



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	誘起異方性を考慮した繰返し塑性構成式に関する研究
Author(s)	佐々木, 克彦
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	甲第2607号
Issue Date	1989-03-25
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/32641
Type	doctoral thesis
File Information	2607.pdf



誘起異方性を考慮した繰返し
塑性構成式に関する研究

昭和 63年 12月

佐々木克彦

目次

	頁
主 要 記 号 一 覧	1
第 1 章 序 論	4
第 2 章 繰返し負荷時の応力－ひずみ関係	12
2・1 緒 言	12
2・2 実験装置および材料	14
2・2・1 試験材料	14
2・2・2 実験装置	18
2・3 実験条件	23
2・3・1 相当応力および相当ひずみの定義	23
2・3・2 降伏応力の定義と繰返し負荷の飽和安定条件	25
2・3・3 初期等方性の確認	27
2・4 比例繰返し負荷時の応力－ひずみ関係	31
2・4・1 一定ひずみ振幅比例繰返し負荷	31
2・4・2 変動ひずみ振幅比例繰返し負荷	38
2・5 非比例繰返し負荷時の応力－ひずみ関係	40
2・5・1 一定ひずみ振幅引張り・圧縮とねじりの繰返し	

	負荷を交互に行った場合	40
2・5・2	円サイクル負荷	45
2・5・3	ラチェット負荷	53
2・6	本章の結論	56
第3章	繰返し負荷時の降伏曲面	58
3・1	緒言	58
3・2	実験方法	60
3・3	比例繰返し負荷時の降伏曲面	65
3・4	非比例繰返し負荷時の降伏曲面	74
3・4・1	一定ひずみ振幅引張り・圧縮とねじりの繰返し	
	負荷を交互に行った場合	74
3・4・2	円サイクル負荷およびラチェット負荷の場合	85
3・5	本章の結論	89
第4章	繰返し塑性構成式	91
4・1	緒言	91
4・2	塑性構成式の基礎	93
4・3	負荷関数	95
4・3・1	負荷関数の定義および応力テンソルと異方性テ	
	ンソル係数の対称性	95

4・3・2	直交異方体の場合	98
4・3・3	回転対称の異方体の場合	100
4・4	塑性ひずみ増分ベクトルの垂直性に関する熱力学考察	104
4・5	塑性流れ則と降伏曲面の中心移動	110
4・5・1	塑性流れ則	110
4・5・2	降伏曲面の中心移動	113
4・6	Ramberg-Osgood則の適用	115
4・7	引張り・圧縮とねじりの組合わせ負荷への適用	119
4・8	本章の結論	122
第5章	繰返し塑性構成式によるシミュレーション	123
5・1	緒言	123
5・2	比例繰返し負荷への適用	125
5・2・1	材料定数の決定方法	125
5・2・2	材料定数のひずみ振幅依存性	128
5・3	材料定数の負荷方向依存性	135
5・3・1	実験方法	135
5・3・2	降伏曲面の中心から再負荷した場合	138
5・3・3	完全除荷後再負荷した場合	142
5・3・4	シミュレーション結果	149
5・4	非比例繰返し負荷への適用	156
5・5	本章の結論	169

第 6 章	總 括		171
-------	-----	-------	-----

参 考 文 献		176
---------	-------	-----

図 ・ 表 一 覧		184
-----------	-------	-----

謝 辞		188
-----	-------	-----

主 要 記 号 一 覧

－第2章－

E	: 縦弾性係数 (MPa)
G	: 横弾性係数 (MPa)
σ^{eq}	: 実験結果およびシミュレーション結果を図示する時に用いる 相当応力 (MPa)
$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$	: 各方向の応力 (MPa)
$\tau_{xy}, \tau_{yz},$ τ_{zx}	: 各方向のせん断応力 (MPa)
$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$	: 各方向のひずみ
$\gamma_{xy}, \gamma_{yz},$ γ_{zx}	: 各方向のせん断ひずみ
σ	: 軸応力
τ	: せん断応力
$\bar{\varepsilon}$	: 相当ひずみ
$\Delta \bar{\varepsilon}$	: ひずみ振幅

－第3章－

Y	: 軸方向の降伏応力
k	: せん断方向の降伏応力

－第4章－

f	: 負荷関数
$\bar{\sigma}$	: 相当応力
σ_{ij}	: 応力テンソル
σ_{ij}^c	: 降伏曲面の中心の応力テンソル
ε_{ij}^p	: 塑性ひずみテンソル
κ	: 加工硬化パラメータ

T	: 温度
W^P	: 塑性仕事
Λ	: 比例定数
C_{ijkl}	: 4 階異方性テンソル係数
Σ_{ij}	: 降伏曲面の中心からの応力テンソル ($\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c$) (MPa)
P	: 静水圧 (MPa)
H, F, G, L, M, N	: Hillの異方性パラメータ
$d\bar{\epsilon}^p$	: 相当塑性ひずみ増分
dW	: 仕事増分
F	: 単位体積当りの自由エネルギー
S	: 単位質量当りのエントロピー
χ_n	: 非弾性体内の微細構造の再配置を規定する内部変数
dW^R	: 可逆仕事増分
Z_n	: 熱力学的力
$\dot{\chi}_n$	: 内部変数 χ_n の変化割合
$\dot{\xi}$	: エントロピー生成速度
M_{ijkl}	: 定数
α_{ij}	: 定数
ϵ_{ij}^e	: ひずみの弾性成分
F^e	: 弾性部のポテンシャル関数
S^e	: 弾性部の単位体積当りのエントロピー
F^p	: 非弾性部のポテンシャル関数
S^p	: 非弾性部の単位体積当りのエントロピー
P	: ポテンシャル関数
$\dot{\epsilon}_{ij}^p$	: 塑性ひずみ速度
s_{ij}	: 偏差応力 (MPa)
s_{ij}^c	: 降伏曲面の中心の偏差応力 (MPa)
S_{ij}	: 降伏曲面の中心からの偏差応力 (MPa)
σ_m	: 平均応力
δ_{ij}	: クロネッカ・デルタ

$d\mu$	: Prager-Zieglerの移動則の比例定数
ε_t	: 単軸ひずみ
ε_t^c	: 降伏曲面の中心の単軸ひずみ
σ_t	: 単軸応力 (MPa)
σ_t^c	: 降伏曲面の中心の単軸応力 (MPa)
K	: Ramberg-Osgood則の定数
$\sigma_{o(n)}$	: n-1 回の負荷履歴を受けた後の500 $\mu\text{m/m}$ offsetひずみでの応力 (MPa)
$m(n)$	: n-1 回の負荷履歴を受けた後の硬化・軟化のパラメータ
$\sigma_{o(\infty)}$	: 安定時の500 $\mu\text{m/m}$ offsetひずみでの応力 (MPa)
$m(\infty)$	: 安定時の硬化・軟化のパラメータ
α, β, W_o, W_1	: 負荷履歴に依存する材料定数
$W^p_{(n-1)}$	: n-1 回の負荷履歴によって蓄積された塑性仕事
ε_o	: offsetひずみ
$\bar{\sigma}(\infty)$	: 繰返し安定時の相当応力 (MPa)
C_t, C_{ts}, C_s	: 異方性パラメータ
τ^c	: 降伏曲面の中心のせん断応力 (MPa)
ω	: 降伏曲面の傾き角度 ($^\circ$)

－第5章－

$\Delta\sigma_A$	: 繰返し安定時の応力とループ端A点 (図5・1) の応力との差 (MPa)
$\Delta\sigma_B$	: 繰返し安定時の応力とループ端B点 (図5・1) の応力との差 (MPa)

第1章 序 論

スペースシャトルに代表される宇宙機器や航空機、原子炉施設、リニアモーターカの鉄道施設など、工業技術はますます発展の一途をたどっている。これらの宇宙機器、航空機、原子力機器、ガスタービンなどは一方向の単純な負荷以外に、繰返し負荷や繰返し熱負荷を単独にあるいは同時に受けることから、繰返し負荷あるいは熱負荷による変形を考慮した設計を行わなければならない。すなわち、近年の計算機および有限要素法に代表される数値解析法のめざましい発展により、従来では困難であった複雑な問題の変形解析が高精度で実行可能になるにつれ、使用環境下における変形の基本則である材料の構成式に対して、さらに高精度のあるいは矛盾のないものが要求されるようになった。このような時代の要請から、より精度良く繰返し負荷や繰返し熱負荷を受ける材料の変形挙動を表示できる塑性構成式の研究が重要課題となっている。

