



Title	0-1 ナップサック問題の初等的ファセットに基づく解法
Author(s)	関口, 恭毅
Citation	北海道大學 經濟學研究, 31(5), 27-51
Issue Date	1982-03
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/32434
Type	departmental bulletin paper
File Information	2.pdf



0-1 ナップサック問題の 初等的ファセットに基づく解法

関 口 恭 毅

1. はじめに
2. 問題ならびに最小被覆からのファセット
3. 切除平面とファセット
4. 新解法の構成と有限性
5. 実験結果
6. 結論と今後の課題
7. 参考文献

1. は じ め に

制約条件式が一本であるようなナップサック問題は、連続変数によって定義される場合には解析的に解かれた問題である。

同じ問題に対し、変数が整数値を取らねばならないという制約をつけると、極度に難しい問題に変身する。実際、この問題は NP 完全である（例えば [9]）。しかし、この問題は表現上最も単純な整数計画法の問題であり、また、実用上も様々な応用対象を持っている（例えば、[18]）。従って、理論・実用の両面の興味から熱心に研究されている。

理論面における最近の話題の一つは、実行可能解集合の凸包が作る多面体のファセットに関するものである。ナップサック問題に限らず、整数計画法の理論面での主要な話題の一つはファセットに関するもので、最近相当のことが知られるようになった（例えば [16] を見よ）。中でも 0-1 ナップサック問題は、ファセットについて良く解明された問題の一つと言える。

実行可能解集合の凸包のすべてのファセットを見つけてしまえば、もとの

整数線形計画問題を等価な線形計画問題に直してしまえるが、実は、すべてのファセットを列挙する問題自体が困難なので、ファセット研究の実用上の意義については疑問視する向きが多かった [5]。

しかし筆者は、適切に選択されたファセットはある意味で最も深い切除平面 (cutting plane) であることに注目し、ファセットを従来の切除平面のかわりに利用する解法を検討してきた。[15] では 0-1 ナップサック問題の実行可能解の凸包が作る多面体 (これをナップサック多面体と呼ぶ) の既知のファセットの中で最も単純な正準 (canonical) ファセットを主に利用する解法の初歩的検討を行った。本稿では利用するファセットの範囲を拡げ、その利用に関する理論的分析を一層精密にし、アルゴリズム的に精緻にした解法を構成し、その数値実験の結果を述べたものである。

本研究の進行中に、[3], [12] が公表された。これらは、対称巡回セールスマン問題の解法にファセットを切除平面として利用する方法を提案し、それによって従来より深い切除が実現されることを示すとともに、列挙の方法と組み合わせることによって、300 前後の都市から成る問題を厳密に解き得ることを明らかにしている。しかし、これらの研究では、なぜファセットが有効なのかの検討がほとんどなされていない。最適整数解を特徴づけるファセットを選択的に生成する規則が明らかではないのであるから、彼らのアルゴリズムの中で生成されるファセットが最も効果的に小数最適点を切除する保証はない。別の言い方をすれば、ファセットが最も深い切除平面である、という表現は、ファセットが多面体にピッタリ張りついているという事実の言い換えにすぎないのである。

本稿では提案する解法を Gomory の小数法と比較することによって、ファセットを利用することの優位性がどこからくるのかを明らかにしようと試みる。この分析を通して 0-1 ナップサック問題のファセットに関する我々の知識が、解法の構成という面から見た時どの程度のものであるかが解明されるであろう。

以下次節では本稿に関連する範囲内で、ナップサック多面体のファセット

の構成法について述べる。3. ではファセットが切除平面となるための十分条件やそのようなファセットの存在条件, さらに切除平面となるファセットの構成法などを検討する。4. ではファセットを切除平面として利用する解法を構成し, 例題を解く。この解法の有限性を示すことは容易である。5. では, 作成した FORTRAN プログラムを簡単に紹介し, 計算実験の結果を多面的に検討する。

尚, 0-1 ナップサック問題の解法は良く研究されており, 実用規模のものまで解きうるようである。この方面の最近の調査報告に [10] や [7] がある。本研究はそれらの解法より優れたものを提案することを直接の目的とはしていない。我々の目的は, ファセットを解法構成に利用することの有効性を検討することにある。

2. 問題ならびに最小被覆からのファセット

0-1 ナップサック問題は次のように定義される。 $N=\{1, 2, \dots, n\}$ とする。

$$[KP] \quad \begin{array}{ll} \text{最大化} & \sum_{i \in N} c_i x_i \\ & \sum_{i \in N} a_i x_i \leq a_0 \quad x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N \end{array}$$

ここで,

$$a_{i-1} \geq a_i > 0, c_i > 0 \quad \forall i \in N$$

とする。さらに, 自明な場合を除くために,

$$(2.1) \quad \sum_{i \in N} a_i > a_0$$

と仮定する。 KP の整数制約を緩和した問題を RKP と記す。 RKP の可能解集合を F , F の整数点集合の凸包を F_c で表わす。 F_c は (有界) ナップサック多面体 (knapsack polytope) である。 R^n を n 次元実数空間とし, x をその点を表わすベクトルとすると,

$$(2.2) \quad \begin{array}{l} F = \{x \in R^n \mid \sum_{i \in N} a_i x_i \leq a_0, 0 \leq x_i \leq 1 \quad \forall i \in N\} \\ F_c = \text{conv}\{x \in F \mid x_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N\} \end{array}$$

である。 N の部分集合 S は次式を満たす時被覆 (cover) と呼ばれ, さらに (2.4) も満たすなら最小被覆 (minimal cover) と呼ばれる。

$$(2.3) \quad \sum_{i \in S} a_i > a_0$$

$$(2.4) \quad \sum_{i \in S} a_i - a_j \leq a_0 \quad \forall j \in S$$

この時、 $E(S) = S \cup S'$ は S の拡大 (extension) と呼ばれる。但し、

$$(2.5) \quad S' = \{i \in N \setminus S \mid a_i \geq \max_{j \in S} a_j\} \text{ である。}$$

不等式

$$(2.6) \quad \sum_{i \in N} \gamma_i x_i \leq \gamma_0$$

が F_C のファセットであるとは

$$(2.7a) \quad F_C \text{ 内の任意の点がこの式を満たす,}$$

$$(2.7b) \quad F_C \text{ の } n \text{ 個のアフィン独立な点がこの式を等号で満たす,}$$

ことである。 F_C の頂点集合は KP の可能解集合に一致するから、(2.7) は (2.6) が定義する超平面が F_C の面の一つにぴったり重なっていることを要求している。尚、(2.6) は、(2.7a) を満たすとき、妥当 (valid) である、と言われる。

現在知られている F_C のファセットは大部分、

$$(2.8) \quad \sum_{i \in S} x_i + \sum_{i \in N \setminus S} \beta_i x_i \leq |S| - 1$$

