経済学研究 *57−4*
北海道大学 2008. 3

結合情報を利用した標準モデル構築アプローチの有効性に関する一考察

向 原 強

1．はじめに

近年，モデルを基盤とした意思決定支援システムの研究では，問題解決に関する一連のプロセス（モデリング・ライフサイクル）に関する全般的支援が課題とされている（Chang *et al*., 1993）。ところが，数理モデル（モデル）を理解することが困難な意思決定者および実施担当者にとって，直面している現実問題に対する意思決定を，数理計画法やシミュレーションのソフトウェア（ソルバー）を利用して行うことは容易でない。なぜならば，現実世界で認識される問題，数学世界で構築されるモデル，および情報システム世界で開発されるソルバーが解くことのできる数理モデルには，それぞれ大きな隔たりがあり，その対応関係を認識し，管理することは専門的知識を持たないユーザはもちろんのこと，専門家にとっても容易ではないからである。Geoffrion［1987］はオペレーションズ・リサーチ／経営科学（OR/MS）の生産性の低さを指摘し，その一因としてモデリング・ライフサイクルの全般的支援環境の乏しさを挙げている。

そのような観点から，モデリング・ライフサイクルを支援する情報システム（モデリング・システム）に関する研究が数多くなされてきた。その結果，多くのモデル記述言語が提案され，商用化されたものも少なくない。しかし，これらのモデル記述言語はいずれも汎用性の高いソルバーへの入力データ生成が主たる役割であり，組合せ最適化の分野の問題に対しては，これらのモデル記述言語が対象としているソルバーでは効率的に解けない問題が多い。

このような観点から，Mukohara *et al*.［2002］では，意思決定者の問題認識を中心として構築された数理モデル（ユーザ定義モデル）をソルバーが対応する数理モデル（標準モデル）に橋渡しする仕組みによって，数理モデルを組合せ最適化問題に応用するアーキテクチャを提案した。しかし，巡回セールスマン問題を事例として利用し，ユーザ定義モデルと標準モデルおよびの関係およびそれらの橋渡しの仕組み（筆者らは結合情報と呼んでいる）を導入したものの，その定義はきわめて概念的であった。また，ユーザ定義モデルが標準モデルの部分モデルであることが明白なもののみを事例として扱った。このような事例では，結合情報を準備するための費用対効果は高いとはいえない。

そこで本論では，ユーザ定義モデルと標準モデル，およびその関連概念について，論理的に定義し，このフレームワークに基づくことで，ユーザ定義モデルが，標準モデルのサブモデルとなることが自明とはいえない事例の場合でも，結合情報を記述できること示す。これによって，この手法の応用可能性の高さを示すことが本論の目的である。

本論は以下のように構成される。２章ではユーザ定義モデルと標準モデル，およびその関連概念について定義する。ここでは容量制約付き配送計画問題（CVRP）を事例として利用する。３章では，これまでの研究成果として，代数的モデル記述言語と茨木［2004］の成果を標準モデル構築のアプローチとして示す。４章ではユーザ定義としての CVRP から，２つの標準モデル（VRPTW，SCP）を構築する仕組みを結合情報

として表現できることを示し，その有効性を検討する。5 章はまとめである。

2．標準モデルとユーザ定義モデルの定義

本論文が提案する手法は制約条件付きの最適化モデルを対象とする。これはあらかじめ定義された記号による，数学的・論理的関係によって表現できるものであり，下のように定義する。

最適化モデル M:

$$\min f(\mathbf{P},\mathbf{C},\mathbf{V},\mathbf{Vi}) \quad (1)$$

Subject to

$$\boldsymbol{g}(\mathbf{P},\mathbf{C},\mathbf{V},\mathbf{Vi}) \quad (2)$$

Where

$\mathbf{P} = (p_1, p_2,\cdots) \in \{Domain\}$: パラメータ集合

$\mathbf{C} = (c_1, c_2,\cdots)$: 定数集合

$\mathbf{V} = (v_1, v_2,\cdots)$: 決定変数集合

$\mathbf{Vi} = (vi_1, vi_2,\cdots) = \boldsymbol{h}(\mathbf{P},\mathbf{C},\mathbf{V})$: 派生変数集合

f は目的関数とよばれる。最適化問題では最大化する場合と最小化する場合があるが，f の最小化と $-f$ の最大化は論理的に等価であるので，(1)式の一般性は失われない。

ここで，$(\mathbf{P},\mathbf{C},\mathbf{V},\mathbf{Vi})$ は最適化モデルを定義するために必要な記号の集合である。**P** はパラメータの集合であり，**C** は定数の集合である。パラメータはモデル化段階でその値は決まらないが，定数はモデル化段階でその値を特定できる点が異なる。パラメータは，その値が数値例ごとに定まる。モデル化段階ではパラメータのとりうるべき値の範囲，すなわちドメインを定義する必要がある($\mathbf{P} \in \{Domain\}$)。パラメータのドメインは数理モデルとして定義する場合，明示的に示されないことも多いが，この数理モデルに対する解法アルゴリズムの開発の観点からは重要な情報である。

V は意思決定変数の集合である。さらに最適化モデルでは，**P**,**C**,**V** から，その値を算出可能な変数が必要に応じて導入される。これを派生変数と呼び，その集合を **Vi** と記す。派生変数は既に定義された記号群によって，その値を定義することのできる記号をいう((3)式)。

$$\mathbf{Vi} = \boldsymbol{h}(\mathbf{P},\mathbf{C},\mathbf{V}) \quad (3)$$

例えば，目的関数値を $z = f(x)$ と表現するとき，z は派生変数である。また，決定変数 x_i を要素とする変数集合 $X = \{x_1, x_2,\cdots, x_n\}$ は派生変数である。(3)式は制約条件として表現されることもあるし，記号の定義の中で表現されることもある。