粘性の影響を無視した材料の塑性変形挙動を定式化する研究は、St. VenantやTrescaの研究から1世紀以上も続けられており、80年程前からは、理論的、実験的研究が活発に行われてきている。例えば、等方性材料の古典塑性構成式としてSt. Venant-Levy-Misesの式、Prandtl-Reussの式、Henckyの式などがある。St. Venant-Levy-Misesの式、Prandtl-Reussの式はひずみ増分理論として、また、Henckyの式は全ひずみ理論と

して、よく知られている。しかし、上述の理論を負荷方向が突然変化する負荷や、繰返し負荷などを受けた材料の塑性変形挙動のように、ひずみ履歴（負荷履歴、変形履歴）の影響が顕著に見られる場合に拡張することは困難である。そこで、ひずみ履歴の影響を含む塑性構成式の確立の手段の一つとして、現在では塑性ポテンシャルによる方法が多くなされている。

従来、塑性変形に対するポテンシャル面としては、応力空間における、降伏曲面 (yield surface) 、負荷面 (loading surface) および限界面 (limit surface) などが考えられているが、概して、降伏曲面を塑性ポテンシャル面として用いる場合が多い。そこで、降伏曲面がひずみ履歴を受けることによりどのように変形するかを実験的に確かめ、その結果から、降伏曲面を定式化しようとする試みが盛んとなっている。

Phillips[1-5]らは、1100-0-Al試験片を用いた実験で、試験片に比例負荷や負荷方向が突然変化する非比例負荷、クリープ等による予ひずみを与え、その後の後続降伏曲面を測定し以下のことを示した。1)比例負荷により降伏曲面は、負荷方向に鋭く除荷方向に滑らないいわゆる“おむすび型”になる。2)負荷方向の降伏応力は減少するが、負荷方向と垂直な方向の降伏応力には変化が無い（交差効果が生じない）。この2つの結果からPhillips[2]らは、後続降伏曲面をいくつかに分割し、分割した部分をそれぞれだ円で近似することにより、結局数本のだ円の式を組合わせて後続降伏曲面が表示可能であることを示した。また、白鳥[6,7]らは、黄銅板を用い比例負荷による予ひずみを与え、後続降伏曲面のcorner、いわゆる“とんがり点”

について調べている。また、Yosimura[8] ら、Baltov[9] らの塑性変形に誘起される異方性により降伏曲面を記述する研究、田中[10]らの高温における繰返し負荷過程中的降伏曲面についての研究もある。最近になり、Shiratori[11] らの異方硬化塑性ポテンシャルを用いた研究、Eisenberg[12] らによる1100-0-Alが非比例負荷を受ける際の降伏曲面の変形挙動の研究や、Rees[13]による6階異方性テンソルを用いて降伏面のゆがみを正確に表示する研究等がある。他にも、Daneshi[14] ら、Stout[15] らの1100-0-Al試験片による実験、Stout [16]らによるSUS304材による実験、Helling[17-19]らによる1100-0-Al、真鍮、Al合金を用いた実験などがある。しかしながら、繰返し負荷中の降伏曲面の研究は、田中[10]らとLiu[20] ら以外にはなく、彼らも降伏曲面を定式化するまでには至っていない。

池上[21,22]、Hecker[23]らにより、降伏曲面の実験的研究に関する概説が述べられている。その中で降伏曲面の形状は、以下の2点に大きく影響されることを示している。1)降伏応力の定義の仕方。（降伏点が比例限よりどれだけ離れているか）2) ひずみ履歴による降伏曲面の移動を考慮し降伏曲面を測定するかどうか。すなわち、ひずみ履歴を与えた後に完全除荷後と部分除荷後のどちらで降伏曲面を測定するか。降伏曲面を実験により定め、その変形挙動を定式化する場合には、以上の2点に注意を払い一貫した条件で実験を進める必要がある。

負荷関数として塑性ポテンシャルを導入し、繰返し塑性構成式を構築した研究は数多く見られる[24-42,44-49]。例えばMroz[30,31] は降伏曲面を含む応力空間内の曲面群を塑性ポテ

ンシャルとして構成式を提案している。また、Ohno[27,28] は非硬化領域を考慮した構成式を提案している。Dafalias[25]らは、構成式に内部変数を考慮した負荷関数と境界面 (bounding surface) の概念を用いている。さらに、Krieg[32] は、Mrozのモデル[30,31] を基に限界面と降伏曲面の2つを塑性ポテンシャルとして扱うモデル、いわゆる2面モデルを提案している。この概念は後に、Lamba[33,34]ら、McDowell[35,36]、Chaboche[39,40] らによりそれぞれ拡張し用いられ、非比例繰返し負荷などに適用されている。石川[41,42] は降伏曲面の中心を考慮した負荷関数を用い、応力-ひずみ関係を降伏曲面の中心からRamberg-Osgood則[43]で表した構成式を提案し、比例繰返し負荷に適用している。Nouailhas[38] らは、4階異方性テンソル係数を用いた負荷関数を構成式に適用し非比例繰返し負荷をシミュレーションしている。さらに、田中[45-49] らも独自の繰返し負荷実験を行いそのデータを基にして、2面モデルを拡張した構成式を提案している。

塑性ポテンシャルを負荷関数として用いる構成式の他にも塑性構成式がいくつか提案されている[50-60]。Valanis[50-52] は負荷履歴を内部変数として用いた内部時間理論 (endchronic theory) を提案した。また、渡部[53,54] は、内部時間理論を改良し塑性異方硬化則を提案し、さらに、Wu[55]は、内部時間理論を種々のひずみ経路に適用した。また、他にも内部状態変数を用いたMiller[56]の塑性構成式と、それをラチェット効果へ応用した、香川[57]らの内部状態変数モデル等がある。さらに、徳田[59,60] らによる結晶モデルを用いた多結晶金属の塑

性挙動に関する研究もある。

繰返し塑性構成式を定式化する際に、次の3つの条件が要求されるであろう。

- 1) 材料の繰返し塑性変形挙動の特徴を精度よく記述できること。
- 2) 構成式で用いる材料定数が特定の実験結果から簡単に定められること。
- 3) 有眼要素法などによる構造物の数値解析に用い易いこと。

しかしながら、いままで紹介した研究の中で、この3点を全て満足する構成式は見あたらないようである。

1)～3)の条件を満足する繰返し塑性構成式を構築するには、実験的研究と理論的研究とを双方から進めていく必要がある。そこで本研究では、まず、繰返し負荷を受ける材料の塑性変形挙動の特徴点を実験により明らかにする。さらに、先に述べたように、塑性変形を受けた材料の降伏曲面に関する研究は数多くなされていながら、繰返し負荷を受けた材料の降伏曲面の実験的研究は、田中[10]らおよびLiu[20]ら以外にはないことから、繰返し負荷中の降伏曲面の変形挙動についても実験的に確かめる。実験には、繰返し負荷、繰返し熱負荷の受ける原子力機器や圧力容器、タービン等によく用いられているオーステナイト系ステンレス鋼SUS304材で製作した薄肉円管試験片を使用する。また、本研究では、機械部材が実際に受ける負荷、すなわち、比例繰返し負荷のみならず非比例繰返し負荷をも実現するために、試験片に引張り・圧縮とねじりの組合わせ負荷を与え実験を行う。ところで、降伏曲面を測定する場合には、降伏

応力の定義が重要であることは先に述べた。本研究では、繰返し負荷中の降伏曲面を、比例限にいちばん近く、しかも、測定精度が保証された、 $50\mu\text{m}/\text{m}$ の塑性ひずみの生ずる応力を降伏点と定義して、1つの降伏曲面を1本の試験片から測定する。

さらに本研究では、以上の実験から得られる結果を基に比例繰返し負荷のみならず非比例繰返し負荷をも記述できる繰返し塑性構成式を構築する。その特徴点として以下に示す3点が上げられる。

- 1) 降伏曲面の中心をPrager-Zieglerの移動効果則[61,62]から定める。
- 2) 塑性変形に誘起される異方性を考慮するために、塑性ポテンシャルとしての降伏曲面を4階異方性テンソル係数を用いた2次関数で表示する。
- 3) 材料の応力-ひずみ関係を全ての負荷経路について、降伏曲面の中心移動を考慮して修正したRamberg-Osgood則[43]により表示する。

なお、1)、3)を用いた繰返し構成式が、石川[41]によりすでに構築され、引張り・圧縮の繰返し負荷に対する適用性が検証されている[42]。

本研究では、以上のように構築した構成式の比例繰返し負荷、および、各種の非比例繰返し負荷への適用性について検討を行っている。まず、構成式により比例繰返し負荷のシミュレーションを行い、負荷履歴に依存する材料定数が、実験結果とシミュレーション結果の比較により、簡単に定まることを示す。ついで、繰返し負荷を受けた後の材料の後続負荷についても実験