なる形式のものである。この型のファセットの中で、組合せの問題を解かずに求めることが可能なものを、初等的 (primitive) である、と言うことにする。初等的ファセットは、Balas-Zemel [1] の逐次持上げ (sequentially lifted) ファセットの多くを含んでいる。

(2.8) の型のファセットの詳細な議論は他の文献 (例えば、[1], [2], [6], [11], [13], [14], [16], [19] を参照のこと) にゆずるが、以下の議論に必要な範囲の成果を整理しておく。

$N \setminus S$ の各要素 i に対し次式により h_i を定義する。

$$(2.9) \quad \sum_{j \in S_{h_i}} a_j \leq a_i < \sum_{j \in S_{h_i+1}} a_j$$

ここで、 S_k は S の要素の小さい方から順に k 個とって作った部分集合である。 a_j の値に対する最初の仮定から、 S の要素を a_j の大きい順に選択し、その和が a_i 以下になる最大の個数が h_i である。明らかに、 h_i は最小被覆 S に依存する。

h_i を利用すれば $N \setminus S$ を部分集合 I と J に分割することができる。

$$(2.10) \quad \begin{aligned} I &= \{i \in N \setminus S \mid \sum_{j \in S \setminus s_{h_i+1}} a_j \leq a_0 - a_i < \sum_{j \in S \setminus s_{h_i}} a_j\} \\ J &= \{i \in N \setminus S \mid \sum_{j \in S \setminus s_{h_i+2}} a_j < a_0 - a_i < \sum_{j \in S \setminus s_{h_i+1}} a_j\} \end{aligned}$$

この I, J を用いて、次の性質が示される。これにより、(2.8) の形のファセットの係数が、 J の要素を除けば、一意的に定められることがわかる。さらに、 $i \in J$ に対しても β_i の値が長さ 1 の既知の区間に限定される。

[定理 2.1] (2.8) が F_C のファセットなら次式が成立する。

$$(2.11) \quad \begin{aligned} \beta_i &= h_i \quad \forall i \in I \\ h_i &\leq \beta_i \leq h_i + 1 \quad \forall i \in J \end{aligned}$$

$\beta_i (i \in J)$ が h_i あるいは $h_i + 1$ である時、(2.8) は整数係数のファセットとなる。そのような任意のファセットは次に述べる逐次持上げによって決定できることが知られている。

$N \setminus S$ の要素に適当に順序づけをし、順序づけられた集合 $\bar{S} = (j_1, j_2, \dots, j_l)$, $t = n - |S|$ を定義する。次の $KP(j_l)$ はそれ自身一つの 0-1 ナップサック問題である。その最適値を $Z(j_l)$ と記すものとする。

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & \sum_{j \in S} x_j + \sum_{j \in \bar{S}_{l-1}} \beta_j x_j \\ [KP(j_l)] \quad & \sum_{j \in S \cup \bar{S}_{l-1}} a_j x_j \leq a_0 - a_{j_l} \\ & x_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in S \cup \bar{S}_{l-1} \\ & \beta_j = |S| - 1 - Z(j) \quad \forall j \in \bar{S}_{l-1} \end{aligned}$$

ここで、 $\bar{S}_l$ は $\bar{S}$ の先頭から l 個とった部分集合である。

$l=1$ から始め、 $KP(j_l)$ を逐次解くことによって、 $\beta_{j_l} (l=1, 2, \dots, t)$ を定めることができる。こうして定めた β が (2.11) を満し、しかもファセットを決定することが知られている。この β を求める操作を逐次持上げと言うのである。

$KP(j_l)$ の最適値については次の事実が知られている。ここで $\bar{Z}(j_l)$ は $KP(j_l)$ の緩和線形計画問題 $RKP(j_l)$ の最適値である。

[定理 2.2] $j_1 \in J$ である時、

(1) j_1 が $\bar{S}$ の中で J に属する最初のものであるか、

(2) $\bar{Z}(j_1) < |S| - h_{j_1} - 1$ ならば

$\beta_{j_1} = h_{j_1} + 1$ が成立する。

上述の2つの定理を総合すれば、次の3つの場合には、いずれも、組合せ的問題を解かずにファセットを定めることができること、つまり初等的ファセットを得ることがわかる。

(a) $J = \emptyset$,

(b) $|J| = 1$,

(c) $|J| > 1$ であるがすべての $j \in J$ が定理 2.2 (2) を満す。

これらの各場合の中には

$$(2.12) \quad \beta_i \in \{0, 1\} \quad \forall i \in N \setminus S$$

の成立するファセットが含まれている。これが成立する時、(2.8) は正準ファセットと呼ばれる。時期的には正準ファセットに関する発見の方が定理 2.1 や 2.2 より早い [2]。正準ファセットの各々について、それが丁度

$$(2.13) \quad \sum_{j \in E(S)} x_j \leq |S| - 1$$

に一致する最小被覆 S が集合 $\{i \in N | \beta_i = 1\}$ の中に含まれていることが知られている ([6], [16], [19])。

- 1) ファセットの一般論を述べた文献 [13] では、Balas-Zemel の持上げ操作を拡大 (extension) と呼んでいる。ここでは原研究者の用語を尊重することにする。

3. 切除平面とファセット

妥当な不等式は、それが緩和線形計画問題の実行可能領域を切除する時、切除平面を定める、と言われる。我々はファセットを切除平面として利用する新しいアルゴリズムを構成したいので、この節では、ファセットが切除平面となるための条件、その条件を満たすファセットを与える最小被覆の存在条件などを検討する。

RKP に k 本の妥当不等式 $V_1, V_2, \dots, V_k$ を追加して得られる問題を (RKP, k) と記す。また、 (RKP, k) の最適解を x^* で示し、

$$(3.1) \quad \begin{aligned} B_1 &= \{i \in N \mid x_i^* = 1\} \\ B_f &= \{i \in N \mid 0 < x_i^* < 1\} \end{aligned}$$

と置く。

【定理 3.1】 不等式 (2.8) が x^* を切除する必要十分条件は次式が成立することである。

$$(3.2) \quad \sum_{j \in S \cap B_f} x_j^* + \sum_{j \in B_1 \setminus S} \beta_j + \sum_{j \in B_f \setminus S} \beta_j x_j^* > |S \setminus B_1| - 1$$

$$\begin{aligned} \text{【証明】} \quad & \sum_{j \in S} x_j^* + \sum_{j \in N \setminus S} \beta_j x_j^* \\ &= |S \cap B_1| + \sum_{j \in S \cap B_f} x_j^* + \sum_{j \in (B_1 \cup B_f) \setminus S} \beta_j x_j^* \\ &= |S \cap B_1| + \sum_{j \in S \cap B_f} x_j^* + \sum_{j \in B_1 \setminus S} \beta_j + \sum_{j \in B_f \setminus S} \beta_j x_j^* \\ &> |S| - 1 \end{aligned}$$

