=0}^{r-1} (x_{r+2-j} - x_1x_{r+1-j})D^j - tD^r(D - x_1) \right\} \Phi_{r-1}^*(t) = tx_{r+2}.$$

上の微分方程式の両辺に左から $(D - 1)$ を掛け齊次方程式にすると,

$$\left\{ D \left[(D + 1)^{r+1} - (x_1 + x_2)(D + 1)^r - \sum_{j=0}^{r-1} (x_{r+2-j} - x_1 x_{r+1-j})(D + 1)^j \right] - t(D + 1)^{r+1}(D + 1 - x_1) \right\} \frac{\Phi_{r-1}^*(t)}{t} = 0$$

となる. ここで, 一般超幾何関数 ${}_{r+2}F_{r+1} \left(\begin{smallmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{r+2} \\ \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_{r+1} \end{smallmatrix}; t \right)$ は微分方程式

$$[D(D + b_1 - 1)(D + b_2 - 1) \cdots (D + b_{r+1} - 1) - t(D + a_1)(D + a_2) \cdots (D + a_{r+2})]F = 0$$

を満たすことが知られているので, $a_1 = 1 - x_1, a_2 = a_3 = \cdots = a_{r+2} = 1$ および

$$\begin{cases} b_1 + b_2 + \cdots + b_{r+1} = -(x_1 + x_2), \\ \sum_{1 \leq i_1 < i_2 < \cdots < i_j \leq r+1} b_{i_1} b_{i_2} \cdots b_{i_j} = -(x_{j+1} - x_1 x_j), j = 2, 3, \dots, r+1. \end{cases}$$

とすると, 次のような Theorem を得ることができる.

Theorem 2 r を正整数とし, b_1, b_2, \dots, b_{r+1} を上のようなものとする,

$$\begin{aligned} & \Phi_{r-1}^*(t) \\ &= \frac{x_{r+2} \cdot t}{1 - (x_1 + x_2) - \sum_{j=0}^{r-1} (x_{r+2-j} - x_1 x_{r+1-j})} \left[{}_{r+2}F_{r+1} \left(\begin{matrix} 1 - x_1, \overbrace{1, 1, 1, \dots, 1}^{r+1} \\ b_1 + 2, b_2 + 2, \dots, b_{r+1} + 2 \end{matrix}; t \right) \right] \end{aligned}$$

となる.

さらに,

$$\begin{cases} y_r = \Phi^*(t) - \Phi_0^*(t), \\ y_j = \frac{x_{r+2-j}}{x_{r+2}} D^j y_0 - \frac{x_1 x_{r+2-j}}{x_{r+2}} D^{j-1} y_0, \quad j = 1, 2, \dots, r-1 \end{cases}$$

より次のような式が得られる.

$$\Phi_0^*(t) = \sum_{j=0}^{r-1} \frac{x_{r+2-j} - x_1 x_{r+1-j}}{x_{r+2}} D^j y_0 + \frac{x_1 x_2}{x_{r+2}} D^{r-1} y_0.$$

上記の式において, 任意の整数 n に対して

$$D^n = \sum_{m=0}^n \begin{Bmatrix} n \\ m \end{Bmatrix} t^m \left(\frac{d}{dt} \right)^m$$

と書き換え, $t = 1$ とすることにより Theorem1 が得られる.

3 Specialization of main theorem

Theorem1において、特に任意の $l \geq 2$ に対し $r = l - 1$, $x_1 = x_2 = \cdots = x_l = 0$, $x_{l+1} = x$ と特殊化すると

$$\sum_{n=1}^{\infty} G_0(\ln, \underbrace{n, \dots, n}_l) x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^*(\underbrace{l, \dots, l}_n) x^n = \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{x}{j^l}\right)^{-1} \right\} \frac{x}{m^l}$$

となる。上記の式は、

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \prod_{j=1}^m \left(1 - \frac{x}{j^l}\right)^{-1} \right\} \frac{x}{m^l} = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{j^l}\right)^{-1} - 1$$

と変形することができ、したがって、

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \zeta^*(\underbrace{l, \dots, l}_n) x^n = \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x}{j^l}\right)^{-1}$$

という関係式が得られる。これは Zlobin([5]) によって与えられた $\zeta^*(\underbrace{l, \dots, l}_n)$ の母関数である。

上記の議論は次のように一般化できる： $\{c_j\}_{j=0}^{\infty}$ を数列とし、

$$\sum_{m=0}^N c_m \left(1 - \frac{c_{m-1}}{c_m}\right) = c_n,$$

ここで、 $c_{-1} = 0$ とする。これは自明である。上記の式に対して $c_0 = 1$, $c_m := \frac{1}{(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_m)}$ と置き換えると、次のような自明でない式を得る。

$$1 + \sum_{m=1}^N \frac{a_m}{(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_m)} = \prod_{m=1}^N (1-a_m)^{-1}.$$

$N \rightarrow \infty$ に極限をとると、次のような等式を得ることが出来る。

$$1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_m)} = \prod_{m=1}^{\infty} (1-a_m)^{-1}.$$

ここで、 $\sum |a_m|$ は収束するとみなす。

また、Theorem1において $x_4 = x_1 x_3$, $x_5 = x_1^2 x_3$, $x_6 = x_1^3 x_3$, \dots , $x_{r+2} = x_1^{r-1} x_3$ とすれば青木-昆布-大野 ([1]) の関係式

$$\Phi_0^*(1) = \frac{x_3}{(1-x_1)(1-x_2) - x_3} {}_3F_2 \left(\begin{matrix} 1-x_1, 1, 1 \\ b_1+2, b_2+2 \end{matrix}; 1 \right),$$

(ただし、

$$\begin{cases} b_1 + b_2 = -(x_1 + x_2), \\ b_1 b_2 = -(x_3 - x_1 x_2) \end{cases}$$

とする。)を復元することができる。

上記のように、Theorem1を特殊化することで既知の関係式を得ることができる。今後の課題は、Theorem1を特殊化することで既知でない多重ゼータ値間関係式を見つけ出すことである。多重ゼータ値間関係式を多くみつけ、多重ゼータ値が張るベクトル空間の構造を明らかにすることが目標である。

参考文献

- [1] T. Aoki, Y. Kombu and Y. Ohno, A generating function for sum of multiple zeta values and its applications, to appear in *Proc. Amer. Math. Soc.*.
- [2] L. Euler, Meditationes circa singulare serierum genus, *Novi Comm. Acad. Sci. Petropol.*, **20** (1775), 140-186, reprinted in *Opera Omnia ser. I*, vol. 15, B. G. Teubner, Berlin (1927), 217-267.
- [3] Y. Ohno and D. Zagier, Multiple zeta values of fixed weight, depth, and height, *Indag. Math.*, **12** (2001), 483-487.
- [4] Zhong-hua Li, Sum of multiple zeta values of fixed weight, depth and i -height, *Math.Z.* Vol. 258, Number 1 (2007).
- [5] S. A. Zlobin, Generating functions for values of a multiple zeta function, *Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh.* no. 2(2005), 55-59; English transl., *Moscow Univ. Math. Bull.* **60**(2005),44-48.

Classification of polarized manifolds containing Castelnuovo manifolds as their hyperplane sections*

早稲田大学 理工学術院 基幹理工学部 数学科
網谷 泰治[†] (Yasuharu AMITANI)

1 概要

compact 複素多様体 X とその上の very ample 直線束 L からなる対 (X, L) を本稿では **偏極多様体** (polarized manifold) と呼ぶ. 直線束 L に対してその大域切断のなす \mathbb{C} -ベクトル空間を $\Gamma(L)$ で表し, $N + 1 := \dim_{\mathbb{C}} \Gamma(L)$ とおく. L の very ample 性は $\Gamma(L)$ の基底 s_0, \dots, s_N によって決まる写像

$$\varphi_L: X \longrightarrow \mathbb{P}^N; x \mapsto (s_0(x) : \dots : s_N(x))$$

が閉埋め込みであることを意味するので, 偏極多様体 (X, L) は射影多様体 $\varphi_L(X) \subset \mathbb{P}^N$ と同一視することができる. 超平面 $H \subset \mathbb{P}^N$ と $\varphi_L(X)$ の交わりとして得られる多様体 $\varphi_L(X) \cap H$ を (X, L) の **超平面切断** (hyperplane section) という.

さて, 偏極多様体の代数幾何的研究においては一般に, 多様体おのおのにその超平面切断の性質が強く反映すると考えられており, 超平面切断が与えられた性質をもつ偏極多様体の分類問題に関して様々な研究がなされている. Lanteri-Palleschi-Sommese 氏 [9] は超平面切断が del Pezzo 多様体となる偏極多様体を分類している. また, 超平面切断が向井多様体となる偏極多様体の分類問題は 2002 年に Beltrametti-Fania-Sommese 氏 [5] により研究された. その後, 2004 年に Andreatta-Novelli-Occhetta 氏 [3] により上記性質を持つ偏極多様体の具体的な分類結果が得られている.

Castelnuovo 多様体は, 次数と Δ -種数を固定したときに断面種数が極大となる多様体であるが, del Pezzo 多様体や向井多様体を特別な場合として含んでいる. そこで本講演では, 超平面切断が Castelnuovo 多様体となる偏極多様体の分類問題を考察し, それら偏極多様体の分類結果を報告する.

記号

- $|L| : (X, L)$ の超平面切断のなす集合.

*第 4 回数学総合若手研究集会, 2008 年 2 月 12–15 日, 於 北海道大学学術交流会館.

[†]e-mail: amitani@toki.waseda.jp

- $H_d^k \subset \mathbb{P}^{k+1}$: k 次元非特異 d 次超曲面. 特に非特異 2次超曲面を \mathbb{Q}^k で表す.
- $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_k)$: 座標の重みが $(w_0, \dots, w_k) \in \mathbb{N}^{\oplus(k+1)}$ の k 次元重み付き射影空間. 特に次が成立する: $w_0 = \dots = w_k \implies \mathbb{P}(w_0, \dots, w_k) \cong \mathbb{P}^k$.
- $\mathcal{O}_X(m)$: $\mathbb{P}(w_0, \dots, w_k)$ の m 次超曲面で $X \subset \mathbb{P}(w_0, \dots, w_k)$ を切つて得られる部分多様体を大域切断として持つ (X 上の) 直線束.

2 超平面切断としての Castelnuovo 多様体

Castelnuovo 多様体の定義を説明するために, 偏極多様体 (X, L) の不変量を紹介する. 偏極多様体の次元を $n := \dim_{\mathbb{C}} X$ とする.

- **次数** $d(L) := \deg \varphi_L(X)$, すなわち \mathbb{P}^N の n 個の一般超平面で $\varphi_L(X)$ を切ったときに現れる点の個数.
- **Δ -種数** $\Delta(L) := n + d(L) - \dim \Gamma(L)$.
- **断面種数** $g(L) := (C \text{ の種数})$, ただし C は \mathbb{P}^N の $(n-1)$ 個の一般超平面で $\varphi_L(X)$ を切ったときに現れる非特異曲線.

定義より $d(L) \geq 1, g(L) \geq 0$ は明らかであるが, $\Delta(L) \geq 0$ も成立することが知られている. これら 3つの不変量が固定されたとき, 偏極多様体の構造を調べることは代数幾何学におけるひとつの興味深い問題である. 不変量の値が比較的小さい ($d(L) \leq 11, \Delta(L) \leq 4, g(L) \leq 5$) の場合には (X, L) の具体的な分類結果が得られている (例えば, [4], [8] 等).

さて, これらの不変量を取りうる値の範囲にはどのような制約が課せられるであろうか? この問に関して, 1990年に藤田隆夫氏 [7] (東京工業大) は, 偏極多様体の次数と Δ -種数が固定されたときに, 断面種数の上限式を明示的に与えている.

命題-定義 1(藤田 [7]) 偏極多様体 (A, \mathcal{H}) について,

$$(*) \quad g(\mathcal{H}) \leq \Delta(\mathcal{H})F - (d(\mathcal{H}) - \Delta(\mathcal{H}) - 1) \binom{F}{2}$$

が成立する. ただし, F は $\frac{d(\mathcal{H}) - 1}{d(\mathcal{H}) - \Delta(\mathcal{H}) - 1}$ の整数部分を, $\binom{F}{2}$ は二項係数を表す. 不等式 (*) において等号が成立する場合, (A, \mathcal{H}) を **Castelnuovo 多様体** と呼ぶ. \square

1次元の Castelnuovo 多様体は 19世紀末に Castelnuovo [6] によって研究された極大種数曲線に他ならない. そのため, Castelnuovo 多様体は極大種数曲線の高次元版と見なすことができる. Castelnuovo 多様体に関しては, 実に様々な種類の例が知られている.

Castelnuovo 多様体の例

- (1) $(H_d^n, \mathcal{O}_H(1))$;
- (2) $(G(2, 6), \mathcal{O}_G(1))$, ここで $G = G(2, 6) \subset \mathbb{P}^{14}$ は固定された複素 6 次元ベクトル空間内の 2 次元部分空間全体;
- (3) $(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^7, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1}(1))$;
- (4) $(C, \mathcal{O}_C(2))$, ここで $C \subset \mathbb{P}^2$ は平面曲線;
- (5) $(\mathbb{P}(\Theta), H(\Theta))$, ここで $\mathbb{P}(\Theta)$ は \mathbb{P}^2 上の接ベクトル束 Θ の射影化で, $H(\Theta)$ は $\mathbb{P}(\Theta)$ の tautological 直線束;
- (6) $(\text{Bl}(\mathbb{P}^3), b^*(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(2)) - E)$, ここで $b: \text{Bl}(\mathbb{P}^3) \rightarrow \mathbb{P}^3$ は 1 点 p のブローアップで, $E := b^{-1}(p)$.

2 次元以上の Castelnuovo 多様体 (A, \mathcal{H}) は, $\mathcal{H}^n < 2\Delta(A, \mathcal{H})$ となる場合には, 藤田氏 [7] により分類されている. $\mathcal{H}^n = 2\Delta(A, \mathcal{H})$ の場合には, (A, \mathcal{H}) は向井多様体 (すなわち, 反標準直線束が $\omega_A^{-1} \cong \mathcal{H}^{\otimes(n-2)}$ となる偏極多様体) となるのが分かるが, これらの多様体は向井茂氏 [10] (京大数理研) により分類されている. しかし, $\mathcal{H}^n > 2\Delta(A, \mathcal{H})$ となる場合には, (A, \mathcal{H}) の詳細な構造は分かっていない.

それでは, Castelnuovo 多様体が超平面切断となる偏極多様体はどのような構造を持つのか? 私は次の問題を提起した.

問題 ([1]) 超平面切断 A が非特異で, 適当な直線束 \mathcal{H} により (A, \mathcal{H}) が Castelnuovo 多様体となるとき, 偏極多様体 (X, L) を分類せよ. □

一般に, (X, L) が Castelnuovo 多様体であれば, $(A, L|_A)$ も Castelnuovo 多様体になることが知られている. この場合には, $L|_A \cong \mathcal{H}$ であることが容易に分かる. 次節では, 次数 d が A の次元 n より小さい場合に, 上記問題に対する解答を与える (定理 1). その結果, $L|_A \not\cong \mathcal{H}$ となる (X, L) が現れることが分かる. また, $d \geq n \geq 4$ の場合についても上記問題を考察し, (X, L) の具体的な分類結果を得た (定理 2).

3 結果と結論

定理 1 ([1]) X を compact 複素多様体とし, $\dim X = n + 1$ とする. また, $n > d \geq 1$ とする. このとき次の (I)–(III) は同値である.

- (I) very ample 直線束 L と非特異超平面切断 $A \in |L|$ が存在し, 適当な直線束 \mathcal{H} により (A, \mathcal{H}) が次数 d の Castelnuovo 多様体となる.

(II) (X, L) は次の (i)–(iii) のいずれかと同型:

- (i) $(W_d, \mathcal{O}_W(l))$, ここで $W_d \subset \mathbb{P}(l, 1^{n+2})$ は重み付き d 次超曲面かつ $l \mid d$;
- (ii) $(W_{2,d/2}, \mathcal{O}_W(l))$, ここで $W_{2,d/2} \subset \mathbb{P}(l, 1^{n+3})$ は $(2, d/2)$ 型の重み付き完全交叉多様体, $d \geq 4$, そして $l = 2$ または $l \mid d/2$;
- (iii) $(W_{2,2,2}, \mathcal{O}_W(l))$, ここで $W_{2,2,2} \subset \mathbb{P}(l, 1^{n+4})$ は $(2, 2, 2)$ 型の重み付き完全交叉多様体, $d = 8$, そして $l = 1$ または 2 .

さらに (i)–(iii) において, $L|_A \cong \mathcal{H} \iff l = 1$. □

この定理から「低次数 Castelnuovo 多様体を超平面切断として含む偏極多様体は, 重み付き完全交叉多様体に限られる」が導かれる. ここで, 重み付き射影空間の中の多様体 X が重み付き完全交叉であるとは, X の定義方程式の個数と余次元の値が等しいことをいう.

それでは, $d \geq n$ の場合には X の構造はどのようになるであろうか? 再び重み付き完全交叉になるであろうか? $n \geq 4$ の場合には, 次の分類結果が得られた.

定理 2([2]) (X, L) を偏極多様体とし, $\dim X = n + 1$ とする. (A, \mathcal{H}) は次数が $d \geq n \geq 4$ となる Castelnuovo 多様体であるとする. もし (X, L) が条件 $A \in |L|$ を満たすならば, 次のいずれかが成立する:

- (1) (X, L) は定理 1(II) における (i)–(iii) のいずれかと同型;
- (2) (X, L) は Andreatta-Novelli-Occhetta のリスト [3] のいずれかと同型;
- (3) (X, L) は Lanteri-Palleschi-Sommese のリスト [9] のいずれかと同型;
- (4) X は \mathbb{P}^1 上のファイブレーション. ただし, 一般ファイバー F は $\mathbb{P}(l, 1^n)$ における非特異重み付き a 次超曲面であり, $L|_F \cong \mathcal{O}_F(l)$ かつ $l \mid a$;
- (5) $(X, L) \cong (\mathbf{P}^{n+1}, \mathcal{O}_{\mathbf{P}}(2))$;
- (6) $(X, L) \cong (\mathbf{P}_B(\mathcal{F}), H(\mathcal{F}))$, ここで $H(\mathcal{F})$ は tautological 直線束. ただし (6-a) \mathcal{F} は線織曲面 B 上の階数 $n - 1$ のベクトル束, もしくは (6-b) \mathcal{F} は Castelnuovo 曲線 B 上の階数 n のベクトル束;
- (7) 非特異曲線 C への全射 $g: X \rightarrow C$ が存在する. ただし, (7-a) g は \mathbb{P}^n -束かつ任意のファイバー $F \cong \mathbb{P}^n$ について $L|_F \cong \mathcal{O}_F(2)$, もしくは (7-b) g は \mathbb{Q}^n -ファイブレーションかつ一般ファイバー $F \cong \mathbb{Q}^n$ について $L|_F \cong \mathcal{O}_F(1)$. □

一般的に 4 次元以上の重み付き完全交叉多様体については, 直線束の同型類からなる群 (Picard 群) は \mathbb{Z} と同型であることが分かっている. その一方, 定理 2(7-a) における X の Picard 群を計算すると, \mathbb{Z} と同型でないことが分かる. 結論として, 「高次数 Castelnuovo 多様体を超平面切断として含む偏極多様体は, 重み付き完全交叉多様体であるとは限らない」が導かれる.

参考文献

- [1] Y. Amitani, *On the structure of polarized manifolds containing Castelnuovo manifolds as ample divisors*, submitted.
- [2] Y. Amitani, *On the structure of polarized manifolds containing Castelnuovo manifolds as ample divisors. II.*, in preparation.
- [3] M. Andreatta, C. Novelli and G. Occhetta, *Connections between the geometry of a projective variety and of an ample section*, Math. Nachr., Vol. **279** (2006), no.13–14, 1387–1395.
- [4] G. M. Besana and A. Biancofiore, *Degree eleven projective manifolds of dimension greater than or equal to three*, Forum Math., **17** (2005), no.5, 711–733.
- [5] M. C. Beltrametti, M. L. Fania and A. J. Sommese, *Mukai varieties as hyperplane sections*, in *The Fano Conference*, 185–208, Univ. Torino, Turin, 2004.
- [6] G. Castelnuovo, *Ricerche di geometria sulle curve algebriche*, Atti R. Accad. Sci. Torino **24** (1889), 196–223.
- [7] T. Fujita, *Classification theories of polarized varieties*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1990.
- [8] P. Ionescu, *Embedded projective varieties of small invariants. II.*, Rev. Roumaine Math. Pures Appl. **31** (1986), no. 6, 539–544.
- [9] A. Lanteri, M. Palleschi and A. Sommese, *Del Pezzo surfaces as hyperplane sections*, J. Math. Soc. Japan, Vol. **49** (1997), No.3, 501–529.
- [10] S. Mukai, *Biregular classification of Fano 3-folds and Fano manifolds of coindex 3*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. **86** (1989), no. 9, 3000–3002.

サブリーマン多様体の無限小自己同型について

北川 友美子

大阪市立大学数学研究所 COE 上級研究所員

1 はじめに

滑らかな多様体上の接分布と、その上のリーマンファイバー計量の組をサブリーマン多様体と呼ぶ。このリーマンファイバー計量はカルノ・カラテオドリー計量とも呼ばれ、工学の世界では制御理論における最適制御に深く関係している。ここでは特に接分布が、そのセクションのブラケット積達で接空間全体を張るという条件をみたすようなものを考える。この条件は、bracket-generating または非ホロノミーと呼ばれている。このようなサブリーマン多様体の局所的な分類について考察する。

多様体上の接分布の構造は、サブリーマン多様体に密接に関係していて、様々な問題を考える上での出発点となる。非ホロノミーであるような接分布の代表的なものとして、Martinet 分布、接触構造、Engel 構造、カルタンの分布などが挙げられる。Martinet 分布は 3 次元の多様体上の 2 次元の分布であるが、特異点をもつため、2 回のブラケット積でやっと 3 次元の接空間を張ることができる。これは非常に扱いにくい分布である。接触構造はよく知られているが、余次元 1 で非退化なものである。これは 1 回のブラケット積で接空間全体を張るという美しい構造をしている。Martinet 分布に比べても非常に扱いやすい対象である。Engel 構造は 4 次元の多様体上の 2 次元の接分布で、これも 1 回のブラケット積によって 1 次元ずつ次元が上がる。つまり、2 回ブラケットを繰り返すと 4 次元の接空間を張る。Engel 構造は、接触構造と同様に局所的な不変量をもたない珍しい分布のひとつである。そして、カルタンの分布というのは、5 次元の多様体上の 2 次元の分布で、1 回のブラケット積で 1 次元上がり 2 回目を施すと 5 次元の接空間を張ってしまうような、特徴的な構造を持っている。E.Cartan によりその自己同型群は 14 次元以下であり、最大次元を持つものは例外型のリー群 G_2 に同型となることが示されている。このような多様体上の接分布に、リーマンファイバー計量を入れる。つまりサブリーマン多様体を考える。このとき、これらを分類しようという問題が自然に考えられる。まず、接分布の中でも最も幾何学的に重要である接触構造を対象にした。[1]において、等質なサブリーマン接触構造の無限小自己同型の芽のなすリー代数を調べた。その結果、 $2n+1$ 次元の多様体に対して、無限小自己同型は、 $(n+1)^2$ 次元以下となり、最大次元をもつものは 3 つの類に分かれることがわかった。また、その空間型も決定した。

さて、上で述べたエンゲル構造に対するサブリーマン構造を “サブリーマン・エンゲル構造” と呼ぶことにする。ここでは、三次元のサブリーマン接触構造とサブリーマン・エンゲル構造との関係を見ながら、彼自身の無限小自己同型について考察する。

2 サブリーマン接触多様体

上述のように, サブリーマン接触多様体とは, 奇数次元多様体 M 上の接触構造 D とその上のリーマンファイバー計量の組をいう. 一般に, 二つのサブリーマン多様体 (M, D, g) と (M', D', g') が同型であるとは, 微分同相写像 $\varphi: M \rightarrow M'$ が存在して $\varphi_*D = D'$, $\varphi^*g' = g$ を満たすときをいう. 特に $(M, D, g) = (M', D', g')$ のとき, このような φ を自己同型写像とよび, これら全体のなす群をサブリーマン多様体 (M, D, g) の自己同型群という. リーマン多様体の自己同型群が有限次元のリー群をなすことは良く知られているが, サブリーマン多様体の自己同型群については, これまでまだあまり研究されていない. ここでは, まずサブリーマン接触多様体の自己同型群について調べる. なお, 自己同型群そのものよりも寧ろ対応するリー代数にあたるもの, すなはち, 無限小自己同型の芽のなすリー代数の層 \mathcal{L} を扱う. これはリー代数の構造を持つ. M 上の局所ベクトル場 X で $L_X D \subset D$, $L_X g = 0$ をみたすものを (M, D, g) の無限小自己同型と呼んでいる. また, 点 $a \in M$ における \mathcal{L} の茎を \mathcal{L}_a であらわす. 写像 $\mathcal{L}_a \ni [X]_a \mapsto X_a \in T_a M$ がすべての $a \in M$ にたいして全射であるとき, \mathcal{L} は推移的である, または (M, D, g) は等質であるという (ここで $[X]_a$ は点 $a \in M$ における X の芽であり, X_a は X の $a \in M$ における値である). \mathcal{L}_a を巾零幾何の手法を用いて調べた. 正確には \mathcal{L}_a の形式的リー代数を扱っているが, その結果はリー代数の層 (Lie algebra sheaf) の議論に帰着するのでそのまま sheaf の記号を用いることにする. まず, この結果について述べることにする.

Theorem 1 \mathcal{L} を等質なサブリーマン接触多様体の無限小自己同型の芽のなすリー代数とすると, \mathcal{L} は最大次元 $(n+1)^2$ をとり, 最大次元をとるものは, 3つの類に分かれ, それぞれ $\mathfrak{u}(n+1)$, $\mathfrak{u}(n, 1)$, $\mathfrak{k} = \mathfrak{k}_{-2} \oplus \mathfrak{k}_{-1} \oplus \mathfrak{k}_0$ に同型となる. ここで, $\mathfrak{k}_{-2} = \mathbf{R}$, $\mathfrak{k}_{-1} = \mathbf{C}^n \cong \mathbf{R}^{2n}$, $\mathfrak{k}_0 = \mathfrak{u}(n)$ であり, 各ブラケットの作用は以下の通り.

- (i) $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{k}_{-2} \times \mathfrak{k}_0 \rightarrow 0$
- (ii) $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{k}_0 \times \mathfrak{k}_{-1} \rightarrow \mathfrak{k}_{-1}$; $[A, x] := Ax$ ($A \in \mathfrak{k}_0, x \in \mathfrak{k}_{-1}$)
- (iii) $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{k}_0 \times \mathfrak{k}_0 \rightarrow \mathfrak{k}_0$; $[X, Y] := XY - YX$ ($X, Y \in \mathfrak{k}_0$)
- (iv) $[\cdot, \cdot]: \mathfrak{k}_{-1} \times \mathfrak{k}_{-1} \rightarrow \mathfrak{k}_{-2}$; $[Z, W] := \text{Im}h(Z, W)$, ここで $h(\cdot)$ は \mathbf{C}^n 上の標準的なエルミート内積.

次に, リー代数 \mathcal{L} 達が, どのようにサブリーマン多様体として実現されるかを見てみよう.

- (i) \mathcal{L} が $\mathfrak{k}_{-2} \oplus \mathfrak{k}_{-1} \oplus \mathfrak{k}_0$ に同型となる場合, これは, 空間 $(\mathbf{R}^{2n+1}, D, g)$ の無限小自己同型のリー代数として実現される. ここで, D は

$$dz - \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n+1} (x_j dy_j - y_j dx_j) = 0$$

で定義される $\mathbf{R}^{2n+1}(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n, z)$ の接触構造であり, D 上の計量 g は,

$$g = (dx_1|_D)^2 + \dots + (dx_n|_D)^2 + (dy_1|_D)^2 + \dots + (dy_n|_D)^2$$

で与えられている.

- (ii) \mathcal{L} が $\mathfrak{u}(n+1)$ に同型となる場合, これは, 空間 $(S^{2n+1}, D, g|_D)$ の無限小自己同型のリー代数として実現される. ここで, S^{2n+1} は $(x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbf{R}^{2n+2}$ で

$$(x_1)^2 + (y_1)^2 + \dots + (x_{n+1})^2 + (y_{n+1})^2 = 1$$

をみたすもの全体の集合である. D は

$$\sum_i^{n+1} x_i dy_i - y_i dx_i|_{S^{2n+1}} = 0$$

で定められる接触構造で,

$$g = (dx_1)^2 + (dy_1)^2 + \dots + (dx_{n+1})^2 + (dy_{n+1})^2.$$

- (iii) \mathcal{L} が $\mathfrak{u}(n, 1)$ に同型となる場合, これは, 超局面 $(\Sigma^{2n+1}, D, g|_D)$ の無限小自己同型のリー代数として実現される. ここで, Σ^{2n+1} は $(x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1}) \in \mathbf{R}^{2n+2}$ で

$$(x_1)^2 + (y_1)^2 + \dots - (x_{n+1})^2 - (y_{n+1})^2 = -1$$

をみたすもの全体の集合. また, D は

$$\sum_{j=1}^n (y_j dx_j - x_j dy_j) - (y_{n+1} dx_{n+1} - x_{n+1} dy_{n+1}) = 0$$

で与えられる接触構造である.

$$g = (dx_1)^2 + (dy_1)^2 + \dots + (dx_n)^2 + (dy_n)^2 - (dx_{n+1})^2 - (dy_{n+1})^2$$

は $\mathbf{R}^{2n+2}(x_1, y_1, \dots, x_{n+1}, y_{n+1})$ 上の pseudo-riemannian 計量であり, それを接触構造 D に制限した $g|_D$ は 正定値内積となる.

3 サブリーマン・エンゲル多様体

先ほど述べたように, エンゲル構造とは, 4次元の多様体上の2次元の接分布で2回ブラケットを繰り返すことによって接空間全体を張るようなものである. これにリーマンファイバー計量を入れたものをサブリーマン・エンゲル構造(多様体)と呼ぶことにしよう. 4次元多様体上のエンゲル構造は標準的な座標 (x, y, z, w) を用いて

$$dz - ydx = dy - wdx = 0$$

で表される. よく見ると, $\omega_1 = dz - ydx$ と $\omega_2 = dy - wdx$ は, それぞれ3次元の空間空間 (x, y, z) と (x, y, w) の上の接触形式になっていることがわかる. つまり, エンゲル構造は, 二つの接触形式から生成されるという特別な構造をしているわけである. これは order が 2 の higher-order contact structure と呼ばれている. この構造を jet 空間と呼ばれるものを通してもう少し詳しく述べることにする.

一般にファイバー多様体 $\pi: M \rightarrow N$ にたいして, その ν -jet 空間 $J^\nu(M, N)$ は order ν の higher order contact structure を持つ. すなわち, 次のようになっている:

$$TJ^\nu(M, N) = D^{-\nu-1} \supset D^{-\nu} \supset \cdots \supset D^{-1}.$$

これは, 局所座標を用いて次のように定義される. (u^1, \dots, u^n) を N の局所座標系, $(u^1, \dots, u^n, w^1, \dots, w^m)$ を M の局所座標系とする. このとき, $J^\nu(M, N)$ の座標系 $(u^1, \dots, u^n, \dots, p_\alpha^\rho)$ を得る. ここで, $1 \leq \rho \leq m$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \sum \alpha_i \leq \nu$, $p_0^\rho = \omega^\rho$ である.

$$\omega_\alpha^\rho = dp_\alpha^\rho - \sum_{i=1}^n p_{\alpha+1_i}^\rho dx^i \quad (1 \leq \rho \leq m, 0 \leq |\alpha| \leq \nu - 1)$$

とおく. 但し, $\alpha+1_i = (\alpha_1, \dots, \alpha_i+1, \dots, \alpha_n)$ である. このとき, 微分式系 $D^a (a \leq -1)$ は,

$$D^a = \{\omega_\alpha^\rho = 0, \rho = 1, \dots, m, |\alpha| \leq \nu + a\}$$

で定められる. また, $J^\nu(M, N)$ 上のベクトル場のことを order ν の接触ベクトル場と呼ぶ. これらは, 微分式系 D^a 達を不変にし, いつでも order $\nu+l$ の接触ベクトル場に持ち上げることができる. すなわち, $J^{\nu+l}(M, N)$ のベクトル場に持ち上げることができて, その微分式系を不変にする.