により調べ、材料定数の負荷方向依存性を明らかにする。この種の実験はすでに行われているが[63-66]、いまだ材料定数の方向依存性と結び付けて行われた実験はない。さらに、非比例繰返し負荷、特に今までの繰返し塑性構成式では記述が困難であると言われている円サイクル負荷、ラチェット変形挙動についても提案した構成式によるシミュレーションを試みる。

以上のように本研究の目的は、繰返し負荷を受ける材料の塑性変形挙動を実験的に明らかにし、その変形挙動を記述できる繰返し塑性構成式を、有限要素法などによる構造物の数値解析にコンピュータプログラミングしやすい形で構築することである。

次に、本論文の構成を説明する。

本論文は6章からなる。

第1章は序論であり、塑性構成式に関するこれまでの研究を説明し、本研究の目的について述べている。

第2章は、繰返し負荷を受けた材料の塑性挙動を実験的に把握するために、オーステナイト系ステンレス鋼であるSUS304材を用いて繰返し負荷実験を行い、比例繰返し負荷、非比例繰返し負荷を受けた材料の特徴的な塑性変形挙動を明らかにしている。

第3章では、塑性ポテンシャルとして構成式で用いられる降伏曲面が、繰返し負荷中にどのような変形挙動をするかを、第2章で行った比例繰返し負荷および非比例繰返し負荷中の降伏曲面を測定することにより明らかにしている。また、測定した

結果から、降伏曲面の定式化を試みている。

第4章では、第2章、第3章から得られた実験結果を参考にして、繰返し塑性構成式の構築を行っている。塑性ポテンシャルとしての降伏曲面を、第3章で得られた降伏曲面の測定結果より、塑性変形により誘起される4階異方性テンソル係数とPrager-Zieglerの移動硬化則より定まる降伏曲面の中心移動を含む関数で表示する。さらに、繰返し負荷時の全負荷経路の応力-ひずみ関係を降伏曲面の中心移動を考慮して修正したRamberg-Osgood則で表示し、ひずみ増分ベクトルの降伏曲面への垂直性から、繰返し塑性構成式を提案している。

第5章では、第4章で構築した構成式による比例、非比例繰返し負荷へのシミュレーションを行い、提案した構成式の各種繰返し負荷への適用性について検討している。同時に、構成式で用いた材料定数の負荷方向依存性についても詳しく調べている。そして、従来の繰返し塑性構成式では記述が困難であった非比例繰返し負荷、特に円サイクル負荷、ラチェット変形挙動も本構成式でシミュレーション可能であることを明らかにしている。

第6章は、本研究の総括であり、本研究で得られた結論をまとめて示し、今後残された問題点について若干考察している。

第2章 繰返し負荷時の応力-ひずみ関係

2・1 緒 言

繰返し負荷を受ける材料の塑性変形挙動を精度よく記述できる構成式を定式化するには、まず、注意深く計画された系統的な実験から、繰返し負荷による材料の硬化の特徴や、ひずみ経路の違いが材料の硬化に与える影響などを、十分明らかにする必要がある。

繰返し負荷の実験的研究は近年、実験装置や測定機器の発達により単軸の繰返し負荷のみならず、薄肉円管試験片を用いた引張り・圧縮とねじり、あるいは、内圧の組合わせによる多軸試験も盛んに行われている。例えば、田中らは一連の研究[45-49]で、SUS316材に比例繰返し負荷、非比例繰返し負荷を与え、繰返し負荷を受けた材料の特徴的な塑性変形挙動を示している。また、Krempf[37,68]らもSUS304材を用いて単軸の繰返し負荷、サイクリック・クリープ、多軸の繰返し負荷実験を行い、材料の塑性変形挙動のひずみ速度依存性について調べている。また、最近になって村上[70,71]らは、SUS316材を用い、多軸繰返し負荷の温度変化の影響について調べている。また、Ohno[28]らもSUS304材を用いて同様の実験を行っている。しかし、いずれの研究も複雑な実験を行ってはいるものの、塑性構成式を構築

するための基礎的資料として十分に活用されているとは言えない。

本章ではまず、本研究で用いた実験装置、および、実験方法について詳しく説明する。次に、オーステナイト系ステンレス鋼 SUS304 材を用い比例繰返し負荷、非比例繰返し負荷実験を行い、その特徴的な塑性変形挙動を明らかにする。なお、比例繰返し負荷として一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷、一定ひずみ振幅ねじりの繰返し負荷、応力比が一定の引張り・圧縮とねじりの組合わせ負荷を行った。また、より一般的な負荷を想定した非比例繰返し負荷として、一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷とねじりの繰返し負荷を交互に行う負荷、円サイクル負荷、ラチェット変形挙動を生じる負荷を行った。

2・2 実験装置および材料

2・2・1 試験材料

本研究で使用した試験材料は、繰返し負荷や繰返し熱負荷などを受ける原子力機器、圧力容器、タービンなどで使用されている、オーステナイト系ステンレス鋼 SUS304 材である。

オーステナイト系ステンレス鋼は、Cr 添加による不働態化促進効果と、Ni 添加による鉄の活性域における腐食速度減少効果を巧みに組合わせた耐食合金鋼であり、多くの腐食環境において優れた耐食性を示す[72]。また、耐食性と共に加工性、成形性、溶接性にも優れ、各種の化学装置、熱交換器、自動車部品、原子力関係、発電所関係など広範囲に使用されている。

本研究では、供試材として外径 32mm、厚さ 6mm の SUS304 鋼の引抜き円管（鶴見鋼管製）を用いた。供試材は、JIS G3459 に準じた製品であり、応力腐食割れを防止するための固溶化処理が 1040℃ で成されている。供試材の化学成分を表 2・1 に示す。試験片をこの供試材から、図 2・1 に示すように外径 23mm、内径 20mm、ゲージ長さ 50mm に精密に加工した。また、加工された試験片に、切削加工時の残留応力を取り除くために、380℃ で 180 分間保持後空冷の低温応力除去熱処理を施した。このように、加工、熱処理された試験片を初期材として本実験に用いた。

試験片の縦弾性係数と横弾性係数を数本の試験片を用いて測定した結果、その平均値として以下の値を得た。

縦弾性係数 $E = 198 \text{ GPa}$ 、横弾性係数 $G = 74 \text{ GPa}$ (2-1)

なお、縦弾性係数、横弾性係数の試験片によるばらつきは5%以内であった。

表 2・1 供試材の化学成分 (wt%)

C	Si	Mn	P	S	Ni	Cr
0.06	0.51	1.06	0.028	0.012	8.81	18.38

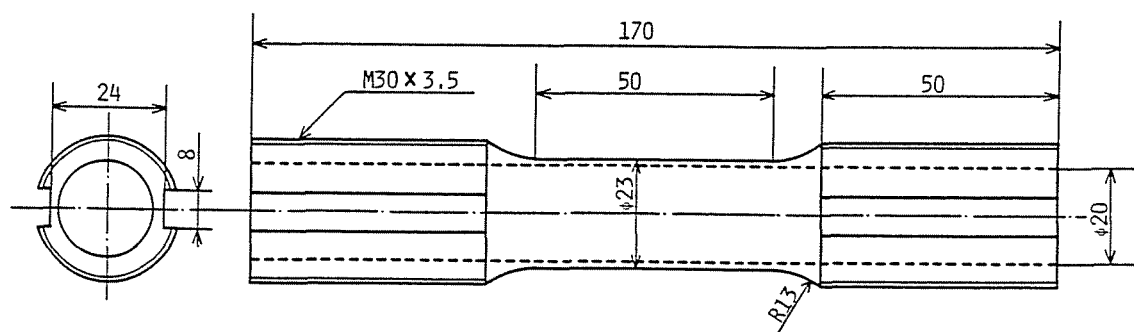


図 2・1 試験片形状

2.2.2 実験装置

繰返し負荷実験や降伏曲面の測定を行う場合、その実験結果に対する信頼性は、試験機や測定装置の精度に依存する度合いが大きい。そのため、試験機や測定装置が、その信頼に答えられるだけの性能を有していなければならない、試験機の試作に関する論文も見られる[73,74]。

本研究では、引張り・圧縮とねじりの組合わせ負荷が可能である本来手動の組合せ応力試験機（三精工業製）にサーボモータを備え付け、パーソナルコンピュータでサーボモータを制御することにより、全ひずみ制御、塑性ひずみ制御の実験が高精度で行える試験機を試作し使用した。