は明らかに必要十分条件である。 $|S \cap B_1|$ を移項して整理すれば容易に (3.2) を得る。

この定理は切除平面となるファセットを得るのに好都合な最小被覆 S を示唆している。

図 3.1 において、 S_D は最小被覆の要素のうち、 $x_j^* = 0$ なる j の集合であるが、

$$|S \setminus B_1| - 1 = |S_D| + |S_f| - 1$$

$B_1 \setminus S$	$B_f \setminus S$	$N \setminus (B_1 \cup B_f \cup S_D)$
S_l	S_f	S_D

$$S = S_l \cup S_f \cup S_D$$

図 3-1 最小被覆と B_1, B_f の関係

が成立する。 S_D は (3. 2) の右辺には $|S_D|$ だけ寄与するが左辺には全く寄与しない。従って、 $S_D = \phi$ となることが望ましい。 $B_1 \cap S$ の影響は両辺で相殺される。 $B_f \cap S$ の各要素は左辺には 1 より小なる寄与しかせず、一方で右辺へは丁度 1 だけ寄与するから、 $B_f \cap S$ はできるだけ小さいことが望ましいであろう。 $(B_1 \cup B_f) \setminus S$ の各要素に対する β_j は左辺にだけ寄与するので、できるだけ多いことが望ましいが、特に、 $B_1 \setminus S$ の要素に対する β_j を大きくすることの効果は大きいと言える。従って、 S を逐次持上げる場合には、まず $B_1 \setminus S$ の各要素について行ってから、 $B_f \setminus S$ の要素に進むのが良いであろう。ファセットのもとになる最小被覆の望ましい構成がはっきりするように上の定理を単純化すると、

【系 3.2】 $SC(B_1 \cup B_f)$ が最小被覆であるとする。この時 (3.3) が成立すれば S から作られるファセット (2.8) はすべて切除平面を定める。

$$(3.3) \quad \sum_{j \in S \cap B_f} (1 - x_j^*) < 1$$

容易に示すことができる [4] が、(3.3) は、最小被覆不等式

$$\sum_{j \in S} x_j \leq |S| - 1$$

が x^* を切除するための必要十分条件である。

次に、このような望ましい構成の最小被覆を (RKP, k) の最適解 x^* から求めることが可能かどうかを検討する。

【補題 3.3】 (RKP, k) , $k=0, 1, 2, \dots$ において、 $B_f \neq \phi$ は (3.4) が成立するための必要十分条件である。

$$(3.4) \quad \sum_{j \in B_1 \cup B_f} a_j > a_0$$

【証明】 (3.4) が成立すれば $B_f \neq \phi$ であることは、 x^* が実行可能であることから簡単に導かれる。そこで $B_f \neq \phi$ とする。 x^* が定義により実行可能なので次式が成立する。

$$(3.5) \quad \sum_{j \in B_1 \cup B_f} a_j x_j^* \leq a_0$$

この式が等号で成立する時には明らかに (3.4) が成り立つ。(3.5) が厳密な不等号で成立すると仮定する。この時、 $V_1, V_2, \dots, V_k$ の中に少くとも一本は

x^* で等号が成立するものがある (さもなければ, x^* は最適解であり得ない)。これを V_q とする。 V_q の $x_i (i \in B_f)$ に対する係数は正である。もし非正なら, x_i の値を増加させて, より良い可能解を作れることになり x^* の最適性に矛盾する。従って,

$$\bar{x}_i = 1 \quad \forall i \in B_1 \cup B_f$$

$$\bar{x}_i = 0 \quad \forall i \in N \setminus (B_1 \cup B_f)$$

なる解 $\bar{x}$ は V_q を満たさない。定義により V_q は妥当であるから, これは $\bar{x}$ が KP の実行不可能解であること, すなわち (3.4) が成立することを意味する。

補題により, $B_1 \cup B_f$ が被覆であり, これからいくつかの要素を落して最小被覆を作ることができる。この最小被覆は B_1 が被覆ではないことから, 少なくとも1個は, B_f の要素を含んでいる。従って, 次の定理を得る。

[定理 3.4] $(RKP, k), k=0, 1, 2, \dots$ において $B_f \neq \phi$ であれば,

$$S \cap B_f \neq \phi \text{ かつ } S \subset (B_1 \cup B_f)$$

なる最小被覆 S が存在する。

この定理が存在を保障する最小被覆は通常複数個, $B_1 \cup B_f$ が大きい場合には多数存在する。そうしたものの中で, 定理 3.1 との関連で有利な最小被覆を選択的に構成するには, 次の手順が自然であろう。

S1: B_1 に B_f の要素を逐次, 適当な順序で加えて被覆 S を作る。

S2: $S \cap B_f$ の要素で, 除いても被覆の条件を侵さないものを S からはずす。

S3: B_1 の要素で, 除いても被覆の条件を侵さないものを S からはずす。各手順で加えたり, 除いたりする順序が異ると異った最小被覆を得る。系 3.2 からわかるように特に重要なのは, B_f の中のどの部分集合が S に残るかである。

式 (3.3) の左辺の小さい最小被覆を求めるには, S1 で次の 0-1 ナップサ

ック問題を解き、その最適解に対応する B_f の部分集合を加えれば良いことは明らかである。

$$\begin{aligned} \text{最小化} \quad & \sum_{j \in B_f} (1-x_j^*) y_j \\ & \sum_{j \in B_f} a_j y_j > a_0 - \sum_{j \in B_1} a_j \\ & y_j \in \{0, 1\} \quad \forall j \in B_f \end{aligned}$$

この問題を厳密に解くことができれば、S2 も不要であり好都合である。しかし、 B_f が大きい時にはこの問題自体、解くことが難しい。そこで、S1, S2 では次のような近似解法を採用する。

S1_A: $S=B_1$ から始め、被覆ができるまで、

$(1-x_j^*)/a_j$ の小さい順に $j \in B_f$ を S に追加する。

S2_A: $S \cap B_f$ の要素を x_j^* の小さい順に調べ、それを落しても被覆の条件を侵さない時、 S からはずす。

切除の深さは (RKP, k) の最適値の減少量で測られるであろう。 $x_j^* (j \in B_f)$ が整数化された場合の目的関数値の変化量は、他の x_i^* の値の変化を考慮に入れなければ、悪くとも $\bigcirc_j \cdot \min\{x_j^*, 1-x_j^*\}$ である。そこで、

S1_B: $S=B_1$ から始め、被覆ができるまで、 $\bigcirc_j \cdot \min\{x_j^*, 1-x_j^*\}/a_j$ の大きい順に $j \in B_f$ を S に追加する。