さて, この記号に従えば, 三次元接触多様体は, $J^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ であり, 接触構造は

$$\omega_0 = dp_0 - p_1 dx = 0$$

で定義される. また, エンゲル多様体は, この上の $J^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ になっており, エンゲル構造は

$$\omega_0 = dp_0 - p_1 dx = \omega_1 = dp_1 - p_2 dx = 0$$

で定義される. 三次元接触多様体 $J^1(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ のベクトル場は, エンゲル多様体 $J^2(\mathbf{R}^2, \mathbf{R})$ に持ち上げることができて, その微分構造を不変にする. このことから, サブリーマン接触多様体の無限小自己同型とサブリーマン・エンゲル多様体の無限小自己同型が, ある場合において一致していると推測できる. 実際に計算を施すと丁度対応するものが存在した. 本講演では, この場合をふくめて, サブリーマン・エンゲル多様体の無限小自己同型について考察する.

参考文献

- [1] Y. Kitagawa, The infinitesimal automorphisms of a homogeneous subriemannian contact manifold, memoirs of Nara Women's University, No.20, (2005), pp. 147–163.
- [2] T. Morimoto, Transitive Lie algebras admitting differential systems, Hokkaido Math. J. vol.17 (1988), pp. 45–81.
- [3] T. Morimoto, Lie algebras, geometric structures and differential equations on filtered manifolds, Advance Studies in Pure Mathematics 37 (2002), pp. 205–252.

- [4] T. Morimoto, The curvatures of a subriemannian manifold (in Japanese),
Kokyuroku,(2003), pp.109–113.

ヘリオトロン型核融合装置における α 粒子の軌道解析

Analysis of the Alpha Particle Orbits in Heliotron Type Fusion Device

北海道大学大学院工学研究科

關 良輔

【はじめに】

ヘリオトロン型核融合装置とは、外部コイルのみで閉じ込め磁場を生成するトーラス型(ドーナツ型)磁場閉じ込め核融合装置の 1 種であり、本質的に定常運転が可能であるなどの利点がある。中でも、大型ヘリカル装置(LHD)は、岐阜県土岐市の核融合科学研究所にある世界最大級のヘリオトロン型装置で、理論と実験の両面から研究が進められている[1]。

この磁場閉じ込めによる核融合炉を実現するためには、高いベータ値(プラズマ圧力と磁気圧との比)の達成が必要である。そのためには、プラズマ中において、電磁流体的に平衡が存在し、安定であること、個々の荷電粒子が長時間保持できることが必要とされる。特に、ベータ(プラズマ圧力)の増加によって磁場構造が変化した場合での、プラズマ加熱、核融合反応で生成された高エネルギーの荷電粒子が長時間保持できるか、その荷電粒子が装置内でどのような挙動を示すかを、粒子軌道解析を用いて検証することは、磁場閉じ込め核融合装置の性能を評価する上で、きわめて重要である。

現在、LHD の実験では、ベータ値が 5 %の高ベータプラズマを達成されている[2]。この LHD の高ベータプラズマでは周辺の磁気面が乱れ、最外殻磁気面(LCFS)が小さくなる、周辺磁場領域が広がるなどの変化が現われる[3]。このような場合、最外殻磁気面外側の周辺磁場領域に出ても再び最外殻磁気面内部に戻ってくる Re-entering particle(再突入粒子)が重要な役割を果たす可能性が高く、周辺磁場領域も含めた高エネルギー粒子の振舞いを解析する必要がある。特に、Deuterium (D)-Tritium (T)核融合反応により発生しプラズマ加熱に用いられる α 粒子は 3.5 MeV の高いエネルギーをもっているため、粒子軌道の磁気面からのズレである「ドリフト」が大きく、プラズマ中心(磁気軸)付近の粒子も最外殻磁気面外側に出ると予想できる。そのため、 α 粒子の解析では、Re-entering 粒子がより重要な役割を果たすと考えられる。

そこで本研究では、将来の核融合装置での磁場強度と想定される $B_{ax} = 6 \text{ T}$ 中での α 粒子(3.5 MeV)の軌道とほぼ同じ軌道を持つ、 $B_{ax} = 1 \text{ T}$ 中でのプロトン(100 keV)を追跡し、 α 粒子(3.5 MeV)の軌道の特性や Re-entering の影響などを調べることを目的とした。

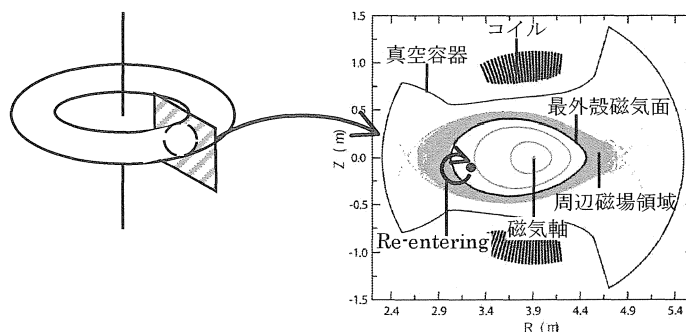


図 1. LHD の磁場構造($\beta = 2.7 \%$)

【粒子軌道追跡コード】

本研究では、粒子の軌道を追跡するため案内中心(磁場中での荷電粒子の旋回中心)の運動を記述する

$$\frac{dx}{dt} = v_{\parallel} \frac{\mathbf{B}}{B} + \left(\frac{\mu B}{q} + \frac{M}{q} v_{\parallel}^2 \right) \frac{\mathbf{B} \times \nabla B}{B^3} \quad (1)$$

および

$$M \frac{dv_{\parallel}}{dt} = -\mu \frac{\mathbf{B} \cdot \nabla B}{B} \quad (2)$$

を数値的に解くコードを開発した。ここで、 \mathbf{x} は粒子の位置、 M は粒子の質量、 q は粒子の電荷、 μ は磁気モーメント、 v_{\parallel} は磁場に平行方向の粒子の速度、 \mathbf{B} は磁場をそれぞれ表している。

開発したコードでは、まず初期条件として粒子のエネルギー、初期ピッチ角(磁力線と粒子速度とのなす角)、出発点、追跡時間を与え、式(1)、(2)を6次精度のRunge-kutta法[4]を用いて数値的に解いた。その際に必要となる粒子の現在位置における磁場、磁場強度の勾配を3次精度スプライン補間法[5]を用いて求めた。また、追跡中の粒子が真空容器壁に到達した場合、その粒子は損失粒子とみなし、計算を終了した。

【粒子の分類】

本研究では、閉じた磁気面の存在を仮定していない平衡磁場計算コード、HINTコード[5, 6]により得られたベータ値 $\beta = 2.7\%$ 、磁場強度 $B_{ax} = 1 \text{ T}$ の平衡磁場を用いて、高エネルギープロトンの案内中心の軌道を30 ms追跡した。このとき、プロトンの出発位置、初期ピッチ角を様々に変化させ、多数の粒子を追跡した。

その結果、得られた粒子の軌道の様子から粒子を通過粒子、バナナ粒子、カオス軌道粒子、即損失粒子の4種類に分類した。これらの軌道の例を図2に示す。図2から、通過粒子とバナナ粒子は閉じた軌道を描いていることがわかる。カオス軌道粒子は、磁気ミラーによる反射と通過を繰り返しながら運動可能領域全体を運動している。また、即損失粒子はポロイダル方向に1周も周回せずに損失する粒子である。

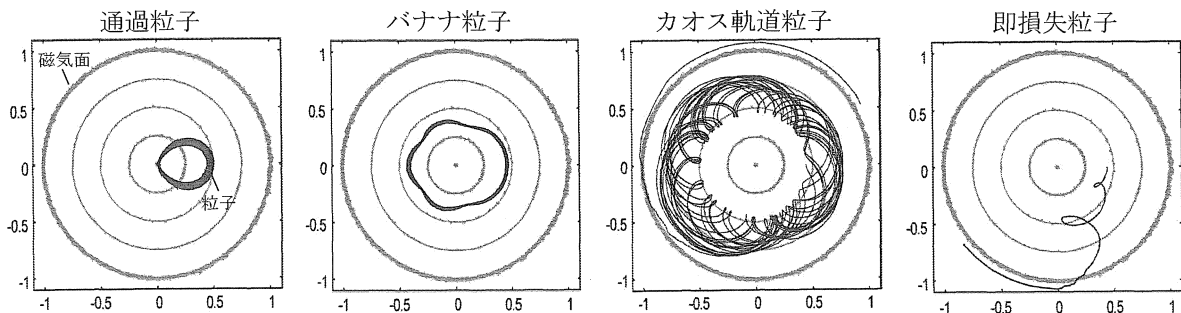


図2. 粒子軌道の例($B_{ax} = 0.5 \text{ T}$, $\beta = 0\%$)

【粒子の軌道特性】

上記の4つの分類に基づいた、LHDにおける粒子の軌道特性を図3に示す。図の横軸は、 $Z = 0 \text{ m}$ での出発点を表しており、縦軸は π で規格化された初期ピッチ角を表している。この図から、初期ピッチ角 0.5π を持つ粒子の多くは、バナナ粒子とカオス軌道粒子になることがわかる。特に、磁気軸付近を出発する粒子では、初期ピッチ角 0.5π の粒子の多くがカオス軌道粒子になり、そのほとんどが30 msの間に損失していることがわかる。また、 $R = 3.6 \text{ m}$ 付近を出発した粒子では、初期ピッチ角 0.5π 付近を除き、その多くの粒子が通過粒子になっている。通過粒子になる初期ピッチ角の領域は、出発点が最外殻磁気面付近に近づくにつれて、狭くなる。即損失粒子は、 $R = 3.05 \text{ m} \sim 4.0 \text{ m}$ の間には現われずに、最外殻

磁気面外側に多く現われた。また、即損失粒子は、初期ピッチ角 0.35π もしくは、初期ピッチ角 0.7π 付近の粒子にも現われた。

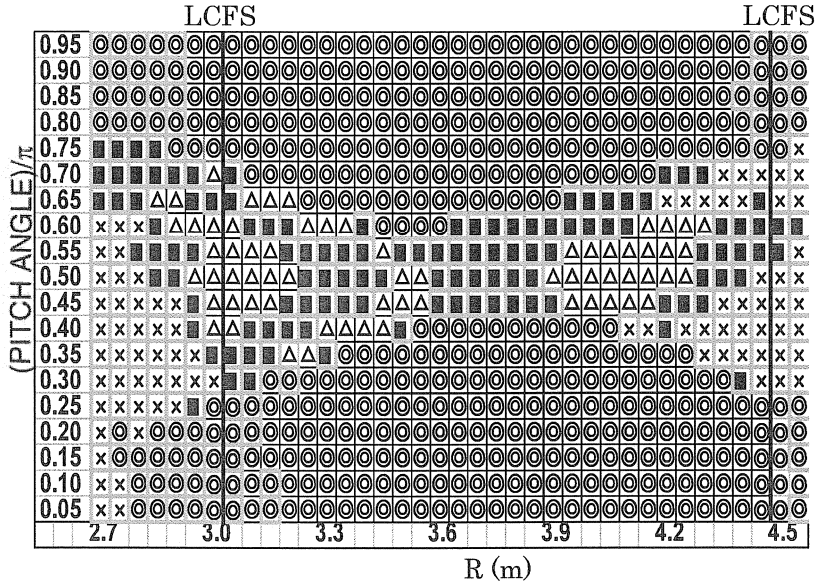


図 3. 粒子の軌道特性 (◎:通過, △:バナナ, ■:カオス, ×:即損失 □:損失した粒子)

【Re-entering particle】

Re-entering 粒子の α 粒子の閉じ込めへの効果を調べるために、Re-entering 粒子を考慮した場合と Re-entering 粒子を損失とみなした場合について、 α 粒子の損失の割合を評価した。図 4 は、ピッチ角平均された損失粒子の割合を示している。実線は、Re-entering 粒子を適切に扱った損失粒子の割合であり、破線は Re-entering 粒子を損失とみなした場合の損失粒子の割合である。

この図から、Re-entering 粒子を考慮した場合 (実線) と Re-entering 粒子を損失とみなした場合 (破線) の間には大きな違いがあることがわかる。これは、高ベータプラズマ中においても、多くの Re-entering 粒子が存在することを示している。特に、 $R = 3.3\text{m}$ 付近を出発する粒子に破線と実線の違いが大きく、この場所から出発した粒子の多くが Re-entering 粒子となることを示している。

また、Re-entering 粒子を損失とみなした場合 (破線) では、Re-entering 粒子を考慮した場合 (実線) に比べ損失粒子の割合を過大評価していることがわかる。この結果は、LHD の高ベータプラズマ中での α 粒子のような高エネルギー粒子の軌道解析では、Re-entering 粒子を適切に扱うことが重要であることを示している。

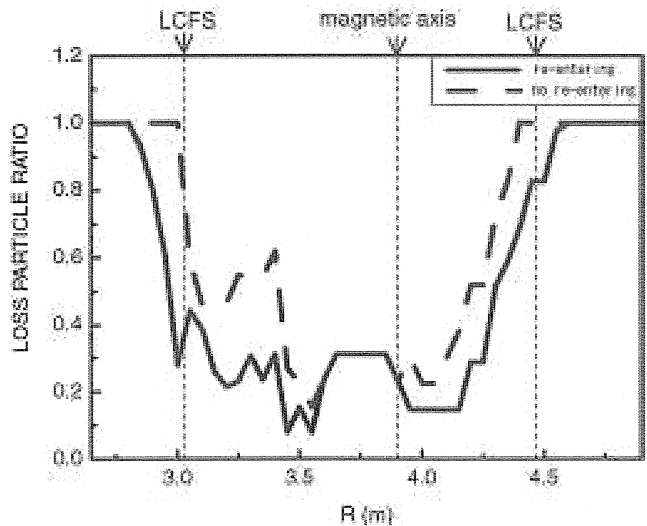


図 4. 損失粒子の割合 ($B_{ax} = 1\text{T}$, $\beta = 2.7\%$)
(実線:re-entering, 破線:no re-entering)

【 α 粒子の閉じ込め】

次に、D・T 核融合により発生する α 粒子の閉じ込めについて考察する。 $B_{ax} = 6 \text{ T}$ 中の 3.5 MeV の α 粒子のラーモア半径は、 $B_{ax} = 1 \text{ T}$ 中での 100 keV のプロトンのラーモア半径とほぼ同じであり、 $B_{ax} = 1 \text{ T}$ 中での 100 keV のプロトンでの解析は、 $B_{ax} = 6 \text{ T}$ 中の α 粒子の解析とほぼ同じである。

D・T 核融合により発生する α 粒子の発生位置は、プラズマ圧力の分布に依存しており、 α 粒子はプラズマコアのようにプラズマ圧力が高い領域で多数発生する。そこで、 α 粒子の閉じ込めを調べるために、プラズマコア領域 ($3.3 \text{ m} < R < 4.2 \text{ m}$) から追跡された粒子に着目する。

図 3 から、プラズマコア領域 ($3.3 \text{ m} < R < 4.2 \text{ m}$) から追跡された粒子には、極めて短時間で損失する即損失粒子が存在していないことがわかる。また、この領域で、 30 ms の間、真空容器壁の内側に閉じ込められている粒子は通過粒子とバナナ粒子であり、ほとんどのカオス軌道粒子は損失している。これらのことから、 α 粒子の“lifetime” (損失するまでの時間) は、カオス軌道粒子の“lifetime”によって決められることがわかる。

このカオス軌道粒子の平均の“lifetime”は、約 10^{-3} s であった。この“lifetime”と衝突時間(エネルギー緩和時間、等方化時間)を比較することで、 α 粒子がプラズマを加熱するのに十分な時間閉じ込められているかがわかる。そこで、本研究では、イオン温度 $T_i = 10 \text{ keV}$ 、イオン密度 $n_i = 10^{21} \text{ m}^{-3}$ 、電子温度 $T_e = 10 \text{ keV}$ 、電子密度 $n_e = 10^{21} \text{ m}^{-3}$ を持つ D・T プラズマを場のプラズマとして想定した。この場合、 α 粒子とイオンとの等方化時間は $\tau_a \sim 0.9 \text{ s}$ であり、 α 粒子と電子とのエネルギー緩和時間は $\tau_r \sim 1.6 \times 10^{-2} \text{ s}$ であった。

これらの衝突時間と比べると、カオス軌道粒子の“lifetime”は、非常に短いことがわかる。このことは、カオス軌道粒子がプラズマを十分に加熱する前に損失してしまうことを意味している。これに加えて、現在の解析では閉じ込められている通過粒子とバナナ粒子についても、トーラスを周回する間に場の粒子との衝突によってピッチ角が変化し、カオス軌道粒子となり、損失する可能性がある。そのため、通過粒子やバナナ粒子であっても、クーロン衝突によるプラズマの加熱が十分にできない恐れがある。

本研究では、現在の LHD (大半径 $R_{ax} = 3.9 \text{ m}$ 、平均プラズマ半径 $a_p \simeq 0.64 \text{ m}$ [8]) で α 粒子の軌道の解析を行った。しかし、将来、核融合点火条件を満足するようなヘリカル型核融合炉では、 $R_{ax} = 10 \text{ m}$ 、 $a_p \simeq 2 \text{ m}$ 程度の大きさが想定されている [9]。このような装置ではカオス軌道粒子の運動可能領域が増加し、プラズマを十分に加熱できるくらい長い時間、 α 粒子が閉じ込められると期待できる。

また、クーロン衝突によるプラズマ加熱の代わりに、“alpha-channeling”と呼ばれるプラズマ加熱が提唱されている [10]。この“alpha-channeling”では、クーロン衝突より短い時間スケールで、 α 粒子によって増幅された波によってプラズマは加熱される。この加熱方法を利用できれば、クーロン衝突より短い時間スケールで、プラズマを加熱することができる。

【まとめ】

本研究では、LHD の $B_{ax} = 6 \text{ T}$ 、高ベータプラズマ中の α 粒子 (3.5 MeV) の軌道を詳しく調べた。このため、本研究では、 $B_{ax} = 6 \text{ T}$ の 3.5 MeV の α 粒子粒子とほとんど同じラーモア半径を持つ磁場強度 1 T 中の 100 keV のプロトンを案内中心の方程式を数値的に解くことで追跡した。その結果、以下の知見を得た。

- ・ プラズマコアから追跡した粒子では、通過粒子が多い。しかし、初期ピッチ角 0.5π 付近を持つ粒子はカオス軌道粒子であり、そのほとんどは、計算時間の間に損失していた。

- ・ LHD の高ベータプラズマ中において、 α 粒子のような高エネルギー粒子の軌道解析では、Re-entering 粒子を適切に扱うことが重要である。
- ・ α 粒子の”lifetime”は、そのほとんどが損失しているカオス軌道粒子の”lifetime”によって決定される。
- ・ カオス軌道の α 粒子は、 α 粒子と電子のエネルギー緩和時間よりもずっと短い時間で損失する。そのため、カオス軌道の α 粒子は、プラズマを十分に加熱できない。
- ・ 将来のヘリカル型核融合装置は、本研究で対象とした LHD よりも大きくなる予定である。そのような装置では、現在の解析で損失しているカオス軌道の α 粒子も、プラズマを十部に加熱できるくらい長い時間閉じ込められる可能性がある。
- ・ “alpha-channeling”を用いることで、 α 粒子は、その”lifetime”によらずプラズマを加熱できる可能性がある。

今後は、衝突を考慮した α 粒子の解析や、将来の核融合装置を想定した大型の装置での α 粒子の閉じ込め、Re-entering の影響などを調べる予定である。

- [1] O. Motojima *et al.*: Nucl. Fusion, **43**, 1674 (2003).
- [2] <http://www.nifs.ac.jp> .
- [3] T. Hayashi *et al.*, Contrib. Plasma Phys. **42**, 2-4, 309 (2002)
- [4] D. Sarafyan: J. Math, Anal and Appl. **40** 436 (1972).
- [5] 渡辺二太: 日本応用数学会論文誌 **1** 101 (1991).
- [6] T. Hayashi, Theory of Fusion Plasmas, EUR 12149 EN 11 (1989).
- [7] K. Harafuji, T. Hayashi and T. Sato, J. Comput. Phys. **81** 169 (1989).
- [8] A. Iiyosi *et al.*, Nucl. Fusion **39**, 1245 (1999).
- [9] O. Mitarai and S. Sudo, Fusion Technol., **27** 377 (1995).
- [10] N. J. Fisch *et al.*, Proc. 16th IAEA Conf. Fusion energy, montreal (1996) A2-3.

THE GENERALIZED FEYNMAN-KAC FORMULA WITH A LEBESGUE-STIELTJES MEASURE AND RANDOM VARIABLES

JUN TANAKA

1. INTRODUCTION

I will discuss my adviser Dr. Michel Lapidus' result titled the Generalized Feynman-Kac formula with a Lebesgue-Stieltjes measure, mostly discussed in Chapter 17.2 in the book, "The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus," (Oxford Univ. press, 2000) by Gerald W. Johnson and Michel L. Lapidus. This Feynman-Kac formula was obtained for an arbitrary Borel measure. For this talk, I will concentrate on the more physically relevant case of a measure with a finitely supported discrete measure and for simplicity, on the case of a continuous measure + a Dirac mass at τ_i 's. I will show that the function defined by the function $u(t)$ associated with the corresponding generalized Feynman-Kac functional satisfies a suitable differential equation and integral equation. I will then deduce that $u(t)$ has a discontinuity at τ_i . It will follow that in the quantum mechanical case, $u(t)$ satisfies a suitable form of the Schrodinger equation between the time discontinuities (i.e, here, in the open intervals determined by τ_i s). Theorem 1 to 4 hold only for the fixed τ_i . In order to obtain a more realistic model for scattering process, we must provide some kind of randomness into τ_i . For my research, I will introduce the Poisson process into Theorem 4 of Dr. Michel Lapidus's result.

2. MAIN RESULTS

Definition 1. Let η be a complex Borel measure on $[a, b]$ and $\eta = \mu + \nu$ be the unique decomposition of η into a continuous measure μ and a discrete measure ν .

We limit ourself to the case when ν is finitely supported.

Assume

$$\nu = \sum_{p=1}^h \omega_p \delta_{\tau_p}$$

with

$$a \leq \tau_1 < \tau_2 < \dots < \tau_h \leq \tau_{h+1} = b.$$

Definition 2. Let \mathcal{C} be the space of continuous functions from $[a, b]$ to \mathbb{R}^N .

Let $\mathcal{C}_0 = \{x \in \mathcal{C} | x(a) = 0\}$, $t \in [a, b]$, and $Re\lambda > 0$.

Define a bounded linear operator $K_\lambda^t(F)$, from $L^2(\mathbb{R}^N)$ to itself by the wiener integral:

Date: January, 10, 2008.

$$(K_\lambda^t(F)\Psi)(\xi) = \int_{\mathcal{C}_0^t} F(\lambda^{-\frac{1}{2}}x + \xi)\Psi(\lambda^{-\frac{1}{2}}x(t) + \xi)dm(x)$$

where $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^N)$, $\xi \in \mathbb{R}^N$, and

$$F(x) = \exp\left(\int_{[a,t)} \theta(s, x(s))d\eta(ds)\right), \quad x \in \mathcal{C}$$

associated with the potential θ and the Lebesgue-Stieltjes measure η .

Theorem 1. For $p=0, \dots, n$, the operator function u satisfy the Volterra-Stieltjes integral equation

$$u(t) = e^{-(t-\tau_p)\frac{H_0}{\lambda}} e^{w_{\tau_p}\theta(\tau_p)}u(\tau_p) + \int_{\tau_p}^t e^{-(t-s)\frac{H_0}{\lambda}} \theta(s)u(s)\mu(ds).$$

for all $t \in (\tau_p, \tau_{p+1}]$ where $u(t) := K_\lambda^t(\tilde{F})$.

Theorem 2. For l-a.e. $t \in (\tau_p, \tau_{p+1}]$,

$$(1) \quad \frac{du}{dt}(t) = \left[-\frac{H_0}{\lambda} + \frac{du}{ds}(t)\theta(t)\right]u(t).$$

where $\frac{du}{ds}(t)$ denote the Radon-Nikodyn derivative of μ with respect to Lebesgue measure l .

Remark 1. Equation (1) is associated with Heat Equation when $\lambda = 1$ and the Schrodinger equation $\lambda = i$.

Theorem 3. The function u is strongly left continuous in $(a, b]$. Moreover, for $p=0, \dots, n$, u is strongly continuous in $(\tau_p, \tau_{p+1}]$ and

$$u(\tau_p+) = e^{w_{\tau_p}\theta(\tau_p)}u(\tau_p).$$

where $u(\tau_p+)$ denote the strong limit of $u(t)$ as $t \rightarrow \tau_p$, $t > \tau_p$.

Corollary 1. Assume that $\eta = \mu$ is a continuous measure. Then for all $t \in [a, b]$,

$$u(t) = e^{-(t-a)\frac{H_0}{\lambda}} + \int_a^t e^{-(t-s)\frac{H_0}{\lambda}} \theta(s)u(s)\mu(ds).$$

Moreover, u is strongly continuous for all $t \in [a, b]$ and satisfies the differential equation (1) l-a.e. in (a, b) .

Theorem 4. let $\eta = \mu + \nu$ be defined as previously.

$$u(t) = P(t, a), t \in [a, \tau_1].$$

$$u(t) = P(t, \tau_1)e^{w_{\tau_1}\theta(\tau_1)}P(\tau_1, a), t \in (\tau_1, \tau_2].$$

$$u(t) = P(t, \tau_2)e^{w_{\tau_2}\theta(\tau_2)}P(\tau_2, \tau_1)e^{w_{\tau_1}\theta(\tau_1)}P(\tau_1, a)$$

$$t \in (\tau_2, \tau_3].$$

⋮

$$u(t) = P(t, \tau_n)e^{w_{\tau_n}\theta(\tau_n)}P(\tau_n, \tau_{n-1})e^{w_{\tau_{n-1}}\theta(\tau_{n-1})} \dots e^{w_{\tau_1}\theta(\tau_1)}P(\tau_1, a),$$

$$t \in (\tau_n, b]$$

3. MY RESEARCH

Here, we would like to provide a model for multiple scattering.

Please imagine that a particle is projected onto a target. It is then subjected to multiple scattering when it collides with the atoms of the target. When the projectile leaves the target, it is in the state $\Psi(t) = u(t) \Psi$ with $u(t)$ as in the last equation.

The factor $e^{w_{\tau_p} \theta(\tau_p)}$ can be interpreted as the result of a change of phase due to a scattering by the potential $w_{\tau_p} \theta(\tau_p)$ at time τ_p . Similarly, it can also be thought of as being created by a hit of a particle.

A problem here is one does not know how many scattering occurred or at what times they took place before one detect it. Since this equation holds only for fixed time discontinuities from τ_1 to τ_n , in order to obtain a more realistic model, it may be necessary to use an averaging process. For my research, I would like to introduce the Poisson process into the equation in Theorem 4 and handle it as a stochastic process. In addition, I would like to give an physical interpretation of it.

Let $t \leq b$ and $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ be independent and identically exponentially distributed and $\tau_n = \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \dots + \xi_n$. Then let $N(t)$ be a Poisson Process and $\{\omega_{\tau_i}\}_{i=1}^{\infty}$ be I.I.D. and $\Psi \in L^2(\mathbb{R}^N)$

We would like to consider this stochastic process below,

$$u(t)\Psi(\xi) = P(t, \tau_{N(t)}) e^{w_{\tau_{N(t)}} \theta(\tau_{N(t)})} P(\tau_{N(t)}, \tau_{N(t)-1}) e^{w_{\tau_{N(t)-1}} \theta(\tau_{N(t)-1})} \dots e^{w_{\tau_1} \theta(\tau_1)} P(\tau_1, a) \Psi(\xi) \\ , t \in (\tau_{N(t)}, b]$$

$N(t)$ represent the number of interactions before one detect the particle which was shoot onto a target, so $E(u(t)\Psi(\xi))$ would be interpreted as the expected state of the particle.

REFERENCES

1. G.W. Johnson and M. Lapidus, The Feynman Integral and Feynman's Operational Calculus, 2000.
2. M. Lapidus, The Feynman-Kat Formula with a Lebesgue-Stieltjes Measure and Feynman's Operational Calculus, Studies In Applied Mathematics 76, 93-132, 1987.
3. R.N.Bhattacharya and E.C.Waymire, Stochastic Process with applications, Wiley Interscience Publication, 1990.
4. Emanuel Parzen, Stochastic Processes, Holden-Day, Inc. 1962.
5. A. Zee, Quantum Field Theory in a nutshell, Princeton University Press, 2003.
6. L.H. Ryder, Quantum Field Theory, Cambridge University Press, 1996.