意思決定変数 **V** は，制約条件を満足する必要がある。これを判別するブール関数が g である。関数 g は，制約条件を満たせば true を返し，満たさなければ false を返す論理関数である。例えば，不等式や等式による制約条件式((4),(5))は，制約条件を満足するか否かについて判定することができるので，(2)式の一形式である。

$$\gamma_i(\mathbf{P},\mathbf{C},\mathbf{V},\mathbf{Vi}) = 0 \quad (4)$$

$$\gamma_i(\mathbf{P},\mathbf{C},\mathbf{V},\mathbf{Vi}) \geq 0 \quad (5)$$

最適化モデルで利用される記号はパラメータ，定数，決定変数，派生変数に分類できる。これらP，C，V，Vi からなる記号の特性を記号の**ステータス**と呼ぶ。記号は，ステータスに加えて，(添え字つき)名前，添え字ドメイン，データ型およびドメインから構成される。

この数学モデル M に対し，P の具体値が既知であり，かつパラメータ P から決定変数 V を導く数学的／論理的関係((6)式)が存在するとき，数理モデル M は**求解可能**と呼ぶことにする。(6)式で表現できる論理的関係 A_M は**解法アルゴリズム**と呼ばれる。

$$A_M : \mathbf{P} \rightarrow \mathbf{V} \quad (6)$$

数理モデル M は A_M の標準モデルと呼び，A_M を具現化したソルバー S_M を M の**専用ソルバー**と呼ぶ。

次に現実世界に対応して構造化された数理モデル（ユーザ定義モデル）は，標準モデルに再構築することで，その専用ソルバーで問題を解くことができる。説明を容易にするために，容量制限付き配送計画問題［CVRP］(Ralphs *et al.*［2003］, Baldacci *et al.*［2004］）を例示し，ユーザ定義モデルの事例を紹介する。

（配送車計画問題［CVRP］）デポに集約された荷物を n 箇所の顧客に配送したい。デポと各顧客間の距離が与えられているとき，デポを出発しデポに戻る 10 台の配送車の総距離数を最小化するためには，各配送車は，どの顧客にどういう順序で配送すればよいか？ただし，配送車は各顧客で荷物を積載するものとし，その上限を 1000kg とする。

この問題に対して，構築された数理モデルは下の CVRP（Ralphs *et al.*［2003］を参考に筆者が定式化した）である。

CVRP

parameter n，整数，非負（100 以下），件数[件]，顧客 i の数

constannt m，整数，非負（10 台），台数［台］，配送車 k の数

Induced $I = \{0, 1, 2, \cdots, n\}$，顧客 i の集合，ただしデポは顧客 0

Induced $K = \{1, 2, \cdots, m\}$: 配送車 k の集合

parameter c_{ij}, $i, j \in I$, 実数, 非負, 距離[Km], 顧客 i から顧客 j までの距離

parameter d_i，$i \in N$，実数，非負，重量[Kg]，顧客 i の需要

constant C，実数，非負（2000），距離[Kg]，配送車の容量

variable x_{ijk}，{0, 1}，none[none]，顧客 i から顧客 j へ配送車 k で輸送させるか否か

variable y_{ik}，{0, 1}，none[none]，顧客 i へ配送車 k が輸送するか否か

variable I_k，配送車 k が訪れる顧客の集合

variable n_k，配送車 k が訪れる顧客の数

variable $r_k(h)$，配送車 k が h 番目に訪れる顧客 i

最小化 $\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} c_{ij} \sum_{k \in K} x_{ijk}$

条件 $$\sum_{k \in K} y_{0k} = m \tag{7}$$

$$\sum_{k \in K} y_{ik} = 1,\ i \in I \backslash \{0\} \tag{8}$$

$$\sum_{i \in I} \sum_{j \in I} c_{ij} x_{ijk} \leq C,\ k \in K \tag{9}$$

$$\sum_{j \in I} x_{ijk} = \sum_{j \in I} x_{jik} = y_{ik},\ k \in K,\ i \in I \backslash \{0\} \tag{10}$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ijk} \leq |S| - 1,$$

$$\forall S \subseteq I \backslash \{0\},\ S \neq \phi,\ k \in K \tag{11}$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\},\ i, j \in I,\ k \in K \tag{12}$$

$$y_{ik} \in \{0, 1\},\ i \in I,\ k \in K \tag{13}$$

$$I_k = \{i \mid i \in I, y_{ik} = 1\} \tag{14}$$

$$n_k = |I_k| \tag{15}$$

$$r_k(0) = 0,\ r_k(n_k + 1) = 0 \tag{16}$$

$$\text{if } x_{r_k(h), i', k} = 1 \text{ then } r_k(h+1) = i', \quad i = 0, 1, \ldots, n_k \tag{17}$$

ユーザ定義モデルは数理モデルであるから，基本的構造は(1)式，(2)式と同様であるが，ユーザ定義モデルは，標準モデルとは異なる以下の性質がある。

（1）ユーザ定義モデルで利用される記号は，ステータス，（添え字つき）名前，添え字ドメイン，データ型およびドメインに加え，記号の測度／単位，物理的特性に関する説明が記述される。これらは現実世