試験機の外観を図2.2に示す。試験機本体は横型であり、引張り・圧縮の最大荷重は、 $\pm 98\text{KN}(10\text{t})$ 、ねじりの最大トルクは、 $\pm 490\text{N}\cdot\text{m}(50\text{Kg}\cdot\text{m})$ である。軸方向、ねじり方向の各ひずみ成分は、試験片中央部側面に対称に二枚接着したゲージ長さ 2mm の三軸ロゼットゲージ（共和電業製 KFC-2-D17-16）によって検出した。また、軸力、トルクは、それぞれのロードセルによって検出した。

以上のデータの収集およびひずみ制御の実験は、図2.3に示すブロック線図に従って行った。まず、ロゼットゲージやロードセルにより検出されたひずみおよび軸力、トルクの信号は、ストレインアンプ、ロードアンプ（共和電業製 DPM-601B）によりそれぞれ増幅され、分解能12ビットのA/Dコンバータ（I・Oデータ機器製 PI0-9035）を介し、パーソナルコンピュータ

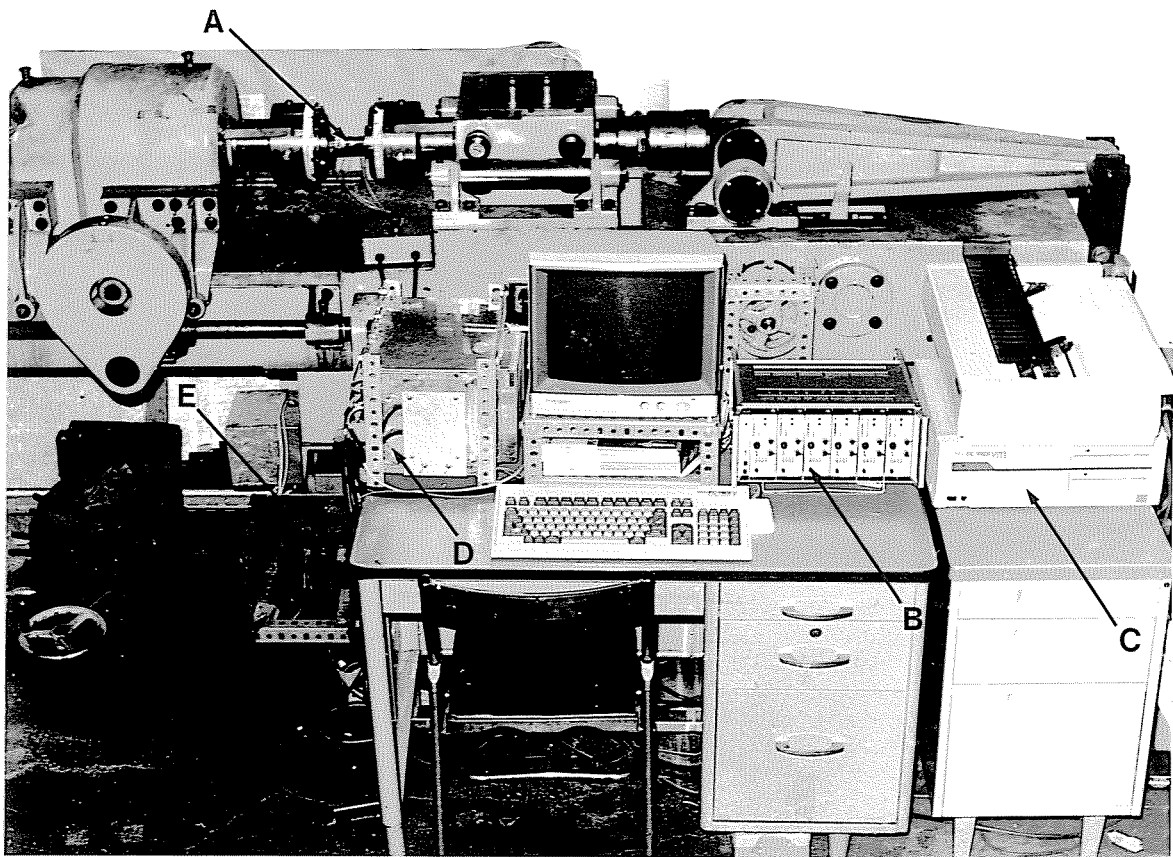
(日本電気製 PC-9801vm2) にリアルタイムに取り込まれる。取り込まれたデータから、応力とひずみの各成分が瞬時に換算される。コンピュータは、この換算された値とあらかじめ設定してある各応力と各ひずみ成分の目標値とを比較し、目標値に達するように負荷方向と負荷速度を指示する信号を D/Aコンバータ (I・Oデータ機器製 PI0-9045) を介し、引張り・圧縮とねじりの負荷を担当するそれぞれのサーボモータドライバ (東芝製 RAD12-1003) に送る。ドライバはその指示に従い、サーボモータ (東芝製 RA30M-00075) を駆動させる。

得られた応力、ひずみの各データは、実験終了後速やかにフロッピディスクに保存される。必要な応力-ひずみ曲線は、パーソナルプロッタ (グラフテック製 FP5301) を用いて作図した。

本試験機で行った実験は、全てひずみ速度が $1.5 \times 10^{-5} \sim 3.0 \times 10^{-5}$ の範囲内で行った。この範囲内でひずみ速度が実験結果に与える影響は無いことをあらかじめ確認している。

なお、本実験で用いたひずみゲージの室温におけるひずみ限界および室温における疲労寿命は、それぞれ 2.8%、 4.5×10^6 回であり、いずれの値も本実験の実験条件範囲内である。また、引張り・圧縮とねじりの負荷を同時に行った場合、その負荷によるひずみゲージの変形が、ひずみ測定値へ及ぼす影響は以下の通りである。例えば、材料を $10^4 \mu\text{m}/\text{m}$ (1%) だけ引張ったまま、同じ相当ひずみだけねじった場合に出力されるせん断方向のひずみ量と、引っ張らずにねじった場合に出力されるせん断方向のひずみ量の差は、約 $1 \mu\text{m}/\text{m}$ である。この値は、実験

結果に対して影響を及ぼすような値ではない。これらのことから、本実験にひずみゲージを使用することの妥当性が保証されている。



A; SPECIMEN

B; AMPLIFIER

C; PERSONAL COMPUTER

D; SERVO-MOTOR DRIVER

E; SERVO-MOTOR

図 2・2 試験機外観

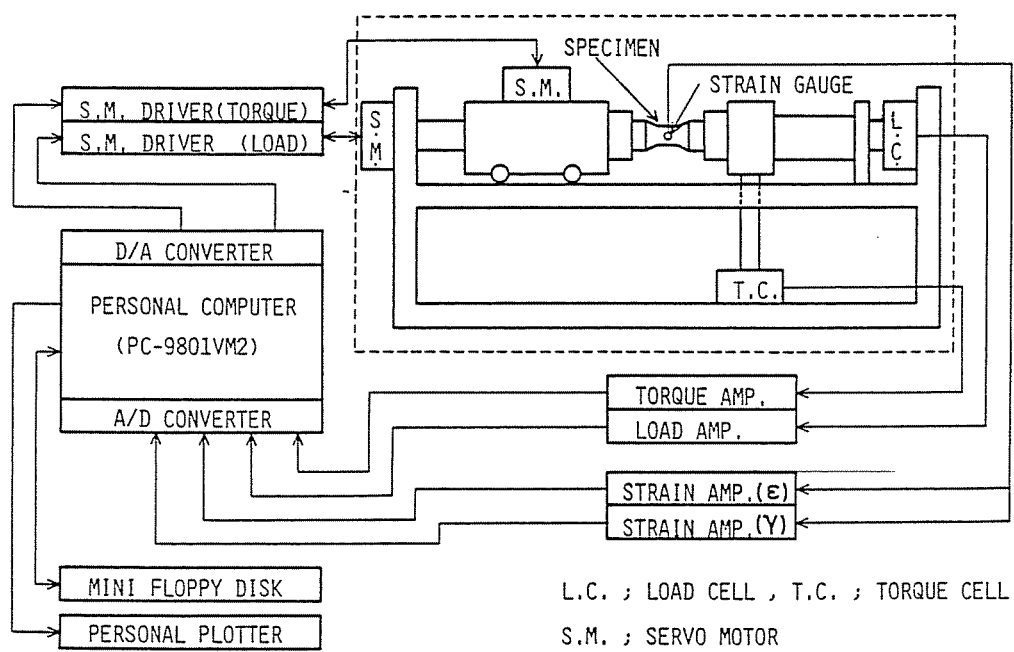


図 2・3 試験機の模式図とブロック線図

2・3 実験条件

2・3・1 相当応力および相当ひずみの定義

引張り・圧縮とねじりの組合わせ負荷で、組合わせ状態の異なる負荷の応力－ひずみ関係を比較するためには、相当応力－相当ひずみ表示する必要がある。本研究では、実験あるいは計算から得られた軸方向とせん断方向の応力、ひずみの各成分から相当応力と相当ひずみをそれぞれ以下のように定義する。

i) 相当応力の定義

ミーゼス材の相当応力は次式で表示できる。

$$\sigma^{\text{eq}} = \left[\frac{1}{2} \{ (\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2 + (\sigma_z - \sigma_x)^2 + 6\tau_{xy}^2 + 6\tau_{yz}^2 + 6\tau_{zx}^2 \} \right]^{1/2} \dots\dots\dots(2-2)$$