UNIVERSITY OF CALIFORNIA, RIVERSIDE, USA

E-mail address: juntanaka@math.ucr.edu, yonigeninnin@gmail.com, junextension@hotmail.com

Scaling Factor を可変とした擬似 Radial Basis Function を用いた トカマクプラズマ電流密度分布の境界要素法解析

Boundary element analysis of tokamak plasma current profile
using quasi radial basis functions with variable scaling factors

北海道大学大学院工学研究科量子理工学専攻

中田健二

1. 背景

トカマクプラズマの平衡を記述する Grad-Shafranov 方程式は、電流ソース項 $\mu_0 R j_\phi$ を特解の明らかな関数で展開すると境界積分方程式に変換できる¹⁾。特解の明らかな関数として多項式を用いた解析がなされているが¹⁾、元の電流ソース項の分布形状によってはその展開近似精度に難点がある。

展開近似の精度向上のために、多項式の代わりに擬似 Radial Basis Function (擬似 RBF) を用いた展開が検討されてきた²⁾。本研究では、これまでの擬似 RBF では固定されていた Scaling Factor を可変とすることで、電流密度分布の近似精度の一層の向上を試みた。さらに、擬似 RBF に基づく境界要素法の精度を調べた。

2. 擬似 RBF による電流密度分布の近似

RBF とは、ある特定の点を中心とし、その中心からの距離のみに基づく基底関数 (BF) である。Fig.1(a) に示すように、この BF を空間中に多数配置し、それぞれに重み係数を乗じて重ね合わせることで分布を近似する。基底関数を f_k 、重み係数を ω_k とするとき、電流密度分布 j_ϕ を

$$\mu_0 R j_\phi(R, z) \approx \sum_k \omega_k f_k(R, z) \quad (1)$$

と近似し、 $\mu_0 R j_\phi$ の分布データに対し未知量 ω_k を定める。RBF 近似を境界要素法解析へ適用する場合、RBF に対応する Grad-Shafranov 方程式の特解を導く必要がある。一般にこの導出は困難なため、本研究では Gauss 関数 $\exp(-D_k^2/\sigma^2)$ を特解とし、これを Grad-Shafranov 方程式に代入して得られる

$$f_k = \frac{2}{\sigma^2} \left(1 + \frac{R_k}{R} - 2 \frac{D_k^2}{\sigma^2} \right) \exp\left(-\frac{D_k^2}{\sigma^2}\right) \quad (2)$$

を基底関数とした。これを擬似 RBF と呼ぶ。ここで、 $D_k^2 = (R - R_k)^2 + (z - z_k)^2$ であり、 σ を Scaling Factor と呼ぶ。

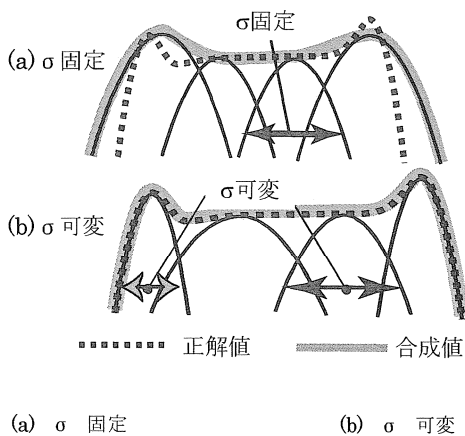


Fig.1 Scaling Factor 可変による展開近似

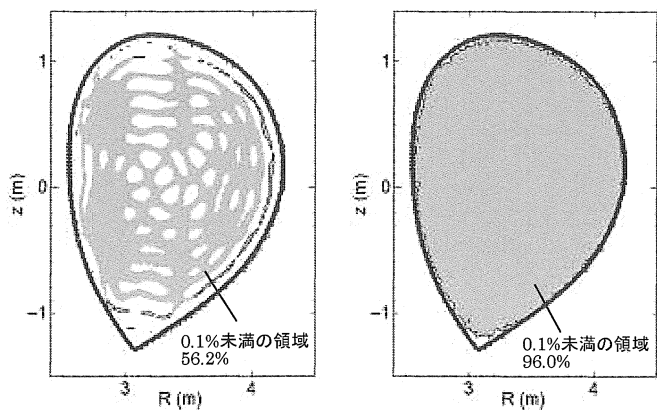


Fig.2 擬似 RBF による電流密度の相対誤差分布

3. Scaling Factor を可変とする近似

式(2)中で従来²⁾は Fig.1(a)のように一定値をとっていた Scaling Factor, σ を Fig.1(b)に示すように可変とすることで BF の形状に自由度を持たせ、近似精度の向上を図ることができる。Fig.2 (a)は σ を一定

とした場合の電流密度分布の近似結果である．これに対し， σ を可変とした場合，Fig.2 (b)に示すように近似精度は飛躍的に向上している．

重み係数だけを可変とした場合，式(1)は線形であるため連立一次方程式に整頓できるが， σ も可変にすると問題は非線形となる．このため，準 Newton 法による最適化アルゴリズム³⁾を用いて目的関数

$$F = \left\| \mu_0 R j_\phi(R, z) - \sum_k \omega_k f_k(R, z, \sigma_k) \right\|^2 \quad (3)$$

を最小化することで，未知数 ω_k と σ_k を求めた．

4. 境界要素法解析への適用

Grad-Shafranov 方程式

$$-\left\{ R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \right\} \psi = \mu_0 R j_\phi(R, \psi) \quad (4)$$

において，右辺 $\mu_0 R j_\phi$ を擬似 RBF を用いて展開し， k 番目の RBF の特解を ϕ^k で表せばプラズマ領域内及び境界上の任意の点 i において磁束を与える境界積分方程式

$$\begin{aligned} c_i \psi_i - \int_\Gamma \left\{ \frac{\psi^*}{R} \frac{\partial \psi}{\partial n} - \frac{\psi}{R} \frac{\partial \psi^*}{\partial n} \right\} d\Gamma \\ = \sum_k w_k \left\{ c_i \phi_i^k - \int_\Gamma \left(\frac{\psi^*}{R} \frac{\partial \phi^k}{\partial n} - \frac{\phi^k}{R} \frac{\partial \psi^*}{\partial n} \right) d\Gamma \right\} \end{aligned} \quad (5)$$

が得られる．ここで， c_i は領域内では1.0，境界上では0.5となる定数である．また， ψ_i は i 点での磁束， ψ^* は基本解である．

5. 固有値計算

式(4)は両辺に未知量 ψ が含まれるため，

$$-\left\{ R \frac{\partial}{\partial R} \left(\frac{1}{R} \frac{\partial}{\partial R} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \right\} \psi^{(t)} = \lambda^{(t-1)} \cdot \mu_0 R j_\phi(R, \psi^{(t-1)}) \quad (t \geq 1) \quad (6)$$

のような固有値問題として反復計算をする必要がある．固有値 $\lambda^{(t)}$ は

$$\lambda^{(t)} = \lambda^{(t-1)} \frac{I_{total}}{\int_\Omega \lambda^{(t-1)} j_\phi(R, \psi^{(t-1)}) d\Omega} \quad (7)$$

に従って更新される．ここに I_{total} はプラズマの総電流である．電流密度を固有ベクトル \mathbf{v} の線形結合

$$j_\phi = c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \mathbf{v}_n = \sum_j c_j \mathbf{v}_j \quad (8)$$

で表わすとき，固有値 $\lambda^{(t)}$ は基本モードの固有ベクトル \mathbf{v}_1 に対応する固有値に収束する⁴⁾．固有値計算ごとに Scaling Factor を変化させると，式(8)の固有ベクトルの列が毎回変化するため，Fig.3 の◇に示すように固有値 $\lambda^{(t)}$ が収束しない (Fig.3 ①)．そのため本研究では Fig.3 の+で示されるような計算を以下のようにした．

まず，Scaling Factor を一定とした反復計算 (Fig.3 ②) により固有値を一度収束させる (Fig.3 ③)．次に，その際に得られた電流密度分布を Scaling Factor を可変とした RBF で展開する (Fig.3 ④)．この際の Scaling Factor の分布を固定して，再度，固有値反復計算 (Fig.3 ⑤) を行うことで，境界要素解の精度が向上するか確かめた．

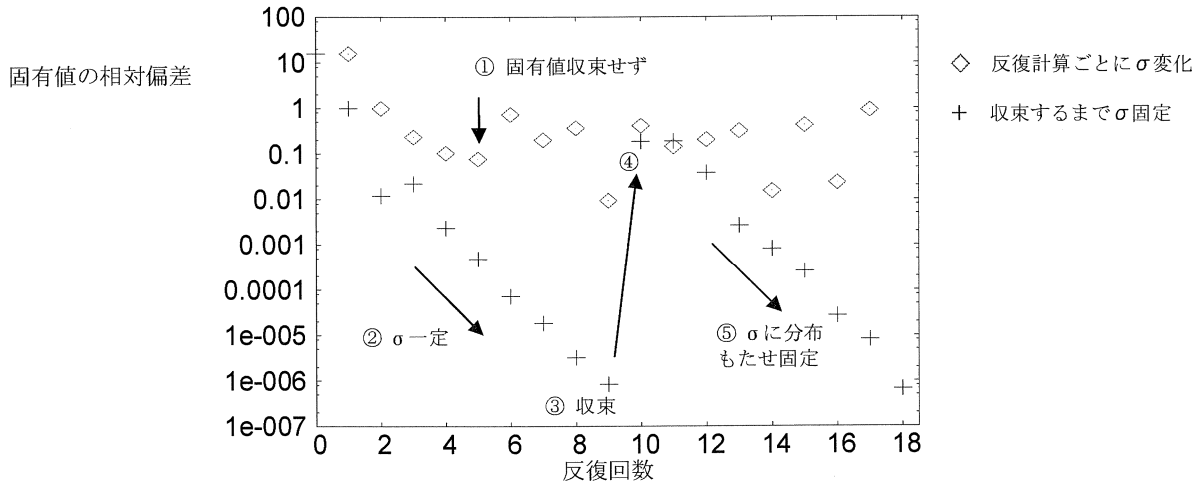


Fig.3 反復計算と固有値変化率

6. 数値計算例

境界積分方程式を境界要素数 57 個、節点数 171 個の非適合 2 次要素に離散化し、境界要素法によりトカマク型核融合装置のプラズマ電流密度分布を解析した。Scaling Factor を一定とし、固有値が収束するまで境界要素法の反復計算をした結果を Fig.4 (a) に示す。基底関数を 306 個用いた場合、Scaling Factor を可変としても、電流密度分布の精度は大きく変化しなかった (Fig.4 (b))。しかし基底関数の個数が 61 個の場合 (Fig.4 (c)) でも、基底関数を 306 個配置している場合 (Fig.4 (b)) と同等な精度が得られた。これは、Scaling Factor に分布を持たせると、より少ない基底関数で比較的高精度の解が得られることを示す。

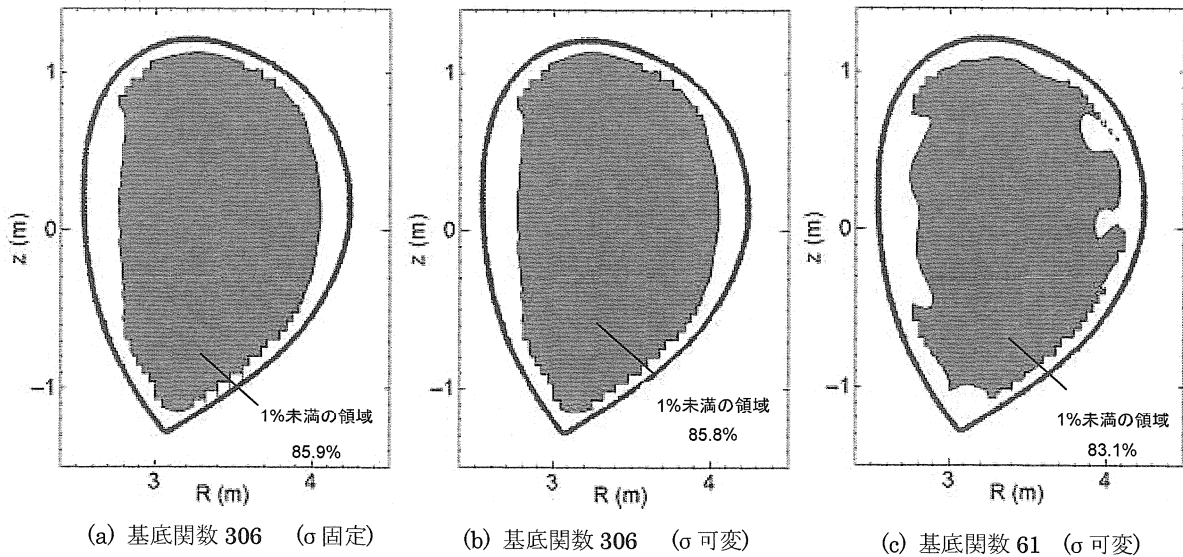


Fig.4 境界要素計算によるプラズマ電流密度分布

7. 結論

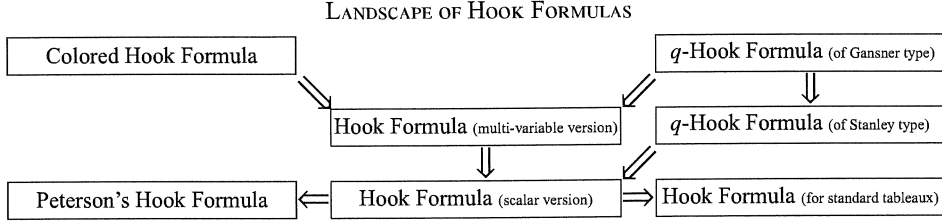
本研究では、電流密度分布の展開に **Scaling Factor** を可変とした擬似 RBF を用いることにより、**Scaling Factor** を一定とした場合より近似精度を向上させることができた。また、**Scaling Factor** に分布を持たせることで、基底関数の数が少なくても比較的よい精度が得られることが分かった。

参考文献

- 1) M.Itagaki et al., *Nuclear Fusion*, **45** (2004) 153-162.
- 2) 田中久貴, 平成 17 年度北海道大学大学院工学研究科量子理工学専攻修士論文.
- 3) 茨木俊秀, 福島雅夫: 『Fortran77 最適化プログラミング』(岩波コンピュータサイエンス, 1991)
- 4) M. ITAGAKI et al. , *Engineering Analysis with Boundary Elements*, **30** (2006) 746-7

HOOK FORMULAS FOR A GENERALIZED YOUNG DIAGRAM

KENTO NAKADA



1. PRELIMINARIES

Let $A = (a_{i,j})_{i,j \in I}$ be a (not necessarily symmetrizable) Cartan matrix of a Kac-Moody Lie algebra [3][4]. We denote the set of real numbers by \mathbb{R} . Let \mathfrak{h} be an \mathbb{R} -vector space and \mathfrak{h}^* the dual space of \mathfrak{h} and $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathfrak{h}^* \times \mathfrak{h} \rightarrow \mathbb{R}$ the canonical bilinear form. We suppose the existence of linearly independent subsets $\Pi := \{\alpha_i \mid i \in I\} \subset \mathfrak{h}^*$ and $\Pi^\vee := \{\alpha_i^\vee \mid i \in I\} \subset \mathfrak{h}$ such that $\langle \alpha_j, \alpha_i^\vee \rangle = a_{i,j}$. An element $\lambda \in \mathfrak{h}^*$ is said to be an *integral weight* if

$$\langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \in \mathbb{Z}, \quad i \in I.$$

The set of integral weights is denoted by P . For each $i \in I$, we define $s_i \in GL(\mathfrak{h}^*)$ by:

$$s_i : \lambda \mapsto \lambda - \langle \lambda, \alpha_i^\vee \rangle \alpha_i, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*.$$

The group W generated by $\{s_i \mid i \in I\}$ is called the *Weyl group*, which acts on \mathfrak{h} by:

$$\langle w(\lambda), w(h) \rangle = \langle \lambda, h \rangle, \quad w \in W, \lambda \in \mathfrak{h}^*, h \in \mathfrak{h}.$$

We define the *root system* (resp. *coroot system*) by $\Phi := W\Pi$ (resp. $\Phi^\vee := W\Pi^\vee$). We denote:

$$Q_+ := \bigoplus_{i \in I} \mathbb{N}\alpha_i \ (\subseteq P),$$

where \mathbb{N} is the set of non-negative integers. We denote by Φ_+ and Φ_- the sets of positive and negative roots of Φ , respectively. The *dual* $\beta^\vee \in \Phi^\vee$ of a root $\beta \in \Phi$ is defined so that

$$w(\beta^\vee) = w(\beta)^\vee, \quad w \in W.$$

For each $\beta \in \Phi$, we define $s_\beta \in W$ by:

$$s_\beta(\lambda) = \lambda - \langle \lambda, \beta^\vee \rangle \beta, \quad \lambda \in \mathfrak{h}^*,$$

or, equivalently, by

$$s_\beta(h) = h - \langle \beta, h \rangle \beta^\vee, \quad h \in \mathfrak{h}.$$

We note that $s_{\alpha_i} = s_{-\alpha_i} = s_i$. For each $w \in W$, we define a set $\Phi(w) (\subseteq \Phi_+)$ by:

$$\Phi(w) := \{\gamma \in \Phi_+ \mid w^{-1}(\gamma) < 0\}.$$

2. PRE-DOMINANT INTEGRAL WEIGHTS

Definition 1. An integral weight λ is *pre-dominant* if

$$\langle \lambda, \beta^\vee \rangle \geq -1, \quad \beta \in \Phi_+.$$

The set of pre-dominant integral weights is denoted by $P_{\geq -1}$.

Definition 2. For $\lambda \in P_{\geq -1}$, the set $D(\lambda)$ defined by

$$D(\lambda) := \{ \beta \in \Phi_+ \mid \langle \lambda, \beta^\vee \rangle = -1 \}$$

is called the *diagram* of λ . An element of $D(\lambda)$ is called a λ -*move*. A pre-dominant integral weight λ is said to be *finite* if $\#D(\lambda) < \infty$.

Lemma 2.1. *Let $\lambda \in P_{\geq -1}$ and $\beta \in D(\lambda)$. Then we have:*

- (1) $s_\beta(\lambda) \in P_{\geq -1}$.
- (2) $D(s_\beta(\lambda)) = s_\beta(D(\lambda) \setminus \Phi(s_\beta))$.

Definition 3. Let $\lambda \in P_{\geq -1}$. Let $\beta \in D(\lambda)$. We define a set $H_\lambda(\beta)$ by:

$$H_\lambda(\beta) := D(\lambda) \cap \Phi(s_\beta).$$

The set $H_\lambda(\beta)$ is called the *hook* at β (in the diagram $D(\lambda)$). The number $\#H_\lambda(\beta)$ is called the *hooklength* at β (in the diagram $D(\lambda)$). (See [9])

Theorem 2.2. *Let $\lambda \in P_{\geq -1}$. Let $\beta \in D(\lambda)$. Then we have:*

$$\#H_\lambda(\beta) = \text{ht}(\beta).$$

3. λ -PATHS AND COLORED HOOK FORMULA

Definition 4. Let $\lambda \in P_{\geq -1}$. Let l be a nonnegative integer. A sequence of positive roots $\mathcal{B} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_l)$ is said to be a λ -*path* if

$$\beta_p \in D(s_{\beta_{p-1}} \cdots s_{\beta_1}(\lambda)), \quad 1 \leq p \leq l.$$

We call l the *length* of the λ -path \mathcal{B} and denote it by $\ell(\mathcal{B})$. Note that $\ell(\mathcal{B})$ may be 0. The set of λ -paths is denoted by $\text{Path}(\lambda)$.

Theorem 3.1 (Colored Hook Formula). *Let $\lambda \in P_{\geq -1}$ be finite. Then we have:*

$$(3.1) \quad \sum_{\substack{(\beta_1, \dots, \beta_l) \in \text{Path}(\lambda) \\ l \geq 0}} \frac{1}{\beta_1} \frac{1}{\beta_1 + \beta_2} \cdots \frac{1}{\beta_1 + \cdots + \beta_l} = \prod_{\beta \in D(\lambda)} \left(1 + \frac{1}{\beta} \right).$$

where both hand sides are considered as rational functions in $\{ \alpha_i \mid i \in I \} \subseteq \mathfrak{b}^*$.

Let $\lambda \in P_{\geq -1}$ be finite. Put $d := \#D(\lambda)$. We denote the set of λ -paths of length d by $\text{MPath}(\lambda)$.

By Lemma 2.1 and Theorem 2.2, a λ -path \mathcal{B} in $\text{MPath}(\lambda)$ is a sequence of simple roots of length $\#D(\lambda)$.

Corollary 3.2. *Let $\lambda \in P_{\geq -1}$ be finite. Put $d := \#D(\lambda)$. Then we have:*

$$(3.2) \quad \sum_{(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_d}) \in \text{MPath}(\lambda)} \frac{1}{\alpha_{i_1}} \frac{1}{\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2}} \cdots \frac{1}{\alpha_{i_1} + \cdots + \alpha_{i_d}} = \prod_{\beta \in D(\lambda)} \frac{1}{\beta}.$$

Proof. Let t be an indeterminate. For each color variable α_i ($i \in I$), we substitute $t\alpha_i$ in (3.1). Comparing the coefficients of the lowest degree t^{-d} of both hand sides, we get (3.2). \square

Corollary 3.3. *Let $\lambda \in P_{\geq -1}$ be finite. Put $d := \#D(\lambda)$. Then we have:*

$$(3.3) \quad \#\text{MPath}(\lambda) = \frac{d!}{\prod_{\beta \in D(\lambda)} \text{ht}(\beta)}.$$

where $\text{ht}(\beta)$ denotes the height of $\beta \in \Phi_+$.

Proof. For each color variable α_i ($i \in I$), we substitute 1 in (3.2). Then we get (3.3). \square

Applying Theorem 2.2 to (3.3), for a finite pre-dominant integral weight λ , we have:

$$(3.4) \quad \#\text{MPath}(\lambda) = \frac{\#D(\lambda)!}{\prod_{\beta \in D(\lambda)} \#\text{H}_\lambda(\beta)}.$$

4. λ -FILTERS, λ -FILTRATIONS AND q -HOOK FORMULA

Definition 5. Let $\lambda \in P_{\geq -1}$. An element θ of Q_+ is said to be a λ -filter if the following condition holds:

there exists some $\mathcal{B} = (\beta_1, \dots, \beta_k) \in \text{Path}(\lambda)$ for some $k \geq 1$ such that $\theta = \beta_1 + \dots + \beta_k$.

The set of λ -filters is denoted by $F(\lambda)$. Note that $k \neq 0$.

As a corollary of Lemma 2.1(1), we have:

Corollary 4.1. *Let $\lambda \in P_{\geq -1}$ and $\theta \in F(\lambda)$. Then we have:*

$$\lambda + \theta \in P_{\geq -1}.$$

Definition 6. Let $\lambda \in P_{\geq -1}$. Let l be a nonnegative integer. A sequence $\Theta = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_l)$ of elements of Q_+ is said to be a λ -filtration if

$$\theta_p \in F(\lambda + \theta_1 + \dots + \theta_{p-1}), \quad 1 \leq p \leq l.$$

We call l the length of the λ -filtration Θ and denote it by $\ell(\Theta)$. Note that $\ell(\Theta)$ may be 0. The set of λ -filtrations is denoted by $\text{Filt}(\lambda)$.

Theorem 4.2 (q -Hook Formula). *Let $\lambda \in P_{\geq -1}$. Then we have:*

$$(4.1) \quad \sum_{\substack{(\theta_1, \dots, \theta_l) \in \text{Filt}(\lambda) \\ l \geq 0}} \frac{e^{\theta_1}}{1 - e^{\theta_1}} \frac{e^{\theta_1 + \theta_2}}{1 - e^{\theta_1 + \theta_2}} \cdots \frac{e^{\theta_1 + \dots + \theta_l}}{1 - e^{\theta_1 + \dots + \theta_l}} = \prod_{\beta \in D(\lambda)} \frac{1}{1 - e^\beta}.$$

where both hand sides are considered as rational functions in $\{e^{\alpha_i} \mid i \in I\}$.

Let $\lambda \in P_{\geq -1}$ be finite. We denote the set of λ -filtrations of maximal length by $\text{MFilt}(\lambda)$. By Lemma 2.1(2) and Theorem 2.2, a λ -filtration Θ in $\text{MFilt}(\lambda)$ is a sequence of simple roots of length $\#D(\lambda)$.

Corollary 4.3. *Let $\lambda \in P_{\geq -1}$ be finite. Put $d := \#D(\lambda)$. Then we have:*

$$(4.2) \quad \sum_{(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_d}) \in \text{MFilt}(\lambda)} \frac{1}{\alpha_{i_1}} \frac{1}{\alpha_{i_1} + \alpha_{i_2}} \cdots \frac{1}{\alpha_{i_1} + \dots + \alpha_{i_d}} = \prod_{\beta \in D(\lambda)} \frac{1}{\beta}.$$

Proof. Let t be an indeterminate. For each e^{α_i} ($i \in I$), we substitute $1 - t\alpha_i$ in (4.1). Comparing the coefficients of the lowest degree t^{-d} of both hand sides, we get (4.2). \square

Remark 1. Let $\lambda \in P_{\geq -1}$ be finite. Then we have $\text{MPath}(\lambda) = \text{MFilt}(\lambda)$ as sets. Hence, (4.2) is equivalent to (3.2).

5. HOOK FORMULA FOR THE STANDARD TABLEAUX

Let d be a non-negative integer. We denote the totally ordered set $\{1, 2, \dots, d\}$ by $[d]$.

Definition 7. Let $P = (P; \leq)$ be a finite partially ordered set. Put $d := \#P$. A bijection $T : [d] \rightarrow P$ is said to be a *standard tableau of shape P* if the following condition holds:

(STab) If $T(j) < T(k)$, then we have $j > k$.

The set of standard tableaux of shape P is denoted by $\text{STab}(P)$.

Definition 8. Let $\lambda \in P_{\geq -1}$. We define a set $D(\lambda)^\vee$ by:

$$D(\lambda)^\vee := \{ \beta^\vee \mid \beta \in D(\lambda) \} = \{ \beta^\vee \in \Phi_+^\vee \mid \langle \lambda, \beta^\vee \rangle = -1 \}.$$

We call $D(\lambda)^\vee$ a *shape of λ* . We note that $D(\lambda)^\vee$ is a (possibly infinite) partially ordered set with the order \leq over Φ_+^\vee .

Theorem 5.1. Let $\lambda \in P_{\geq -1}$ be finite. Put $d := \#D(\lambda)^\vee$.

$$\#\text{STab}(D(\lambda)^\vee) = \frac{d!}{\prod_{\beta \in D(\lambda)^\vee} \text{ht}(\beta)}.$$

Remark 2. Let Y be a Young diagram. Then, for sufficiently large n , there exists some $\lambda \in P_{\geq -1}$ of a Lie algebra of type A_n such that Y is isomorphic to $D(\lambda)^\vee$ as partially ordered sets. See [6][12].

6. MINUSCULE ELEMENTS AND PETERSON'S HOOK FORMULA

Definition 9. Let Λ be a dominant integral weight. Following D. Peterson (see[1][5]), we define $w \in W$ to be Λ -*minuscule* if

$$(6.1) \quad \langle s_{i_{p+1}} \cdots s_{i_d}(\Lambda), \alpha_p^\vee \rangle = 1, \quad 1 \leq p \leq d$$

for some (or equivalently, any) reduced decomposition $w = s_{i_1} \cdots s_{i_d}$. If $w \in W$ is Λ -minuscule for some dominant integral weight Λ , then we say that w is *minuscule*.

Proposition 6.1. For a pair (Λ, w) of a dominant integral weight Λ and a Λ -minuscule element w , we put $\lambda := w(\Lambda)$. Then, λ is a finite pre-dominant integral weight. Furthermore, the correspondence $(\Lambda, w) \mapsto \lambda$ is bijective.

For $w \in W$, we denote the set of reduced decompositions $(s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_d})$ of w by $\text{Red}(w)$. As a corollary of the proof of Proposition 6.1, we get:

Proposition 6.2. Let (Λ, w) be a pair of a dominant integral weight Λ and a Λ -minuscule element w . Let $\lambda := w(\Lambda)$ be the corresponding finite pre-dominant integral weight. Put $d := \#D(\lambda)$. Let $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_d}) \in \text{MPath}(\lambda)$. Then we have $(s_{i_1}, \dots, s_{i_d}) \in \text{Red}(w)$. Furthermore, the correspondence $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_d}) \mapsto (s_{i_1}, \dots, s_{i_d})$ from $\text{MPath}(\lambda)$ to $\text{Red}(w)$ is bijective.

By Corollary 3.3, Proposition 6.1 and Proposition 6.2, we get a proof of Peterson's hook formula:

Theorem 6.3 (Peterson's hook formula). Let Λ be a dominant integral weight. Let $w \in W$ be a Λ -minuscule element. Then we have:

$$(6.2) \quad \#\text{Red}(w) = \frac{\ell(w)!}{\prod_{\beta \in \Phi(w)} \text{ht}(\beta)}.$$

Remark 3. Minuscule elements are classified by R. A. Proctor [5][6] (in simply-laced case) and J. R. Stembridge [7] (in non-simply-laced case).

REFERENCES

- [1] J. B. Carrell, *Vector fields, flag varieties and Schubert calculus*, Proc. Hyderabad Conference on Algebraic Groups (ed. S.Ramanan), Manoj Prakashan, Madras, 1991.
- [2] R. P. Stanley, *Ordered Structures and Partitions*, Ph.D thesis, Harvard University, 1971.
- [3] V. G. Kac, "Infinite Dimensional Lie Algebras," Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1990.
- [4] R. V. Moody and A. Pianzola, "Lie Algebras With Triangular Decompositions," Canadian Mathematical Society Series of Monograph and Advanced Text, 1995.
- [5] R. A. Proctor, *Minuscule elements of Weyl groups, the numbers games, and d-complete posets*, J.Algebra **213** (1999), 272-303.
- [6] R. A. Proctor, *Dynkin diagram classification of λ -minuscule Bruhat lattices and of d-complete posets*, J.Algebraic Combin. **9** (1999), 61-94.
- [7] J. R. Stembridge, *Minuscule elements of Weyl groups*, J.Algebra **235**(2001), 722-743.
- [8] B. E. Sagan, "The Symmetric Group. *Representations, Combinatorial Algorithms, and Symmetric Functions*," Springer, New York, 2001.
- [9] N. Kawanaka, *Coxeter groups and Nakayama algorithm*, to appear.
- [10] S. Okamura, *An algorithm which generates a random standard tableau on a generalized Young diagram* (in Japanese), master's thesis, Osaka university, 2003.
- [11] S. Okamura, to appear.
- [12] K. Nakada, *Colored hook formula for a generalized Young diagram*, to appear in Osaka J. of Math.
- [13] K. Nakada, *q-Hook formula for a generalized Young diagram*, in preperation.
- [14] K. Nakada, *A hook formula for the standard tableaux of a generalized shape*, submitted to RIMS Kokyuroku-bessatsu.

GRADUATE SCHOOL OF INFORMATION SCIENCE AND TECHNOLOGY, OSAKA UNIVERSITY, TOYONAKA, OSAKA 560-0043, JAPAN. e-mail address : u300883f@ecs.cmc.osaka-u.ac.jp

Generalized Schur operators on the vector space spanned by rooted planar binary trees

NUMATA, Yasuhide*

概要

We introduce new families of operators on the vector space spanned by rooted planar binary trees. We prove that they are generalized Schur operators. For this purpose, we construct a correspondence, which is an extension of Fomin's r -correspondence.

1 Introduction

Young 図形全体からなる束は Young's lattice と呼ばれ, Stanley により導入された r -differential poset [8, 9] やその一般化として Fomin により導入された r -dual graphs [2] の prototypical な例である. Young's lattice 上の paths は standard Young tableaux と呼ばれるものと同一視することが出来るが, standard Young tableaux の持つ重要な組合せ論的性質の一つに, Robinson 対応と言うものの存在が挙げられる. Robinson 対応は対称群の表現と密接に関連しており, 表現論的に解釈することもできる. (詳しくは, 例えば [5] などを参照されたい.) Fomin により, r -dual graphs においても, r -dual graphs 上の paths に対して, Robinson 対応に相当する一対一対応が構成されている [1, 3]. いいかえると, r -dual graphs は, Robinson 対応に着目した Young's lattice の一般化である.

Semistandard Young tableaux なる組合せ論的対象も, standard Young tableaux 同様, 表現論などの分野に置いて重要な役割を果たしており積極的に研究されている. Semistandard Young tableaux も, ある条件を満たす Young 図形の列と同一視することが出来ることが良く知られている. また, Robinson-Schensted-Knuth 対応と呼ばれる一対一対応が良く知られている. Fomin は standard tableaux の際の手法を semistandard tableaux にも応用し, Robinson-Schensted-Knuth 対応に着目した Young's lattice の一般化であるところの, generalized Schur operators という物を導入している [4].

Semistandard tableaux の weighted generating function は Schur 関数と呼ばれるが, これは, 対称関数環の \mathbb{Z} 基底を与える, 特殊線形群の既約指標を与えるなどといった性質を持つ. Generalized Schur operators を用いることで, Schur 関数の一般化に相当する多項式を定義することが出来るが, この多項式においても, Cauchy identity, Pieri formula などといった Schur 関数において示されていた公式達の類似が成り立っていることが示されている [6].

本稿では Generalized Schur operators の新しい例を与える. より詳しく言うと, 根付き平面二分木全体がなす集合を基底とするような線形空間 KT 上に線形写像の族 U_i, U'_i, D_i を導入し, これらが generalized Schur operators となっていることが主結果である. ここで導入される線形写像の族は根付き平面二分木上の binary

* Hokkaido Univ., Kita 10, Nishi 8, Kita-Ku, Sapporo, Hokkaido, 060-0810, Japan. nu@math.sci.hokudai.ac.jp

searching labelling や left(right)-strictly increasing labelling と呼ばれるラベリングと密接な関係を持つが、線形写像達が generalized Schur operators であることを用いると、これらのラベリングに関する数え挙げの結果やその母関数に関する公式などを系として得ることができる [7].

2 Definition and Notation

ここでは, Fomin により導入された generalized Schur operators の定義を述べ, そのあと, 根付き平面二分木を基底とする線形空間上の線形写像 U_i, U'_i, D_i を導入する.

2.1 Generalizes Schur optators

ここでは generalized Schur operators の定義のみ述べる. 詳しくは [4] を参照されたい.

K を不定元 t, t', t_1, t_2, \dots を含む標数 0 の体とする. $i \in \mathbb{Z}$ に対して, V_i を有限次元 K 線形空間とし, $V = \bigoplus_i V_i$ と置く. また, 列 $\{A_i\}$ と不定元 x に対し, $A(x)$ で形式的冪級数 $\sum_{i \geq 0} A_i x^i$ を表すことにする.