S2_B: S2_A と同じ。

とするのも一法であろう。前者をアルゴリズム SA, 後者を SB と呼ぶことにする。

SA, SB, あるいは他の適当な方法で定理 3.1 を満足するファセットを与える最小被覆を構成できるかどうかを、前もって判定することは難しい。これは、(2.8) の β_i の値の正確な予測が困難なことによる。しかし、(3.3) を満たす最小被覆が存在するかどうかについては、簡単な場合については調べられる。

【定理 3.5】 (RKP, k) で $|B_f|=1$ なら、最小被覆 $S \subset (B_1 \cup B_f)$ は (3.3) を満たす。

【証明】 定理 3.4 により, $|S \cap B_f| = 1$ であり, しかも, $0 < x_j^* < 1 (j \in B_f)$ が成立するから, 明らかである。

【定理 3.6】 (RKP, k) で $B_f = \{j_1, j_2\} (j_1 < j_2)$ であるとする。また,

$$a'_0 = a_0 - \sum_{j \in B_1} a_j$$

とおく。この時, $a'_0 = a_{j_1}$, $x_{j_1}^* + x_{j_2}^* = 1$, $c_{j_1} = c_{j_2}$ であれば x^* で $x_{j_1}^* = 1$, $x_{j_2}^* = 0$ とおいたものが整数最適解であり, これ以外の場合には, (3.3) を満たす最小被覆 $S \subset (B_1 \cup B_f)$ が存在する。

【証明】 明らかに, $a_{j_1} + a_{j_2} > a'_0$ が成立する。

$a_{j_1} > a'_0$ であれば, $B_1 \cup \{j_1\}$ が被覆であり, 定理 3.5 と同様にして, (3.3) を満たす S の存在を示すことができる。

$a'_0 \geq a_{j_1} \geq a_{j_2}$ とする。 $a'_0 = a_{j_1}$, $x_{j_1}^* + x_{j_2}^* = 1$ かつ $c_{j_1} = c_{j_2}$ なら明らかに, 定理は成立する。 $x_{j_1}^* + x_{j_2}^* = 1$ が成立し, $a'_0 = a_{j_1}$ か $c_{j_1} = c_{j_2}$ のいずれか一方, あるいは両方が不成立であるとする, x^* が最適解であることに矛盾する。そこで, $x_{j_1}^* + x_{j_2}^* < 1$ とすると, これも x^* の最適性に矛盾する。従って, $x_{j_1}^* + x_{j_2}^* > 1$ が成り立たねばならない。この時, $k=1, 2$ に対し, $B_1 \cup \{j_k\}$ は仮定により被覆ではないから, $B_f \subset S$ なる最小被覆 $S \subset (B_1 \cup B_f)$ が存在することになる。この S に対し (3.3) が成立することは, $x_{j_1}^* + x_{j_2}^* > 1$ から容易に示すことができる。

残念ながら, $|B_f| = 3$ の時 (3.3) を満たす最小被覆が存在しない場合がある。その例を次に示す。但し, (3.2) を満たすファセットを与える最小被覆が存在するかどうかは, 未解決の問題である。

例 3.1 次の数値例を考える。

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & 102x_1 + 124x_2 + 191x_3 + 111x_4 + 85x_5 + 146x_6 + 11x_7 \\ & + 136x_8 + 90x_9 + 62x_{10} + 176x_{11} + 175x_{12} + 47x_{13} \\ & + 166x_{14} + 94x_{15} + 50x_{16} + 157x_{17} + 80x_{18} + 106x_{19} + 123x_{20} \\ & 190x_1 + 188x_2 + 171x_3 + 159x_4 + 141x_5 + 130x_6 + 128x_7 \end{aligned}$$

$$+125x_8+107x_9+99x_{10}+86x_{11}+74x_{12}+70x_{13}+70x_{14}$$

$$+61x_{15}+43x_{16}+36x_{17}+35x_{18}+24x_{19}+19x_{20} \leq 191$$

この問題を次節で述べるアルゴリズムで解くと、次の2つのファセットが追加された問題の最適解として、 $x_{12}^*=0.9474$, $x_{14}^*=0.0526$, $x_{15}^*=0.0526$, $x_{17}^*=x_{18}^*=x_{19}^*=x_{20}^*=1$, 他の $x_i^*=0$ を得る。

$$3x_1+3x_2+2x_3+2x_4+2x_5+\sum_{i=6}^{14}x_i+x_{17}+x_{20} \leq 3$$

$$3x_1+3x_2+3x_3+2x_4+2x_5+\sum_{i=6}^{12}x_i+x_{15}+x_{17}+x_{19} \leq 3$$

この例では

$$B_1=\{17, 18, 19, 20\}, B_f=\{12, 14, 15\}$$

であり、 $a_0=77>74(=a_{12})$ である。従って、 $|S \cap B_f| \geq 2$ でなければならない。この時、(3.3)の左辺の最小値は1であって(3.3)は不成立となる。

4. 新解法の構成と有限性

前節で検討したように、 (RKP, k) の非整数最適解が与えられた時、これを切除する初等的ファセットがいつも存在するという保証はない。しかし、初等的ファセットは常に整数係数なので、 (RKP, k) に対して、切除平面となるファセットが見つからない時には、いつでも Gomory の小数法を適用できる。前節では追加制約式 $V_1, V_2, \dots, V_k$ が妥当であることだけを仮定していたので、これらのうちのいくつか、あるいは全部が Gomory カットであっても良いのである。

重要なことは、Gomory の小数法と、前節で展開した切除平面となるファセットは、互に両立するという事実である。Gomory の小数法のどの段階であっても、切除平面となる初等的ファセットが見つければこれを追加制約式として利用して良く、また、その逆に、切除平面となるファセットが発見できない時に Gomory の小数法の切除平面を用いることも可能である。

初等的ファセットを主たる追加制約式として用いる切除平面法を次のように構成する。

[新解法]

1. $k=0$ と置く。
2. (RKP, k) を解く。 x^* が整数ベクトルなら終了。さもなければ 3. へ。
3. 初等的ファセットを求める。
4. 求めた初等的ファセットが切除平面になるなら 6. へ。さもなければ 5. へ。
5. Gomory の小数法の切除平面を求める。
6. $k=k+1$ (追加した制約式の本数) として 2. へ。

ここで、5. では非整数行の中で最も $1/2$ に近い行をソース行とすることにする。こう定める確固たる根拠はない。しかし、小数部分が 0.5 に最も近い時、非整数性が最大だと考えられるが、一方、小数法の切除平面は非整数値をとる基底変数が整数値をとるための必要条件から導かれることに注目すれば、このようにソース行を選ぶことによって、深い切除が実現されると期待するのは自然であろう。