ここで、 σ_x 、 σ_y 、 σ_z 、 τ_{xy} 、 τ_{yz} 、 τ_{zx} はそれぞれ、各方向の応力とせん断応力である。本研究では、引張り・圧縮とねじりの組合わせ負荷の場合についてのみ考えているので、 $\sigma_y = \sigma_z = \tau_{yz} = \tau_{zx} = 0$ として式(2-1)の代わりに次式を用いた。

$$\sigma^{\text{eq}} = (\sigma_x^2 + 3\tau_{xy}^2)^{1/2} \dots\dots\dots(2-3)$$

ii) 相当ひずみの定義

繰返し負荷実験において、弾性域を含めた相当ひずみ振幅を想定するために、相当塑性ひずみの定義を弾性域まで拡張して

定義した。すなわち、弾性域、塑性域を問わず体積一定（ポアソン比0.5）と仮定し、ミーゼス材の相当ひずみを次式で表示する。

$$\bar{\varepsilon} = \left[\frac{2}{9} \{ (\varepsilon_x - \varepsilon_y)^2 + (\varepsilon_y - \varepsilon_z)^2 + (\varepsilon_z - \varepsilon_x)^2 + \frac{3}{2} (\gamma_{xy}^2 + \gamma_{yz}^2 + \gamma_{zx}^2) \} \right]^{1/2} \dots\dots\dots (2-4)$$

ここで、 ε_x 、 ε_y 、 ε_z 、 γ_{xy} 、 γ_{yz} 、 γ_{zx} はそれぞれ、各方向のひずみとせん断ひずみである。なお、本研究では、引張り・圧縮とねじりの組合わせ負荷の場合についてのみ考えているので、 $\varepsilon_y = \varepsilon_z = -0.5\varepsilon_x$ 、 $\gamma_{yz} = \gamma_{zx} = 0$ として式(2-4)の代わりに次式を用いた。

$$\bar{\varepsilon} = (\varepsilon_x^2 + \gamma_{xy}^2/3)^{1/2} \dots\dots\dots (2-5)$$

ところで、純粋ねじりを相当応力－相当ひずみ表示する時に、弾性域でポアソン比を0.5を用い、式(2-2)、式(2-4)から相当応力、相当ひずみを求めた場合と、実験結果より求めたヤング率198GPa、横弾性係数73.5GPaより算出したポアソン比0.35を用いて相当応力、相当ひずみを求めた場合の弾性限界（降伏応力）でのひずみはそれぞれ747 $\mu\text{m}/\text{m}$ 、830 $\mu\text{m}/\text{m}$ であり、その差は83 $\mu\text{m}/\text{m}$ であった。この差は、本研究で行った最小の相当ひずみ振幅5000 $\mu\text{m}/\text{m}$ （0.5%）に対して2%程の誤差と十分小さく、本研究に本質的な影響を及ぼすほどの値ではない。

2・3・2 降伏応力の定義と繰返し負荷時の飽和安定条件

i) 降伏応力の定義

降伏曲面の形状は、降伏応力の定義の仕方により大きく異なることがよく知られている[21-23]。例えば、比例限近くに降伏点をとると移動硬化則に従い、比例限から遠くに降伏応力をとると等方硬化則に従うと言われている。理想的には、比例限を降伏応力とすべきであろう。しかしながら、比例限を見つけることは、ひずみ測定の精度上、大変困難でありほとんど不可能である。そのため、その研究独自の方法で降伏応力を定義し、降伏曲面を定めている。例えば、Phillips[1-5]らは、後方外挿法を用いて約 $3 \mu\text{m/m}$ の相当塑性ひずみを生じたときの応力を降伏応力と定義している。また、田中[10]らは $30 \mu\text{m/m}$ の相当塑性ひずみの生じた応力を降伏応力と定義している。田中らの降伏応力の定義の仕方は offset ひずみ法であり、この方法を用いて降伏応力を定義している研究例が多い。

offset ひずみ法を用いる場合に offset ひずみを約 $200 \mu\text{m/m}$ 以上にとり降伏応力を定義してしまうと、降伏応力に達した時点ですでにかなりの塑性変形を生じている。そのため、応力平面上で1つの降伏点を定めるのに1本の試験片が必要であり、降伏曲面の形状を定めるために多くの試験片が必要となる。その上、試験片の性質のばらつきによる実験結果への影響も考えられる。しかし、offset ひずみを $200 \mu\text{m/m}$ 以下の小さいひずみで降伏応力を定義すると、その降伏応力に達してもほとんど塑性変形を生じていないため、1本の試験片で1つの降伏曲面の形

状を定めることが可能になり、また、試験片のばらつきによる影響もない。このことから、offsetひずみを $200\ \mu\text{m}/\text{m}$ 以下に設定し、降伏曲面を測定している研究がほとんどである[21-23]。そこで、本研究では、試験機と測定装置の性能から精度が保証される中で最も比例限に近かった、 $50\ \mu\text{m}/\text{m}$ の相当塑性ひずみの生じる応力を降伏応力と定義して降伏曲面を測定した。

ii) 繰返し負荷時の飽和安定条件

繰返し負荷実験において、応力－ひずみ関係の飽和安定の条件を以下のようにした。すなわち、繰返し負荷中に応力－ひずみ関係のループ端応力の差が $5\ \text{MPa}$ 以下になった時にその応力－ひずみ関係が飽和安定したと見なした。

2・3・3 初期等方性の確認

繰返し負荷実験を行う前の試験片、すなわち初期材が、初期等方性を保っていることをまず初めに確認した。本研究では、巨視的観点から、以下の2点を満たしたとき、試験片が初期等方性を保っていると判断した。(1) 相当応力－相当ひずみ曲線が負荷方向にかかわらず同じ曲線で表せること。つまり、初期材に負荷方向依存性が無いこと。その結果として、(2) 初期降伏曲面が von Mises の降伏条件式で表せること。

i) 図2・4に3種類の負荷経路、すなわち単純引張り、単純ねじり、および応力比 $\tau/\sigma = 1$ の比例負荷により得られた相当応力－相当ひずみ関係を示す。図2・4から明らかに3種類の負荷経路は、1本の相当応力－相当ひずみ曲線で表せ、(1)の条件を満足していることが分かる。

ii) 初期降伏曲面は以下のように定めた。原点から $\tau/\sigma =$ 一定の比例負荷を行い、 $50\mu\text{m}/\text{m}$ の相当塑性ひずみが生じた時の応力を降伏応力と定めた後、直ちに原点に戻す。以下、同様に原点から放射線状に比例負荷を行い、10～12点ほどの降伏点を定めた。図2・5はこのようにして定められた初期降伏曲面であり、図中の○印は実験点を示す。図2・5より、実線で示す Mises の降伏条件が本実験結果をよく表していることがわかる。すなわち、初期材は(2)の条件を満たしていることが明らかである。