Definition 2.1. 次の条件を満たす時, $D(t_1) \cdots D(t_n)$ と $U(t_n) \cdots U(t_1)$ を generalized Schur operators with $\{a_m\}$ と呼ぶ:

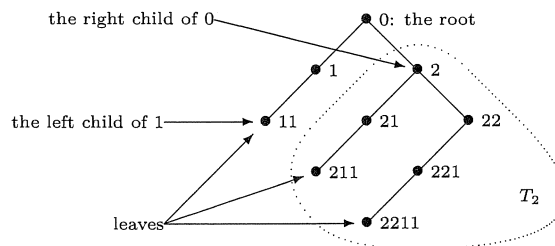
- $\{a_m\}$ is a sequence of elements of K .
- U_i is a linear map on V satisfying $U_i(V_j) \subset V_{j+i}$ for all j .
- D_i is a linear map on V satisfying $D_i(V_j) \subset V_{j-i}$ for all j .
- The equation $D(t')U(t) = a(tt')U(t)D(t')$ holds.

2.2 Rooted planar binary trees and definition of our generalized Schur operators

F を alphabet $\{1, 2\}$ で生成される, word 全体のなす半群とし, 0 は 0 文字から成る word をあらわすとす. $v, w \in F$ に対し $v \leq vw$ と定義することで, F に poset の構造が入る. $T \subset F$ が ' $w \leq v$ for some $v \in T$ implies $w \in T$ ' を満たしている時, T は (Poset の)ideal であるという. F の有限個の元から成る ideal を, 根付き平面二分木または単に木と呼ぶ. \mathbb{T} を木全体のなす集合とする.

$T \in \mathbb{T}$ とする. T の元を T の node という. \mathbb{T}_i で i 個の node からなる木全体を表す. Node v に対して, node $v2$ (resp. $v1$) を v の right (resp. left) child という. Child のない node を leaf という. T が空でないなら, $0 \in T$ である. 0 を T の根という. $T \in \mathbb{T}, v \in F$ に対し, $T_v := \{w \in T \mid v \leq w\}$ とする.

Example 2.2. $T = \{0, 11, 2, 21, 211, 22, 221, 2211\}$ に対しては次のようになる:



次に U_i を導入する.

Definition 2.3. G_U を次の条件を満たす木のペア (T, T') からなる集合と定義する:

- $T \subset T'$.
- For each $w \in T' \setminus T$, there exists $v_w \in T$ such that $w = v_w 1^n$ or $w = v_w 21^n$ for some nonnegative integer n if $T \neq \emptyset$.
- For each $w \in T' \setminus T$, $w = 1^n$ for some nonnegative integer n if $T = \emptyset$.

$(T, T') \in G_U$ であるとき, T' を T に l-strips を付け加えて得られる木であるという. $i \in \mathbb{N} = \{0, 1, 2, \dots\}$ に対し, G_{U_i} を次で定義する:

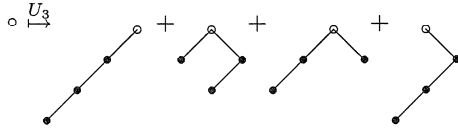
$$G_{U_i} = \{ (T, T') \in G_U \mid |T| + i = |T'| \}.$$

Definition 2.4. $i \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{T}$ に対して, $K\mathbb{T}$ 上の線形写像 U_i を

$$U_i T = \sum_{T': (T, T') \in G_{U_i}} T'$$

となる様に定義する. 言い替えると, $U_i T$ は T に i 個の node からなる l-strips を付け加えて得られる木の和である.

Example 2.5. U_3 は $\{0\}$ に次のように作用する:



次に U'_i を定義する.

Definition 2.6. $G_{U'}$ を次の条件を満たす木のペア (T, T') からなる集合として定義する:

- $T \subset T'$.
- For each $w \in T' \setminus T$, there exists $v_w \in T$ such that $w = v_w 2^n$ or $w = v_w 12^n$ for some nonnegative integer n if $T \neq \emptyset$.
- For each $w \in T' \setminus T$, $w = 2^n$ for some nonnegative integer n if $T = \emptyset$.

$(T, T') \in G_{U'}$ であるときに, T' を T に r-strips を加えて得られる木であるという. $i \in \mathbb{N}$ に対して, $G_{U'_i}$ を次で定義する:

$$G_{U'_i} = \{ (T, T') \in G_{U'} \mid |T| + i = |T'| \}.$$

Definition 2.7. $i \in \mathbb{N}$, $T \in \mathbb{T}$ に対して, $K\mathbb{T}$ 上の線形写像 U'_i を

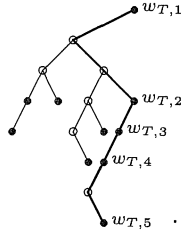
$$U'_i T = \sum_{T': (T, T') \in G_{U'_i}} T'$$

となる様に定義する. 言い替えると, $U'_i T$ は T に i 個の node からなる r-strips を加えて得られるものの和である.

最後に線形写像 D_i を定義する. この線形写像は binary searching labellings と密接な関係がある. D_i を定義するために幾つか記号を用意する.

$T \in \mathbb{T}$ に対し, $\{w \in T \mid \text{If } w = v1w' \text{ then } v2 \notin T\}$ を E_T と書くことにする. 大雑把に言うと, E_T は, T の中で一番右の leaf と根の間の nodes からなる集合である. $T \in \mathbb{T}$ に対し, $\{w \in T \mid w2 \notin T\}$ を R_T で表し, r_T を $r_T = E_T \cap R_T$ で定義すると, r_T は chain となる. そこで $r_T = \{w_{T,1} < w_{T,2} < w_{T,3} < \dots < w_{T,k}\}$ とする. i 個の nodes からなる r_T の ideal $\{w_{T,1}, w_{T,2}, w_{T,3}, \dots, w_{T,i}\}$ を $r_{T,i}$ で表すことにする.

Example 2.8. 次の図において, E_T は太い線の上の nodes, また R_T は \bullet で表されている nodes からなる:



したがって, $r_T = \{0, 122, 1221, 12211, 1221112\}$, $r_{T,3} = \{0, 122, 1221\}$ である.

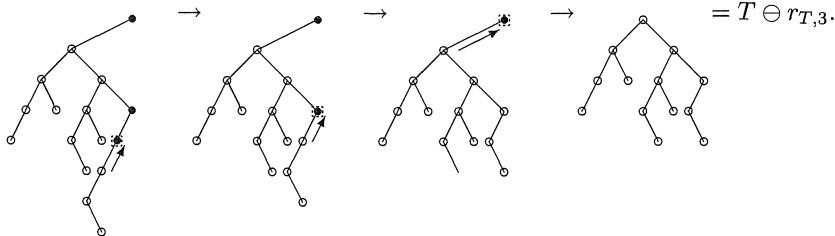
Definition 2.9. $w \in R_T$ に対して,

$$T \ominus w = (T \setminus T_w) \cup \{wv \mid w1v \in T_w\}$$

と定義する. これを用い, $T \ominus r_{T,i}$ を次のように帰納的に定義する:

$$\begin{cases} (T \ominus w_{T,i}) \ominus r_{T,i-1} & i > 0 \\ T & i = 0. \end{cases}$$

Example 2.10. 例えば, *Example 2.8* の T に対して $T \ominus r_{T,3}$ は次で与えられる:



Definition 2.11. G_D を, $T = T' \ominus r_{T',i}$ となる i が存在する木のペア (T, T') から成る集合と定義する. また, $i \in \mathbb{N}$ に対し, G_{D_i} を次で定義する:

$$G_{D_i} = \{(T, T') \in G_D \mid |T| + i = |T'|\}.$$

Remark 2.12. 定義より, $G_{D_0} = \{(T, T) \mid T \in \mathbb{T}\}$ である. また, 各 i と $T \in \mathbb{T}$ に対し, つぎが成り立つ:

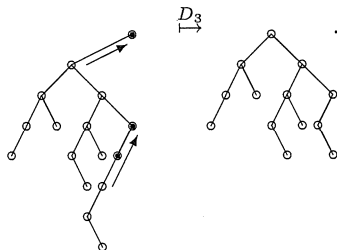
$$|\{(T', T'') \in G_{D_i} \mid T'' = T\}| \leq 1.$$

Definition 2.13. $i \in \mathbb{N}$ に対し, $K\mathbb{T}$ 上の線形写像 D_i を $T \in \mathbb{T}$ に対して

$$D_i T = \sum_{T': (T', T) \in G_{D_i}} T'$$

となる様に定義する.

Example 2.14. D_3 は次のように作用する:



3 Main Results

以上のように定義した U_i, U'_i, D_i に対して次の結果を得た. ここでは結果の紹介だけにとどめる. 詳しくは [7] を参照されたい.

Theorem 3.1. *The operators $D(t)$ and $U(t')$ satisfy the equation*

$$D(t)U(t') = \frac{1}{1-tt'}U(t')D(t).$$

Equivalently, $D(t_1) \cdots D(t_n)$ and $U(t_n) \cdots U(t_1)$ are generalized Schur operators with $\{1, 1, 1, \dots\}$.

Theorem 3.2. *The operators $D(t)$ and $U'(t')$ satisfy the equation*

$$D(t)U'(t') = (1+tt')U'(t')D(t).$$

Equivalently, $D(t_1) \cdots D(t_n)$ and $U'(t_n) \cdots U'(t_1)$ are generalized Schur operators with $\{1, 1, 0, 0, 0, \dots\}$.

参考文献

- [1] S. Fomin, *Generalized Robinson-Schensted-Knuth correspondence*, Zariski Nauchn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **155** (1986), 156–175, 195 (Russian); English transl., J. Soviet Math. **41**(1988), 979–991.
- [2] S. Fomin, *Duality of graded graphs*, J. Algebraic Combin. **3** (1994), 357–404.
- [3] S. Fomin, *Schensted algorithms for dual graded graphs*, J. Algebraic Combin. **4** (1995), 5–45.
- [4] S. Fomin, *Schur operators and Knuth correspondences*, J. Combin. Theory, Ser. A **72** (1995), 277–292.
- [5] Fulton, W., *Young Tableaux; with applications to representation theory and geometry*, volume 35 of London Mathematical Society Student Texts, Cambridge University Press, New York, 1997.
- [6] Y. Numata, *Pieri's Formula for Generalized Schur Polynomials*, J. Algebr. Comb. **26** (2007), 27–45.
- [7] Y. Numata, *Generalized Schur operators on planar binary trees*, preprint, to appear in RIMS Koyuroku Bessatsu.
- [8] R. Stanley, *Differential posets*, J. American Math. Soc. **1** (1988), 919–961.
- [9] R. Stanley, *Variations on differential posets*, Invariant theory and tableaux (Stanton, D., ed.), IMA volumes in mathematics and its applications, Springer-Verlag, New York, 145–165.

接分布の幾何学

(Geometry of tangential distribution)

名古屋大学多元数理科学研究科 D2

氏名：野田 尚廣

1 序文

接分布とは、多様体の各点において、その接空間の部分空間を与える対応のことをいう。この接分布にはさまざまな種類のものがあり、興味深い例を豊富に含んでいることが数多くの研究者によって示されている。したがって、本報告集では幾つかの興味深い接分布から派生する幾何学について解説する。

2 接分布の導入

ここでは本文の主題である接分布を導入し、基本的だが重要な具体例をいくつか挙げる。

Definition 2.1

M を C^∞ 多様体, TM をその接束とする。このとき, TM の rank n の部分束 D を M 上の rank n の微分式系といい, $\mathcal{D} := \Gamma(D)$ を M 上の rank n の接分布という。ただし, ここで \mathcal{D} は D の切断のなす空間である。

Example 2.2 ((標準) 接触分布)

$M := \mathbb{R}^3 = \{(x, y, z)\}$, $\theta := dy - zdx$ とおく。このとき $\mathcal{D} := \ker\theta$ と定めると, これは \mathbb{R}^3 上の rank 2 の接分布になる。このような分布は, \mathbb{R}^3 上の(標準)接触分布と呼ばれる。

Remark 2.3

接触分布はより一般には次のように定義される。 $2n+1$ 次元多様体 M 上の 1-form θ が各点で $\theta \wedge (d\theta)^n \neq 0$ を満たす時, rank $2n$ の接分布 $\mathcal{D} := \ker\theta$

を M 上の接触分布といい, 多様体との組 (M, \mathcal{D}) で接触多様体という. 上で述べたものはその特別な例である.

Example 2.4 ((標準)Engel 分布)

$\mathbb{R}^4 := (x, y, z, w)$ を考えよう. $\theta_1 := dy - zdx$, $\theta_2 := dz - wdx$ とおき, rank 2 の分布 $\mathcal{D} := \{\theta_1 = \theta_2 = 0\}$ を考える. \mathcal{D} を \mathbb{R}^4 上の (標準)Engel 分布という.

Example 2.5 ((標準)Cartan 分布)

$\mathbb{R}^5 := (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ を考える. \mathbb{R}^5 上の独立な 3 つの 1-form $\omega_1 := dx_3 - \frac{1}{2}(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$, $\omega_2 := dx_4 + (x_3 - \frac{1}{2}x_1 x_2)dx_1$, $\omega_3 := dx_5 + (x_3 + \frac{1}{2}x_1 x_2)dx_2$ に対し, rank 2 の分布 $\mathcal{D} := \{\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0\}$ が定まる. この分布を \mathbb{R}^5 上の (標準)Cartan 分布という.

3 接分布の特徴づけ

この節では, 前の節で導入したものをはじめとする様々な接分布に対する幾何学的あるいは代数的な特徴づけについて少し述べたいと思う. まず, 完全積分可能性について導入する.

Definition 3.1

(M, \mathcal{D}) を多様体 M 上の接分布 \mathcal{D} とする. $\mathcal{D} \ni X, Y$ に対し, $[X, Y] \in \mathcal{D}$ となっている時, \mathcal{D} を完全積分可能な分布と呼ぶ.

この完全積分可能性は, 多様体の各点で接分布によって対応する (接空間の) 部分空間を接空間にもつような (多様体の) 部分多様体 (これを \mathcal{D} の積分多様体という) の存在を与えるものである. 上の 3 つの具体例にかんして, 完全積分可能性を確かめると, いずれも非可積分, すなわち上の定義の条件を満たさない事がすぐ確かめられる. すると自然に気になるのが分布が完全積分可能でなかったとき, その中で可積分な (部分) 接分布としてどのようなものがとれるのかという問題である. これに関してはつぎの概念がある.

Definition 3.2 (Cauchy 特性系)

(M, \mathcal{D}) を微分式系, $\mathcal{D} := \Gamma(\mathcal{D})$ を対応する分布とする. その時, \mathcal{D} の Cauchy 特性系 $Ch(\mathcal{D})$ が次で定義される:

$$Ch(\mathcal{D})(x) := \{X(x) \in \mathcal{D}(x) \mid X \in \mathcal{D}, [X, Y] \in \mathcal{D}, \forall Y \in \mathcal{D}\} \quad \text{for } x \in M.$$

上の定義の条件から, つぎの事実が得られることがわかる.

Theorem 3.3

微分式系 (M, D) に対し, その Cauchy 特性系 $\text{Ch}(D)$ は接束 TM の部分束になるなら, 完全積分可能である.

この特性系を具体例で計算してみる.

Example 3.4 (Example 2.2 の続き)

$D := \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ であり, この 2 つの基底ベクトルのブラケット積をとると閉じていないので, 非可積分である. この Cauchy 特性系は, $\Gamma(\text{Ch}(D)) := \text{span} \left\{ \frac{\partial}{\partial x} + z \frac{\partial}{\partial y} \right\}$ で与えられる. これは実際, 明らかにブラケットに関し, 閉じている. したがって, この分布に対して, 積分曲線が存在する. このような積分曲線を接触分布の **Legendre 曲線** という.

さて, つぎに分布の (weak) derived system を導入しよう. これは, 非可積分な分布の構造を調べる上でとても重要な概念である.

Definition 3.5

微分式系 (M, D) の k 階の derived system, ならびに k 階の weak derived system を次のように定める. $\mathcal{D} := \Gamma(D)$ に対し,

$$\begin{aligned} \partial^k \mathcal{D} &= \partial^{k-1} \mathcal{D} + [\partial^{k-1} \mathcal{D}, \partial^{k-1} \mathcal{D}], \\ \partial^{(k)} \mathcal{D} &= \partial^{(k-1)} \mathcal{D} + [D, \partial^{(k-1)} \mathcal{D}], \end{aligned}$$

ここで, $\mathcal{D} = \partial^0 \mathcal{D}$ としている. これに対し,

$$\begin{aligned} \partial^k D &:= \{X(x) \in T_x M \mid X \in \partial^k \mathcal{D}\} \\ \partial^{(k)} D &:= \{X(x) \in T_x M \mid X \in \partial^{(k)} \mathcal{D}\} \end{aligned}$$

とおき, それぞれ D の k 階の derived, weak derived system という.

前節の例に対し, 上で定めた weak derived system がどのようになるかというところ, 接触分布 D_{cont} に対しては, $D_{\text{cont}}^2 \subset \partial^{(1)} D_{\text{cont}}^3 = T\mathbb{R}^3$ となり Engel 構造は, $D_{\text{engel}}^2 \subset \partial^{(1)} D_{\text{engel}}^3 \subset \partial^{(2)} D_{\text{engel}}^4 = T\mathbb{R}^4$ となり, Cartan 分布は $D_{\text{cartan}}^2 \subset \partial^{(1)} D_{\text{cartan}}^3 \subset \partial^{(2)} D_{\text{cartan}}^5 = T\mathbb{R}^5$ となる. ここで, 右上に書いた数字は rank を表す.

さて, 今まで扱ってきた 3 つの具体例に関して, Cartan 分布だけがある性質をもっている. それは, Cartan 分布だけが局所的に非自明なのである.

Remark 3.6

今までの説明において, 接触分布に対しては一般的な定義をしたが, Engel と Cartan に関しては, 一般的には定義していない. そこで, ここでは derived system あるいは weak derived system が同じ型をもつ, つまり, 同じ上がり方をする微分式系 (M, D) をそれぞれの一般的な分布としよう. その意味で Example 2.4, 2.5 は標準といっているのである.

さて, 先程までは可積分性など接分布の幾何学的側面について述べたが, 今度は代数的側面からの分布の特徴づけについて考えよう. 与えられた接分布の基本不変量として symbol algebra と呼ばれる Lie algebra が weak derived system から作られる. まず, 次のような微分式系 D の weak derived system の列を考える:

$$D \subset \partial^{(1)}D \subset \dots \subset \partial^{(k)}D = \partial^{(k+1)}D = \dots$$

ここで, 各 derived system $\partial^{(k)}D$ は一定の rank, すなわち接束の部分束になっていると仮定する. このような微分式系を **正則な微分式系** と呼ぶ. これに対し, 以下のようにおく:

各点 $x \in M$ に対し,

$$\mathfrak{g}_{-m}(x) := \partial^{(m-1)}D(x) / \partial^{(m-2)}D(x) \quad \text{for } m \geq 1$$

ただし, $\partial^{(-1)}D(x) := \{0\}$ とする. そして各々の商ベクトル空間の直和を考える:

$$\mathfrak{g}(x) := \mathfrak{g}_{-(k+1)}(x) \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_{-1}(x)$$

M 上のベクトル場のブラケット積 $[\cdot, \cdot]$ を用いることで, この空間上のブラケット積が定義される.

Definition 3.7

正則な微分式系 (M, D) に対して, 上のようにして構成される Lie algebra $\mathfrak{g}(x)$ を点 $x \in M$ における **symbol algebra** という.

さて, 最初に挙げた具体例にたいして, その symbol algebra がどうなっているかという, 以下のようになっている.

Example 3.8 (Example 2.2 の続き)

例 2.2 の標準接触分布に対し, symbol algebra は,

$$\mathfrak{g}(x) = \mathfrak{g}_{-2}(x) \oplus \mathfrak{g}_{-1}(x)$$

となる. ここで, $\dim \mathfrak{g}_{-2} = 1$, $\dim \mathfrak{g}_{-1} = 2$ であり, 各点において, この symbol algebra は 3次元 Heisenberg algebra に同型である.

Example 3.9 (Example 2.4 の続き)

例 2.4 の標準 Engel 分布に対し, *symbol algebra* は,

$$\mathfrak{g}(x) = \mathfrak{g}_{-3}(x) \oplus \mathfrak{g}_{-2}(x) \oplus \mathfrak{g}_{-1}(x)$$

となる. ここで, $\dim \mathfrak{g}_{-3} = 1$, $\dim \mathfrak{g}_{-2} = 1$, $\dim \mathfrak{g}_{-1} = 2$ である.

Example 3.10 (Example 2.2 の続き)

例 2.5 の標準 Cartan 分布に対し, *symbol algebra* は,

$$\mathfrak{g}(x) = \mathfrak{g}_{-3}(x) \oplus \mathfrak{g}_{-2}(x) \oplus \mathfrak{g}_{-1}(x)$$

となる. ここで, $\dim \mathfrak{g}_{-3} = 2$, $\dim \mathfrak{g}_{-2} = 1$, $\dim \mathfrak{g}_{-1} = 2$ である.

Remark 3.11

上における導入の仕方からもわかるように, *symbol algebra* は各点による概念である. これがすべての点において, ある生成条件をみたす *nilpotent Lie algebra* \mathfrak{m} (*fundamental graded algebra* とよばれている) に同型であるとき, 考えている正則な微分式系 (M, D) を *type* \mathfrak{m} の正則微分式系という. ちなみに今回挙げた具体例はすべて, 各点で同型なのでこの性質をもつ.

参考文献

- [1] Thomas, A. Ivey, J. M. Landsberg, Cartan for Beginners: Differential Geometry via Moving Frames and Exterior Differential Systems,
- [2] N. Tanaka On generalized graded Lie algebras and geometric structures I, J. Math. Soc. Japan, 19 (1967), 215–254.
- [3] K. Yamaguchi, Differential systems associated with simple graded Lie algebras, Advanced Studies in Pure Math., **22** (1993), 413–449

THE GENERIC SMOOTHNESS OF THE GAUSS MAP AND THE REFLEXIVITY FOR A PROJECTIVE VARIETY

深澤 知 (早稲田大学理工学術院/日本学術振興会特別研究員)

1. ガウス写像

\mathbb{R}^3 内の曲面 $f: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ の各点に対して, その単位法ベクトル (または接平面) を対応させる写像 $\gamma_f: U \rightarrow S^2$ (または $U \rightarrow \mathbb{P}^2$) は **ガウス写像** とよばれている. 名前の由来は, ガウスによって展開された曲面論にあると思われる. ひとつの自然な一般化として, 射影空間内の部分多様体 $M \subset \mathbb{P}^N$ を考え, ガウス写像としては (埋め込まれた) 射影接空間を対応させる写像 $x \mapsto T_x X$ をとるという設定がある. 本稿では以下, この設定で考える. ここで基礎体は \mathbb{R}, \mathbb{C} , または代数閉体とする. ガウス写像はそれぞれ考えたいカテゴリーで定義される.

$X \subset \mathbb{P}^N$ を n 次元射影多様体とする. X は線型でないと仮定する. X の非特異点 $x \in X$ での射影接空間を $T_x X \subset \mathbb{P}^N$ とかく. 色々な言い方があるが, 射影接空間 $T_x X$ とは, \mathbb{P}^N の affine open \mathbb{A}^N 上で見た時の x を通る (affine) 接空間の射影閉包である. $\mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N)$ は \mathbb{P}^N の n 次元線型空間全体からなるグラスマン多様体とする. X の非特異点 x に対して接空間 $T_x X$ を対応させる X から $\mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N)$ への有理写像 γ を **ガウス写像** という.

x_1, \dots, x_n を X の点 x のまわりの局所座標とし, X の \mathbb{P}^N への埋め込みの写像を $\rho = (1 : x_1 : \dots : x_n : f_{n+1} : \dots : f_N)$ と書くことにする. この時, 接空間 $T_x X \in \mathbb{G}(n, \mathbb{P}^N)$ はつぎの行列で表現される:

$$\begin{pmatrix} \rho \\ \partial\rho/\partial x_1 \\ \vdots \\ \partial\rho/\partial x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x_1 & x_2 & \dots & x_n & f_{n+1} & \dots & f_N \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & f_{n+1,x_1} & \dots & f_{N,x_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & f_{n+1,x_n} & \dots & f_{N,x_n} \end{pmatrix}.$$

本発表では, 正標数代数幾何の観点からガウス写像を研究する. 目的は, ガウス写像の **generic smoothness** と射影双対に関する **reflexivity** の関係を記述することである. ガウス写像の **generic smoothness** を調べる背景を次節で, **reflexivity** について3節で述べたい. 以下, 基礎体 K を標数 $p \geq 0$ の代数閉体とすることをお許し頂きたい.

本発表の主結果は, 楫元氏 (早稲田大学) との共同研究により得られた.

2. LINEARITY THEOREM と正標数におけるガウス写像

Example 1. $\mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^3; (1 : u) \mapsto (1 : u : u^6 : u^7)$ の像で定義される曲線 C を考える. この時ガウス写像 $\gamma : C \rightarrow \mathbb{G}(1, \mathbb{P}^3)$ は次の行列で与えられる:

$$\begin{pmatrix} 1 & u & u^6 & u^7 \\ 0 & 1 & 6u^5 & 7u^6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5u^6 & -6u^7 \\ 0 & 1 & 6u^5 & 7u^6 \end{pmatrix}$$

基礎体 K の標数が 0 であれば, 上のガウス写像はほとんどの点で単射 (正確には, 適当な稠密開集合上で単射) であることがわかる. 代数多様体のカテゴリーでは, これは像へ双有理写像になっている. 一般次元では, 次のことが知られている ([2, 8, 16])¹.

Linearity Theorem

基礎体 K を標数 0 の代数閉体とする. この時, ガウス写像 γ の一般ファイバーは線型空間である. 特に $\dim X = \dim \gamma(X)$ ならば, $\gamma : X \dashrightarrow \gamma(X)$ は双有理である.

$\dim X > \dim \gamma(X)$ の時, Linearity Theorem は X に線織構造が入る (線型空間で覆われる) ことを主張する. 例えば $\dim X = 2 > \dim \gamma(X) = 1$ とすれば, X は直線で覆われる曲面となる. この曲面の例として, 接線曲面 (曲線の接線の和により得られる曲面) と錐面 (曲線と 1 点を結ぶ直線の和により得られる曲面) が知られている. また逆に, $\dim \gamma(X) = 1$ なる曲面 X はこれら 2 種に分類され, 可展曲面とよばれている. この概念を一般化して, $\dim X > \dim \gamma(X)$ なる多様体を可展多様体とよぶことにする².

正標数で可展曲面を分類しよう, と考えることは自然なことと思われるが, それが標数零の場合と同様の考え方では不可能であることが, 様々な例を計算してみるとわかる. Example 1 を標数 3 で見てみよう. この時 $6 = 0$ である. ガウス写像 γ は,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & u^6 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & u^6 \end{pmatrix}$$

で与えられる. この時, $\gamma(-u) = \gamma(u)$ であり, γ の一般ファイバーには 2 点現れ, Linearity Theorem が成立していないことがわかる³. またこのとき C の接線曲面 $\text{Tan}C \subset \mathbb{P}^3$ は $X_0X_3 - X_1X_2$ で与えられることが計算によって確かめられ, $\text{Tan}C$ は可展曲面ではないこともわかる. (標数零では接線曲面は常に可展曲面であった [2]). さらに可展曲面であるが線織構造が入らない例として次がある (cf. [3]):

¹一方, 非特異ならば $\dim X = \dim \gamma(X)$ となることが知られている ([8, 16]).

²例えば [15] でこの定義を採用している. [1] に可展多様体の研究が網羅的に解説されているが, この呼び方には反対意見である. また正標数では下に述べることからこの呼び方は適切でない気がする.

³ガウス写像の一般ファイバーが複数点になる非特異射影代数曲線の構成は一般には難しい. この例は楯元氏と Rathmann による. また楯氏により, 種数が 2 以上ではそのような例は作れないことが証明されている ([11]).

Example 2. 標数を $p = 3$ とし, $X \subset \mathbb{P}^3$ を $f: \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{P}^3; (x, y) \mapsto (1 : x : y : x^6 + y^6)$ の像の閉包とする. γ の一般ファイバーは非特異 2 次曲線となる.

何も仮定しなければ, 正標数においてガウス写像の振る舞いはかなり自由であり ([3, 4]), 逆に, ガウス写像周辺の幾何を統率することは非常に難しくなる. Linearity Theorem が正標数で成立しない理由は何か? 上記 2 例について, ガウス写像を微分してみると, べったり零になってしまうことがわかる. 即ち, ガウス写像に関する generic smoothness⁴ (Sard's Theorem) の不成立がその現象の理由のひとつと考えられる. ではガウス写像の generic smoothness を仮定すれば OK か? この問題は reflexivity という性質と, Kleiman-Piene の問題に関係してくる.

3. REFLEXIVITY と KLEIMAN-PIENE の問題

$X \subset \mathbb{P}^N$ を n 次元射影多様体とする. \mathbb{P}^N の超平面全体からなる双対射影空間を \mathbb{P}^{N*} ($\cong \mathbb{G}(N-1, \mathbb{P}^N)$) とかく. $CX := \overline{\{(x, H) \in X_{\text{sm}} \times \mathbb{P}^{N*} \mid T_x X \subset H\}} \subset \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^{N*}$ を conormal variety という. 自然な射影 $\pi: CX \rightarrow \mathbb{P}^{N*}$ を conormal map, その像 $X^* := \pi(CX)$ を双対多様体という. $X^* \subset \mathbb{P}^{N*}$ の上にも conormal variety $CX^* \subset \mathbb{P}^{N**} \times \mathbb{P}^{N*} = \mathbb{P}^N \times \mathbb{P}^{N*}$ を考えることができる.

Definition 1. $CX = CX^*$ が成立する時, X は reflexive であるという.

Fact 1 (Monge-Segre-Wallace criterion [9]). X is reflexive $\Leftrightarrow \pi: CX \rightarrow X^*$ is generically smooth.

これにより, 標数零においては, 任意の射影多様体が reflexive である.

Proposition 1. X が reflexive ならば次が成立する.

- (1) (射影双対性) $X^{**} = X$.
- (2) (Linearity Theorem) ガウス写像 γ の一般ファイバーは (scheme-theoretic に) 線型である. 特に, γ は (像へ) generically smooth である.

このように reflexivity を仮定すれば, 正標数においても標数零と同様の幾何が可能である. X が曲線の時には, reflexivity とガウス写像の generic smoothness が同値であることが知られていた. S. Kleiman と R. Piene はこれが高次元でも成立するかを問うた⁵.

⁴誘導される (Zariski) 接空間の間の射が general な点で全射である, という意味. 体の言葉を使えば, 誘導される関数体の体拡大が分離的であるということ. 標数零ではいつでも成立する.

⁵この記述は最も重要な場合. 正確な問題提起はある射の分離性を問うている. 本来の Kleiman-Piene の問題に対する解答が肯定的ならば, ガウス写像の generic smoothness は reflexivity を意味する, という位置づけである.

Kleiman-Pienc's question [14, pp. 108–109]

ガウス写像 γ が (像へ) generically smooth ならば X は reflexive であるか？

即ち, Kleiman-Pienc の問題に対する解答が肯定的とすると, ガウス写像が generically smooth ならば Linearity Theorem も成立することになる.

4. ガウス写像の GENERIC SMOOTHNESS と REFLEXIVITY

残念ながら (?) Kleiman-Pienc の問題に対する解答は一般には否定的である. 楯元氏及び発表者により, 次の結果が得られている.