初等的ファセットを求める手順は大きく 2 段階に分解できる。その第一段は最小被覆を求めるものであり、第二段は逐次持上げを行うものである。

第一段では、まずアルゴリズム SA により最小被覆 S_A を求める。 S_A が (3.3) を満たす時には、 S_A に対して第 2 段を行った後で再び第一段にもどり、アルゴリズム SB により 2 つ目の最小被覆 S_B を求め、第 2 段へ進むものとする。

第二段では最小被覆を持上げる順序 $\bar{S}$ (2. を参照) が重要である。定理 3.1 の後で行った検討を参考にし、次のように定める。

$$\bar{S} = (\underbrace{j_1, \dots, j_a}_{B_1 \setminus S}, \underbrace{j_{a+1}, \dots, j_b}_{B_f \setminus S}, \underbrace{j_{b+1}, \dots, j_l}_{N \setminus (B_1 \cup B_f)})$$

但し、 $j_1, \dots, j_a: c_j/a_j$ の非増加順、

$j_{a+1}, \dots, j_b: S_{2A}$ あるいは S_{2B} で除去された要素を x_j の非増加順に並べ、その後 S_{1A} あるいは S_{1B} で採用されなかった要素を、当該のステップと同じ順に並べたものを、つな

いだもの,

$j_{b+1}, \dots, j_l: j$ の値の大きい順,

である。

順序 S に従って, 各 $j_l (1 \leq l \leq t)$ に対し次の操作を行い, 式 (2.8) の係数 β_{jl} を定める。

[逐次持上げ]

L1: h_{jl} の決定

L2: $j_l \in I$ なら $\beta_{jl} = h_{jl}$ と置く。

L3: $j_l \in J$ で定理 2.2 を満す場合には $\beta_{jl} + 1$ とする。

L4: $j_l \in J$ で定理 2.2 を満さなければ, $\beta_{jl} = h_{jl}$ と置く。

S_A に対する持上げ結果の不等式 (2.8) を V_A, S_B に対するものを V_B とする。これらは L4 のケースが発生しない限りファセットである。L4 のケースが発生すればファセットである保証はないが, 明らかに妥当である。また, V_B が生成される時に V_A は, 系 3.2 により切除平面になる。

提案した解法では, 繰返し一回当たり, 追加制約式の本数は 1~2 である。

新解法の有限性は, ファセットが高々有限個しか存在しないことと, Gomory の小数法が有限であることから容易に導かれる。文献では小数法の有限性の証明に際して, ソース行選定の別の基準を用いているが, 必要なら, 我々のソース行選択基準を変更すれば良いので, これは本質的なことではない。

以下では数値例を用いて説明を補足する。

例 4.1 (Taha [18])

$$\begin{aligned} \text{最大化} \quad & 13x_1 + 14x_2 + x_3 + 5x_4 + 10x_5 + 6x_7 + 2x_8 + 2x_9 \\ & 14x_1 + 12x_2 + 11x_3 + 10x_4 + 8x_5 + 3x_6 + 2x_7 + 2x_8 + x_9 \leq 17 \\ & x_i \in \{0, 1\}, \quad i = 1, 2, \dots, 9 \end{aligned}$$

この問題に対する $(RKP, 0)$ の最適解は,

$$x^* = (0, 1/2, 0, 0, 1, 0, 1, 0, 1)$$

である。アルゴリズム SA の Sl_A により,

$$S_A = \{2, 5, 7, 9\}$$

であり, 定理 3.5 により S_{2A} は省略できる。 S_3 では c_j/a_j の小さい順に $j \in B_1$ を S から落せるかどうかを検定すれば, 結果は

$$S_A = \{2, 5\}$$

である。 $\bar{S}_A = (7, 9, 8, 6, 4, 3, 1)$ であるから, (2.9), (2.10) と $L1 \sim L4$ により逐次持上げを実行すれば,

$$h_7 = 0, 7 \in I, \beta_7 = 0$$

$$h_9 = 0, 9 \in I, \beta_9 = 0$$

$$h_8 = 0, 8 \in I, \beta_8 = 0$$

$$h_6 = 0, 6 \in I, \beta_6 = 0$$

$$h_4 = 0, 4 \in J, \beta_4 = 1$$

$$h_3 = 0, 3 \in J, \bar{Z}(3) = 3/4 < 1, \beta_3 = 1$$

$$h_1 = 1, 1 \in I, \beta_1 = 1$$

従って,

$$V_A: x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 \leq 1$$

を得る。 V_A は $L4$ を通らないからファセットであり, S_A が (3.3) を満すから x^* を切除する。 $|B_1| = 1$ であるから S_B は S_A に一致し, V_B は V_A に一致する。 V_A を追加して $(RKP, 1)$ を作成し, これを解けば, 次の整数最適解を得る。

$$x^* = (0, 1, 0, 0, 0, 0, 1, 1, 1)$$

例 4.2 (Gomory の小数法を利用)

$$\text{最大化} \quad 97x_1 + 11x_2 + 97x_3 + 44x_4 + 89x_5$$

$$+ 91x_6 + 62x_7 + 36x_8 + 89x_9 + 83x_{10}$$

$$94x_6 + 64x_2 + 61x_3 + 43x_4 + 40x_5$$

$$+ 39x_6 + 38x_7 + 31x_8 + 29x_9 + 11x_{10} \leq 94$$

$$x_i \in \{0, 1\}, i = 1, 2, \dots, 10$$

毎回の最適解と追加制約式 (ファセット) を順に書けば,

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 0.375, 1, 0, 0, 1, 1) \quad (A=1, B=1)$$

$$S_A = \{5, 6, 9\} \quad (S_B = \{1, 2, 3, 4, 7, 8, 10\})$$

$$V_A: 2x_1 + x_2 + x_3 + x_5 + x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \leq 2 \quad (J=\phi)$$

$$V_B = V_A \quad (S_A \cap S_B = \{5, 6, 9\})$$

$$x^* = (0, 0, 0.6818, 0, 0, 0.3182, 0, 0, 1, 1) \quad (A=1, B=1)$$

$$S_A = \{3, 9, 10\} \quad (S_B = \{1, 2, 4, 5, 6, 7, 8\})$$

$$V_A: 2x_1 + x_2 + x_3 + x_9 + x_{10} \leq 2 \quad (J=\phi)$$

$$V_B = V_A \quad (S_A \cap S_B = \{9, 10\})$$

$$x^* = (0, 0, 0.4688, 0, 0, 1, 0, 0, 0.5312, 1) \quad (A=1, B=1)$$

$$S_A = \{3, 6\} \quad (S_B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10\})$$

$$V_A: x_1 + x_2 + x_3 + x_6 \leq 1 \quad (J=\phi)$$

$$V_B = V_A \quad (S_A \cap S_B = \{3, 6\})$$

$$x^* = (0, 0, 0.4545, 0, 0.4545, 0.5455, 0, 0, 0.5455, 1) \quad (A=1, B=1)$$

$$S_A = \{3, 6\} \quad (S_B = \{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9, 10\})$$