界からパラメータの具体値を収集し，決定変数に対する現実的評価を行うために必要である。特に利用される記号の名前も重要な情報である。

（2）ユーザ定義モデルで利用される記号は，物理的構造に従って添え字構造を決定する。例えば上の事例では，顧客 i から顧客 j までの距離は c_{ij} と記す。一方，標準モデルでは決定変数の添え字構造 x_j や制約条件式の識別子 i に対応して，パラメータの添え字構造（c_j や a_{ij}）が決定される。

（3）ユーザ定義モデルは現実に直面した問題の状況に応じてパラメータを定義するのに対し，標準モデルは，解法アルゴリズムの性能と汎用性を考慮して構築されるので，一般に，ユーザ定義モデルの方がパラメータのために収集すべきデータ量が少ない。そのため，標準モデルでは，線形計画モデルのようにパラメータ係数行列が疎になる問題や，大規模で複雑な問題に対して，ソルバーの性能を十分に発揮できない問題が生じる。

（4）ユーザ定義モデルでは，論理的簡素性よりも，意思決定者に対する認識の容易性が重要である。例えば，VRP において，論理的構造の観点からは決定変数は x_{ijk}，y_{ik} で十分であるが，VRP で意思決定者が必要とする情報は配送車 k の配送順であるから，$r_k(h)$ が必要である。

CVRP は，混合整数計画モデル（MIP）として定式化されている。従って，MIP ソルバーを利用して解を求めることができるが，本論の枠組みにおいては，CVRP はユーザ定義モデルであるが，標準モデルではない。標準モデル MIP は次の数理モデルをいう（今野・鈴木，1982）。

MIP

parameter n，整数，非負
paramenter n_1，整数，非負
paramenter m，整数，非負
paramenter m_1 ，整数，非負
parameter c_j，$j = 1, 2,\ldots, n$，実数
parameter a_{ij}，$i, j = 1, 2,\ldots, n$，実数
parameter b_i，$i = 1, 2,\ldots, m$，実数
variable x_j，　$j = 1, 2,\ldots, n$，実数

$$\text{最小化}\quad \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{18}$$

$$\text{条件}\quad \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \geq b_i,\ i = 1,\cdots,m_1 \tag{19}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\ i = m_1+1,\cdots,m \tag{20}$$

$$x_j \geq 0,\ x_j \in Z,\ j = 1,\cdots,n_1 \tag{21}$$

$$x_j \geq 0,\ j = n_1+1,\cdots,n \tag{22}$$

このとき，ユーザ定義モデルから，標準モデルへの変換メカニズムを結合情報と呼ぶ（Mukohara *et al*，2002）。

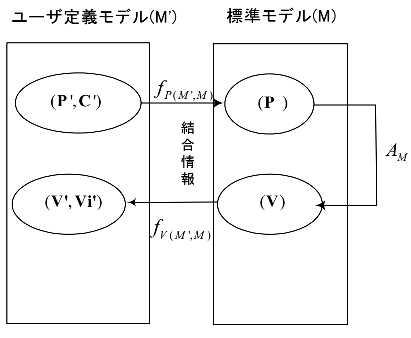

図 1: 結合情報

結合情報は，ユーザ定義モデル M' と標準モデル M の対応関係を定義する。結合情報はパラメータと決定変数について，次の条件を満足するものとする。

条件１（パラメータ条件）: M のパラメータを特

定する次のような写像**パラメータ特定規則** $f_{P(M', M)}$ が存在する。

$$f_{P(M', M)}(\mathbf{P'}, \mathbf{C'}) = \mathbf{P} \tag{23}$$

条件２（解条件）: 既知の解変換規則 $f_{V(M', M)}$ があって，M'の解（$\mathbf{V'}$）および派生変数（$\mathbf{Vi'}$）は，M の解 $\mathbf{V}$ もしくは，$\mathbf{V}$ の一部から導出可能である。

$$f_{V(M', M)}(\mathbf{V}) = (\mathbf{V'}, \mathbf{Vi'}) \tag{24}$$

３．標準モデルの構築

3.1.　モデリング・システムアプローチ

ソルバーの利用場面でいえば，パラメータ特定規則に対応する作業の主要な部分は，標準モデルのパラメータに対する定数の設定とユーザ定義モデルのパラメータと標準モデルのパラメータの対応付けである。本来，エラーを起こしやすい高コストの作業を必要とする。

この問題を解決した成功事例の１つが，代数的モデリング・システムである。代数的モデリング・システムとは，モデル記述言語とよばれる一般的な数式記述に類似した宣言的な記述から，ソルバーの入力データを自動的に生成する**モデルトランスレータ**（Fourer，1998），ソルバー本体に加えて，標準モデルとソルバーの入出力インターフェイスを実現するソルバードライバー，モデル記述の編集機能，モデルやソルバーの管理機能を備えた統合環境をいう（向原，1998）。AMPL（Fourer，1993），GAMS（Brooke *et al.*，1996），MPL（Maximal Software，1994）などがその代表例である。モデリング・システムを利用すると，以下の性質からソルバーの入力データを生成するまでの時間的・金銭的コストを削減できるので，数理モデルを利用する意思決定の生産性を高めることができる。