- (1) 任意正標数 $\cdot 3$ 以上の任意次元で, ガウス写像が双有理な non-reflexive 多様体が存在する. ([5, 12, 13]: そのような具体例を提示.)
- (2) 曲面の場合には, ガウス写像の generic smoothness は reflexivity を意味する. ([6])

以上の研究によって, Kleiman-Pienc の問題は完全に解決された. 次の段階として:

Question 1. どのような射影多様体が, ガウス写像が generic smooth でありかつ non-reflexive となる埋め込みをもつのか？

ということが自然と問題となる. その部分的解答として次を得た:

Main Theorem (F-楯 [7])

$X \subset \mathbb{P}^N$ を線型でない 3 次元以上の射影多様体とする. X のガウス写像の微分が恒等的に零であれば, X は別の射影空間 \mathbb{P}^M への埋め込みで, X が non-reflexive でありかつガウス写像が双有理となるものをもつ.

この定理の仮定を満たす例として, 射影空間 \mathbb{P}^n (のフロベニウス写像のグラフ), 次数が mod p で 1 となるフェルマー超曲面があげられる. これにより, Kleiman-Pienc の問題の反例がかなりたくさん存在することがわかってきた.

Section 2 の終わりに述べた問題をきちんと書くと次のようになるが, それは未だ未解決である:

Question 2 ([13], Question 2). ガウス写像 γ が generically smooth ならば, γ の一般ファイバーは線型であるか？

Question 2 は標数零においての, Linearity Theorem の証明について新たな問題提起をする. Linearity Theorem の証明においては reflexivity を用いたものが標準的とされているように思われるが, 標数零において, reflexivity を使わずにガウス写像の構造だけから, その linearity を果たして導けるのであろうか？

5. 付記: 実微分幾何との関係

実の世界においては, 石川剛郎氏 [10] により非特異可展代数的超曲面が構成されている. この例は, 特異点がすべて複素にあらわれ, 実の世界では特異点を持っていない. これは代数閉体上の代数多様体のカテゴリーでは存在し得ないものである ([16]). この例が, 代数幾何で重要視されている Severi 多様体 ([16]) に対する secant 多様体の超平面切断によって得られている点も, 非常に興味深い. この現象は微分幾何と代数幾何のどのような関係の現れであろうか?

REFERENCES

- [1] M. A. Akinis and V. V. Goldberg, Differential geometry of varieties with degenerate Gauss maps, CMS Books in Mathematics, 18. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [2] G. Fischer and J. Piontowski, Ruled varieties, Advanced Lectures in Mathematics. Friedr. Vieweg & Sohn, Braunschweig, 2001.
- [3] S. Fukasawa, Developable varieties in positive characteristic, Hiroshima Math. J. **35** (2005), 167–182.
- [4] S. Fukasawa, Varieties with non-linear Gauss fibers, Math. Ann. **334** (2006), 235–239.
- [5] S. Fukasawa, On Kleiman-Piense’s question for Gauss maps, Compositio Math. **142** (2006), 1305–1307.
- [6] S. Fukasawa and H. Kaji, The separability of the Gauss map and the reflexivity for a projective surface, Math. Z. **256** (2007), 699–703.
- [7] S. Fukasawa and H. Kaji, Existence of a non-reflexive embedding with birational Gauss map for a projective variety, to appear in Math. Nachr.
- [8] P. A. Griffiths and J. Harris, Algebraic geometry and local differential geometry, Ann. scient. Éc. Norm. Sup. 4^e série **12** (1979), 355–432.
- [9] A. Hefez and S. Kleiman, Notes on the duality of projective varieties, Geometry today (Rome, 1984), 143–183, Progr. Math., 60, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 1985.
- [10] G. Ishikawa, Developable hypersurfaces and homogeneous spaces in a real projective space, Lobachevskii J. Math. **3** (1999), 113–125.
- [11] 楯元, 標数 p の世界, 数理科学 1994 年 3 月号「代数幾何の広がり」, サイエンス社.
- [12] H. Kaji, On the duals of Segre varieties, Geom. Dedicata **99** (2003), 221–229.
- [13] 楯元, ガウス写像の非分離性に関する Kleiman-Piense の問題について, 代数幾何学シンポジウム—高次元多様体, 正標数上の話題を中心として—(2003 年 1 月, 九州大学) 報告集, pp. 134–141.
- [14] S. Kleiman and R. Piense, On the inseparability of the Gauss map, In: Contemp. Math. 123, Amer. Math. Soc., Providence, 1991, pp.107–129.
- [15] J. Piontowski, Developable varieties of Gauss rank 2, Internat. J. Math. **13** (2002), 93–110.
- [16] F. L. Zak, Tangents and secants of algebraic varieties. Transl. Math. Monographs, 127. American Mathematical Society, Providence, RI, 1993.

E-mail address: s.fukasawa@kurenai.waseda.jp

Hermite 対称空間の等方表現の運動量写像と 球面内の等径超曲面

藤井 忍*

2008年2月12日–2月15日[†]

概要

我々は球面内の等径超曲面に興味を持っている。本稿では、階数 2 の既約古典型コンパクト型 Hermite 対称空間の等方表現の運動量写像の、適当な重みを付けたノルム 2 乗写像が等径関数となることを述べる。

1 等径超曲面とは

Riemann 多様体 (M, g) の超曲面 N が等径超曲面 (isoparametric hypersurface) であるとは、 N が M 上の等径関数 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$ のレベル集合になっていることをいう。ここで、Riemann 多様体 (M, g) 上のなめらかな関数 $f \in C^\infty(M)$ が等径関数 (isoparametric function) であるとは、ある $A(x), B(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ が存在して

$$\begin{aligned}\|\text{grad } f\|^2 &= g(\text{grad } f, \text{grad } f) = A(f), \\ \Delta f &= B(f)\end{aligned}$$

となるときをいう。ここで $A(f), B(f)$ はそれぞれ写像の合成を意味する。

等径超曲面に関しては以下のことが知られている：

- 一般に、等質超曲面は主曲率一定超曲面である。特に球面内の超曲面が主曲率一定超曲面であることと等径超曲面であることは同値。

* 広島大学大学院理学研究科数学専攻博士後期課程 2 年

[†] 第 4 回総合数学若手研究集会 (於 北海道大学)

- 球面 S^{n-1} 内の等径超曲面の相異なる主曲率の個数 g は 1, 2, 3, 4, 6 のいずれかである.
- 球面 S^{n-1} 内の等径超曲面で, $g = 1, 2, 3$ なるものはいずれも等質超曲面である.
- 球面内の等径超曲面で $g = 4$ なるものの中には非等質なものが数多く存在する.
- $g = 4$ の場合の球面内の等径超曲面の分類問題は未解決である.

$g = 4$ の場合の球面内の等径超曲面の分類問題は未解決であることもあり, 現在でも活発に研究されている. ここで $g = 4$ の場合の分類について簡単にまとめておく. 等質なものに関しては Hsiang–Lawson[4] によって表現論を用いた分類が成されている. 彼らの結果から次の重要な事実が従う.

事実 1.1 G/K を階数 2 の対称空間とし, $\mathfrak{g} = \mathfrak{k} \oplus \mathfrak{p}$ を G の Lie 代数 \mathfrak{g} の Cartan 分解とすると, 等方表現 $K \curvearrowright^{\text{Ad}} \mathfrak{p}$ の主 K -軌道は球面内の等質超曲面である. 逆に, 球面内の等質超曲面は, ある階数 2 の対称空間 G/K の等方表現の主 K -軌道である.

一方で尾関–竹内 [6, 7] によって球面内の非等質な等径超曲面の最初の例が構成された. その後, Ferus–Karcher–Münzner[2] によって Clifford 代数の表現を用いた構成法に拡張された. 非等質なものの分類に関しては Cecil–Chi–Jensen[1] によってほぼ完成しており, ほとんどの例は Hsiang–Lawson の結果と Ferus 氏らの結果で得られるものに限る, と考えられている.

Cecil 氏らの手法は可換環論を用い, 一方, 等質な場合の分類は表現論が用いられている. 「 $g = 4$ の場合の球面内の等径超曲面を, 等質か非等質であるかに依らない統一的方法で分類したい」ということは我々の研究のモチベーションのひとつである.

2 Hermite 対称空間の等方表現の運動量写像

我々の最終目標は「 $g = 4$ の場合の球面内の等径超曲面を, 等質か非等質であるかに依らない統一的方法で分類したい」ということなのだが, それには運動量写像が使えるのではないかと考えている.

そこで, 運動量写像の定義とその性質について簡単に述べておこう.

定義 2.1 $2n$ 次元 C^∞ -多様体 \mathfrak{p} とその上の微分 2-形式 ω で, $d\omega = 0$ かつ $\omega^{\wedge n} \neq 0$ なるものの組 (\mathfrak{p}, ω) を **シンプレクティック多様体** (symplectic manifold) という.

定義 2.2 Lie 群 K がシンプレクティック多様体 (\mathfrak{p}, ω) に作用しているとする. この K -

作用が以下を満たすとき **Hamilton 作用** (Hamiltonian action) という：

- (1) K -作用は ω を保存する,
- (2) 次の二つを満たす写像 $\mu : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ が存在する：
 - (i) 任意の $\xi \in \mathfrak{k}$ に対して $d\langle \mu, \xi \rangle = \omega(\tilde{\xi}, *)$,
 - (ii) 任意の $P \in \mathfrak{p}$ と任意の $g \in K$ に対して $\mu(g.P) = \text{Ad}^*(g^{-1})\mu(P)$.

ここで \mathfrak{k}^* は K の Lie 代数 \mathfrak{k} の線型空間としての双対空間であり, Ad^* は K の \mathfrak{k}^* への余随伴作用である. $\tilde{\xi}$ は $P \in \mathfrak{p}$ に対して $(d/dt)|_{t=0} \exp(t\xi).P$ を対応させる \mathfrak{p} 上のベクトル場である.

定義 2.2 中の写像 $\mu : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ を Hamilton K -作用に付随する **運動量写像** (moment map) という. 運動量写像 $\mu : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ の性質 (ii) は μ が K -同変写像であることを意味する.

G/K を階数 2 の Hermite 対称空間とするととき次の 2 つのことが言える：

- (1) 等方表現 $K \curvearrowright^{\text{Ad}} \mathfrak{p}$ の主軌道は等径超曲面である. したがってこれはある等径関数 $\varphi : \mathfrak{p} \rightarrow \mathbb{R}$ のレベル集合であり, φ は K -不変な関数である.
- (2) 等方表現 $K \curvearrowright^{\text{Ad}} \mathfrak{p}$ は Hamilton 作用である. したがって運動量写像 $\mu : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{k}^*$ が存在する. 特に μ は K -同変写像である.

等径関数の不変性と運動量写像の同変性に注目し, 我々は次の予想を立てた.

予想 2.3 等径関数 φ と運動量写像 μ は関係がある.

上の予想をもう少し正確に言うと, \mathfrak{k}' 上の K -不変内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ から定まるノルム $\|\cdot\|$ を μ に合成して得られる \mathfrak{p} 上の関数 $\mathfrak{p} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{k}^* \xrightarrow{\|\cdot\|} \mathbb{R}$ は K -不変である. この関数は φ と関係があると予想している.

3 主定理

今回, 我々が得た結果が次の定理である.

主定理 3.1 階数 2 の既約古典型 Hermite 対称空間 G/K を考える. 具体的には以下の 3 タイプである:

$$\text{SO}(2+n)/\text{SO}(2) \times \text{SO}(n), \quad \text{SU}(2+n)/\text{S}(\text{U}(2) \times \text{U}(n)), \quad \text{SO}(10)/\text{U}(5).$$

このとき $a, b \in \mathbb{R}$ に対して関数 $f_{a,b} : \mathfrak{p} \rightarrow \mathbb{R}$ を $P \in \mathfrak{p}$ に対して

$$f_{a,b}(P) = a \|\mu_1(P)\|^2 + b \|\mu_2(P)\|^2 \tag{3.1}$$

で定義する. このとき a, b を上手く選べば $f_{a,b}$ は等径関数になる. 具体的な結果は以下の表の通りである.

type	G/K	(a, b)
B	$\mathrm{SO}(2+n)/\mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(n)$	$(-\frac{1}{2}, 1)$
BC	$\mathrm{SU}(2+n)/\mathrm{S}(\mathrm{U}(2) \times \mathrm{U}(n))$	$(\frac{-n-8}{8n+16}, -\frac{1}{2})$
BC	$\mathrm{SO}(10)/\mathrm{U}(5)$	$(\frac{7}{32}, -\frac{1}{4})$

ただし, $\|\cdot\|$ は標準的な K -不変内積 $\langle \cdot, \cdot \rangle$ を一つ固定し, それから定まるノルムである. G/K が階数 2 の Hermite 対称空間なので, $\mathfrak{k} = \mathfrak{u}(1) \oplus \mathfrak{k}'$ なる (Lie 代数としての) 分解をもつ. μ_1 は $\mathfrak{p} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{k}^* \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{u}(1)$ の合成で, μ_2 は $\mathfrak{p} \xrightarrow{\mu} \mathfrak{k}^* \xrightarrow{\langle \cdot, \cdot \rangle} \mathfrak{k} \rightarrow \mathfrak{k}'$ の合成である. 特に μ_1, μ_2 は K -不変である.

主定理の証明のためには μ の計算が必要である. それには次の定理が有用である.

定理 3.2 (Ohnita[5]) コンパクト型 Hermite 対称空間 G/K の等方表現 $K \overset{\mathrm{Ad}}{\curvearrowright} \mathfrak{p}$ の運動量写像 $\mu : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{k}$ は任意の $P \in \mathfrak{p}$ に対して

$$\mu(P) - \mu(0) = (\mathrm{ad}_P)^2(Z) \quad (3.2)$$

と表される. ただし, Z は 0 ではない \mathfrak{k} の中心の元で $J := \mathrm{ad}_Z$ が \mathfrak{p} 上の複素構造を定めるものである.

例 3.3 $G = \mathrm{SO}(2+n)$, $K = \mathrm{SO}(2) \times \mathrm{SO}(n)$ の場合の等方表現の運動量写像を計算してみよう. この場合 \mathfrak{p} は

$$\mathfrak{p} = \left\{ \left[\begin{array}{c|c} \mathbf{0} & -{}^tX \\ \hline X & \mathbf{0} \end{array} \right] \in M_{2+n}(\mathbb{R}) \mid X \in M_{n,2}(\mathbb{R}) \right\} \quad (3.3)$$

であり, \mathfrak{p} 上の複素構造を定める $Z \in \mathfrak{k}$ は

$$Z = \left[\begin{array}{c|c} J_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{array} \right], \quad \text{ただし } J_1 = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in M_2(\mathbb{R}) \quad (3.4)$$

である. このとき G/K の等方表現の運動量写像 $\mu : \mathfrak{p} \rightarrow \mathfrak{k}$ を定理 3.2 を用いて計算すると

$$\mu(P) = \left[\begin{array}{c|c} -J_1 {}^tX X - {}^tX X J_1 & \mathbf{0} \\ \hline \mathbf{0} & 2X J_1 {}^tX \end{array} \right] \quad (3.5)$$

を得る. ただし $\mu(0) = 0$ としている.

\mathfrak{k} 上の内積として $\langle X, Y \rangle = \mathrm{Tr}(X \bar{Y})$ をとり, これから定まるノルムを用いて各々の場合に $f_{a,b}$ を求めて, その $f_{a,b}$ と尾関-竹内の結果 [6, 7] とを比較することで主定理を得る.

参考文献

- [1] Cecil, T., Chi, Q. S. and Jensen, G., Isoparametric hypersurfaces with four principal curvatures, *Ann. of Math.* **165** (2007), 1–76
- [2] Ferus, D., Karcher, H. and Münzner, H. F., Cliffordalgebren und neue isoparametrische Hyperflächen, *Math. Z.*, **177**(1981), 479–502
- [3] Helgason, S., *Differential Geometry and Symmetric Spaces*, Academic Press (1962)
- [4] Hsiang, W. Y. and Lawson, H. B., Minimal submanifolds of low cohomogeneity, *J. Differential Geometry*, **5** (1971), 1–38
- [5] Ohnita, Y., Moment maps and symmetric Lagrangian submanifolds, “部分多様体論・湯沢 2004 報告集” (2005), 33–38
- [6] Ozeki, R. and Takeuchi, M., On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres I, *Tôhoku Math. J.*, **27** (1975), 515–559
- [7] ———, On some types of isoparametric hypersurfaces in spheres II, *Tôhoku Math. J.*, **28** (1976), 7–55

ON THE SHAPE OF THE STABLE PATTERNS FOR ACTIVATOR-INHIBITOR SYSTEMS IN A DISK

YASUHIITO MIYAMOTO

1. INTRODUCTION

1.1. Known results. One of the main concerns in the nonlinear analysis is the pattern formation. One way to understand the patterns is to find the stable steady states. In this article we are interested in the stable steady states of reaction-diffusion equations and systems with several classes of nonlinearities.

In 1975 Chafee[C75] showed that every non-constant steady state to a scalar reaction-diffusion equation with the Neumann boundary condition is unstable. Hence if a steady state is stable, then it should be constant, i.e., a homogeneous function. In 1978 Casten-Holland[CH78] and in 1979 Matano[Ma79] independently showed that the same conclusion holds for a reaction-diffusion equation on a convex domain in \mathbb{R}^N . Hence every model that can be described by a scalar reaction-diffusion equation does not have a stable inhomogeneous pattern when the domain is convex. When a domain is not convex, there are a scalar reaction-diffusion equation and a non-convex domain such that a stable inhomogeneous steady state exists [Ma79].

Before going to the next result, we will explain the shadow system. Let us consider the Neumann problem of the reaction-diffusion system

$$(FS) \quad \begin{aligned} u_t &= D_u \Delta u + f(u, v) \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}_+, & \tau v_t &= D_v \Delta v + g(u, v) \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ \partial_\nu u &= 0 \text{ on } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, & \partial_\nu v &= 0 \text{ on } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

Let $D_v \rightarrow +\infty$. Then we can expect that $v(x, t)$ tends to a spatially homogeneous function $\xi(t)$ which depends only on t . Letting $v(x, t) = \xi(t)$, and integrating the second equation of (FS) with respect to x over Ω , we have

$$(SS) \quad \begin{aligned} u_t &= D_u \Delta u + f(u, \xi) \text{ in } \Omega \times \mathbb{R}_+, & \tau \xi_t &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} g(u, \xi) dx \text{ in } \mathbb{R}_+, \\ \partial_\nu u &= 0 \text{ on } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+. \end{aligned}$$

The first equation of (SS) is a scalar homogeneous equation if ξ is fixed. Hence the techniques of analyzing a homogeneous equation can be used. (The first equation of (FS) may be an inhomogeneous equation when v is fixed.) The behavior of a solution of (SS) is close to that of (FS) provided that D_v is large, and (SS) is easy to analyze mathematically. Hereafter we consider (SS). We call (SS) *the shadow system* of (FS). Dynamics of the solutions of two systems are also close to each other if D_v is large [Mi06a].

In 1994 Nishiura[N94] showed that every steady state to (SS) in a finite interval with certain conditions on f and g is unstable when u is neither constant nor monotone. Hence if an inhomogeneous steady state (u, ξ) is stable, then u should be monotone. This result was generalized by Ni-Poláčik-Yanagida[NPY01] in 2001. Table 1 shows the summary of the results that are explained above.

The dimension	Scalar equations	(Shadow) systems
1	constant [C75]	monotone [N94, NPY01]
N ($N \geq 2$)	constant [CH78, Ma79]	?

TABLE 1. Instability results on convex domains.

Date: January 7, 2008.

Key words and phrases. Reaction-Diffusion system; Stability; Hot spots; Boundary spike layer.

1.2. Activator-Inhibitor system. Next we study the stable steady states to a shadow system in a high-dimensional domain. It is known that there is a stable inhomogeneous steady state to (SS) even if the domain is convex, e.g., a ball. For example, the shadow Gierer-Meinhardt system

$$(GM) \quad \begin{aligned} u_t &= \varepsilon^2 \Delta u - u + \frac{u^p}{\xi^q} \quad \text{in } \Omega \times \mathbb{R}_+, & \tau \xi_t &= -\xi + \frac{1}{|\Omega| \xi^s} \int_{\Omega} u^r dx \quad \text{in } \mathbb{R}_+, \\ \partial_\nu u &= 0 \quad \text{on } \partial\Omega \times \mathbb{R}_+, \\ 0 &< (p-1)/q < r/(s+1), \quad p > 1, \quad q > 0, \quad r > 0, \quad s \geq 0. \end{aligned}$$

has a stable inhomogeneous steady state called a boundary one-spike layer even if the domain is convex. For example, see [W97] for existence and see [Mi05] for the stability.

On the other hand, there are several classes of nonlinearities such that the system does not have a stable inhomogeneous steady state. Jimbo-Morita [JM94] showed that the reaction-diffusion system (FS) with the gradient structure does not have a stable inhomogeneous steady state provided that the domain is convex and that $\tau = 1$. Yanagida [Y02a] showed that the same conclusion holds for the reaction-diffusion system (FS) with the skew-gradient structure on a convex domain if $\tau > 0$ is not small. The skew-gradient (shadow) system includes the (shadow) Gierer-Meinhardt system when p, q, r , and s satisfy a certain condition. Yanagida's result looks to contradict the existence of a stable inhomogeneous steady state to the (shadow) Gierer-Meinhardt system. However, his result does not cover the case where τ is small, and a stable inhomogeneous steady state can exist when τ is small.

Before explaining an effect of τ , we intuitively explain (FS) and u and v in (FS). The activator-inhibitor system (FS) is a model describing the interaction between the (*short range*) activator u and the (*long range*) inhibitor v . The shadow system (SS) is a limit system where the strength of the diffusion of v is infinity. Thus v becomes a spatially homogeneous function ξ . The activator activates the production rate of the inhibitor ($g_u > 0$), and the inhibitor suppresses the production rate of the activator ($f_v < 0$). The production rate of the inhibitor decreases as the inhibitor increases ($g_v < 0$). However, we do not assume the monotonicity of f in u . We want to consider the case where the activator reacts autocatalytically. In that case f is not monotone in u . A typical example of f is $f(u, v) = u(1-u)(a-u) - \alpha v$ ($0 < a < 1, \alpha > 0$). This non-monotonicity induces complex patterns. We call (FS) the activator-inhibitor system if f and g satisfy

$$(AI) \quad f_v < 0, \quad g_u > 0, \quad \text{and} \quad g_v < 0.$$

Hereafter we consider (SS) satisfying (AI). Note that if (u, ξ) is a steady state to (SS) for some $\tau > 0$, then (u, ξ) is a steady state to (SS) for all $\tau > 0$. τ is the rate of reaction speeds between the activator and the inhibitor. When τ is large, the reaction speed of the inhibitor is slow. Dividing the second equation of (SS) and letting $\tau \rightarrow +\infty$, we see that ξ changes slowly in time. Therefore we can expect that the behavior of the solution to (SS) is close to that of the solution to a scalar reaction-diffusion equation and that all the inhomogeneous steady states are unstable provided that the domain is convex (cf. [CH78, Ma79]). When τ is small, the inhibitor reacts quickly. This effect stabilizes an inhomogeneous steady state, and a stable inhomogeneous steady state can exist.

By the way, there is a possibility where a stable inhomogeneous steady state becomes unstable when τ is large. In this case a Hopf bifurcation occurs. [NTY01, WW03] studied in detail the pair of complex eigenvalues that pass through the imaginary axis. This change from stability to instability does not appear in a scalar equation, and appears only in a system. The range of τ for which a steady state is stable is important when one studies the stability of steady state to a system.

1.3. The problem setting and the main results. The following problem naturally arises: In the case of the shadow system on a high-dimensional domain, we want to find all the stable steady states. However, it is actually impossible to find all the steady state. Hence we will change the setting of the problem: If stable, then what shape is it? Our strategy is to find a sufficient condition, which can be determine by the shape, for the steady state to be unstable for *all* $\tau > 0$. Then the contrapositive of the sufficient condition becomes the necessary condition for the steady state to be stable for *some* $\tau > 0$. In other words we know the shape of the stable steady states. We want to find a sufficient condition that captures many unstable steady state,

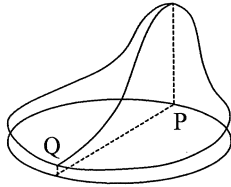


FIGURE 1. The shape of a stable pattern

because the contrapositive of the sufficient condition narrows candidates of the stable steady states.

However, there are not so many results of this problem. It is because there is a potential problem how to describe the function defined in a high-dimensional domain and the method to attack this problem is not clear. As far as the scalar equation is concerned, a stable steady state is constant. Hence we need not answer the problem. In the case of the shadow system in an interval, every inhomogeneous stable steady state can be described as monotone. Our answer or suggestion here is the following: Using the number and the locations of the critical points, we describe the function defined in a high-dimensional domain.

From now on, we consider the shadow system on the disk $D := \{x \in \mathbb{R}^2; |x| < 1\}$ satisfying that

$$(1.1) \quad \begin{aligned} & f(\cdot, \cdot), g(\cdot, \cdot) \text{ are of class } C^2, f_\xi < 0, g_\xi < 0, \text{ and} \\ & \text{there is a function } k(\xi) \in C^0 \text{ such that } g_u(u, \xi) = -k(\xi)f_\xi(u, \xi). \end{aligned}$$

This class of nonlinearities includes the shadow system of the activator-inhibitor type. We give two example later.

We are in a position to state the main result.

Theorem 1.1 ([Mi06b, Mi07a]). *Let D be a disk, and let (u, ξ) be an inhomogeneous steady state to (SS). If (u, ξ) is stable for some $\tau > 0$, then u has exactly two critical points on \bar{D} , and those are on ∂D . Hence if u has a critical point inside D , then (u, ξ) is unstable.*

Fig. 1 shows the shape of u when (u, ξ) is stable. We do not assume smallness or largeness of the diffusion coefficient D_u in (SS). The proof does not rely on the singular perturbation technique. When D_u is small, there are many results about the shape of inhomogeneous steady states. This theorem says that only the steady state whose shape is like a boundary one-spike layer can be stable even if D_u is not small. If D_u is larger than a certain value, then we can show that u is symmetric with respect to a line containing the center of the disk [Mi07b]. It is well-known that every positive steady state is radially symmetric if the Dirichlet boundary condition is imposed. However, there seems to be few results about the symmetry of the steady state to a Neumann problem when the steady state is not the least-energy solution.

We can say the result of Theorem 1.1 as follows in terms of the chemistry: Only the pattern where the activator has the maximum density at one point on the edge of the shale (plate) can be stable.

If the activator has an interior peak (e.g., spike or spot), then the top of the peak is a critical point, hence the steady state is unstable. The stable pattern does not have an interior peak.

Let us consider the assumption (1.1). The assumptions $f_\xi < 0$ and $g_\xi < 0$ are included in (AI). Therefore those are natural in some sense. Although the last assumption seems to be artificial, (1.1) includes the following two systems:

Example 1.2. The shadow Gierer-Meinhardt system is (GM). (GM) always satisfies (AI). If $p = r - 1$, then (1.1) holds.

Example 1.3. The shadow system with the FitzHugh-Nagumo type nonlinearity is

$$(FHN) \quad \begin{aligned} u_t &= D_u \Delta u + u(1-u)(u-a) - \alpha\xi, & \tau\xi_t &= \frac{1}{|\Omega|} \int_{\Omega} \beta u dx - \gamma\xi \text{ in } \mathbb{R}_+, \\ \partial_\nu u &= 0 \text{ on } \partial\Omega, \\ 0 &< a < 1, \quad \alpha > 0, \quad \beta > 0, \quad \text{and } \gamma > 0. \end{aligned}$$

(FHN) always satisfies (AI) and (1.1).

Morse index	Linear	Nonlinear
0	The first eigenfunction of Δ_N is constant	[CH78, Ma79]
1	Conjecture 2.5	Conjecture 2.4
n	What shape is an eigenfunction?	What shape is u ?

TABLE 2. The relation among [CH78, Ma79] and Conjectures 2.5 and 2.4

2. THE PROOF OF THE MAIN THEOREM AND RELATED TOPICS

2.1. **Lemmas used in the proof.** The proof of Theorem 1.1 consists of the following three lemmas:

Lemma 2.1. [Mi06b, Lemma 3.2] *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a bounded domain. Let (u, ξ) be a steady state to (SS) satisfying (1.1). If the second eigenvalue of the eigenvalue problem*

$$(EV_\Omega) \quad D_u \Delta \varphi + f_u(u, \xi) \varphi = \lambda \varphi \text{ in } \Omega, \quad \partial_\nu u = 0 \text{ on } \partial\Omega$$

is positive, then, for any $\tau > 0$, (u, ξ) is unstable. Specifically, the linearized operator of (SS) at (u, ξ) has an eigenvalue with positive real part.

Lemma 2.2. [Mi06b, Lemma 3.4] *Let $D \subset \mathbb{R}^2$ denote the disk with radius 1. Let u be a non-constant solution*

$$(2.1) \quad D_u \Delta u + h(u) = 0 \text{ in } D, \quad \partial_\nu u = 0 \text{ on } \partial D.$$

By $U(\theta)$ we define $U(\theta) := u(\cos \theta, \sin \theta)$. If $\mathcal{Z}[U_\theta(\cdot)] := \#\{U_\theta(\theta) = 0; \theta \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\} \geq 3$, then the second eigenvalue of (EV_D) is positive.

Lemma 2.3. [Mi07a, Lemma C] *Let u be a non-constant solution to (2.1). u has a critical point inside D , then the second eigenvalue of (EV_D) is positive. Here we say that (x_0, y_0) is a critical point of u if $u_x(x_0, y_0) = u_y(x_0, y_0) = 0$.*

In Lemmas 2.2 and 2.3, there is no assumption on the nonlinearity h and the diffusion coefficient D_u .

In the proofs of Lemmas 2.2 and 2.3, the detailed analysis of the zero level set of $-(x - x_0)u_y + (y - y_0)u_x$ is done. The zero-level set (or the nodal curve) gives the relation between the shape of the solution and the Morse index. The zero-level set is corresponding to the zero-number in a one-dimensional case.

2.2. **Extension to a convex domain.** We consider Lemma 2.3. When Theorem 1.1 is extended to a convex domain, we are faced to the following problem:

Conjecture 2.4 ([Y06, Yanagida]). *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a convex domain. Let u be a non-constant solution to*

$$\Delta u + h(u) = 0 \text{ in } \Omega, \quad \partial_\nu u = 0 \text{ on } \partial\Omega.$$

If u has a critical point inside Ω , then the second eigenvalue of the associated eigenvalue problem is positive.

E. Yanagida pointed out that this conjecture is a nonlinear version of the “hot spots” conjecture of J. Rauch.

Conjecture 2.5 ([R74, Rauch]). *Let $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ be a bounded domain. The maximum and the minimum of any non-zero eigenfunction corresponding to the second eigenvalue of the Neumann Laplacian are attained on the boundary.*

The “hot spots” conjecture immediately follows from Conjecture 2.4. Lemma 2.3 is the positive answer of Conjecture 2.4 when the domain is a disk. Table 2 shows the relation among the known results and conjectures.

Table 3 shows the relation between Conjecture 2.4 and a problem of Ni and Takagi. If we ignore the restriction on the domain, then Conjecture 2.4 can be seen as a generalization of a problem of Ni-Takagi[NT91, NT93].

Acknowledgment. The author thanks to Professor E. Yanagida for informing him that Conjecture 2.4 is a nonlinear version of Conjecture 2.5. This work was partially supported by a COE program of Kyoto University.

	Equation	Domain	Solution
Conjecture 2.4	$\Delta u + h(u) = 0$	Convex domain	Any solution
Ni-Takagi	$\varepsilon^2 \Delta u - u + u^p = 0$	Any domain	Least-energy sol.

TABLE 3. The relation between Conjecture 2.4 and a Ni-Takagi problem.