この S_A からは直前の V_A と同じものが得られるので切除平面とはならず、一方、 S_A は $(3, 3)$ を満たないので S_B は作られない。従って小数法の切除平面が作られる。それは、

$$5x_1 + 3x_2 + 3x_3 + 2x_4 + 2x_5 + 2x_6 + x_7 + x_8 + 2x_9 + x_{10} \leq 5 \quad (A=1, B=1)$$

であり、これを追加して解けば、

$$x^* = (0, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1) \quad (A=1, B=1)$$

尚、上の計算を行ったのと同じ精度で、Gomory の小数法を適用してみたところ、誤差の累積（許容値 0.5×10^{-4} ）により、6本の切除平面が追加されたところで、途中打ち切りとなった。計算誤差の監視は新解法でも行っているので、本例の場合はフェセットを利用することによりうまく解けるようになる。コンピュータ・プログラムについては、次節を参照のこと。

5. 実験結果

提案した解法と小数法のコンピュータ・プログラムを作成し、一様乱数を利用して作成した数値例による実験を行った。その内容と主たる結果を述べ

る。

新解法は小数法のアルゴリズムの切除平面作成の直前に、初等的ファセット作成を試みるルーチンを追加したものであると言える。

実験の中心となる小数法のコードとして、Land and Powell [8] の MIF (Method of Integer Form) を若干修正して用いた。MIF では、緩和問題の最適解 x^* を得るたびに、すべての非整数行をソース行として切除平面を生成し、追加している (サブルーチン INTCON) が、これを毎回 1 枚ずつ追加する (ソース行の選択は新解法の 5. と同じ) ようにしたのが主要な修正点である。この変更は整数最適解を得るまでに必要な追加制約式の本数を確認するために行った。その他に、系統的に問題例を作り出すルーチン、実験結果の集計表などを出力するルーチンなどを追加したが、いずれも解法そのものには無関係である。尚、浮動小数点演算は倍精度 (8 バイト) を利用し、最適点では活性でない追加制約式を除去するルーチンがある。しかし、小数法は、問題を定義するすべての定数・係数が整数であることを条件にしているので、係数の正規化は行っていない。

新解法のプログラムは、上述の修正を施した MIF に、前節で述べたアルゴリズムの 3, 4 の部分を追加して作成した。この局面では MIF に対する重要な修正は不要であった。

実験に用いた問題例は変数の個数 10, 20, 30, 50, 100 のものである。各ケースとも、20 題ずつ解いた。各問題例の発生には、次のように一様乱数発生用サブルーチン (日立製作所版 RANDUN) を使った。初期値には、変数の個数 n に関係なく 3457 を使い、連続して 0~1 の一様乱数を発生し、これに上限値 AMAX を乗じて整数化し、1~AMAX の整数型乱数 $20(2n+1)$ 個を作成した。これを先頭から $2n+1$ 個ずつに区切り、その前半の n 個は発生順に目的関数の $x_1, x_2, \dots, x_n$ の係数とし、後半の $n+1$ 個を大きい順に並べかえて制約式を作成した。すなわち、最大のものを a_0 とし、2 番目以降を順に、 $a_1, a_2, \dots, a_n$ とした。

係数の正規化を行わないので、AMAX の大きさが逆マトリクス計算の精

度に影響することが予想される。一方, AMAX を固定すると n が大きくなるにつれて類似の数値が現われる可能性が高くなり, 問題の数値的型が変化するであろう。そこで AMAX を n と共に変化させる場合と, 固定する場合とを比較する必要がある。

AMAX を変化させる場合, 逆マトリクス計算誤差の許容限界をいくらに設定するかが判断の難しいところである。MIF では 0.5×10^{-4} を使っていることから

$$(a) \quad 0.5 \times 10^{-4}$$

$$(b) \quad 0.5 \times 10^{-4} \times \text{AMAX}/100$$

$$(c) \quad 0.5 \times 10^{-4} \times (\text{AMAX}/100)^2$$

の 3 種類の方法で設定した。予備的検討の結果, (c) が最も適していると判断できたので, 以下では, この場合をとり上げて報告する。尚, 許容限界の

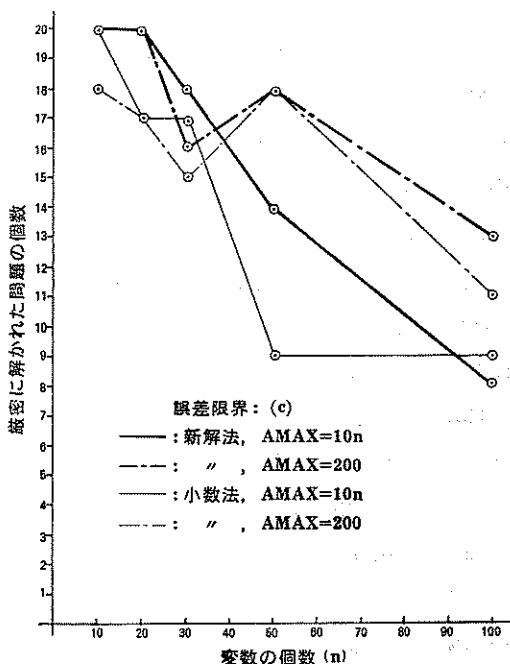


図 5-1 厳密に解けた問題数の比較

変更し $AMAX \times 100$ を使うのは、 $AMAX=100$, $n=10$ の時、全問題例を厳密に解けたのと、 $AMAX=10n$ と設定したことによる。

図 5-1 は、20 題中、厳密に解くことができたものの個数を、変数の個数 n に対してプロットしたものである。実線は $AMAX=10n$ とした場合、一点鎖線は $AMAX=200$ に固定した場合である。また、太線は新解法を、細線は小数法を表わしている。 $AMAX$ の設定法がどちらであっても、新解法の方が良い結果を与えている。しかし、小数法で厳密解を求めることができた問題を、新解法では解けない場合もあり、特に、 $n=100$ で $AMAX=10n$ とした場合には小数法の方が多数の問題を解いている。勿論、小数法が解けない問題を新解法が解いてしまう場合が多いことは図から判断できるであろう。