（１）複雑なソルバー形式にデータを記述する必要はない。よってデータ入力のためのインターフェイスを改善できる。

（２）問題状況の変化によるモデルの修正・変更に対して，ソルバーを修正する労力を軽減できる。

（３）問題の規模や難しさによって，効率的なソルバーを選択できる。

（４）モデルの記述形式を変形することなく，ソルバーを切り替えることができる。

（５）ソルバーは特定のモデルに対して開発されるのではないので，ソルバーの再利用が促進される。

（６）モデルは特定のソルバーに対して開発する必要がないので，モデルの再利用が促進される。

例えば，GAMS では表１のモデルを扱うことが可能である。

これらは本論の枠組みにおいて，標準モデルに相応する。つまり，ユーザ定義モデルがモデル記述言語で記述可能であれば，モデルトランスレータによって標準モデルへ変換可能である。

一方，ソルバーからの出力結果は，意思決定者や問題の状況に応じて，必要となる情報と，その形式は千差万別であるため，多くのモデリ

表 1: GAMS の対応モデル

#	略称	モデル名
1	LP	Linear Programming
2	MIP	Mixed-Integer Programming
3	NLP	Non-Linear Programming
4	MCP	Mixed Complementarity Problems
5	MPEC	Mathematical Programs with Equilibrium Constraints
6	CNS	Constrained Nonlinear Systems
7	DNLP	Non-Linear Programming with Discontinuous Derivatives
8	MINLP	Mixed-Integer Non-Linear Programming
9	QCP	Quadratically Constrained Programs
10	MIPCP	Mixed Integer Quadratically Constrained Programs

ング・システムでは，ユーザによってカスタマイズを可能とするインターフェイスを提供している。

例えば，代表的なモデリング・システムであるMPLでは，OptiMaxをコンポーネントとして組み込むことによりMS-ExcelおよびVBAをユーザインターフェイスとして利用することができる。図2は最短経路問題の出力結果をMS-Excel上にグラフィカルに表示する一例である。

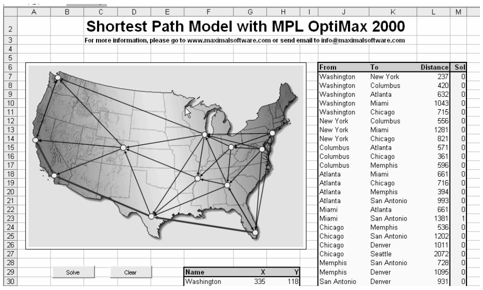

図2: MPLとOptiMaxによるユーザインターフェイス

このとき，MPLのモデルトランスレータおよびOptiMaxを利用したVBAプログラムは結合情報を具現化したものとなっている(図3)。

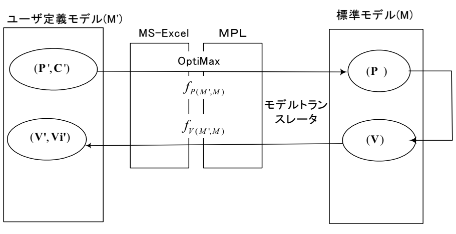

図3: MPLのモデルトランスレータとOptiMaxによる結合情報

代数的モデリング・システムに備わるソルバーの場合，特定の標準モデルをターゲットとしており，同じタイプのソルバー(すなわち同じ標準モデル)であれば，自由にソルバーを切り替えることができる(図4)。

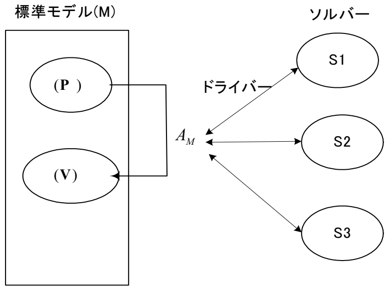

図4: 標準モデルとソルバーの関係

しかし，代数的モデリング・システムは，組合せ最適化問題のように，一般化した標準モデルに対する効率的なソルバーが存在しない場合には，モデリング・システムを利用した意思決定の効率性やその効果は決して高くない(Fourer, 1998)。多くの組合せ最適化問題は，MIPとして定式化可能であるが，モデル化が可能であることと，大規模なモデルに対して求解可能であることは別の問題である。

3.2. Ibarakiアプローチ

Ibaraki[2000]はメタヒューリスティックアルゴリズムの頑健性に着目して，いくつかのタイプの組合せ最適化問題の標準問題に対するエンジンを開発しておき，問題に応じてこれを使い分けることを提案している(図5)。

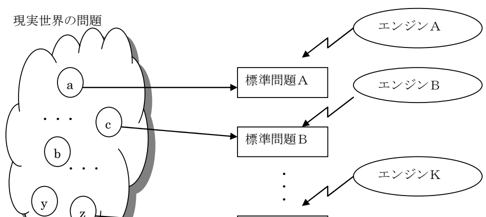

図5: 標準問題による問題解決
(出典：茨木[2005])

表 2: 標準問題

#	略称	モデル名
1	CSP	制約充足問題
2	RCPSP	資源制約プロジェクトスケジューリング問題
3	VRP	配送計画問題
4	2PP	２次元箱詰め問題
5	GAP	一般化割当問題
6	SCP	集合被覆問題
7	MAXSAT	最大充足可能性問題
8	LP	線形計画問題
9	IP	整数計画問題

これを Ibaraki アプローチと呼ぶことにする。Ibaraki アプローチにおける標準問題は表２の通りである（茨木，2004）。

例えば，RCPSP とは，『限られた資源の下で与えられた仕事を処理する際に，資源配分および作業の開始時刻を決定する問題』をいい，この枠組みの下で現実の多様なスケジューリング問題を記述できると考えられる。そこで，野々部・茨木[2005]は，与えられた生産スケジューリング問題（原問題）を，RCPSP として記述し，RCPSP ソルバーによってスケジュールを生成する仕組みを汎用スケジューラとして利用することを提案する。