REFERENCES

- [C75] N. Chafee, *Asymptotic behavior for solutions of a one-dimensional parabolic equation with homogeneous Neumann boundary conditions*, J. Diff. Eq. **18** (1975), 111–134.
- [CH78] R. Casten and R. Holland, *Instability results for reaction diffusion equations with Neumann boundary conditions*, J. Diff. Eq. **27** (1978), 266–273.
- [GM72] A. Gierer and H. Meinhardt, *A theory of biological pattern formation*, Kybernetik (Berlin) **12** (1972), 30–39.
- [JM94] S. Jimbo and Y. Morita, *Stability of nonconstant steady-state solutions to a Ginzburg-Landau equation in higher space dimensions*, Nonlinear Anal. **22** (1994), 753–770.
- [JN00] D. Jerison and N. Nadirashvili, *The “hot spots” conjecture for domains with two axes of symmetry*, J. Amer. Math. Soc. **13** (2000), 741–772.
- [Ma79] H. Matano, *Asymptotic behavior and stability of solutions of semilinear diffusion equations*, Publ. Res. Inst. Math. Sci. **15** (1979), 401–454.
- [Mi05] Y. Miyamoto, *Stability of a boundary spike layer for the Gierer-Meinhardt system*, European J. Appl. Math. **16** (2005), 467–491.
- [Mi06a] Y. Miyamoto, *Upper semicontinuity of the global attractor for the Gierer-Meinhardt model* J. Diff. Eq. **223** (2006), 185–207.
- [Mi06b] Y. Miyamoto, *An instability criterion for activator inhibitor systems in a two-dimensional ball*, J. Diff. Eq. **229** (2006), 494–508.
- [Mi07a] Y. Miyamoto, *An instability criterion for activator inhibitor systems in a two-dimensional ball II*, J. Diff. Eq. **239** (2007), 61–71.
- [Mi07b] Y. Miyamoto, *On the shape of stable patterns for activator-inhibitor systems in two-dimensional domains*, Quart. Appl. Math. **65** (2007), 357–374.
- [N94] Y. Nishiura, *Coexistence of infinitely many stable solutions to reaction diffusion systems in the singular limit*, Dynamics Reported **3** (1994), 25–103.
- [NPY01] W. M. Ni, P. Poláčik and E. Yanagida, *Monotonicity of stable solutions in shadow systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **353** (2001), 5057–5069.
- [NT91] W. M. Ni and I. Takagi, *On the shape of least energy solution to a semilinear Neumann problem*, Comm. Pure Appl. Math. **41** (1991), 819–851.
- [NT93] W. M. Ni and I. Takagi, *Locating the peaks of least energy solutions to a semilinear Neumann problem*, Duke. Math. J. **70** (1993), 247–281.
- [NTY01] W. M. Ni, I. Takagi and E. Yanagida, *Stability of least energy patterns of the shadow system for an activator-inhibitor model*, Japan J. Indust. Appl. Math. **18** (2001), 259–272.
- [R74] J. Rauch, *Five problems: an introduction to the qualitative theory of partial differential equations*, Partial Differential Equations and Related Topics (Jerome A. Goldstein, ed.), Springer-Verlag, Berlin, 1974, 355–369, Lecture Notes in Mathematics 446.
- [W97] J. Wei, *On the boundary spike layer solutions to a singularly perturbed Neumann problem*, J. Diff. Eq. **134** (1997), 104–133.
- [WW03] M. Ward and J. Wei, *Hopf bifurcation of spike solutions for the shadow Gierer-Meinhardt model*, European J. Appl. Math. **14** (2003), 677–711.
- [Y02a] E. Yanagida, *Mini-maximizers for reaction-diffusion systems with skew-gradient structure* J. Diff. Eq. **179** (2002), 311–335.
- [Y06] E. Yanagida, private communication (2006).

DEPARTMENT OF MATHEMATICS, TOKYO INSTITUTE OF TECHNOLOGY, MEGURO-KU, TOKYO 152-8551, JAPAN
E-mail address: miyamoto@math.titech.ac.jp

Some relations in universal enveloping algebras of three dimensional Lie algebras

筑波大学大学院数理物質科学研究科 村田駿祐 (Shunsuke MURATA)

1 はじめに

\mathbb{C} 上の 2 元生成の 3 次元リー代数 L を考える. 3 次元リー代数 L は derived ideal の次元と center が derived ideal に含まれるか否かにより, 次の 5 パターンに分類されていることが知られている [2].

- (a) L は abelian
- (b) L はハイゼンベルグ代数 (以下, \mathfrak{h} と書くことにする)
- (c) $L = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}g$ s.t.

$$[e, f] = e \quad [e, g] = 0 \quad [f, g] = 0$$

- (d) $L = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}g$ s.t.

$$[e, f] = 0 \quad [e, g] = e \quad [f, g] = \alpha f \quad \text{(d)-}(\alpha)$$

$$[e, f] = 0 \quad [e, g] = e + \beta f \quad [f, g] = f \quad \text{(d)-}(\beta)$$

ただし, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}^\times$ であり, $\alpha\alpha' = 1$ となる α' は α によって決まるものと同型.

- (e) 特殊線形リー代数 (以下 \mathfrak{sl}_2 と書くことにする)

上記の分類において 2 元生成にできないパターンは (a) 及び (d)- (α) の $\alpha = 1$ の 2 種類の場合のみで, 他は全て 2 元生成にできることが知られている [3]. 従って, この場合を除いて $L = \langle x, y \rangle$ (2 元生成) と仮定し, その包絡代数 $U(L)$ を考える. このとき, $U(L)$ における関係式は 2 元 x, y の積により表される. 本稿では, まずある種の関係式によって上記の分類に対する考察を行う. そして, この研究に関連して導かれた $U(\mathfrak{sl}_2)$ の新たな基底の決定を受けて, その q 類似である量子群 $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ における新しい基底を求める.

以下が今回の私の結果である.

Main result

- (i) L を 3 次元リー代数とする. いま, 関係式

$$(H) \begin{cases} yxy^k = \frac{k}{k+1}xy^{k+1} + \frac{1}{k+1}y^{k+1}x \\ y^kxy = \frac{1}{k+1}xy^{k+1} + \frac{k}{k+1}y^{k+1}x \end{cases}$$

を (H) 型と呼ぶことにすると次の事実が成り立つ.

- $L \cong \mathfrak{S} \iff$ (H) 型は任意の $x, y \in L$ s.t. $L = \langle x, y \rangle$ に対して成立する.
- $L \cong \mathfrak{sl}_2 \iff$ (H) 型を満たす $x, y \in L$ s.t. $L = \langle x, y \rangle$ は存在しない.
- $L \not\cong \mathfrak{S}, \mathfrak{sl}_2 \iff$ (H) 型を満たす $x, y \in L$ s.t. $L = \langle x, y \rangle$ が存在し,
(H) 型を満たさない $x, y \in L$ s.t. $L = \langle x, y \rangle$ も存在する.

(ii) $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を \mathfrak{sl}_2 の量子群とする. このとき,

$$U_q(\mathfrak{sl}_2) = \left(\bigoplus_{i \geq 0, j \geq k \geq 0} \mathbb{C} e^i f^j e^k \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \geq 0, j \geq k \geq 0} \mathbb{C} e^i f^j e^k \right) t$$

が成立する.

□

2 3次元リー代数における関係式

2元生成の3次元リー代数 L の包絡代数 $U(L)$ において, 以下の事実が知られている [3].

Fact 2.1. $L : \mathbb{C}$ 上3次元リー代数

$U(L) : L$ の包絡代数

$L = \langle x, y \rangle : 2$ 元生成と仮定

$U_k = \sum_{0 \leq m \leq k} (\mathbb{C} x y^m + \mathbb{C} y^m x + \mathbb{C} y^m)$ ($k \geq 0$) とする.

このとき, $U(L)$ において以下の式が成立する.

$$\begin{aligned} (A_k) \quad & y x y^k \equiv \frac{k}{k+1} x y^{k+1} + \frac{1}{k+1} y^{k+1} x \pmod{U_k} \\ (B_k) \quad & y^k x y \equiv \frac{1}{k+1} x y^{k+1} + \frac{k}{k+1} y^{k+1} x \pmod{U_k} \\ (C_k) \quad & y U_k \subseteq U_{k+1}, \quad U_k y \subseteq U_{k+1} \end{aligned}$$

□

Fact 2.1 は3次元リー代数の包絡代数上で成立する関係式の枠組みを定めている. この関係式はリー代数の構造と生成元の選び方によって, 剰余項 U_k だけが変化する. L が \mathfrak{S} や \mathfrak{sl}_2 の場合には U_k の部分がそれぞれ定まっており, 次のようになることが知られている.

Fact 2.2. (i) $L = \mathfrak{S}$, すなわち

$$[p, q] = r, \quad [r, p] = 0, \quad [r, q] = 0$$

を満たすリー代数 $\mathfrak{S} = \mathbb{C}p \oplus \mathbb{C}q \oplus \mathbb{C}r$ とする. このとき

$$\begin{aligned} (A_k) \quad & q p q^k = \frac{k}{k+1} p q^{k+1} + \frac{1}{k+1} q^{k+1} p \\ (B_k) \quad & q^k p q = \frac{1}{k+1} p q^{k+1} + \frac{k}{k+1} q^{k+1} p \end{aligned}$$

が成立する.

(ii) $L = \mathfrak{sl}_2$, すなわち

$$[h, e] = 2e, \quad [h, f] = -2f, \quad [e, f] = h$$

を満たすリー代数 $\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}h$ とする. このとき

$$(A_k) \quad fef^k = \frac{k}{k+1}ef^{k+1} + \frac{1}{k+1}f^{k+1}e + kf^k$$

$$(B_k) \quad f^k ef = \frac{1}{k+1}ef^{k+1} + \frac{k}{k+1}f^{k+1}e + kf^k$$

が成立する.

□

以下, Fact2.2 の (i) のような剰余項が 0 になる形の関係式を (H) 型と呼び, (ii) のような剰余項が kf^k となる形の関係式を (S) 型と呼ぶことにする.

さて, \mathfrak{sl}_2 においては剰余項 U_k の値を決めることができた. しかし, U_k の定義をいま一度見てみると, 剰余項 U_k はより複雑な値をとりうるということがわかる. 実際, 一般には剰余項をコントロールすることさえ非常に難しい. しかし, 上の (H) 型や (S) 型の関係式によって, 前述のリー代数の分類に従った U_k による特徴付けを行うことができる. すなわち, 次の命題が成立する.

Proposition 2.3. L を 3 次元リー代数とし, L は 2 元生成であると仮定する. このとき,

(i) $L \cong \mathfrak{sl}_2$ ならば, $L = \langle x, y \rangle$ とするとき

$$(A_k) \quad yxy^k = \frac{k}{k+1}xy^{k+1} + \frac{1}{k+1}y^{k+1}x$$

$$(B_k) \quad y^k xy = \frac{1}{k+1}xy^{k+1} + \frac{k}{k+1}y^{k+1}x$$

を満たす元 $x, y \in L$ が存在する.

(ii) $L \cong \mathfrak{sl}_2$ ならば, $L = \langle x, y \rangle$ とするとき

$$(A_k) \quad yxy^k = \frac{k}{k+1}xy^{k+1} + \frac{1}{k+1}y^{k+1}x$$

$$(B_k) \quad y^k xy = \frac{1}{k+1}xy^{k+1} + \frac{k}{k+1}y^{k+1}x$$

を満たす元 $x, y \in L$ は存在しない.

□

Proposition 2.4. L を 3 次元リー代数とし, L は 2 元生成であると仮定する. このとき,

(i) $L \cong \mathfrak{sl}_2$ ならば, $L = \langle x, y \rangle$ を満たす全ての $x, y \in L$ に対して

$$(A_k) \quad yxy^k = \frac{k}{k+1}xy^{k+1} + \frac{1}{k+1}y^{k+1}x$$

$$(B_k) \quad y^k xy = \frac{1}{k+1}xy^{k+1} + \frac{k}{k+1}y^{k+1}x$$

が成立する.

(ii) $L = \langle x, y \rangle$ を満たす全ての $x, y \in L$ に対して

$$(A_k) \quad yxy^k = \frac{k}{k+1}xy^{k+1} + \frac{1}{k+1}y^{k+1}x$$

$$(B_k) \quad y^k xy = \frac{1}{k+1}xy^{k+1} + \frac{k}{k+1}y^{k+1}x$$

が成立するならば $L \cong \mathfrak{S}$ となる.

□

上の命題より, L を 3次元リー代数とし, $L = \langle x, y \rangle$ (2元生成) と仮定するとき, 包絡代数における関係式は以下のようにまとめることができる.

L の種類	包絡代数における関係式
\mathfrak{S}	(H) 型のみ実現可能
\mathfrak{sl}_2	(H) 型が実現不可能
その他の L	(H) 型が実現可能

□

L が \mathfrak{S} でも \mathfrak{sl}_2 でもない”その他の L ”における剰余項 U_k はコントロールすることさえ難しいと前述した. しかし, 多くの計算の結果, (d)-(β) の場合において, 複雑ではあるがコントロールできる例を見つけることができた. これはちょうど x, y を取り替えると (H) 型が成立する例である. この例を以下に紹介する.

Proposition 2.5. $L = \mathbb{C}e \oplus \mathbb{C}f \oplus \mathbb{C}g$ を

$$[e, f] = 0, \quad [e, g] = e + \beta f, \quad [f, g] = f \quad (\beta \in \mathbb{C}^\times)$$

を満たすリー代数とする.

(i) $x = g, y = e$ とおくと次の (H) 型の式が成立する.

$$(A_k) \quad yxy^k = \frac{k}{k+1}xy^{k+1} + \frac{1}{k+1}y^{k+1}x$$

$$(B_k) \quad y^kxy = \frac{1}{k+1}xy^{k+1} + \frac{k}{k+1}y^{k+1}x$$

(ii) $x = e, y = g$ とおくと剰余項が 0 にならない次の式が成立する.

$$(A_k) \quad yxy^k = \frac{k}{k+1}xy^{k+1} + \frac{1}{k+1}y^{k+1}x - xy^k + \sum_{i=1}^k \frac{kC_i}{k-i+1}y^i x + \frac{1}{k+1}x$$

$$(B_k) \quad y^kxy = \frac{1}{k+1}xy^{k+1} + \frac{k}{k+1}y^{k+1}x + \sum_{i=1}^k \frac{(-1)^{k-i+1}kC_i}{k-i+1}xy^i + y^kx + \frac{(-1)^{k+1}}{k+1}x$$

□

3 \mathfrak{sl}_2 の量子群における基底の決定

さて, 3次元リー代数 L において $L = \mathfrak{sl}_2$ または $L = \mathfrak{S}$ の場合, それぞれの包絡代数において

$$U(\mathfrak{S}) = \sum_{i,j,k \geq 0} \mathbb{C}p^i q^j p^k$$

$$U(\mathfrak{sl}_2) = \sum_{i,j,k \geq 0} \mathbb{C}e^i f^j e^k$$

となることが知られている [3]. ここで, $j \geq k$ という条件を入れると, 上式はそれぞれ

$$U(\mathfrak{g}) = \bigoplus_{i \geq 0, j \geq k \geq 0} \mathbb{C} p^i q^j p^k$$

$$U(\mathfrak{sl}_2) = \bigoplus_{i \geq 0, j \geq k \geq 0} \mathbb{C} e^i f^j e^k \quad (*)$$

となることが知られている [5]. 見て分かる通り, これらはそれぞれの包絡代数の PBW 基底とは異なる基底になっている.

ここで \mathfrak{sl}_2 の量子群を考える. \mathbb{C} を複素数体とする. $q \in \mathbb{C}^\times$ を 1 つ固定し, 任意の $m \in \mathbb{N}$ に対し, $q^m \neq 1$ とする. このとき, \mathfrak{sl}_2 の量子群は $e, f, t^{\pm 1}$ で生成され, 次の基本関係式を満たす \mathbb{C} 上の結合代数である.

$$t^{\pm 1} t^{\mp 1} = 1, \quad tet^{-1} = q^2 e, \quad tft^{-1} = q^{-2} f, \quad [e, f] = \frac{t - t^{-1}}{q - q^{-1}}.$$

いま, \mathfrak{sl}_2 の量子群を $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ と書くとき, $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ における (S) 型のような関係式が存在する. また, $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ においても次の結果が知られている [4].

$$U_q(\mathfrak{sl}_2) = \left(\sum_{i, j, k \geq 0} \mathbb{C} e^i f^j e^k \right) + \left(\sum_{i, j, k \geq 0} \mathbb{C} e^i f^j e^k \right) t$$

この結果を受けて, $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ においても (*) の類似が得られないか考えた結果, 上の式に $j \geq k$ という条件を入れることで, 次の結果を得ることができた.

Theorem 3.1. $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ を \mathfrak{sl}_2 の量子群とする. このとき,

$$U_q(\mathfrak{sl}_2) = \left(\bigoplus_{i \geq 0, j \geq k \geq 0} \mathbb{C} e^i f^j e^k \right) \oplus \left(\bigoplus_{i \geq 0, j \geq k \geq 0} \mathbb{C} e^i f^j e^k \right) t$$

が成立する.

□

References

- [1] 谷崎俊之, リー代数と量子群, 共立出版, 現代数学の潮流, 2002 年
- [2] N. Jacobson, *LIE ALGEBRAS*, Dover, 1962
- [3] S. Berman, J. Morita, Y. Yoshii, *Some Factorizations in Universal Enveloping Algebras of Three Dimensional Lie Algebras and Generalizations*, *Canad. Math. Bull.* Vol.45(4), 2002 pp.525-536
- [4] J. Morita, H. Sakaguchi, *Some Formulae in $U_q(\mathfrak{sl}_2)$ and Diagonalizability*, *Kyushu J. Math.* Vol.57, 2003 pp.165-173
- [5] H. Chiba, J. L. Guo, J. Morita, *A New Basis of $U(\mathfrak{sl}_2)$ and Heisenberg Analogue*, (preprint)
- [6] 村田駿祐, 包絡代数における数式処理, 修士論文, 2007 年

The Plethystic Program

四ツ谷直仁

名古屋大学 多元数理科学研究科

2008年1月11日

概要

Plethystic program とは, 数理論理学者 Hanany-Feng-Yang らによって提案された, システムティックな Single trace と Multi trace に関する Gauge Invariant Operator(GIO) の数え上げの手法である. ここでは具体的に $\mathcal{N} = 1$ SUSY ゲージ理論において, Calabi-Yau(CY) の特異点に N 枚の D-3brane を設定した上で, どのようにして mesonic GIO の生成関数が計算できるかを見る. またこれは数学的には, 体 \mathbb{C} 上多項式環 $S = \mathbb{C}[X_1, \dots, X_n]$ ($\deg X_i = d_i$) を次数付き環とみなし, S 上有限生成加群の Hilbert series を求める事と対応している. その様な可換代数的側面を含めて紹介したい.

1 Physical Background

まず我々の行う計算に関しての最も基本的な動機付けとして, 次の事が挙げられる.

Problem 1.1. 任意の CY-3fold に $N \in \mathbb{N}$ 枚の D3-brane を設定し, コンパクト化^{*1}された 4次元時空における

1. Single-trace の GIO の生成関数 f_N を求める.
2. Multi-trace の GIO の生成関数 g_N を求める.
3. D3-brane の枚数 N が, $N \rightarrow \infty$ の時あるいは有限の N に固定したときに, 生成関数 f_N, g_N がどのように変わるかを見る.

この問題に関しては [1] で議論されており, そこでの内容をまとめると次のようになる.

Proposition 1.2.

$$g_1(t) = f_\infty(t) = PE[f_1(t)], \quad g_\infty = PE[g_1(t)], \quad g_N(t) = PE[f_N(t)]$$

但し, PE は Plethystic exponential と呼ばれ, $f(0) = 1$ を満たす^{*2} 様な

^{*1} 数学でいうコンパクトとは違う.

^{*2} 実際, 後に与える Hilbert series の定義により, 生成関数は $f(0) = 1$ が常に保証されている.

$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \in \mathbb{Z}[[t]]$ に対し,

$$PE[f(t)] := \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{f(t^n) - f(0)}{n} \right) = \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty} (1 - t^n)^{a_n}}$$

さらに, 組み合わせ論的議論を施すことで次の事実が示される.[2]

Proposition 1.3.

$$g_N(t) = \sum_{\substack{p_1, p_2, \dots \\ \sum_{k=1}^{\infty} p_k k = N}} \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(g_1(t^k))^{p_k}}{p_k! k^{p_k}}$$

これらの事実から, 先の Problem 1.1 については $g_1(t) = f_{\infty}(t)$ を求める事が本質的である事がわかるが*3, 実はこれは数学で言う Hilbert series と呼ばれるものにあたる.

2 f_{∞} (Hilbert series) の計算

Hilbert series の数学的な定義は次で与えられる.[3]

Definition 2.1. $R = \bigoplus_{n \geq 0} R_n$ を Noether 的次数環, $M = \bigoplus_{n \geq 0} M_n$ を有限生成の次数 R 加群, R_0 は Artin 環とする. この時, 有限 R_0 加群 M_n の R_0 加群としての長さを $l(M_n) < \infty$ で表したとき, M の Hilbert series $f_{\infty}(M; t)$ を

$$f_{\infty}(M, t) := \sum_{n=0}^{\infty} l(M_n) t^n \in \mathbb{Z}[[t]]$$

で定める.

以下, この M を色々なものに変えて, 少し遊んでみよう.

Example 2.2 (Orbifold \mathbb{C}^n/G の場合). Molien の公式*4を用いる.

$n = 2$ とし, $S = \mathbb{C}[X_1, X_2]$ と $G = \left\langle \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle$ なる 2 つの行列で生成される位数 8 の群を考える. この時 $\sigma = (a_{ij}) \in G$ に対し,

$$\sigma(X_i) := \sum_{P=1}^2 a_{pi} X_p \quad \sigma(f(X_1, X_2)) := f(\sigma(X_1), \sigma(X_2))$$

と定める. この作用による不変式環 $S^G := \{f \in S \mid \sigma(f) = f \ (\forall \sigma \in G)\}$ の Hilbert series を求めたい. これは直接, Molien の公式

$$f_{\infty}(S^G; t) = \frac{1}{|G|} \sum_{\sigma \in G} \frac{1}{\det(I_2 - t \cdot \sigma)}$$

*3 f_N の計算は上の PE の逆写像である PE^{-1} を用いて $f_N(t) = PE^{-1}[g_N(t)]$ から求める事ができる.

*4 Molien の公式については [4]Th 1.10 を参照.

により,

$$f_\infty(\mathbb{C}^2/G; t) = \frac{1}{8} \left\{ \frac{1}{(1-t)^2} + \frac{1}{(1+t)^2} + \frac{6}{1+t^2} \right\} = \frac{1-t^{12}}{(1-t^4)^2(1-t^6)}$$

が求まる. □

Example 2.3 (完全交叉多様体の場合).

Example 2.2 の S^G に対し, $A = X_1^4 + X_2^4$, $B = X_1^2 X_2^2$, $C = X_1 X_2 (X_1^4 - X_2^4) \in \mathbb{C}[X_1, X_2]$ とすると,

$$S^G = \mathbb{C}[A, B, C]/(C^2 - A^2 B + 4B^3)$$

が直ちにいえる. ([4]:Prop 1.14) 従って, $\mathbb{C}^2/G \cong V(h)$ $h = C^2 - A^2 B + 4B^3$ がわかり*5
Example 2.2 の Orbifold は h を定義方程式とする Hyperplane である事がわかる.

この様に多様体が完全交叉であるときには, Plethystic logarithm と呼ばれる写像を施す事で, 多様体の幾何学的情報を得る事ができる.

Definition 2.4. $f(0) = 1$ を満たすべき級数環の元 $f(t) \in \mathbb{Z}[[t]]$ に対し, PE^{-1} を

$$PE^{-1}[f(t)] := \sum_{l=1}^{\infty} \frac{\mu(l)}{l} \log(f(t^l))$$

で定め, f の Plethystic logarithm という. 但し, $\mu(l)$ は Mobius 関数で

$$\mu(l) := \begin{cases} 0 & p^2 | l; p \text{ は素数} \\ 1 & l = 1 \\ (-1)^n & l = p_1 \cdots p_n; p_i \text{ は相異なる素数} \end{cases}$$

この様にして定めた PE^{-1} は, 次の性質を持つ事が比較的簡単な計算によりわかる.

Proposition 2.5. 1) $f(t) - f(0) = PE^{-1}[PE[f(t)]] = PE[PE^{-1}[f(t)]]$

2)

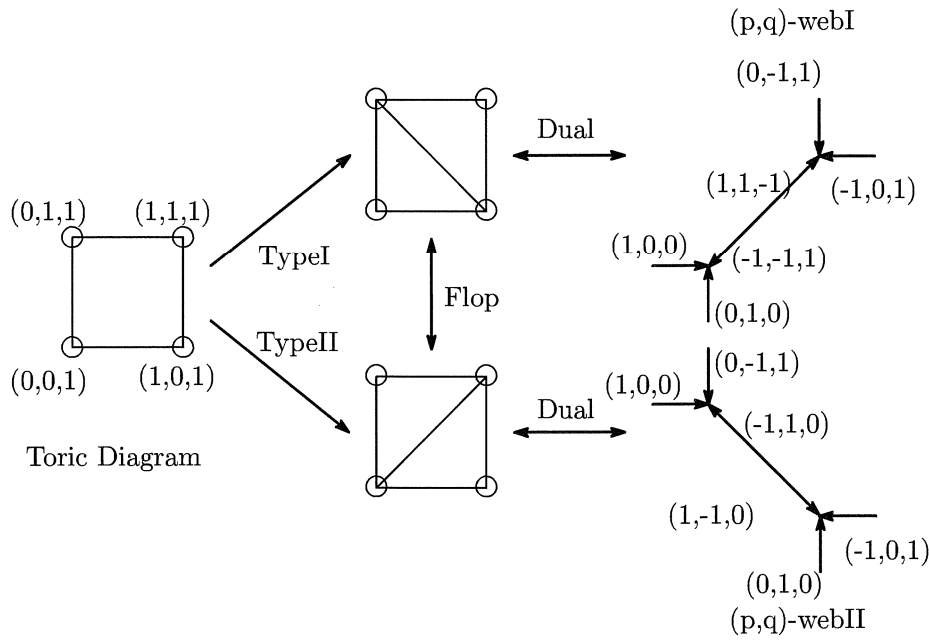
$$PE^{-1} \left[\frac{\prod_i (1 - t^{m_i})}{\prod_j (1 - t^{w_j})} \right] = \sum_j t^{w_j} - \sum_i t^{m_i}$$

従って Proposition 2.5 2) から Example 2.2 の f_∞ に対して, $PE^{-1}[f_\infty] = 2t^4 + t^6 - t^{12}$ となる. これは, Example 2.2 の多様体が 2つの次数 4 の多項式 A, B と 1つの次数 6 の多項式 C を用いて, 1つの 12 次の定義多項式 h により定まる事を意味する. この性質は一般に成立し, 完全交叉多様体の場合には, 定義方程式の情報から f_∞ を計算できる. □

Example 2.6 (Toric の場合). Toric Diagram を用いる.

Conifold \mathcal{C} を例に計算してみる. Conifold の Toric Diagram と, その Dual の (p,q)-web は次で与えられる事が良く知られている. ([6], [7])

*5 [5]:Ch7 §4 Th10 参照.



この時, Triangulization として, 2つの Type が現れるが, 数え上げの議論はこの Triangulization によっていない. 実際, Iからは

$$f_{\infty}^I(x, y, z; C) = \frac{1}{\left(1 - \frac{xy}{z}\right) \left(1 - \frac{z}{x}\right) \left(1 - \frac{z}{y}\right)} + \frac{1}{(1-x)(1-y) \left(1 - \frac{z}{xy}\right)}$$

また IIからは,

$$f_{\infty}^{II}(x, y, z; C) = \frac{1}{\left(1 - \frac{x}{y}\right) (1-y) \left(1 - \frac{z}{x}\right)} + \frac{1}{(1-x) \left(1 - \frac{y}{x}\right) \left(1 - \frac{z}{y}\right)}$$

を得る. Mesonic operator の Counting としては, こちらの方がより精密といえるのだが, Hilbert series との整合性をつけるには Reeb vector^{*6} による graded が必要である. 即ち, Conifold の Reeb vector $(1, 1, 2)$ ^{*7} を用いて, $(x, y, z) \rightarrow (t, t, t^2)$ と graded し, 代入した結果は共に,

$$f_{\infty}(C; t) = \frac{1 - t^2}{(1 - t)^4}$$

となる. これは Conifold が, 複素座標 $(z_1, z_2, z_3, z_4) \in \mathbb{C}^4$ を用いて, $\sum_{i=1}^4 z_i^4 = 0$ で定まる Hyper surface である事実と一致する! □

^{*6} Reeb vector については [7], [8] を参照.

^{*7} Counting の際には, graded は常に整数値である必要がある.

3 最後に

この様に, Plethystic program は数理物理学における Gauge Invariant の数え上げを動機付けとして提案された手法であるが, そこには Hilbert series から Syzygy に至るまでの多くの数学的側面をもつ一方で, 背後には McKay 対応や Quiver ゲージ理論などとの深い関連性が隠れている. そういった多方面に渡る分野の十分な理解, さらにはインスタントンの数え上げとの関連などの応用性も期待されている上でこうしたものへの研究が私自身の今後の課題といえる.

参考文献

- [1] S.Benvenuti,B.Feng,A.Hanany and Y.H.He,*Counting BPS operators in gauge theories:Quivers,syzygies and plethystics* ,arXiv:hep-th/0608050
- [2] B.Feng,A.Hanany and Y.H.He, *Counting Gauge Invariants:the Plethystic Program*, arXiv:hep-th/0701063
- [3] 松村英之,『復刊：可換環論』, 共立出版.2000
- [4] S.Mukai,*An Introduction to Invariants and Moduli*.Camblidge.2003
- [5] D.Cox,T.Little and D.O'shea,*IDEALS,VARIETIES,AND ALGORITHMS*-2nd ed. Springer 1996
- [6] 信山竜二,『Toric Calabi-Yau 多様体上の位相的弦理論』
- [7] 山崎雅人,『トーリック佐々木-Einstein 多様対の最近の進展』
- [8] D.Martelli,J.Sparks and S-T.Yau,*The Geometric Dual of a-maximization for Toric Sasaki-Einstein Manifolds* arxiv:hep-th/0503183

Study of neoclassical transport of LHD plasmas using the DCOM/NNW neoclassical transport database

北海道大学大学院工学研究科量子理工学専攻
若狭有光 (Arimitsu WAKASA)

Abstract. We have developed a neoclassical transport database for LHD plasmas, DCOM/NNW. The mono-energetic diffusion coefficients are evaluated based on the Monte Carlo method by DCOM code and the mono-energetic diffusion coefficient database is constructed using a neural network technique. In this study, the database construction related to the plasma beta is investigated. The improved DCOM/NNW database is applied finite beta LHD plasma, and the neoclassical transport coefficients and the ambipolar radial electric field are evaluated.