そこで、平均的にはどちらの解法が最適解により接近して終了したかを調べたのが図 5-2 である。これは、両解法とも解けなかったか、一方だけが解

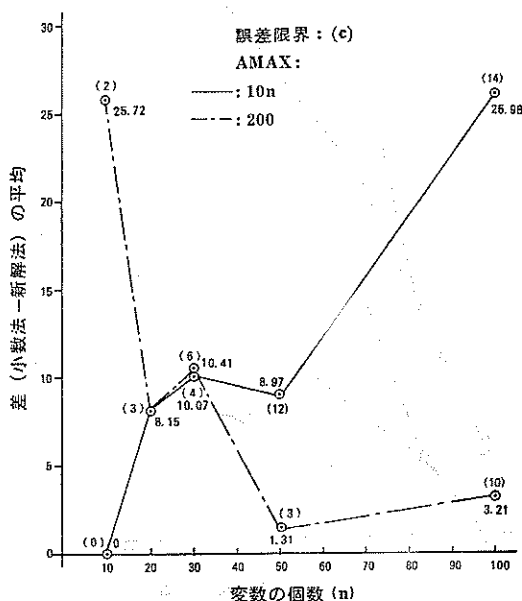


図 5-2 小数法と新解法の厳密解への接近の程度比較

けなかったかした問題の、アルゴリズム終了時の目的関数値の差（小数法—新解法）の平均値を示したものである。もとの問題が最大化問題であるから、これが正であれば新解法の方がより整数最適解に近づいていたと言える。図で（ ）内の数は該当するケース数である。ケース数が少なすぎるところが若干問題であるが、いずれの場合とも、新解法の方が良いこと、特に、

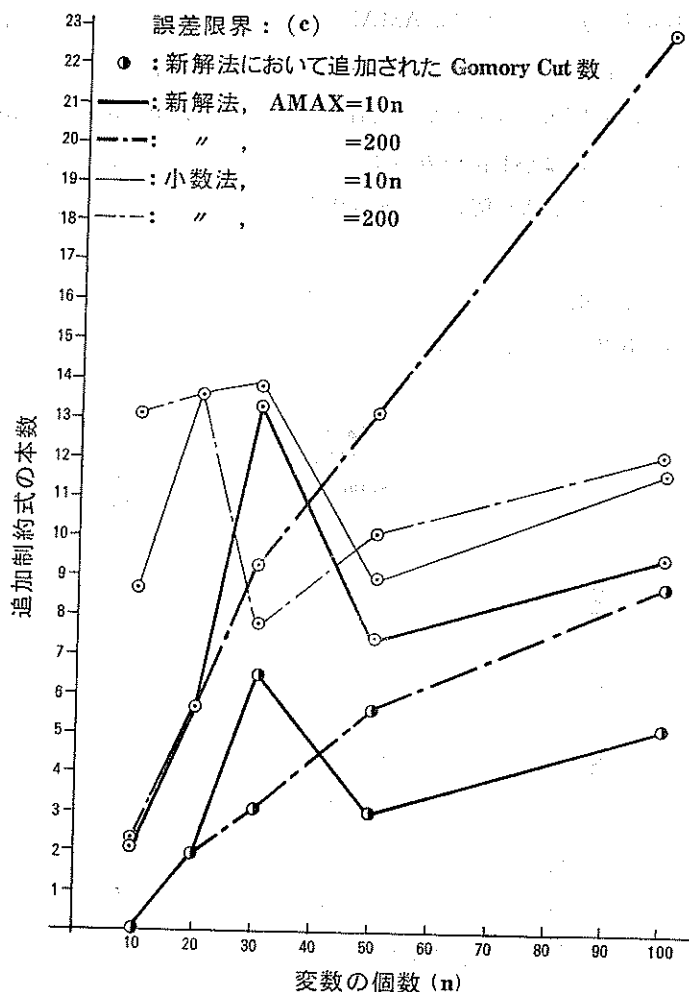


図 5-3 追加制約式の本数の比較

AMAX=10 n , $n=100$ の場合には、厳密に解いた問題の個数が少ないにもかかわらず断然新解法が優位であることが見てとれる。

我々の研究目的からすれば、このような差が生ずる原因を知ることの方に一層の興味がある。

図 5-3 は新解法については、追加されたファセットと Gomory の切除平面の枚数を、小数法については、追加された切除平面の枚数を、各々、厳密解が求められた問題の個数に対する平均値を示したものである。 n が小さい範囲では新解法の方が追加制約式の本数をはるかに少なく、ファセットによる切除平面が深いことを予想させる。しかし、これは n の増加とともにあいまいになり、AMAX=200 の場合にはむしろ、新解法の方が圧倒的に多数の制約式を追加している。Gomory の切除平面の枚数だけを比較すれば、明らかに新解法の方が少ないことが読みとれる。このことから、ファセットの利用は必ずしも深い切除平面を実現することを意味せず、実用規模の大型の問題では、むしろ、係数が小さいことによって計算精度の悪化を抑える点での効果が大であると予想させる。

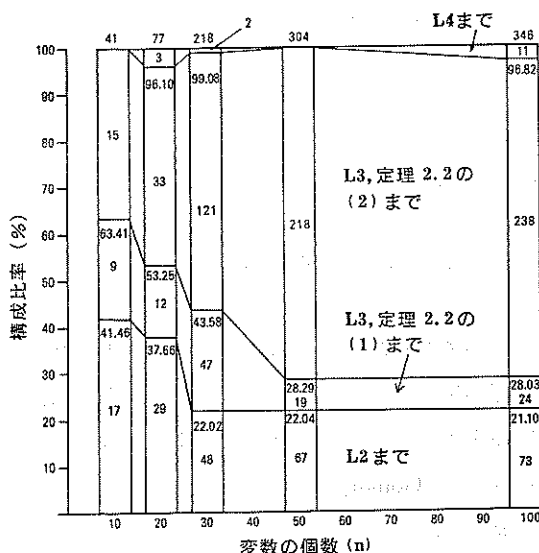


図 5-4 利用された初等的ファセットの構成比率

図5-4は、 $AMAX=10n$ である場合の、追加制約とされたファセットの構成比率を示したものである。図中、 Li は4.で述べた逐次持上げのステップのうち、 Li までで決定されたファセットの集合を示す。 i が大きくなるにつれて、複雑なファセットになると言えるから、明らかに、 n の増加とともに複雑なファセットの構成比率が高くなっている。それと共に、厳密解の求められるケース数が低下しているので、初等的ファセットは、変数の個数が大なる場合の重要なクラスのファセットをカバーしていないものと思われる。これは、求めたファセットが切除平面とならない場合（つまり、追加した Gomory の切除平面の枚数）が多くなることから窺える。

総合的に見て、ファセットと Gomory の小数法の切除平面は互に補完的であって、どちらか一方だけで済ませるのは得策とは言えないであろう。変数の個数が少ない場合には、ファセットと Gomory の切除平面が一致する場合も散見される。