i)、ii)の結果から、本実験に初期材として用いた試験片が初期等方性を保っていることが確認された。

なお、初期材の初期降伏応力はii)の結果より、165MPaであった。

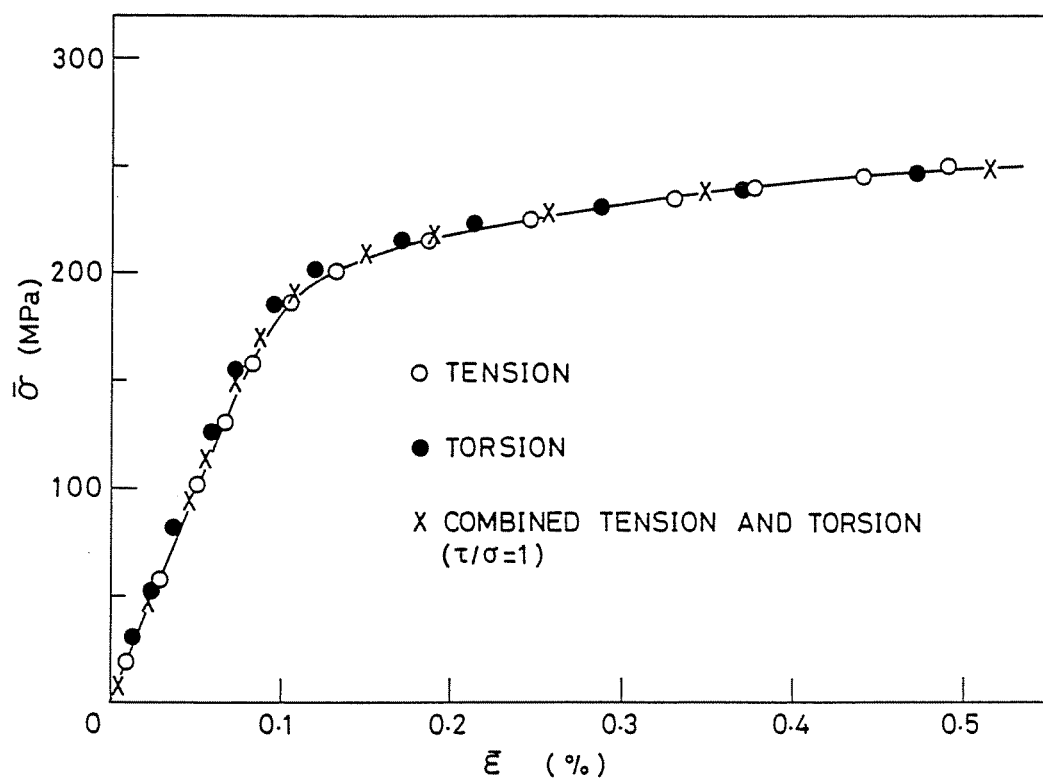


図 2・4 3 種類の負荷経路での応力－ひずみ関係

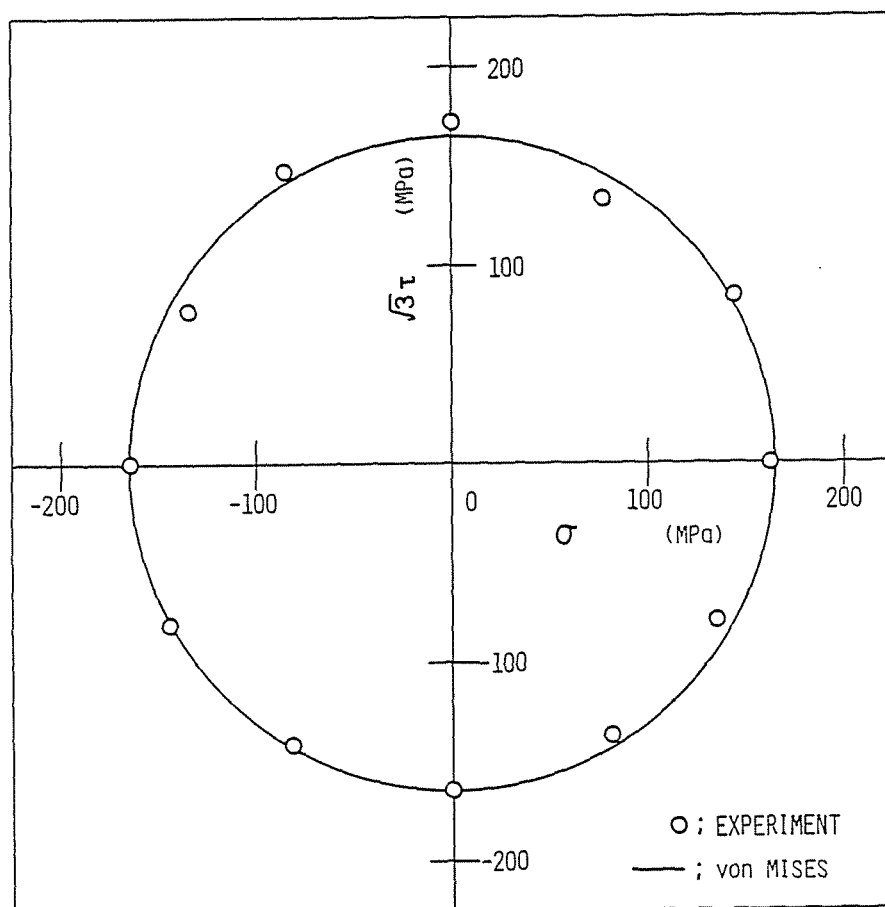


图 2·5 初期降伏曲面

2・4 比例繰返し負荷時の応力－ひずみ関係

2・4・1 一定ひずみ振幅比例繰返し負荷

図2・6 は一定ひずみ振幅 $\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ で引張り・圧縮の繰返し負荷を行った比例繰返し負荷時の応力－ひずみ関係である。すなわち、初期材に 0.5% の予ひずみを与えた後に 1% の繰返しひずみを応力－ひずみ関係が飽和安定するまで与えた時の実験結果である。なお、予ひずみを与えた状態を0サイクル、その後に繰返しひずみを与えるに従って1サイクル、2サイクル、
・・・と呼ぶこととする。図2・6 より明らかなように、材料は繰返し負荷を受けることにより加工硬化する。しかし、その硬化量はサイクルが進むに従い減少し、3サイクルでほとんど硬化しなくなりいわゆる飽和安定する。

図2・6 は引張り・圧縮方向に繰返し負荷を行ったときの結果であるが、ねじりの繰返し負荷の場合、応力比 $(\sqrt{3} \tau / \sigma)$ が一定の繰返し負荷の場合についても調べた。その結果を、図2・7 に示す。図2・7 で○、●、×はそれぞれ、引張り・圧縮、ねじり、応力比 $\sqrt{3} \tau / \sigma = 1$ の繰返し負荷を示し、実線は、引張り・圧縮の繰返し負荷時の応力－ひずみ曲線である。なお、いずれもひずみ振幅が 1% の時の結果である。図2・7 には安定時ループのみを示したが、負荷経路によらず1本の相当応力－相当ひずみ曲線で表示できた。すなわち、比例繰返し負荷の場合には、負荷の方向の影響を受けないことが図2・7 より明かであ

る。

ひずみ振幅の違いによる硬化のようすを調べるために、一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷実験をひずみ振幅0.5%、1.5%、2%についても行った。その結果を図2・8～図2・10に示す。ひずみ振幅が大きくなるにつれ硬化量が大きくなり、ひずみ振幅0.5%では2サイクル、1.5%では5サイクル、2%では5サイクルでそれぞれ硬化が安定している。ひずみ振幅1.5%と2%では同じサイクルで安定しているが、ひずみ振幅が大きくなるにつれて、安定するまでに多くのサイクルを要することが図2・8～図2・10より分かる。すなわち、繰返し負荷による材料のひずみ硬化挙動は、ひずみ振幅に依存することが明らかである。

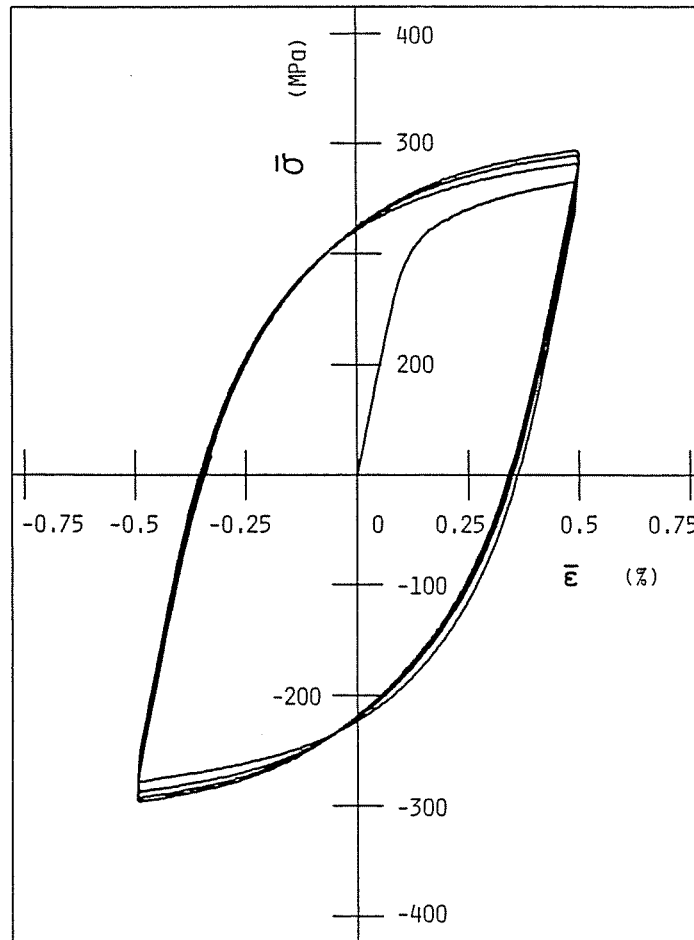


図 2・6 一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷

($\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ 、実験)