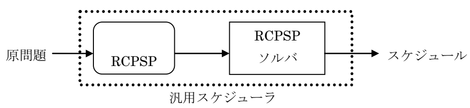

図 6: RCPSP による汎用スケジューラ
（出典：野々部・茨木[2000]）

標準問題は，ソルバーのターゲットとなる数理モデルであるから，本論における標準モデルそのものであり，現実世界の問題との適用可能性（汎用性）を高めるために標準問題の拡張が試みられている。Ibaraki アプローチにおける標準問題には，LP や IP が含まれるから，モデリング・システムアプローチと決定的に対立するものではないが，多様な標準問題の設定と頑強なヒューリスティックソルバーが用意されていることから，組合せ最適化問題に対する有効性は，より高いと考えられる。

ただし，どの標準問題を設定するかについては，解くべき問題に関する詳しい知識と，利用するソルバーの特性について詳細な理解が必要である。

与えられた問題は標準問題の枠組みの中でのみ記述することとするため，まず意思決定者の枠組みにおける数理モデル（ユーザ定義モデル）を構築し，意思決定者にとって数理モデルに対する親和性を改善し，データの収集や解の解釈を容易にすることを指向する本論文のアプローチとは根本的に異なるものである。

4．Mukohara アプローチ

Mukohara *et al.*[2002]では，意思決定者に親和性の高い形式でユーザ定義モデルとして定式化し，結合情報を通して標準モデルへ橋渡しする仕組みを提案している。茨木[2005]は，飛行機の操縦士の勤務スケジュールを決める「ルート決定問題」が，VRP と SCP の二通りにモデル化できることを紹介している。これは「ルート決定問題」をユーザ定義モデル，VRP および SCP をそれぞれ標準モデルと考えることができる。これはユーザ定義モデルと標準モデルの独立性が意思決定者をよりよく支援するために重要であるとする Mukohara アプローチの有効性を示すためのよい事例になると考えられる。

そこで，茨木[2005]の事例に従い，２節でとりあげた CVRP から，２つの標準モデル（VRP，SCP）への橋渡しの仕組みを，結合情報として表現することを試みる。

4.1.　CVRP から VRPTW へ

VRP は，様々なモデルが研究されてきているが， Ibaraki アプローチでは VRP は時刻制約をあつかうことのできる VRPTW を採用している。ここではこの VRPTW を標準モデル

としてとりあげ，結合情報の適用可能性を説明する。あきらかにVRPTWはCVRPの一般形とみなすことができるから，このタイプの結合情報は単純である。

また，各記号群には，意味的説明を附加しているが，これは数理モデルの理解を容易にするためである。

VRPTW

parameter n: 顧客 i の数，整数

parameter m: 配送車 k の数，整数

Induced V: 顧客 i の集合，ただしデポは顧客0，$=\{0,1,2,\cdots,n\}$

Induced M: 配送車 k の集合，$=\{1,2,\cdots,m\}$

parameter q_i: 顧客 i への輸送量，実数

Induced $p_i(t)$: 顧客 i の開始時刻 t におけるペナルティ関数

parameter u_i: 顧客 i へのサービス時間，実数

parameter Q_k: 配送車 k の容量，実数

parameter d_{ij}: 顧客 i から顧客 j までの距離，実数

parameter t_{ij}: 顧客 i から顧客 j までの時間距離，実数

variable $\sigma_k(h)$: 配送車 k が h 番目に訪れる顧客，実数

Induced n_k: 配送車 k が訪れる顧客数

Induced σ_k: 配送車 k のルート $=\{\sigma_k(0),\sigma_k(1),\cdots,\sigma_k(n_k),\sigma_k(n_k+1)\}$，

ただし $\sigma_k(0),\sigma_k(n_k+1)$ はデポ0

Induced $\boldsymbol{\sigma}$ ：配送車のルートからなるベクトル $=(\sigma_1,\sigma_2,\cdots,\sigma_m)$

variable s_i ：顧客 i におけるサービスの開始時刻，実数

variable s_k^a: 配送車 k のデポへの帰還時刻，実数

Induced $\mathbf{S}$: 顧客 i のサービス開始時刻，

配送車 k のデポへの帰還時刻からなるサービス時刻ベクトル $=(s_1,s_2,\cdots,s_n,s_1^a,s_2^a,\cdots,s_m^a)$

variable $y_{ik}(\boldsymbol{\sigma})$: ルート $\boldsymbol{\sigma}$ において配送車 k は顧客 i を訪れるか否か，{0, 1}

$y_{ik}(\boldsymbol{\sigma})=1 \Leftrightarrow$ ただ1つの $h\in\{1,2,\cdots,n_k\}$ に対し，$i=\sigma_k(h)$ が満足

Induced $d_{sum}(\boldsymbol{\sigma})$: ルート $\boldsymbol{\sigma}$ に対する距離に関するコスト，$=\sum_{k\in M}\sum_{h=0}^{n_k} d_{\sigma_k(h),\sigma_k(h+1)}$

Induced $p_{sum}(\mathbf{S})$: サービス時刻 $\mathbf{S}$ に対するペナルティ，$=\sum_{i\in V\setminus\{0\}} p_i(s_i)+\sum_{k\in M} p_0(s_k^a)$