Keyword: Monte Carlo method, Neural Network, neoclassical transport

1. 背景

トラス型磁場閉じ込め核融合方式では、現在、軸対称磁場配位を用いたトカマク型が主流となっており、国際熱核融合実験炉(ITER)[1]がトカマク型装置として計画されるなど、将来の核融合炉に向けた研究が進められている。一方、近年、新たなトラス型装置として、非軸対称磁場配位を用いたヘリカル型核融合炉に関する実験的および理論的研究が進んできている。ヘリカル型装置の特徴としては、外部コイルにより閉じ込め磁場を生成するため、プラズマ内部電流を必要とせず、定常運転が可能であり、また、プラズマ中の自由エネルギーが小さいため、炉壁や構造物に影響を与えるプラズマの崩壊現象の危険性が低いことがあげられる。

核融合科学研究所の大型ヘリカル実験装置(Large Helical Device: LHD)[2]は、世界最大級のヘリカル型核融合実験装置である。LHD プラズマは磁気軸の位置によって大きく粒子閉じこめ特性やプラズマの平衡・安定性が変化する。LHD では、磁気軸位置 $R_{ax} = 3.75$ m の標準磁場配位と呼ばれる配位と、磁気軸位置 $R_{ax} = 3.60$ m の内寄せ磁場配位と呼ばれる配位の 2 つの配位を中心

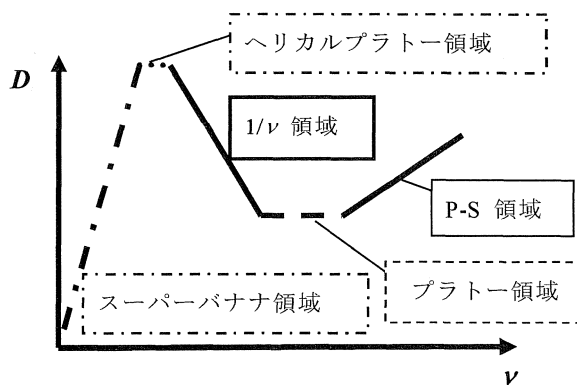


Fig. 1 ヘリカル型核融合装置の拡散係数

に実験が行われている。

プラズマ中の荷電粒子は磁力線を中心とした回転運動を行っており、この過程でクーロン衝突に伴う古典拡散、磁場の強弱に起因する新古典拡散、さらにこれらでは説明できない、より大きな異常拡散の拡散現象を引き起こし、プラズマの閉じ込めを阻害する。ヘリカル型核融合装置では、Fig.1 に示すように、衝突周波数が低い場合に、新古典拡散係数が衝突周波数に反比例して増大する $1/\nu$ 領域が存在する。衝突周波数は温度の $3/2$ 乗に反比例するので、高温のプラズマを考えた場合、新古典輸送が異常輸送程度まで大きくなってしまい、核融合プラズマの閉じ込めを劣化させる原因となってしまう。このため、ヘリカル型装置では新古典輸送の正確な把握が重要となる。

2. 有限ベータを考慮した新古典輸送データベース

2.1 有限ベータプラズマにおける拡散係数

本研究では、拡散係数の算出に、粒子のドリフト運動方程式をモンテカルロ法で解いて粒子軌道を追跡し、拡散係数を計算するコード、Diffusion Coefficient Calculator by Monte Carlo Method (DCOM) [3]を使用した。DCOMは単一エネルギー粒子のピッチ角散乱による局所的な拡散係数を算出するコードである。

私は、これまで、中心ベータ値 $\beta_0 = 0\%$ の真空プラズマを仮定し、新古典輸送解析を行ってきた。有限ベータプラズマではシャフラノフシフトによって、磁場が複雑化するため、拡散係数が増大する。現在、LHDでは、高 β での実験が行われており、このため、実験解析を行うには、この有限ベータの効果を考慮することが必要である。

標準磁場配位における磁場のフーリエスペクトル $B_{m,n}$ を Fig.2 に示す。Fig.2 (a) は $\beta_0 = 0\%$ 、Fig. 2(b) は $\beta_0 = 3\%$ における値を示している。横軸は、規格化小半径 r/a 、縦軸は、磁気軸における磁場の(0,0)成分 $B_{0,0}$ で規格化した $B_{m,n}$ である。この図から、 $\beta_0 = 0\%$ では、ヘリカルモードの主成分である(2,10)成分とトロイディシティを示す(1,0)成分が支配的であることがわかる。また、 β 値の上昇に伴い、(2,10)成分、(1,0)成分が減少する一方で、その他の多くのフーリエ成分が増大し、磁場が複雑化していくのがわかる。

Fig. 3 に、標準磁場配位において、 $r/a=0.5$ における、径方向電場 $G=0$ の場合の拡散係数を示す。Fig.3 は、DCOMコードによって計算された拡散係数で、横軸には規格化衝突周波数 ν^* 、縦軸には規格化拡散係数 D^* を示している。 β 値の上昇に伴い、 $1/\nu$ 領域、及び、plateau 領域の拡散係数が増大していることがわかる。また、P-S 領域では、 β 値の増大に伴う、拡散係数の変化はみられない。

2.2 ニューラルネットワークを用いた新古典輸送データベースの構築

DCOM は、多数の粒子を追跡しその散らばりから拡散係数を計算するので、大きな計算時間が必要になる。特に衝突時間の長い低衝突周波数領域では、必要な粒子の追跡時間も長くなり、このために計算機による計算時間も増大する。実験データ解析や理論解析を行う場合に、様々に衝突周波数や径方向電場、小半径位置、及び、 β 値を変更するたびに DCOM で計算を行うのは現実的ではない。

近年、ニューラルネットワーク (NNW)[4]と呼ばれる手法が発展してきた。NNW は生

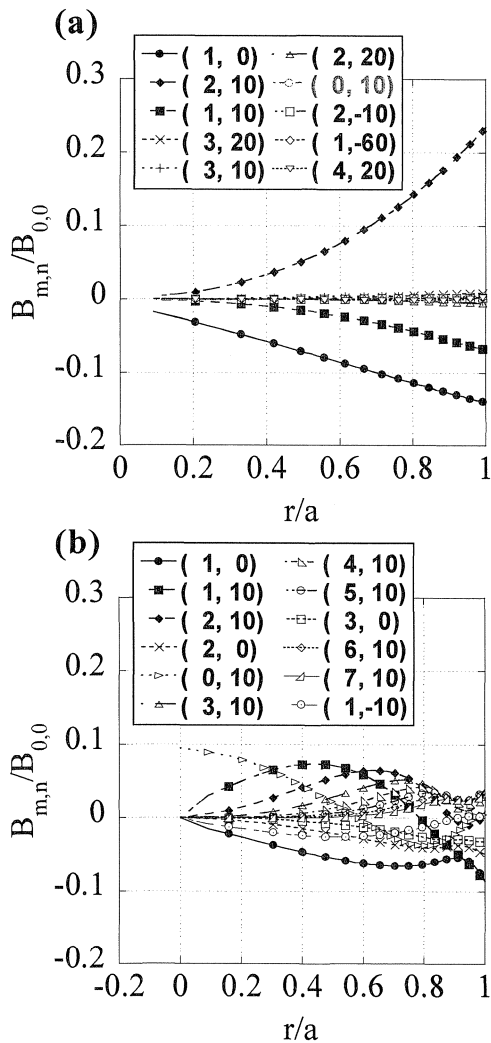


Fig. 2. Amplitude of dominant $B_{m,n}$ component normalized by $B_{0,0}$ (r/a) as function of normalized minor radius r/a with (a) $\beta_0=0\%$ and (b) $\beta_0=3\%$.

体の脳細胞を模した技術で、強い非線形性を持っており、任意の非線形関数を表現できることが証明されている[5]。そこで本研究では、DCOM の計算結果の内挿に NNW を利用し、新古典輸送係数のデータベースを構築した。

本研究では、Fig. 4 に示すような階層型 NNW を使用した。階層型の NNW は、入力信号を受け取り、他のニューロンへ信号を伝達する入力用ニューロンと、外

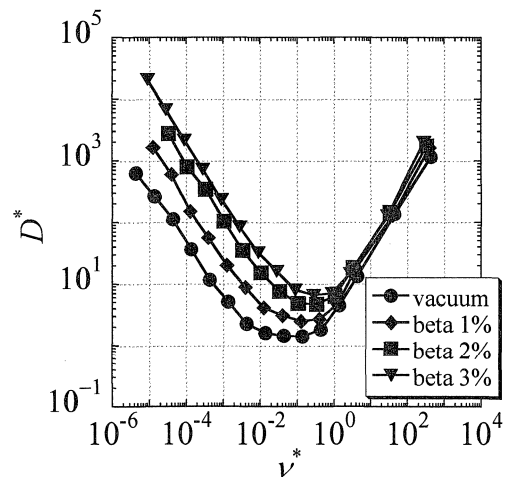


Fig. 3 Normalized diffusion coefficient as function of normalized collision frequency without radial electric field at $r/a = 0.5$ in $R_{axis}=3.75m$.

部へ出力信号を出す出力用ニューロン、および、その中間で信号の伝達を行う中間ニューロンの3種類のニューロンから構成される。それぞれの領域を入力層、中間層、出力層と呼ぶ。Fig. 4は中間層が1つの、3層NNWを表している。このNNWにおいて、入力層 x_i と中間層 h_m を接続する重みを w^1_{im} 、中間層 h_i と出力層 y_n を接続する重みを w^2_{in} とすると、

$$y_n(x_1, x_2, \dots, x_i) = f\left(\sum_{m=0}^m w^2_{nm} f\left(\sum_{l=0}^l w^1_{lm} x_l\right)\right) \quad (1)$$

で表すことが出来る。ここで、biasとして出力1のニューロンを想定し、その重み w_0 が各ニューロンの閾値となっている。また関数 f として、

$$f(x) = \tanh x \equiv \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} \quad (2)$$

を使用した。式(1)から、階層型NNWにおいて、重み w を正しく決定すれば、入力値に対する適切な出力値を得ることができる。NNWの学習の指針となる、ある入力信号に対するNNWの望ましい出力を教師信号と呼ぶ。いくつかの入力信号と学習信号の組を用意しておき、入力信号に対するネットワークの出力信号が、教師信号となるように各ニューロンの重みを形成する。

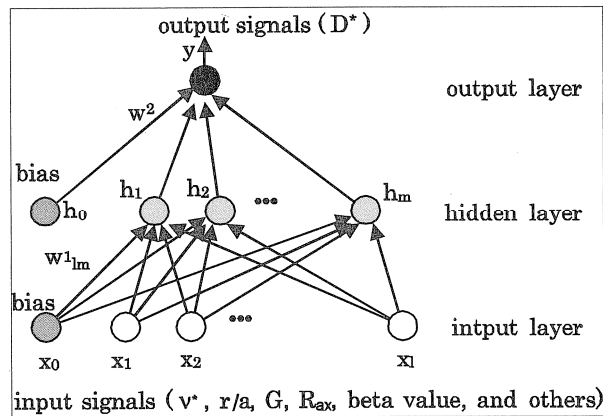


Fig.4 Schematic view of MLP1 neural network used in calculations of normalized D^* .

本研究では、LHDの標準磁場配位、内寄せ磁場配位それぞれについて、衝突周波数 ν^* 、径方向電場 G 、小半径位置 r/a 、中心ベータ値 β_0 を入力、拡散係数 D^* を出力とする、中間層1層の階層型のNNWを標準磁場配位と内寄せ磁場配位の2つの磁場配位それぞれに構築した。ネットワークの学習に使用する教師データにはDCOMで計算した各 $(\nu^*, G, r/a, \beta_0, D^*)$ の組を用意した。標準磁場配位については、2688組の計算データを、内寄せ配位は1777組の計算データを用意し、教師データとして使用し、BFGS逆更新公式[6]を利用した準ニュートン法[6,7]を用いて、重み w を更新した。階層型NNWは、中間層のユニット数によってその性質が決定される。特に、中間層のユニット数が多すぎると、ネットワークの学習に時間がかかるだけでなく、過学習[8]という問題が生じる。これを避けるためには、必要最小限のユニット数を選択する必要がある。本研究で

は、中間層 15 個を採用し、ネットワークを構築した。

3. 結果

本研究で新たに構築した、有限ベータを考慮した新古典輸送データベースからの出力の一例を Fig. 5 に示す。Fig.5 は、標準磁場配位における $r/a=0.5$ 、 $G=0.0$ での規格化拡散係数 D^* を縦軸に、規格化衝突周波数 ν^* 、及び、中心ベータ値 β_0 を横軸にとっている。P-S 領域では、拡散係数はベータ値に依存しないこと、 $1/\nu$ 領域、及び、Plateau 領域では、 β 値の増加に伴い拡散係数が増大することが正しく出力されている。

本研究では、NNW を利用して、標準磁場配位、内寄せ磁場配位、それぞれの拡散係数を $D^*(\nu^*, G, r/a, \beta_0)$ という関数で表すことにより、新古典輸送データベースを構築した。これにより、任意の ν^* , G , r/a , β_0 における拡散係数を瞬時に得ることが可能になり、今後の実験解析への活用が期待される。

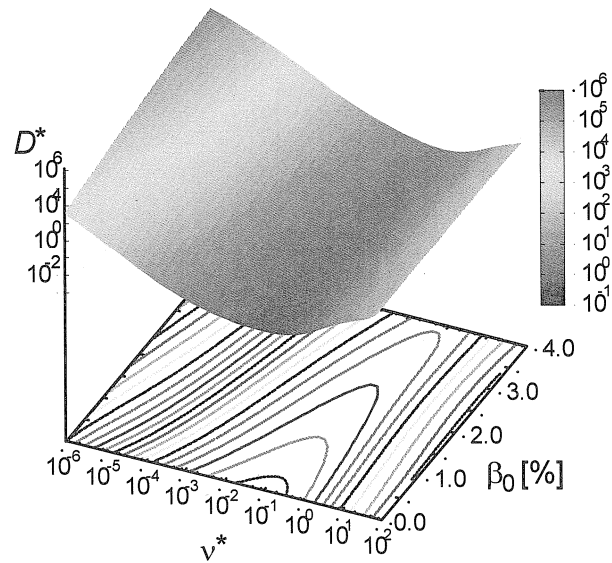


Fig 5. The normalized monoenergetic diffusion coefficient, D^* as a function $D^*(\nu^*, G, r/a, \beta_0)$ in $R_{axis}=3.75m$, where G and $r/a = \text{constant}$ ($G=0.0$ and $r/a = 0.5$), which are outputs of DCOM/NNW.

Reference

- [1] ITER Physics Basis Editors: Nucl. Fusion **39** (1999) 2137.
- [2] 藤原正巳: プラズマ・核融合学会誌 第74 巻増刊 (1998) 10.
- [3] A. Wakasa, et al., J. Plasma Fusion Res. SERIES **4** (2001) 408.
- [4] C.M. Bishop, Rev. Sci. Instrum. **65** (1994) 1803.
- [5] K. Funabashi, Neural Networks **2** (1989) 183.
- [6] 岩崎学: 『統計データ解析のための数値計算法入門』(朝倉書店, 2004) 102.
- [7] 茨木俊秀, 福島雅夫著: 『最適化プログラミング』(岩波書店, 1991) 141.
- [8] C. M. Bishop, *Neural Network for Statistical Pattern Recognition* (Oxford University Press, Oxford, 1994).

An introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces

Yoshihiro Sawano

January 20, 2008

1 Preliminaries

This talk is oriented to the introduction to the theory of reproducing kernel Hilbert spaces.

1.1 Hilbert spaces

Let us review the definition of the Hilbert space.

Definition 1.1. Let H be a \mathbb{C} -vector space.

1. H is said to be a pre-Hilbert space, if it comes with a mapping $\|\cdot : H\| : H \rightarrow \mathbb{R}$, called the norm, satisfying the following.
 - 1-a (Positivity) $\|x : H\| \geq 0$ for every $x \in H$. Equality holds only for $x = 0$.
 - 1-b (Homogeneity) $\|k \cdot x : H\| = |k| \cdot \|x : H\|$ for all $x \in H$ and $k \in \mathbb{C}$.
 - 1-c (Triangle inequality) $\|x + y : H\| \leq \|x : H\| + \|y : H\|$ for all $x, y \in H$.
 - 2 (Middle line equality) $\|x + y : H\|^2 + \|x - y : H\|^2 = 2(\|x : H\|^2 + \|y : H\|^2)$ for all $x, y \in H$.
2. Given a pre-Hilbert space H , we tacitly regard it as an inner product space as well as the topological space. The inner product is given by

$$\langle x, y \rangle_H = \langle x, y \rangle = \frac{1}{4} \sum_{j=1}^4 i^j \|x + i^j y : H\|^2$$

for $x, y \in H$. Meanwhile the topology is, of course, induced by the distance function

$$d(x, y) = \|x - y : H\|, \quad x, y \in H.$$

3. If a pre-Hilbert space is complete with respect to its distance, then it is called a Hilbert space.

1.2 Examples

Here we shall exhibit some examples of Hilbert spaces.

Example 1.2. \mathbb{C} is a Hilbert space with $|\cdot|$ its norm.

Example 1.3. $l^2(\mathbb{N})$, the set of all square summable complex sequence indexed by \mathbb{N} , is a typical and fundamental example of Hilbert spaces in the sense that it is isomorphic to any separable Hilbert space.

Example 1.4. This example is connected with algebraic geometry as well as analysis. Let Ω be an open set in \mathbb{C}^n and identify naturally Ω with an open set in \mathbb{R}^{2n} . Then define

$$A(\Omega) := \{f : \Omega \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ is holomorphic on } \Omega \text{ and } \|f : A(\Omega)\| < \infty\},$$

where the norm is given by

$$\|f : A(\Omega)\| := \left(\int_{\Omega} |f(z)|^2 dz \right)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_{\Omega} |f(x_1 + iy_1, \dots, x_n + iy_n)|^2 dx dy \right)^{\frac{1}{2}}.$$

One of the key observations for the proof of the Riemann-Roch theorem is that the embedding $A(\Omega) \subset A(\Omega^*)$ is compact, whenever $\Omega^* \subset\subset \Omega$.

Example 1.5. The set of all square integrable martingales carries a structure of a Hilbert spaces.

2 Reproducing kernel of Hilbert spaces

Let E be a set. Then define

$$\mathcal{F}(E) := \{f : f \text{ is just a mapping from } E \text{ to } \mathbb{C}\}. \quad (1)$$

Suppose that we are given a mapping

$$h : E \rightarrow \mathcal{H}, \quad (2)$$

where \mathcal{H} is a Hilbert space.

Then define $Lf \in \mathcal{F}(E)$ by

$$Lf(p) := \langle f, h(p) \rangle_{\mathcal{H}} \quad (3)$$

for $f \in \mathcal{H}$. We also define

$$K(p, q) = \langle h(q), h(p) \rangle_{\mathcal{H}}.$$

Denote by $R(L)$ the image of $L : E \rightarrow \mathcal{F}(E)$. Then $R(L)$ is a subset of $\mathcal{F}(E)$. This function space $R(L)$ is denoted by H_K as well.

Lemma 2.1. Equip $H_K = R(L)$ with the norm

$$\|F : H_K\| := \inf\{\|f : \mathcal{H}\| : f \in \mathcal{H}, Lf = F\}.$$

Then $\|\cdot : H_K\|$ is complete and it satisfies the middle line equality:

$$\|F : H_K\|^2 + \|G : H_K\|^2 = \frac{1}{2} (\|F + G : H_K\|^2 + \|F - G : H_K\|^2)$$

for $F, G \in H_K$.

In particular, H_K carries a natural structure of a Hilbert space induced by this norm.

The following theorem explains why this function spaces is called a reproducing kernel Hilbert space.

Theorem 2.2. *Let $F \in H_K$. Then we have*

$$F(p) := \langle F, K(*, p) \rangle_{H_K}.$$

For the proof we need a notation: Denote by $N(L) \subset \mathcal{H}$ the kernel of L , that is, the set of all $f \in \mathcal{H}$ such that $Lf = 0$. Then as is easily seen,

$$\|F : H_K\| := \|f : \mathcal{H}\|,$$

where $f \in N(L)^\perp$ is a unique element in \mathcal{H} with $Lf = F$.

Proof. Let $F = Lf$ with $f \in N(L)^\perp$. Let us fix $p \in E$ and choose $g \in N(L)^\perp$ so that $h(p) - g \in N(L)$. Then we have

$$K(q, p) = \langle h(p), h(q) \rangle = \langle g, h(q) \rangle = Lg(q),$$

yielding $K(*, p) = Lg$. Then a polarization gives us

$$\begin{aligned} \langle F, K(*, p) \rangle_{H_K} &= \langle Lf, Lg \rangle_{H_K} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 i^k \langle L(f + i^k g), L(f + i^k g) \rangle_{H_K} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{k=1}^4 i^k \langle f + i^k g, f + i^k g \rangle_{\mathcal{H}} \\ &= \langle f, g \rangle_{\mathcal{H}} = \langle f, h(p) \rangle_{\mathcal{H}} = Lf(p). \end{aligned}$$

This is the desired result. ■

The function $K : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ is universal in the following sense.

Proposition 2.3. *Let $L : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ be a function satisfying the following two properties.*

1. $L(*, p) \in H_K$.
2. $f(p) = \langle f, L(*, p) \rangle$ for all $f \in H_K$.

Then we have $L(p, q) = K(p, q)$.

The second property is called the reproducing property.

Before we come to the proof, we remark that K does satisfies the above property.

Proof. Let $p, q \in E$ be fixed. Then we have

$$L(p, q) = \langle L(*, q), K(*, p) \rangle$$

because K satisfies the reproducing property. Now that L satisfies the reproducing property, we obtain

$$L(p, q) = \langle L(*, q), K(*, p) \rangle = \overline{\langle K(*, p), L(*, q) \rangle} = \overline{K(q, p)}.$$

From the very defintion of K , we have $\overline{K(p, q)} = K(q, p)$, yielding $K(p, q) = L(p, q)$. ■

Proposition 2.4. $L : \mathcal{H} \rightarrow H_K$ is isometric if and only if $N(L) = 0$.

Proposition 2.5. $K : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ is positive definite. That is, for any finite subset $\{p_1, \dots, p_N\}$ and complex numbers $\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N\}$,

$$\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \overline{\alpha_k} K(p_k, p_j) \geq 0 \quad (4)$$

and the equality holds precisely when

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j K(*, p_j) = 0. \quad (5)$$

Proof. The inequality is clear from the following formula:

$$\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \overline{\alpha_k} K(p_k, p_j) = \sum_{j,k=1}^N \alpha_j \overline{\alpha_k} \langle h(p_j), h(p_k) \rangle = \left\langle \sum_{j=1}^N \alpha_j h(p_j), \sum_{j=1}^N \alpha_j h(p_j) \right\rangle. \quad (6)$$

If this is 0, then we have

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j K(r, p_j) = \left\langle \sum_{j=1}^N \alpha_j h(p_j), h(r) \right\rangle = 0.$$

Conversely if (5) holds, then from (6) we have

$$\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \overline{\alpha_k} K(p_k, p_j) = \sum_{k=1}^N \alpha_k \left\langle \sum_{j=1}^N \alpha_j h(p_j), h(p_k) \right\rangle = 0,$$

which proves the equality in (4). ■

The notation H_K seems to reflect the fact that K determines the Hilbert space. This fact can be formulated precisely as follows:

Proposition 2.6. The set $\{K(*, p) : p \in E\}$ spans a dense subspace in H_K .

From this proposition we conclude that it is a positive definite function $K : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ that determines H_K .

Proof. Suppose that f is orthogonal to any element in $\{K(*, p) : p \in E\}$. This amounts to assuming

$$\langle f, K(*, p) \rangle = 0 \text{ for all } p \in E.$$

From the reproducing property this identity is nothing but $f \equiv 0$. As a result H_K is spanned by the above subspace. ■

Now a natural question arises: Suppose that we are given a positive definite function $K : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$. Then does there exist a Hilbert space \mathcal{H} and $h : E \rightarrow \mathbb{C}$ such that K is the reproducing kernel of the reproducing kernel Hilbert space constructed in the way described in the beginning of this section? We shall answer this question in the affirmative. The crue lies in Proposition 2.6.

Lemma 2.7. Define a linear subspace $\mathcal{H}_0 \subset \mathcal{F}(E)$ by

$$\mathcal{H}_0 := \text{Span}\{K(*, p) : p \in E\} = \left\{ \sum_{j=1}^N \alpha_j K(*, p_j) : p_1, \dots, p_N \in E, \alpha_1, \dots, \alpha_N \in \mathbb{C} \right\}.$$

Then the function

$$\left(\sum_{j=1}^N \alpha_j K(*, p_j), \sum_{k=1}^M \beta_k K(*, q_k) \right) \in \mathcal{H}_0 \times \mathcal{H}_0 \mapsto \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^M \alpha_j \bar{\beta}_k K(q_k, p_j) \in \mathbb{C}$$

defines a well-defined inner product. In particular, via this product we can equip \mathcal{H}_0 with a structure of the pre-Hilbert space.

Proof. What is difficult about the proof is that the definition of the inner product does make sense. That is, we have to show that it does not depend on the presentation of $\sum_{j=1}^N \alpha_j K(*, p_j)$.

It can happen that $\{K(*, p)\}_{p \in E}$ is linearly dependent. In this case, we have to be more careful.

Let us consider the function

$$\sum_{j=1}^N \alpha_j K(*, p_j) \rightarrow \left\| \sum_{j=1}^N \alpha_j K(*, p_j) \right\| = \sqrt{\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \bar{\alpha}_k K(p_k, p_j)}.$$

From the definition of positive definiteness we see that this function is well-defined. Let us consider the function

$$F = \sum_{j=1}^N \alpha_j K(*, p_j) \rightarrow \left\| \sum_{j=1}^N \alpha_j K(*, p_j) \right\| = \sqrt{\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \bar{\alpha}_k K(p_k, p_j)}.$$

The matter is to establish that

$$\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \bar{\alpha}_k K(p_k, p_j) = \sum_{j,k=1}^M \beta_j \bar{\beta}_k K(q_k, q_j), \quad (7)$$

if we assume

$$F = \sum_{j=1}^N \alpha_j K(*, p_j) = \sum_{j=1}^M \beta_j K(*, q_j). \quad (8)$$

This can be achieved as follows: First, we compute

$$\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \bar{\alpha}_k K(p_k, p_j) = \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_k \left(\sum_{j=1}^N \alpha_j K(p_k, p_j) \right) = \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_k F(p_k) = \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_k \sum_{j=1}^M \beta_j K(p_k, q_j).$$

Now that $K(*_1, *_2) = \overline{K(*_2, *_1)}$, we have

$$\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \bar{\alpha}_k K(p_k, p_j) = \sum_{k=1}^N \bar{\alpha}_k \sum_{j=1}^M \beta_j \overline{K(q_j, p_k)} = \sum_{j=1}^M \beta_j \overline{\left(\sum_{k=1}^N \alpha_k K(q_j, p_k) \right)}.$$

Inserting (8) once more, we obtain

$$\sum_{j,k=1}^N \alpha_j \overline{\alpha_k} K(p_k, p_j) = \sum_{j=1}^M \beta_j \overline{\left(\sum_{k=1}^M \beta_k K(q_j, q_k) \right)} = \sum_{j,k=1}^M \beta_j \overline{\beta_k} K(q_k, q_j),$$

which establishes (7).

Since

$$\left\langle \sum_{j=1}^N \alpha_j K(*, p_j), \sum_{k=1}^M \beta_k K(*, q_k) \right\rangle$$

can be obtained by polarization, that is, we have

$$\begin{aligned} & \left\langle \sum_{j=1}^N \alpha_j K(*, p_j), \sum_{k=1}^M \beta_k K(*, q_k) \right\rangle \\ &= \frac{1}{4} \left(\left\| \sum_{j=1}^N \alpha_j K(*, p_j) + \sum_{k=1}^M \beta_k K(*, q_k) \right\|^2 - \left\| \sum_{j=1}^N \alpha_j K(*, p_j) - \sum_{k=1}^M \beta_k K(*, q_k) \right\|^2 \right) \\ & \quad + \frac{i}{4} \left(\left\| \sum_{j=1}^N \alpha_j K(*, p_j) + i \sum_{k=1}^M \beta_k K(*, q_k) \right\|^2 - \left\| \sum_{j=1}^N \alpha_j K(*, p_j) - i \sum_{k=1}^M \beta_k K(*, q_k) \right\|^2 \right). \end{aligned}$$

This identity shows that the definition of the inner product is meaningful. ■

Let \mathcal{H} be the completion of \mathcal{H}_0 with respect to the inner product above. As the following lemma shows, \mathcal{H} can be seen as a subset of $\mathcal{F}(E)$.

Lemma 2.8. Let $\left\{ \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_j^{(k)} K(*, p_j^{(k)}) \right\}_{k=1}^{\infty}$ be a Cauchy sequence in \mathcal{H}_0 . Then

$$f(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_j^{(k)} K(p, p_j^{(k)})$$

exists.

Proof. This is because $f(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \left\langle \sum_{j=1}^{N_k} \alpha_j^{(k)} K(*, p_j^{(k)}), K(*, p) \right\rangle$. ■

In view of this lemma, we can write \mathcal{H} out in full.

$$\mathcal{H} = \{f \in \mathcal{F}(E) : f \text{ is a pointwise limit of Cauchy sequence in } \mathcal{H}_0\}$$

and the norm is given by

$$\|f : \mathcal{H}\| = \lim_{k \rightarrow \infty} \|f_k\|,$$

where $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ is a Cauchy sequence in \mathcal{H}_0 converging to f .

Theorem 2.9. *Let us define*

$$h : E \rightarrow \mathcal{H}, h(p) = K(*, p)$$

and

$$L : \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{F}(E), Lf(p) = \langle f, h(p) \rangle.$$

Also equip $R(L)$ with the norm given by

$$\|F : R(L)\| = \inf_{f : f \in \mathcal{H}, Lf = F} \|f : \mathcal{H}\|.$$

Then L is a trivial embedding mapping from \mathcal{H} to $\mathcal{F}(E)$ and it preserves inner product of \mathcal{H} .

With this theorem in mind, let us denote $H_K = R(L)$

Proof. Let $p, q \in E$. Then we have

$$L[K(*, q)](p) = \langle K(*, q), K(*, p) \rangle = K(p, q).$$

A passage to the limit yields $Lf = f$ for all $f \in \mathcal{H}$. This shows that $R(L) \supset \mathcal{H}$.

Let us show that L is isometry, that is, it preserves the inner product of \mathcal{H} . To see this, as we have seen, it suffices to show that L is injective. Let $f \in \mathcal{H}$ and $Lf \equiv 0$. Then $\langle f, K(*, p) \rangle = 0$ for all $p \in E$. This readily yields $\langle f, g \rangle = 0$ for all $g \in \mathcal{H}_0$. A passage to the limit yields that this is valid for all $g \in \mathcal{H}$. Thus, $f = 0 \in \mathcal{H}$. ■

From the definition it is easy to prove

Proposition 2.10. *Let \mathcal{H}_1 and \mathcal{H}_2 are Hilbert spaces Suppose that $h_j : E \rightarrow \mathcal{H}_j$ is a mapping such that*

$$R_j : f \in \mathcal{H}_j \mapsto [q \mapsto \langle f, h_j(q) \rangle_{\mathcal{H}_j}] \in \mathcal{F}(E)$$

is an isomorphism from \mathcal{H}_j to a subset of $\mathcal{F}(E)$ for each $j = 1, 2$. Here we equip $R_j(\mathcal{H}_j)$ with an inner product indicated above. Assume that they give the same kernel, that is,

$$\langle h_1(p), h_1(q) \rangle_{\mathcal{H}_1} = \langle h_2(p), h_2(q) \rangle_{\mathcal{H}_2}$$

for all $p, q \in E$. Then \mathcal{H}_1 and \mathcal{H}_2 are mutually isomorphic and the mappings h_1 and h_2 are compatible with the isomorphism from \mathcal{H}_1 and \mathcal{H}_2 .

Let us summarize what we have obtained. There is a one to one canonical correspondence between the set of all positive definite functions $K : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$ and the set of all pairs of a Hilbert space \mathcal{H} and a mapping $h : E \rightarrow \mathcal{H}$ such that L is an isomorphism. It is such a function K that counts. Below, given a positive definite function $K : E \times E \rightarrow \mathbb{C}$, we write H_K as the Hilbert space obtained in this way.

Before we conclude this section, let us exhibit an example. In our application we envisage the following one.

Example 2.11. Let $w : (0, \infty) \rightarrow (0, \infty)$ be a continuous function such that w^{-1} is integrable over $(0, R]$ for any $R > 0$. Then define

$$H_K(w) = \{f : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} : f \text{ is absolutely continuous and } \|f : H_K(w)\| < \infty\},$$

where the norm is given by

$$\|f : H_K(w)\| = \left(\int_0^\infty |f'(t)|^2 w(x) dx \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Then $H_K(w)$ is a reproducing kernel Hilbert space whose reproducing kernel $K(s, t)$ is given by

$$K(s, t) = \int_0^{\min(s, t)} w(\xi)^{-1} d\xi. \quad (9)$$

Proof. We can prove with ease that $H_K(w)$ is a normed space such that it satisfies the middle line theorem. Therefore, for the proof that $H_K(w)$ is a Hilbert space, it suffices to show that $H_K(w)$ is complete. The key estimate for this is

$$|f(t)| \leq \left(\int_0^t w(s)^{-1} ds \right) \cdot \|f : H_K(w)\|.$$

By using this inequality we can prove in particular that any Cauchy sequence $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ converges locally uniformly to a continuous function f . It is not so hard to show that f is a limit of the Cauchy sequence.