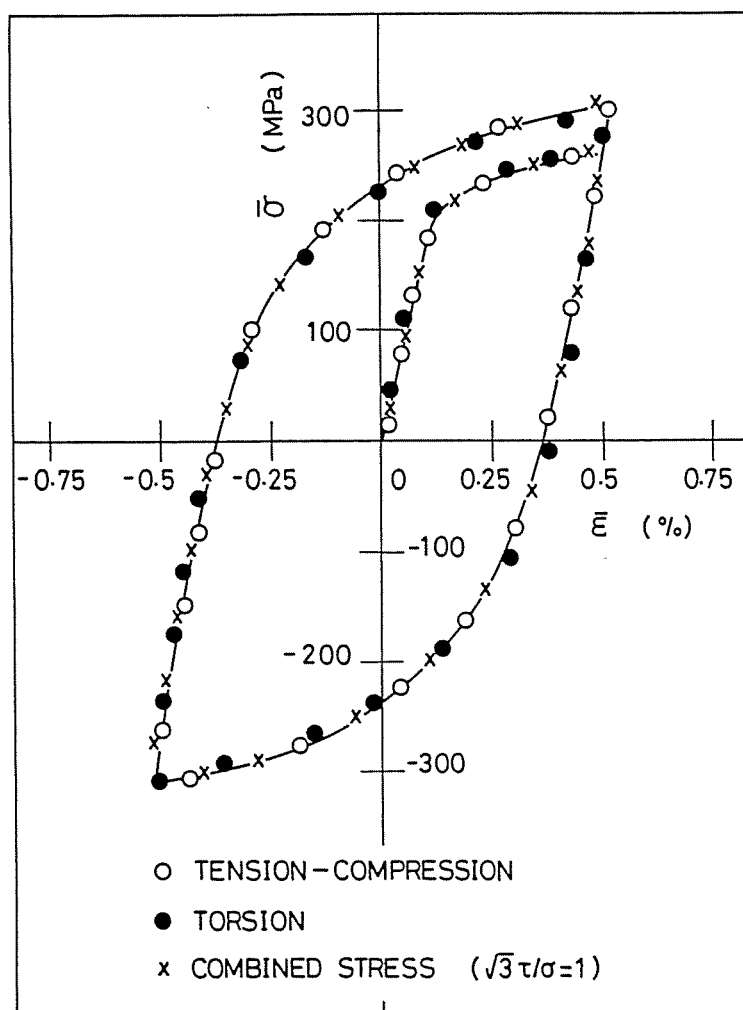


図 2・7 3 種類の負荷経路での一定ひずみ振幅繰返し負荷
($\Delta \bar{\epsilon} = 1 \%$ 、実験)

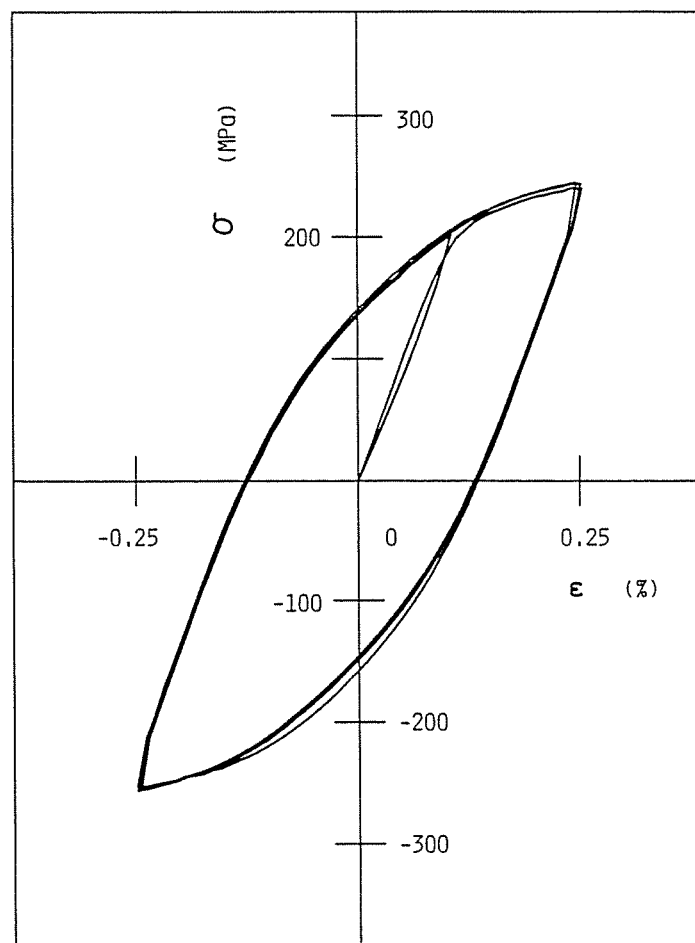


図 2・8 一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷
($\Delta \bar{\epsilon} = 0.5\%$ 、実験)

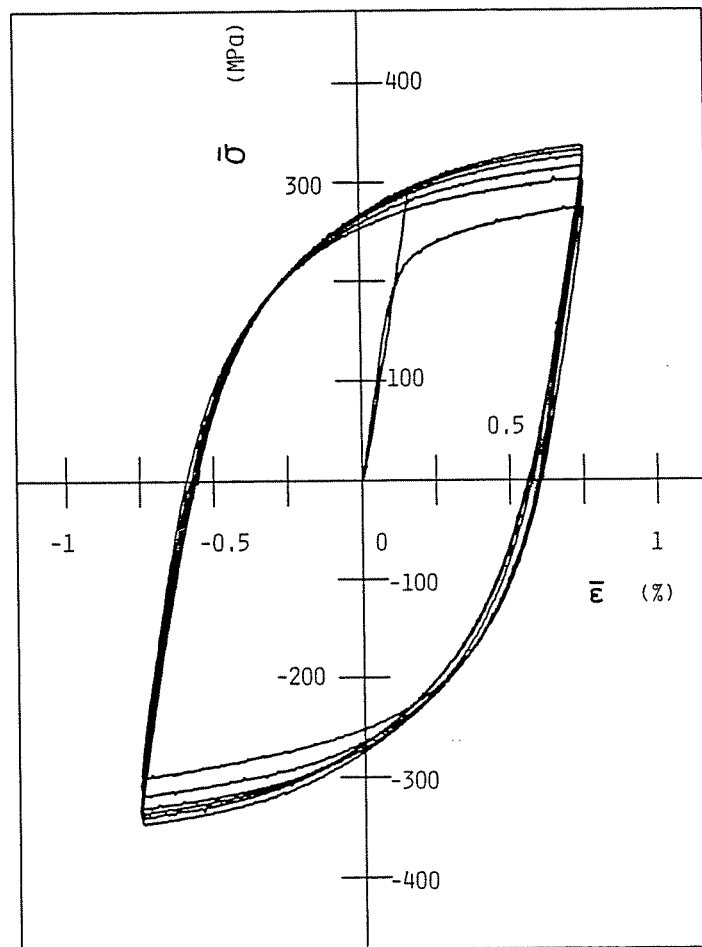


図 2・9 一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷
($\Delta \bar{\epsilon} = 1.5\%$ 、実験)