Induced $q_{sum}(\boldsymbol{\sigma})$: ルート $\boldsymbol{\sigma}$ に対する容量に関するコスト，

$=\sum_{k\in M}\max\left\{\sum_{i\in V} q_i y_{ik}(\boldsymbol{\sigma})-Q_k,0\right\}$

Induced $cost(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{S})$: ルート $\boldsymbol{\sigma}$，サービス時刻 $\mathbf{S}$ に対する総コスト

Minimize

$$cost(\boldsymbol{\sigma},\mathbf{S})=d_{sum}(\boldsymbol{\sigma})+p_{sum}(\mathbf{S})+q_{sum}(\boldsymbol{\sigma}) \tag{25}$$

Subject to

$$\sum_{k\in M} y_{ik}(\boldsymbol{\sigma})=1,\ i\in V\setminus\{0\} \tag{26}$$

$$t_{0,\sigma_k(1)}\le s_{\sigma_k(1)},\quad k\in M \tag{27}$$

$$s_{\sigma_k(h)}+u_{\sigma_k(h)}+t_{\sigma_k(h),\sigma_k(h+1)}\le s_{\sigma_k(h+1)},\quad h=1,2,\ldots,n_k-1,k\in M \tag{28}$$

$$s_{\sigma_k(n_k)}+u_{\sigma_k(n_k)}+t_{\sigma_k(n_k),0}\le s_k^a,\quad k\in M \tag{29}$$

同一の記号名を利用することによる混同を防ぐため，各記号をモデル名との組−[数理モデル]．[記号]−を利用して表記すると，次のように結合情報を定義できる。

f_P: $CVRP\to VRPTW\{$

$$f_P^1: CVRP.n\to VRPTW.n \tag{30}$$

$$f_P^2: CVRP.m\to VRPTW.m \tag{31}$$

f_P^3: $CVRP.q_i\to VRPTW.q_i,\ i\in V$

where $CVRP.i \in I \rightarrow VRPTW.i \in V$ (32)
f_P^4: $CVRP.Q \rightarrow VRPTW.Q_k$,
$k \in M$ (33)
f_P^5: $CVRP.d_{ij} \rightarrow VRPTW.d_{ij}, i, j \in V$
where
$CVRP.(i, j) \rightarrow VRPTW.(i, j)$ (34)
f_P^6: $0 \rightarrow VRPTW.t_{ij}, i, j \in V$ (35)
f_P^7: $0 \rightarrow VRPTW.p_i(t), i \in V$ (36)
}
f_V: $VRPTW \rightarrow CVRP$ {
f_V^1: $VRPTW.\sigma_k(h) \rightarrow CVRP.r_k(h), k \in M$
where
$VRPTW.k \in K \rightarrow CVRP.k \in K$ (37)
}

ここで f_P はパラメータ特定規則であり，f_V は解変換規則である。これにより，ユーザ定義モデル CVRP に対して，VRPTW のソルバーは利用可能になる。

4.2. CVRP から SCP へ

次に，CVRP に対し，標準モデルとして集合被覆問題(SCP)を選択し，結合情報を定義する事例を示す。

SCP は次のように定式化される。

SCP
parameter n: 整数
parameter m: 整数
Induced J: j の集合，$= \{1, 2, \cdots, i, \cdots, m\}$
parameter $d_j, j \in J$: 非負実数
variable $x_j, j \in J$: バイナリ
parameter $a_{ij}, i \in \{1, \cdots, n\}, j \in J$: 非負実数，1 以下
Induced f: 実数

Minimize $\quad f = \sum_{j \in J} d_j x_j$

Subject to

$$\sum_{j \in J} a_{ij} x_j \geq 1, \quad i = 1, \cdots, n \tag{38}$$

$$x_j \in \{0, 1\}, \quad j \in J \tag{39}$$

この時，CVRP に対し，各配送車が利用するルートに着目し，次の記号を定義する。

デポ 0 を出発し，デポ 0 に戻るルートを ρ とすると，ρ は $\rho(i)$ を利用して，次のように表現できる。

$$\rho = (\rho(0), \rho(1), \cdots, \rho(n^\rho), \rho(n^\rho + 1)) \tag{40}$$

ここで，n^ρ はルート ρ に含まれる顧客の数とし，$\rho(i)$ はルート ρ において i 番目に訪れる顧客であり，$\rho(0) = \rho(n^\rho + 1) = 0$ である。各 ρ における移動距離を c_ρ とすると，

$$c_\rho = \sum_{i=0}^{n^\rho} d_{\rho(i), \rho(i+1)} \tag{41}$$

で計算可能であり，この手続きを
$dist: \rho \rightarrow c_\rho$
と記す。さらに各 ρ に顧客 i が含まれているか否かについて $a_{\rho i}$ を導入し，次のように値を定める。

$$a_{\rho i} = \begin{cases} 1 & if\ i \in \rho, i \neq 0 \\ 1/m & if\ i = 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \tag{42}$$

m は配送車の台数である。すなわち，各顧客はいずれかのルートに必ず 1 つ以上含まれ，デポ 0 は，実行可能解の全てのルートに含まれる。この計算手続きを $assign: (\rho, i) \rightarrow a_{\rho i}$ とする。最後に，ルートの集合を

$$\mathrm{P} = \{1, 2, \cdots, \rho, \cdots, |\mathrm{P}|\} \tag{43}$$

と定義する。一般に，デポ 0 を出発し，デポ 0 に戻るルート数は，顧客数を n とすると，$(2^n - 1)!$ 通り存在し，いわゆる組合せ爆発が発生するが，(9)式やその他のヒューリスティックにより，実行可能なルートを限定できる仕組