Let us show that the kernel is given by (9). By the fundamental theorem of calculus we have $\left. \frac{d}{ds} K(s, t) \right|_{s=\xi} = \chi_{(0, t)}(\xi) w(\xi)^{-1}$. Let $f \in H_K(w)$. Then from the definition of the inner product of $H_K(w)$, we have

$$\langle f, K(\cdot, t) \rangle_{H_K(w)} = \int_0^\infty \frac{\partial K(\xi, t)}{\partial s} \cdot f'(\xi) w(\xi) d\xi = \int_0^t f'(\xi) d\xi = f(t),$$

because $f(0) = 0$ by definition. Therefore, we conclude that the kernel is given by (9). ■

3 Application to the transformed Laplace transform

In our actual talk we shall allude to our own result and apply it to computational analysis.

References

- [1] Fujiwara, H, Matsuura, T, Saitoh, S and Sawano, Y, Real Inversion of the Laplace Transform in Numerical Singular Value Decomposition, to appear in Journal of Applied Analysis.
- [2] Sawano, Y, Fujiwara, and Saitoh, S, Real Inversion of the Laplace Transform in Numerical Singular Value Decomposition, to appear in Complex Analysis and Operator Theory.

Yoshihiro Sawano
 Department of Mathematics and Information Sciences
 Tokyo Metropolitan University
 Minami-Ohsawa 1-1, Hachioji-shi
 Tokyo 192-0397, Japan
 E-mail: yoshihiro@tmu.ac.jp

A distinguished bounded realization and a symmetry characterization of homogeneous bounded domains

甲斐 千舟 (Chifune KAI¹, Kanazawa University)

(伊師 英之氏との共同研究 (Joint work with Hideyuki ISHI (Nagoya University)))

ABSTRACT. We collect interesting properties of the Bergman mappings of homogeneous bounded domains, which were defined for bounded domains by S. Bergman. Also we show that the Bergman mappings of homogeneous Siegel domains coincide with the Cayley transforms defined by R. Penney and T. Nomura, so that we can rephrase in a simple way the author's characterization theorem of symmetric Siegel domains by the convexity of Cayley transform images.

1. 序

本講演では、等質有界領域に性質の良い有界領域実現を与える試みについてお話ししたい。ここで等質有界領域とは、有界領域 $D \subset \mathbb{C}^N$ で、 D の正則自己同相写像から成る群 (有限次元 Lie 群である) が推移的に作用しているものをいう。また有界領域が対称であるとは、領域の各点に対して、それを孤立固定点とするような位数 2 の正則自己同相写像が存在することである。有界領域の標準的な Kähler 計量である Bergman 計量に関して、対称有界領域は非コンパクト型の Hermite 対称空間となる。また対称有界領域は等質である。4次元以上では非対称な等質有界領域が存在し、さらに7次元以上になると、等質有界領域の正則同相類は各次元に連続無限個存在する。

周知のように一次元では Riemann の写像定理により、複素平面全体と異なる任意の単連結領域は単位円板に正則同相である。この事実は、“単位円板が一次元の等質有界領域の標準的な有界領域実現を与えている”と捉えることができる。さらに単位円板は Cayley 変換によって非有界な上半平面と写り合う。

一般に対称有界領域は非コンパクト型の Hermite 対称空間であるから、標準的な有界領域実現である Harish-Chandra 実現をもつ。単位円板がそうであるように、Harish-Chandra 実現はノルムに関する単位球として書くことができる。よってそれは凸集合であり、N. Mok と I.-H. Tsai による次の仕事が示すように、凸性は Harish-Chandra 実現の特徴的な性質となっている：“ランクが2以上の既約な対称有界領域の有界領域実現で凸なものは、Harish-Chandra 実現をアフライン変換で写したものに限る [11].”

一方、任意の等質有界領域は、上半平面の高次元化である等質 Siegel 領域に正則同相である。等質 Siegel 領域はアフライン等質な、形の整った領域であり、等質有界領域の標準的な非有界領域実現を与えている。対称有界領域の場合には、Harish-Chandra 実現を対称 Siegel 領域に写す Cayley 変換が Korányi と Wolf によって定義されている [7].

非対称な等質有界領域の場合には、標準的な有界領域実現は存在しないのではないかと考えられてきた。しかし性質の良い有界領域実現が存在するらしいということが、R. Penney や野村隆昭氏によって独立に発見された。Penney は、Harish-Chandra 実現の定義を少し変形することによって等質な場合に拡張できることを示した [17]。また、等質 Siegel 領域を彼の有界領域実現に写す写像を Cayley 変換と呼んだ。これは領域が対称な場合には Korányi と Wolf の Cayley 変換 (の逆変換) と一致する。また野村氏は、等質 Siegel 領域の Laplace-Beltrami 作用素と Berezin 変換の可換性が対称なものを特徴付けることを証明した際に [12]、その可換性を表す式に有界領域実現が現れることを見つけ、それが Penney のものと一致すること

¹E-mail: kai@staff.kanazawa-u.ac.jp

に気付いた。これは Bergman 核に付随して定義されるものであったが、野村氏は Szegő 核に付随する Cayley 変換も定義し、[16] で活用した。さらに、これら二つを含む、等質 Siegel 領域の Cayley 変換の族を定義した [15]。

講演者はこの Cayley 変換の族を用いて、その像の凸性によって対称 Siegel 領域を特徴付けた [6]。対称 Siegel 領域の Cayley 変換の像である Harish-Chandra 実現の凸性の重要性は Mok と Tsai の仕事でも示唆されているし、初等的な性質である凸性と高度な性質である対称性が結び付くという現象は興味深い。しかしながら、等質 Siegel 領域の Cayley 変換の族がどのような有界領域実現を与えているか、すなわち、そのもつ内在的な意味が何かということとは明らかではなかった。

このような状況の中で、その解決の糸口となる可能性がある次のいくつかの事実が明らかになった。まず、S. Bergman が有界領域 (に正則同相な領域) に対して代表領域なるものを定義し考察していたことである。その目的は、高次元の領域を分類するために、領域の正則同相類の代表元を選び出すことであった。次に、等質有界領域の代表領域が有界領域実現を与えることを Xu Yi-Chao が証明していたという事実である [18] (Xu は、有界領域を代表領域に写す写像を Bergman 写像と呼んだ)。そして、等質 Siegel 領域に対して Bergman 写像を考えると、Bergman 核に付随する Cayley 変換と一致することが、今回の共同研究で確認された。

Bergman 写像は Bergman 核を用いて非常に簡潔に定義でき、有界領域の間の正則同相写像が代表領域の間のユニタリ写像になるなどの、著しい性質をもつ (§2)。また等質有界領域の場合には、代表領域は同じく S. Bergman が考察した極小領域にもなる (§3)。極小領域とは、ある意味で Euclid 体積を極小にする領域のことである。

いま述べた Bergman 写像は有界領域の標準的な Kähler 計量である Bergman 計量に付随するものであるが、ある種の Kähler 多様体のクラスにおいて同様の写像を考えることができる。これを一般 Bergman 写像と呼ぶ (§4)。Kähler 多様体として、等質 Siegel 領域とその上の等質 Kähler 計量を考えると²、次の事実が得られる：“等質 Siegel 領域の Cayley 変換の族は、等質 Siegel 領域の等質 Kähler 計量に付随して定義される一般 Bergman 写像の族である。”これによって、講演者が証明した定理 [6] を次のように簡潔に言い換えることができる：“ D を等質有界領域とし、 h をその上の等質 Kähler 計量とする。このとき、 h に付随する一般 Bergman 写像 σ_h の像 $\sigma_h(D)$ が凸であるための必要十分条件は、 D が対称であり、かつ h が Bergman 計量の正の定数倍となっていることである。”一般 Bergman 写像がどれくらい広いクラスの Kähler 多様体に対して意味をもつのか、あるいはまた、一般 Bergman 写像の像が元々の Kähler 多様体の情報をどれだけ保存するかといった問題は、今後の課題である。

2. S. BERGMAN の代表領域

$D \subset \mathbb{C}^N$ を有界領域に正則同相な領域とする。 D の **Bergman 空間** $H^2(D)$ (D 上の二乗可積分な正則関数から成る Hilbert 空間) は **Bergman 核** と呼ばれる再生核 $K_D: D \times D \rightarrow \mathbb{C}$ をもつ。具体的に書くと次のようになる: $\{\psi_j(z)\}_j$ を $H^2(D)$ の正規直交基底とすると、

$$K_D(z, \zeta) = \sum_j \psi_j(z) \overline{\psi_j(\zeta)}.$$

Bergman 核は有界領域の標準的な Kähler 計量である **Bergman 計量** を定める:

$$ds_D^2 := \sum_{j,k=1}^N \frac{\partial}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \log K_D(z, z) dz_j d\bar{z}_k.$$

²Dorfmeister と中島和文氏による次の基本定理によって、等質 Kähler 多様体のクラスにおける等質有界領域の位置付けが理解できる: “任意の等質 Kähler 多様体は、等質有界領域を底空間とし、平坦な等質 Kähler 多様体と単連結でコンパクトな等質 Kähler 多様体の直積をファイバーとする正則ファイバー束の構造をもつ (複素多様体としては、これら 3 つの直積となる).”

$z, \zeta \in D$ に対して,

$$T_D(z, \zeta) := \begin{pmatrix} \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial z_1} \log K_D(z, \zeta) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}_1 \partial z_N} \log K_D(z, \zeta) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}_N \partial z_1} \log K_D(z, \zeta) & \cdots & \frac{\partial^2}{\partial \bar{\zeta}_N \partial z_N} \log K_D(z, \zeta) \end{pmatrix}$$

とおく. $z = \zeta$ のとき, $T_D(z, z)$ は Bergman 計量を表す正定値 Hermite 行列である. 以後簡単のために $T_D(z, z)$ を $T_D(z)$ と書く. $\varphi: D \xrightarrow{\sim} D'$ を正則同相写像とする. φ は Bergman 計量に関して等長であるから,

$$T_D(z) = \frac{{}^t \overline{\partial \varphi}}{\partial z}(z) T_{D'}(\varphi(z)) \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z) \quad (2.1)$$

が成立する. より一般に次の変換則が成り立つ:

$$T_D(z, \zeta) = \frac{{}^t \overline{\partial \varphi}}{\partial \zeta}(\zeta) T_{D'}(\varphi(z), \varphi(\zeta)) \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z). \quad (2.2)$$

ある点 $p \in D$ が存在して, $K_D(z, p) \neq 0$ ($z \in D$) を満たすと仮定する. 点 p における Bergman 写像 $\sigma_D^p: D \rightarrow \mathbb{C}^N$ は次のように定義される:

$$\sigma_D^p(z) := T_D(p)^{-\frac{1}{2}} \operatorname{grad}_{\bar{\zeta}} \log \frac{K_D(z, \zeta)}{K_D(p, \zeta)} \Big|_{\zeta=p} \quad (z \in D).$$

ただし反正則関数 $f(\zeta)$ に対して,

$$\operatorname{grad}_{\bar{\zeta}} f(\zeta) := \left(\frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial \bar{\zeta}_N} \right)$$

とおいた. S. Bergman は像 $\sigma_D^p(D)$ を D の代表領域と呼んだ.

注意. σ_D^p を Bergman 写像と呼んだのは Xu である. 代表座標と呼ばれることもある. \square

定義から明らかに, $\sigma_D^p(z)$ は z に関して正則である. また $\sigma_D^p(p) = 0$ である. σ_D^p の正則 Jacobi 行列は次のようになる:

$$\frac{\partial \sigma_D^p}{\partial z}(z) = T_D(p)^{-\frac{1}{2}} T_D(z, p). \quad (2.3)$$

よって一般には Bergman 写像は局所的にも正則同相とは限らないので, 代表“領域”が領域でないこともある.

$\varphi: D \xrightarrow{\sim} D'$ を正則同相写像とする.

$$L(\varphi, p) := T_{D'}(\varphi(p))^{-\frac{1}{2}} \frac{{}^t \overline{\partial \varphi}}{\partial z}(p)^{-1} T_D(p)^{\frac{1}{2}}$$

とおくと, (2.1) より $L(\varphi, p)$ はユニタリ行列となる. 次の命題は Bergman 写像の特に著しい性質である.

命題 2.1. Bergman 写像は φ を線型化する:

$$\sigma_{D'}^{\varphi(p)} \circ \varphi = L(\varphi, p) \circ \sigma_D^p.$$

特に像に関して, 次の関係が成立する:

$$\sigma_{D'}^{\varphi(p)}(D') = L(\varphi, p)(\sigma_D^p(D)).$$

$$\begin{array}{ccc} D & \xrightarrow{\varphi} & D' \\ \sigma_D^p \downarrow & \circlearrowleft & \downarrow \sigma_{D'}^{\varphi(p)} \\ \mathbb{C}^N & \xrightarrow{L(\varphi, p)} & \mathbb{C}^N \end{array}$$

例 2.2. D を単位円板 $\{z \in \mathbb{C}; |z| < 1\}$ とする. Bergman 核は $K_D(z, \zeta) = \pi^{-1}(1 - z\bar{\zeta})^{-2}$ で与えられ, $\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \log K_D(z, \zeta) = 2z(1 - z\bar{\zeta})^{-1}$, $T_D(z, z) = 2(1 - |z|^2)^{-2}$ となる. よって $p \in D$ に対し,

$$\sigma_D^p(z) = \frac{1 - |p|^2}{\sqrt{2}} \left(\frac{2z}{1 - z\bar{p}} - \frac{2p}{1 - |p|^2} \right) = \frac{\sqrt{2}(z - p)}{1 - z\bar{p}}.$$

ゆえに代表領域 $\sigma_D^p(D)$ は半径 $\sqrt{2}$ の開円板となる.

以下の2つの領域 D は単位円板に正則同相であるが, 命題 2.1 が示すとおり, 代表領域は半径 $\sqrt{2}$ の開円板となることが確かめられる.

- D を上半平面 $\{z \in \mathbb{C}; \Im z > 0\}$ にとる. Bergman 核は $K_D(z, \zeta) = \pi^{-1}(\frac{z - \bar{\zeta}}{i})^{-2}$ であり, $\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \log K_D(z, \zeta) = 2(z - \bar{\zeta})^{-1}$, $T_D(z, z) = 2(\frac{z - \bar{z}}{i})^{-2}$ となる. よって $p \in D$ に対し,

$$\sigma_D^p(z) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\frac{p - \bar{p}}{i} \right) \left(\frac{2}{z - \bar{p}} - \frac{2}{p - \bar{p}} \right) = \sqrt{2}i \frac{z - p}{z - \bar{p}}.$$

$p = i$ にとると, よく知られた Cayley 変換の定数倍に一致する.

- D を帯状領域 $\{z \in \mathbb{C}; -1 < \Re z < 1\}$ にとる.

$$K_D(z, \zeta) = \pi(16 \cos^2(\pi(z + \bar{\zeta})/4))^{-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial \bar{\zeta}} \log K_D(z, \zeta) = \frac{\pi}{2} \tan(\pi(z + \bar{\zeta})/4), \quad T_D(z, z) = \pi^2(8 \cos^2(\pi(z + \bar{z})/4))^{-1}$$

となる. よって $p \in D$ に対し,

$$\sigma_D^p(z) = \sqrt{2} \cos(\pi(p + \bar{p})/4) \{ \tan(\pi(z + \bar{p})/4) - \tan(\pi(p + \bar{p})/4) \}.$$

□

代表領域 $\sigma_D^p(D)$ の性質をいくつか挙げておこう. σ_D^p が正則同相写像であると仮定する. (2.3) と (2.2) より,

$$T_{\sigma_D^p(D)}(w, 0) = E_N \quad (w \in \sigma_D^p(D)) \quad (2.4)$$

を得る (E_N は N 次の単位行列を表す). これと $\frac{\partial \sigma_D^p}{\partial z}(p) = T_D(p)^{1/2}$ より $L(\sigma_D^p, p) = E_N$ となるので, 命題 2.1 で $\varphi = \sigma_D^p$ とおいて,

$$\sigma_{\sigma_D^p(D)}^0(w) = E_N \quad (w \in \sigma_D^p(D))$$

が成立する.

3. 等質有界領域の BERGMAN 写像

前節で述べたように, Bergman 写像は正則同相写像であるとは限らないし, 像が領域にならないこともある. しかし等質有界領域の場合には, Bergman 写像は非常にうまく機能し, 性質の良い有界領域実現を与える. Xu Yi-Chao は次のことを証明した.

定理 3.1. $D \subset \mathbb{C}^N$ を等質有界領域とし, $p \in D$ を任意の点とする. このとき $K_D(z, p) \neq 0$ ($z \in D$) であり, Bergman 写像 σ_D^p は有界領域 $\sigma_D^p(D)$ への正則同相写像を与える.

注意. 定理 3.1 において, $p \in D$ の選び方は本質的ではない. すなわち p と異なる点 p' をとったとしても, D の等質性から p を p' に写す $\varphi \in \text{Hol}(D)$ が存在し, σ_D^p と $\sigma_D^{p'}$ はユニタリ写像 $L(\varphi, p)$ の分しか違わない. □

例 2.2 で上半平面の Bergman 写像が Cayley 変換と定数倍を除いて一致することをみた. 上半平面の一般化である Siegel 領域に対しても, 次の命題が成立する (紙数の都合上, ここでは等質 Siegel 領域の Cayley 変換の定義を述べるができないが, 詳しくは [19] を参照されたい):

命題 3.2 (伊師, 甲斐). $D \subset \mathbb{C}^N$ を等質 Siegel 領域とする. 適当な点 $p \in D$ を選ぶことによって, Bergman 写像 σ_D^p は Bergman 核に付随して定義される Cayley 変換 (R. Penney [17], 野村隆昭 [14]) と一致する.

対称 Siegel 領域の場合には, Bergman 核に付随する Cayley 変換は Korányi と Wolf が定義した Cayley 変換に一致するから, 次のことがわかる.

命題 3.3. 対称有界領域の代表領域は Harish-Chandra 実現と一致する.

3.1. 代表領域の属する affine 同相類. $D \subset \mathbb{C}^N$ を等質有界領域とし, $p \in D$ を任意の点とする. $\sigma_D^p: D \rightarrow \mathbb{C}^N$ は正則同相写像であるから, (2.4) のような一定性がある.

命題 3.4. D と正則同相な領域 $\mathcal{D} \subset \mathbb{C}^N$ で,

$$“\exists t \in \mathcal{D} \text{ s.t. } T_{\mathcal{D}}(z, t) (z \in \mathcal{D}) \text{ は定数行列}”$$

を満たす \mathcal{D} から成るクラス \mathcal{A} は, 一つの affine 同相類を成す.

証明. $\mathcal{D} \in \mathcal{A}$ とし, $t \in \mathcal{D}$ に対して $T_{\mathcal{D}}(z, t) (z \in \mathcal{D})$ が定数行列であるとする. ψ を \mathbb{C}^N 上の非退化な affine 変換とする. $\mathcal{D}' := \psi(\mathcal{D})$ とおく. (2.2) より,

$$T_{\mathcal{D}}(z, t) = \frac{{}^t \overline{\partial \psi}}{\partial z}(t) T_{\mathcal{D}'}(\psi(z), \psi(t)) \frac{\partial \psi}{\partial z}(z)$$

が成立するので, $T_{\mathcal{D}'}(w, \psi(t)) (w \in \mathcal{D}')$ は定数行列である.

次に, $\mathcal{D}, \mathcal{D}' \in \mathcal{A}$ とし, $T_{\mathcal{D}}(z, t) (z \in \mathcal{D}), T_{\mathcal{D}'}(w, t') (w \in \mathcal{D}')$ がそれぞれ定数行列であるとする. \mathcal{D} は等質だから, $\psi(t) = t'$ となる正則同相写像 $\psi: \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}'$ が存在する. 再び (2.2) より $\frac{\partial \psi}{\partial z}(z)$ は定数行列となり, これは ψ が \mathbb{C}^N 上の非退化な affine 変換に拡張されるということに他ならない. \square

注意. D が等質でない場合には一般に, 代表領域 $\sigma_D^p(D)$ が属する affine 同相類は, 点 $p \in D$ の取り方に依存する.

3.2. 代表領域の体積の極小性.

定義 3.5. $D \subset \mathbb{C}^N$ を体積有限な領域とする. D が $t \in D$ を中心とする極小領域であるとは, 次のことをいう:

$\det \frac{\partial \varphi}{\partial z}(t) = 1$ である任意の正則同相写像 $\varphi: D \xrightarrow{\sim} D'$ に対して, $\text{vol}(D') \geq \text{vol}(D)$ となる.

一般に代表領域は極小領域ではないが, 等質有界領域の場合には次のことが言える.

命題 3.6 (伊師, 甲斐). 等質有界領域の代表領域は原点を中心とする極小領域である.

命題の証明を述べる前に補題を準備する.

補題 3.7. $D \subset \mathbb{C}^N$ を等質有界領域とすると,

$$\frac{K_D(z, \zeta)}{\det T_D(z, \zeta)} = \text{const.} \quad (z, \zeta \in D)$$

証明. 任意に $z_1, z_2 \in D$ をとる. D は等質だから, $\varphi(z_1) = z_2$ となる $\varphi \in \text{Hol}(D)$ が存在する.

$$K_D(z_1, z_1) = K_D(z_2, z_2) \left| \det \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_1) \right|^2,$$

$$\det T_D(z_1, z_1) = \det T_D(z_2, z_2) \left| \det \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z_1) \right|^2$$

より, $K_D(z, z) / \det T_D(z, z) (z \in D)$ は定数である. $K_D(z, \zeta), \det T_D(z, \zeta)$ は z に関して正則, ζ に関して反正則だから $z = \zeta$ の時の値で決まる. ゆえに結論が得られる. \square

命題 3.6 の証明. $D \subset \mathbb{C}^N$ を等質有界領域とし, $p \in D$ を任意の点とする. $\mathcal{D} := \sigma_D^p(D)$ とおく. $\varphi: \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}'$ を, $\det \frac{\partial \varphi}{\partial z}(0) = 1$ を満たす任意の正則同相写像とする. まず,

$$\text{vol}(\mathcal{D}') = \int_{\mathcal{D}'} dw = \int_{\mathcal{D}} \left| \det \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z) \right|^2 dz.$$

\mathcal{D} の Bergman 空間の元 $f(z)$ で, $f(0) = 1$ を満たし $\|f(z)\|_{L^2}$ を最小にするものは $f(z) = K_{\mathcal{D}}(z, 0)/K_{\mathcal{D}}(0, 0)$ で与えられることが知られている (この事実は \mathcal{D} が等質でなくても成立する). また (2.4) より $\det T_{\mathcal{D}}(w, 0)$ ($w \in \mathcal{D}$) は定数であるから, 補題 3.7 より $K_{\mathcal{D}}(w, 0)$ ($w \in \mathcal{D}$) も定数である. よって

$$\text{vol}(\mathcal{D}') \geq \int_{\mathcal{D}} \left| \frac{K_{\mathcal{D}}(z, 0)}{K_{\mathcal{D}}(0, 0)} \right|^2 dz = \text{vol}(\mathcal{D})$$

となり, \mathcal{D} は原点を中心とする極小領域である. □

注意. $D \subset \mathbb{C}^N$ を $t \in D$ を中心とする極小領域とする. 正則同相写像 $\varphi: \mathcal{D} \xrightarrow{\sim} \mathcal{D}'$ が $\det \frac{\partial \varphi}{\partial z}(z) = \text{const.}$ ($z \in \mathcal{D}$), $\varphi(t) = t'$ を満たすとすると, \mathcal{D}' は t' を中心とする極小領域である.

3.3. 代表領域の凸性. 等質 Siegel 領域の Cayley 変換の像の凸性によって対称 Siegel 領域を特徴付けた [6, Theorem B, Theorem 3.1] は次のように言い換えることができる (ここでの Cayley 変換は Bergman 核に付随して定義されるものである. 一般の場合の定理の再定式化は定理 4.5 で行う):

定理 3.8. $D \subset \mathbb{C}^N$ を等質有界領域, $p \in D$ を任意の点とする. このとき,

$$\text{代表領域 } \sigma_D^p(D) \text{ が凸集合} \iff D \text{ が対称.}$$

3.4. 代表領域の“対称性”. $\text{Hol}(D)$ の点 $p \in D$ における固定部分群を $\text{Iso}_p(D)$ で表す:

$$\text{Iso}_p(D) := \{\varphi \in \text{Hol}(D); \varphi(p) = p\}.$$

$\varphi \in \text{Iso}_p(D)$ とすると, 命題 2.1 より $L(\varphi, p)$ は代表領域 $\sigma_D^p(D)$ を保存する. $\text{Iso}_p(D)$ の“大きさ”について, 次のことが言える.

定理 3.9 (伊師).

$$\dim \text{Iso}_p(D) \geq 1.$$

定理 3.8 より, 非対称な等質有界領域の代表領域は凸ではないが, 定理 3.9 から, ある程度の“対称性”はもっている.

4. 一般 BERGMAN 写像

Bergman 写像は次のようにして, 自然に一般化される. (M, h) を N 次元の Kähler 多様体とし, 次のような関数 $\psi: M \times M \rightarrow \mathbb{C}$ が存在すると仮定する:

- (i) ψ は第一変数に関して正則, 第二変数に関して反正則である.
- (ii) 各点 $z \in M$ で, 正則局所座標 (z_1, \dots, z_N) に関して次のように表せる:

$$h(z) = \sum_{j,k=1}^N \frac{\partial^2}{\partial z_j \partial \bar{z}_k} \psi(z, z) dz_j d\bar{z}_k.$$

このような関数 ψ を Kähler 計量 h のポテンシャル核と呼ぶことにする. $z \in M$ に対し, 反正則関数 $\psi^z: M \rightarrow \mathbb{C}$ を $\psi^z(\zeta) := \psi(\zeta, z)$ で定義する. $p \in M$ をとる. 一般 Bergman 写像 $\sigma_{M,h}^p: M \rightarrow T^*M_p^{(0,1)}$ は次のように定義される:

$$\sigma_{M,h}^p(\zeta) := \bar{\partial} \psi^z(p) - \bar{\partial} \psi^p(p) \quad (\zeta \in M).$$

明らかに $\sigma_{M,h}^p$ は正則であり, $\sigma_{M,h}^p(p) = 0$ である. $\sigma_{M,h}^p$ は $p \in M$ の選び方に依存するが, ポテンシャル核の取り方には依らない:

補題 4.1. $\tilde{\psi}: M \times M \rightarrow \mathbb{C}$ も Kähler 計量 h のポテンシャル核であるとする. このとき, $\bar{\partial}\psi^z(\zeta) = \bar{\partial}\tilde{\psi}^z(\zeta)$ ($z, \zeta \in M$).

Kähler 多様体 (M', h') への等長な正則同相写像 $\varphi: M \xrightarrow{\sim} M'$ が存在するとしよう. このとき Kähler 計量 h' のポテンシャル核 ψ' が自然に誘導される:

$$\psi'(z', \zeta') := \psi(\varphi^{-1}(z'), \varphi^{-1}(\zeta')) \quad (z', \zeta' \in M').$$

次の命題は命題 2.1 の一般化にあたる:

命題 4.2. 右の図式は可換である. すなわち,

$$\varphi^* \circ \sigma_{M',h'}^{\varphi(p)} \circ \varphi = \sigma_{M,h}^p$$

が成立する. \square

$$\begin{array}{ccc} M & \xrightarrow{\varphi} & M' \\ \sigma_{M,h}^p \downarrow & \sim & \downarrow \sigma_{M',h'}^{\varphi(p)} \\ T^*M_p^{(0,1)} & \xleftarrow{\varphi^*} & T^*M'_{\varphi(p)}^{(0,1)} \end{array}$$

注意. $T^*M_p^{(0,1)}, T^*M'_{\varphi(p)}^{(0,1)}$ にそれぞれ h, h' から誘導される Hermite 計量に関して, φ^* はユニタリ写像である.

4.1. 等質有界領域の等質 Kähler 計量に付随する一般 Bergman 写像.

命題 4.3 (伊師, 甲斐). 等質 Siegel 領域の適当な点を取り, 等質 Kähler 計量の族に付随して定義される一般 Bergman 写像の族を考えると, それは等質 Siegel 領域の Cayley 変換の族 [15] に一致する.

このことから次の命題を得る.

命題 4.4. D を等質有界領域とし, h を D 上の等質 Kähler 計量とする. 任意に $p \in D$ をとる. このとき, 一般 Bergman 写像 $\sigma_{D,h}^p$ は D を 有界領域 $\sigma_p(D)$ に正則同相に写す.

これを踏まえて, 講演者が証明した対称 Siegel 領域の特徴付け定理 [6, Theorem B, Theorem 3.1] の再定式化を行う:

定理 4.5. D を等質有界領域とし, h を D 上の等質 Kähler 計量とする. 任意に $p \in D$ をとる. このとき,

$$\sigma_p^h(D) \text{ が凸である} \iff \begin{cases} \bullet D \text{ が対称,} \\ \bullet h \text{ が Bergman 計量の正の定数倍.} \end{cases}$$

REFERENCES

1. S. Bergman, *The kernel function and conformal mapping*, Second, revised ed., Mathematical Surveys, no. V, American Mathematical Society, Providence, R.I., 1970.
2. J. Dorfmeister, *Simply transitive groups and Kähler structures on homogeneous Siegel domains*, Trans. Amer. Math. Soc. **288** (1985), 293–305.
3. S. G. Gindikin, *Some remarks and problems on complex homogeneous domains*, Sci. China Ser. A **49** (2006), no. 11, 1655–1661.
4. H. Ishi, *On symplectic representations of normal j -algebras and their application to Xu's realizations of Siegel domains*, Differential Geom. Appl. **24** (2006), 588–612.
5. H. Ishi and C. Kai, *The Bergman mapping of a homogeneous bounded domain*, preprint.
6. C. Kai, *A characterization of symmetric Siegel domains by convexity of Cayley transform images*, Tohoku Math. J. **59** (2007), 101–118.
7. A. Korányi and J. A. Wolf, *Realization of Hermitian symmetric spaces as generalized half-planes*, Ann. of Math. (2) **81** (1965), 265–288.
8. Q.-K. Lu, *On Kaehler manifolds with constant curvature*, Chinese Math.-Acta **8** (1966), 283–298.

9. ———, *On the representative domain*, Several complex variables (Hangzhou, 1981) (Boston, MA), Birkhäuser Boston, 1984, pp. 199–211.
10. M. Maschler, *Minimal domains and their bergman kernel function*, Pacific J. Math. **6** (1956), 501–516.
11. N. Mok and I.-H. Tsai, *Rigidity of convex realizations of irreducible bounded symmetric domains of rank ≥ 2* , J. Reine Angew. Math. **431** (1992), 91–122.
12. T. Nomura, *Berezin transforms and Laplace-Beltrami operators on homogeneous Siegel domains*, Diff. Geom. Appl. **15** (2001), 91–106.
13. ———, *A characterization of symmetric Siegel domains through a Cayley transform*, Transform. Groups **6** (2001), 227–260.
14. ———, *On Penney's Cayley transform of a homogeneous Siegel domain*, J. Lie Theory **11** (2001), 185–206.
15. ———, *Family of Cayley transforms of a homogeneous Siegel domain parametrized by admissible linear forms*, Diff. Geom. Appl. **18** (2003), 55–78.
16. ———, *Geometric norm equality related to the harmonicity of the Poisson kernel for homogeneous Siegel domains*, J. Funct. Anal. **198** (2003), 229–267.
17. R. Penney, *The Harish-Chandra realization for non-symmetric domains in \mathbb{C}^n* , 1996, pp. 295–313.
18. Y.-C. Xu, *Theory of complex homogeneous bounded domains*, Mathematics and its Applications, vol. 569, Science Press/ Kluwer Academic Publishers, Beijing/ Dordrecht, 2005.
19. 野村 隆昭, 等質 Siegel 領域の対称性条件をめぐって, **57** (2005), 350–368.