最後に、初等的ファセットと Gomory の切除平面を比較すると、前者では係数・定数ともに、大きくとも2桁の数なのに対し、後者では時に、4桁にもなることがあるという、大きな違いが見られた事を指摘しておく。これが、ファセットを利用することによって計算精度の低下を抑えることができる理由であろう。

6. 結論と今後の課題

0-1 ナップサック問題の制約多面体の、最小被覆をもとにして求められる初等的ファセットが切除平面となるための条件を明らかにした。また、緩和問題の最適解において非整数値をとる変数の個数が1か2であれば、切除平面となる最小被覆不等式が存在することを示した。さらに、切除平面を与えやすい最小被覆の求め方および逐次持上げの手順を検討し、こうして得られる初等的ファセットを Gomory の小数法の切除平面のかわりに利用するアルゴリズムを構成した。

このアルゴリズムのプログラムを作成し計算実験を行った結果から、次の

ような事実が判明した。提案した新解法は Gomory の小数法よりもうまく 0-1 ナップサック問題を解く。これは生成した初等的ファセットが小数法の切除平面よりも深く切除することによる、とは考えにくい。むしろ、不等式の係数が小さいことによって、計算精度の低下が抑えられることによると考える方が自然であろう。一方、初等的ファセットの族は、変数の個数が大である場合の重要なクラスのファセットを含んでいないことが強く予想された。

本研究により、0-1 ナップサック問題の解法にファセットを応用する接近法が有効であることが明らかにされた。より一般的な 0-1 問題で Gomory の小数法が応用できる場合には、初等的ファセットを合せて利用するのが良いと言えよう。切除平面の生成には結局制約式集合の中の一本に注目するから、在来の切除平面法が適用できない場合であっても、初等的ファセットを利用することが可能であろう。

このような方向の研究には、すでに [4] がある。これは、ファセットを切除平面として利用し、もとの問題にこれを追加することによって、より緊密 (tight) な制約条件式集合を得、制約条件式集合が緊密であること等に着眼して改良を加えた B-B 法 (Branch-and-Bound 法) を実行する方法を提案したものである。報告された計算実験の結果はこの方法が極めて有望であることを示唆している。この方法は構造的には [3], [12] における対称巡回セールスマン問題に対するものとはほぼ同じである。しかし、そこでのナップサック多面体に対するファセットの持上げ方法が本稿のものと異っており、生成された追加不等式のうち何%が実際にファセットであったかは不明である、など、ファセットの応用という観点から見れば課題を残している。

さらに、本稿で指向した基礎研究の面でも多くの課題を残している。例えば、最小被覆の作成法や逐次持上げ手順の改良、Gomory の全整数法との結合の検討、問題の数値的型の変化とファセットの有効性の相関などがあげられる。

この方向での研究はまだ緒についたばかりであり、今後多くの試みがなさ

れるべきだと考える。集合被覆問題などは次の応用対象として手頃であらう。

終りに、本研究における計算実験は一部、北海道大学経済学部嶺野幸子助手に手伝っていただいた。記して謝意を表わしたい。尚、実験は北海道大学大型計算機センターを利用して行った。

参 考 文 献

- (1) E. Balas and E. Zemel, "Facets of the Knapsack Polytope from Minimal Covers," MSRR #352, GSIA, Carnegie-Mellon University (Dec. 1974). Also in *SIAM J. Appl. Math.* Vol. 34, No. 1 (1978), pp. 119-148.
- (2) E. Balas, "Facets of the Knapsack polytope," *Mathematical Programming*, Vol. 8, No. 2 (1975), pp. 146-164.
- (3) H. Crowder and M. W. Padberg, "Solving Large-scale Symmetric Travelling Salesman Problems to Optimality," *Management Science*, Vol. 26, No. 5 (1980), pp. 495-509.
- (4) H. Crowder, E. L. Johnson and M. W. Padberg, "Solving Large-scale Zero-one Linear Programming Problems," Research Report, RC 8888 (#38963), IBM Research Division (6, 19/1981).
- (5) A. M. Geoffrion and R. E. Marsten, "Integer Programming Algorithms: A Framework and State-of-the-Art Survey," *Management Science*, Vol. 18, No. 7 (1972), pp. 465-491.
- (6) P. L. Hammer, E. L. Johnson and U. N. Peled, "Facets for Regular 0-1 Polytopes," *Mathematical Programming*, Vol. 8, No. 2 (1975), pp. 179-206.
- (7) 今野 浩, "構造のアプローチ", オペレーションズ・リサーチ, Vol. 23, No. 12 (1978), pp. 780-707.
- (8) A. H. Land and S. Powell, "Fortran Codes for Mathematical Programming: Linear, Quadratic and Discrete," John-Wiley and Sons (1973).
- (9) F. Maffioli, "The Complexity of Combinatorial Optimization Algorithms and the Challenge of Heuristics," in N. Christofides, A. Mingozzi, P. Toth and C. Sandi (eds.), "Combinatorial Optimization," John Wiley and Sons (1979), pp. 107-130.
- (10) S. Martello and P. Toth, "The 0-1 Knapsack Problem," in N. Christofides 他 (eds.), "Combinatorial Optimization," John Wiley and Sons (1979), pp. 237-280.
- (11) 嶺野幸子, "Knapsack Polytope の Lifted Facet," 日本 OR 学会整数計画法

部会資料 (1. 13/1979).

- (12) M. W. Padberg and S. Hong, "On the Symmetric Travelling Salesman Problem: A Computational Study," *Mathematical Programming Study* 12 (1980, April), pp. 78-107.
- (13) U. E. Peled, "Properties of Facets of Binary Polytopes," in P. L. Hammer 他 (eds.), "Annals of Discrete Mathematics," North-Holland (1977), pp. 435-456.
- (14) 関口恭毅, "0-1 整数計画法のファセットについて," 北大「経済学研究」, Vol. 30, No. 1 (1980), pp. 65-81.
- (15) 関口恭毅, "初等的ファセットを用いる 0-1 ナップサック問題の切除平面法," 日本オペレーションズ・リサーチ学会秋季発表会アブストラクト集 (1980, 10), pp. 136-137.
- (16) 関口恭毅, "0-1 Knapsack 問題の Facet とその応用," Proceedings of the 1st Mathematical Symposium, Japan (Nov. 1980), pp. 65-74.
- (17) 鈴木久敏, 岩村寛三, "ナップサック問題および集合被覆 (分割) 問題," オペレーションズ・リサーチ, Vol. 24, No. 6 (1979), pp. 359-368.
- (18) H. A. Taha, "Integer Programming, Theory, Applications, and Computations," Academic Press (1975).
- (19) L. A. Wolsey, "Facets for a Linear Inequality in 0-1 Variables," *Mathematical Programming*, Vol. 8, No. 2 (1975), pp. 165-178.