みを準備できるものとし，このアルゴリズムを $\varphi{:}CVRP \to \mathrm{P}$ と表す。以上より，次のようにパラメータ特定規則を定義できる。

$f_P{:}CVRP \to SCP\{$

$\varphi{:}CVRP \to \mathrm{P}$ (44)

$dist{:}\rho \to c_\rho, \rho \in \mathrm{P}$ (45)

$assign{:}(\rho, i, m) \to SCP.a_{\rho i},$

$\rho \in \mathrm{P}, i \in CVRP.I,$

$m = CVRP.m$ (46)

$f_P^1{:}CVRP.n \to SCP.n$ (47)

$f_P^2{:}|\mathrm{P}| \to SCP.m$ (48)

$f_P^3{:}c_\rho \to SCP.d_j, j \in J$

where $\rho \in \mathrm{P} \to SCP.\, j \in J$ (49)

$\}$

それぞれ(40)式，(43)式で定義される P および ρ はユーザ定義モデルの派生変数として位置づけることも可能であるが，結合情報の中でのみ利用するテンポラリ変数として扱う。ユーザ定義モデルと標準モデルの独立性を維持するためである。

標準モデル SCP の解のうち，$\{\rho \mid \rho \in J, x_\rho = 1\}$ は選択された配送ルートを示す。CVRP では個々の配送車の違いを定義していないので，各配送車が選択されたどのルートをたどるか任意である。そこで，各選択ルートがどの配送車の担当とするかについての手続きを，

$order{:}\rho \to CVRP.k \in M$

と定義することにする。また，各配送ルート ρ に含まれる顧客数 n^ρ と配送順 $\rho(i)$ は所与であり，(40)式から知ることができる。この手続きを，それぞれ

$num{:}\rho \to n^\rho$，$seq{:}\rho \to \rho(i), i \in n^\rho$

とすると，解変換規則は次のように表現できる。

$f_V{:}SCP \to CVRP\{$

$f_V^1{:}SCP.\, x_j \to \rho$ (50)

$order{:}\rho \to CVRP.k \in M$ (51)

$num{:}\rho \to n^\rho$ (52)

$seq{:}\rho \to \rho(i), i \in n^\rho$ (53)

$f_V^1{:}\rho \to CVRP.r_{order(\rho)}(h)$ (54)

4.3.　各アプローチの比較検討

Mukohara アプローチによるモデル化は，モデリング・システムアプローチや Ibaraki アプローチと相矛盾しない。例にあげた CVRP のように MIP で定式化できれば，モデルトランスレータを利用して MIP ソルバーを起動すればよい。このとき，モデルトランスレータはパラメータ特定規則をインプリメントしたソフトウェアといえる。しかし，CVRP のような組合せ最適化問題は，問題が大規模になると，MIP で定式化できたとしても，意思決定に有効な解（最適解もしくは近似解）を返すとは限らない。CVRP の(11)式は I の要素が大きくなると，その空集合をのぞく部分集合の数は $2^{|I|}-1$ となり，モデル具体例レベルでの定式化自体が非常に困難である。

そこで，組合せ最適化問題に対しては，標準モデルを切り分けて，必要に応じて使い分ける Ibaraki アプローチは非常に有効であると考えられる。しかし，Mukohara アプローチにおける標準モデルとは Ibaraki アプローチにおける標準問題そのものであるものの，Ibaraki アプローチにはユーザ定義モデルが存在しない。２節で与えられた問題に対して CVRP としてモデル化する方が，VRPTW や SCP としてモデル化するアプローチよりも問題との対応関係を理解しやすい。また，配送車のルート集合を限定することで SCP にモデル化した事例のように，ソルバーを起動する前に解空間を限定させる仕組みを知的資源として活用するためには，多少面倒でもユーザ定義モデルを明示し，パラメータの算出や解空間の限定などの工夫を結合情報としてデータベースに蓄積する仕組みは有効であろう。

５．結論

本論では，Mukohara *et al.*[2002]で導入さ

れたユーザ定義モデルと標準モデルの概念を数学的記法に基づいて定義した後，代数的モデリング・システムの機能を，提案したフレームワークに基づいて記述した。しかし，代数的モデリング・システムでは，MIP のモデル化を得意とするものの大規模な組合せ最適化問題を扱うことは難しい。この課題に対し，茨木[2004]では，いくつかの標準問題に対する強力なソルバーを開発し，必要に応じて使い分けるアプローチを提案している。Ibaraki アプローチでは，現実世界の問題(原問題)を異なる標準問題でモデル化し，異なるソルバーで求解することも可能である。本論では，その仕組みが結合情報を使って定義できることを示した。ユーザ定義モデルを構築することにより意思決定者に対するモデル親和性を改善できることに加え，標準モデルへの橋渡しを担う結合情報では，ソルバーを起動する前に解空間を限定させる仕組みを記述することも可能である。

組合せ最適化問題であっても，ユーザ定義モデルが代数的モデル記述言語で記述可能であれば MIP ソルバーを起動して求解すればよいし，十分な性能が得られない場合，Ibaraki アプローチで提案されている他の標準モデルへの変換を試みてもかまわない。その意味で，本論のアプローチは，代数的モデリング・システムアプローチと Ibaraki アプローチの両方に対して補完的な役割を担っている。

結合情報の構築に関する作業コストの問題が残されるが，強力な汎用ソルバーが準備されているとするならば，ユーザ定義モデルに対する専用ソルバーの開発に比べると低コストといえるし，結合情報の多くはパラメータ間の対応付けや定数の設定であるため，過去の知的資産の再利用によってコスト低減できるものと考える。また一方で，結合情報には解空間の限定メカニズムが含まれ，解法アルゴリズムと同様な高度な知的資産であると考えられる。

謝辞

本論文の作成にあたって，北海道大学　関口恭毅教授，上田雅幸氏，SOC 鮑金源氏に貴重なコメントを頂きました。ここに謝意を表します。

参考文献

[1] Baldacci, R., Hadjiconstantinou E., and Mingozzi A.[(2004)“An Exact Algorithm for the Capacitated Vehicle Routing Problem Based on a Two-Commodity Network Flow Formulation,” *Operations Research*, Vol. 52-5, pp.723-738.

[2] Brooke, A., Kendrick, D. and Meeraus (1996) “A. GAMS Release 2.25 A USER'S GUIDE, GAMS. Development Corporation”.

[3] Chang, A., Holsapple, C.W. and Whinstion, A.B. (1993) “Model Management Issues and Directions,” *Decision Support Systems*, Vol. 9, pp.19-37.

[4] Fourer, R. (1993) “AMPL: Modeling Language for Mathematical Programming,” Duxbury Press, Belmont, CA.

[5] Fourer, R. (1998) “Extending a General-Purpose Algebraic Modeling Language to Combinatorial Optimization: A Logic Programming Approach,” *Advances in Computational and Stochastic Optimization, Logic Programming, and Heuristic Search: Interfaces in Computer Science and Operations Research*, Woodruff, D.L. eds., Kluwer Academic Publishers, Dordrecht: The Netherlands, pp.31-74.

[6] Maximal Software, Inc (1994) “MPL User Manual,” Maximal Software, Inc.

[7] Geoffrion, A.M. (1987) “An Introduction to Structured Modeling,” *Management Science*, Vol. 33 No. 5, pp.547-588.

[8] Geoffrion, A.M. (1998) “Computer-based Modeling Environments,” *European Journal of Operational Research*, Vol. 41, pp.33-43.

[9] Ibaraki, T. (2000) “Metaheuristic Algorithms

as General Problem Solvers," *Proceedings of the* 2^{nd} *Joint International Workshop of the Operations Research Society of Japan, Hokkaido Chapter and the Australian Society for Operations Research Inc. Queensland Branch*, pp.1-8.

[10] Mukohara, T., Bao, J. and Sekiguchi, Y.(1999) "A Method for Invoking Solvers from Non-Mathematical Problems Specifications, " *Proceedings of the* 15^{th} *National Conference of the Australian Society for Operations Research,* pp.884-897.

[11] Mukohara, T. and Sekiguchi, Y.(2002) "The DSS Architecture Based on on-Mathematical Problems Specification and Model/Solver Independence, " *Operations Research/ Management Science at Work*, pp.281-298.

[12] Ralphs, T.K., Kopman L., Pulleyblank W.R., and Trotter Jr. L.E.(2003) "On the Capacitated Vehicle Routing Problem, " *Mathematical Programming*, Series B, 94, 343.

[13] Sekiguchi, Y.(1997) "A Generic Approach to Problem Specification for Mathematical Models," *Discussion Paper, Series A*, No. 31, Faculty of Economics, Hokkaido University, 1997, pp.1-25.

[14] H. P. ウィリアムス(1995)「数理モデルの作成方法」 前田　監訳，小林　訳， 産業図書。

[15] 鮑　金源(1998)「問題定義／数理モデルの記述を支援する事例データベース・システムに関する基礎研究」，博士学位論文(北海道大学)。

[16] 茨木　俊秀(2004)「メタヒューリスティクスによる汎用問題解決システムの構築」，文部科学省科学研究費補助金研究成果報告書。

[17] 茨木　俊秀(2005)『「問題解決エンジン」群とモデリング』，オペレーションズ・リサーチ，Vol. 50-4, pp.229-232。

[18] 今野　浩，鈴木　久敏(1982)「整数計画法と組合せ最適化」， 日科技連。

[19] 野々部　宏司，茨木　俊秀(2000)「汎用スケジューラ-RCSP によるアプローチ」，オペレーションズ・リサーチ，Vol. 45-3, pp.118-124。

[20] 向原　強(1998)「OR/MS を活用した意思決定を支援するモデリング・システムの現状」，『経済学研究』(北海道大学)，第 48 巻第 2 号，pp.180-206。

あとがき

関口ゼミのモットーは「気力・体力・好奇心」らしい。教員のはしくれとして，これらが教育で養うべき三大要素であることを痛感する毎日である。しかも，私自身どれも関口先生にはかなわない。気力はもちろん，毎週 10km をジョギングする関口先生には体力でも勝てる自信はない。好奇心はどうだろう。最近では自分の子供にも負けているような気がする・・・。こんなんじゃだめですね！！

私が関口ゼミに入って，今年でちょうど 20 年になる。ずいぶんと長きにわたって，そして，おそらく一番世話の焼いた弟子に違いない。私ができる唯一最大の恩返しは，「気力・体力・好奇心」をはぐくむ努力をすることだと思っている。学生にも，そして自分自身にも。関口先生，今まで本当にありがとうございました。