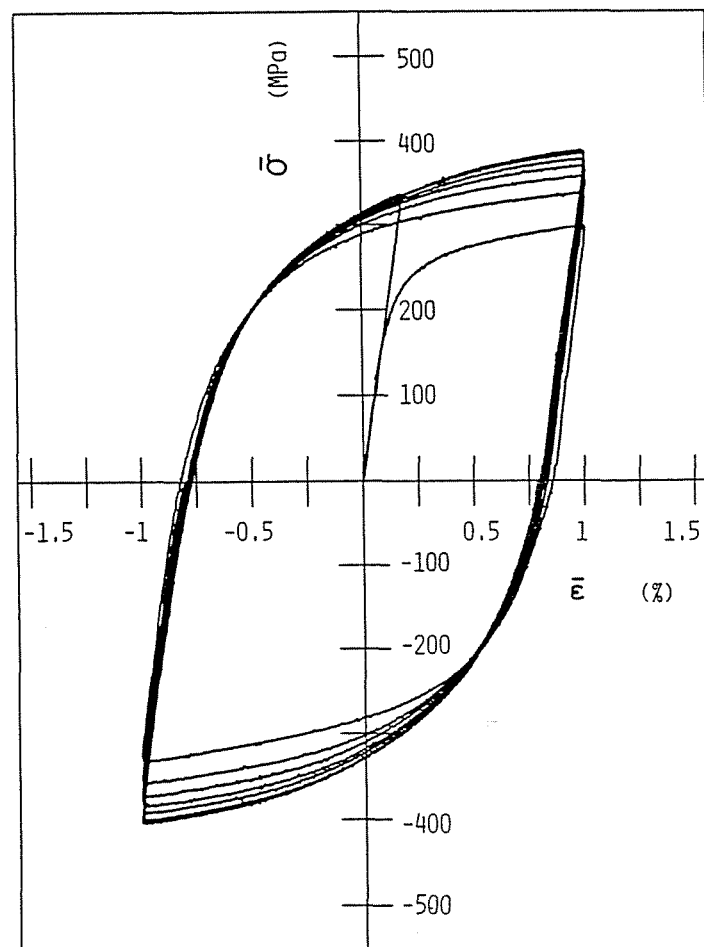


図 2・10 一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷

($\Delta \bar{\epsilon} = 2 \%$ 、実験)

2・4・2 変動ひずみ振幅比例繰返し負荷

図2・11は変動ひずみ振幅繰返し負荷実験の結果を示す。すなわち、ひずみ振幅 $\Delta \bar{\epsilon} = 0.9\%$ で引張り・圧縮の繰返し負荷を受け応力－ひずみ関係が安定した後、ひずみ振幅を $\Delta \bar{\epsilon} = 1.6\%$ に増加し、応力－ひずみ曲線が再度安定してから、ひずみ振幅を $\Delta \bar{\epsilon} = 0.9\%$ に減少し再度安定するまで繰返し負荷を行った時の実験結果である。それぞれの変動段階における応力－ひずみ曲線を実線、一点鎖線、破線で示してある。図2・11から明らかなように、ひずみ振幅を 1.6% へ増加した場合には、ひずみ振幅 0.9% ですでに硬化が安定しているにも関わらず、再度硬化してから安定しており、その安定時のループは、ひずみ振幅 1.6% 単独で初めから繰返し負荷を行った時の安定時ループと一致する。つまり、大きなひずみ振幅（ 1.6% ）では、それまでに受けた小さなひずみ振幅（ 0.9% ）による負荷履歴の影響を受けない。しかし、ひずみ振幅を 1.6% から 0.9% へと減少した場合には、やや軟化した後直ちに安定するが、ひずみ振幅 0.9% 単独で初めから繰返し負荷をした場合のループとはまったく異なるループになる。つまり、ひずみ振幅を減少する場合、小さなひずみ振幅（ 0.9% ）では、それまでに受けた大きなひずみ振幅（ 1.6% ）による負荷履歴の影響を受けることが分かる。すなわち、一定ひずみ振幅比例繰返し負荷の繰返し硬化挙動は、現段階までに受けたひずみ振幅（ひずみ履歴）の中で最も大きなひずみ振幅に依存した挙動をすることが図2・11より分かる。

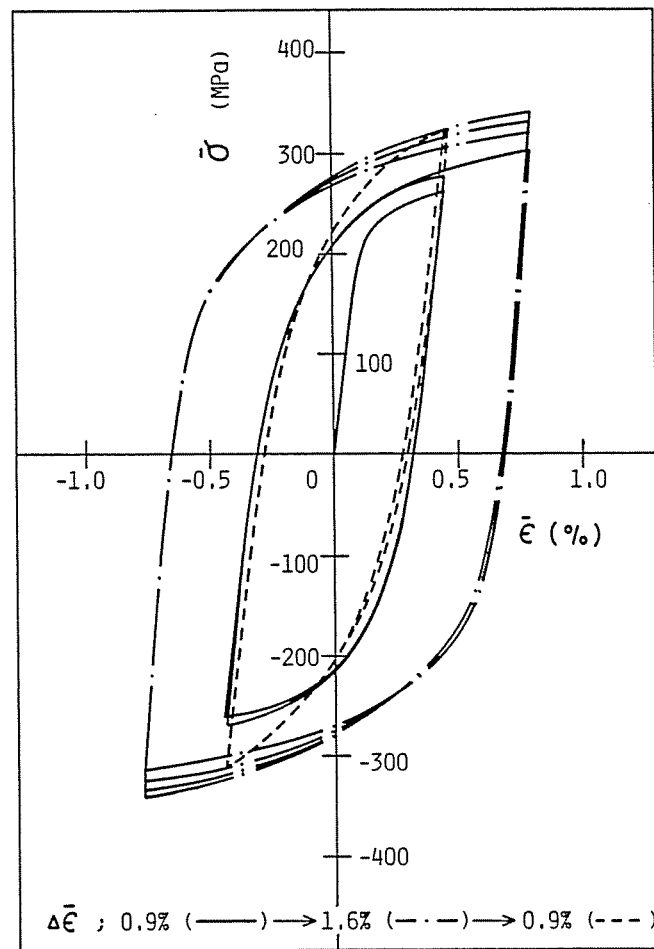


図 2・11 変動ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷
 ($\Delta \bar{\epsilon} = 0.9\% \rightarrow 1.6\% \rightarrow 0.9\%$ 、実験)

2・5 非比例繰返し負荷時の応力－ひずみ関係

2・5・1 一定ひずみ振幅引張り・圧縮とねじりの繰返し負荷を交互に行った場合

非比例繰返し負荷の最も簡単な例として、一定ひずみ振幅でねじりの繰返し負荷を行い硬化安定後、同じ相当ひずみ振幅で引張り・圧縮の繰返し負荷を硬化安定するまで行う、引張り・圧縮とねじりの位相外（out-phase）繰返し負荷を行った。図2・12にひずみ振幅 $\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ で負荷した時の実験結果を示す。すなわち、ひずみ振幅 $\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ でねじりの繰返し負荷を行った後、応力だけ0にもどす（図2・12のA点まで完全除荷）。その後、ひずみ振幅 $\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ で引張り・圧縮の繰返し負荷を行ったときの実験結果である。図2・12で実線は、初めに行ったねじりの繰返し負荷を示し、一点鎖線はその後に行った引張り・圧縮の繰返し負荷を示す。図2・12より明らかなように、ねじりの繰返し負荷で安定したにもかかわらず引張り・圧縮の繰返し負荷により再び硬化し、その硬化量は初めのねじりの繰返し負荷に比べて著しく大きい。このように硬化量が大きくなった理由としては、ねじりの繰返し負荷により異方性が発達したためと考えられる。なお、以後初期材に最初に与える負荷の方向を第1経路（1st path）、その後、負荷方向が変化するたびに第2経路（2nd path）、第3経路（3rd path）、・・・と呼ぶこととする。

次に、第3経路以降の硬化のようすを調べるために、図2・13に示すような実験を行った。すなわち、まず、初期材にひずみ振幅1%の引張り・圧縮の繰返し負荷を与える。応力-ひずみ関係が飽和安定後、完全除荷の状態で塑性ひずみが0になるように制御し、応力0、残留ひずみ0の状態、つまり、原点（図2・13のA点）に戻す。その後、負荷経路をねじり方向に変え、同じ相当ひずみ振幅で繰返し負荷を与える。再び、応力-ひずみ関係が飽和安定後、原点に戻す。以下同様に引張り・圧縮の繰返し負荷、ねじりの繰返し負荷を交互に繰返す。以上の位相外繰返し負荷を、負荷経路の変化による硬化が無くなるまで行った時の実験結果が図2・13である。図2・14は、図2・13の繰返し負荷における硬化のようすを表した図である。図2・14で、縦軸は、応力振幅の1/2を、横軸は、累積ひずみを示す。図2・14より明らかなように、第2経路以降の負荷においても、負荷経路を変化させるごとに交差硬化を生じている。しかし、その硬化量は、次第に減少し、第8経路以降はほとんど硬化を生じていない。これは、1%のひずみ振幅において、90°の位相変化による異方性の発達が第8経路で飽和状態になったためと考えられる。

以上示したように、非比例繰返し負荷による材料の硬化挙動は、比例繰返し負荷の硬化挙動とはまったく異なることが明らかである。

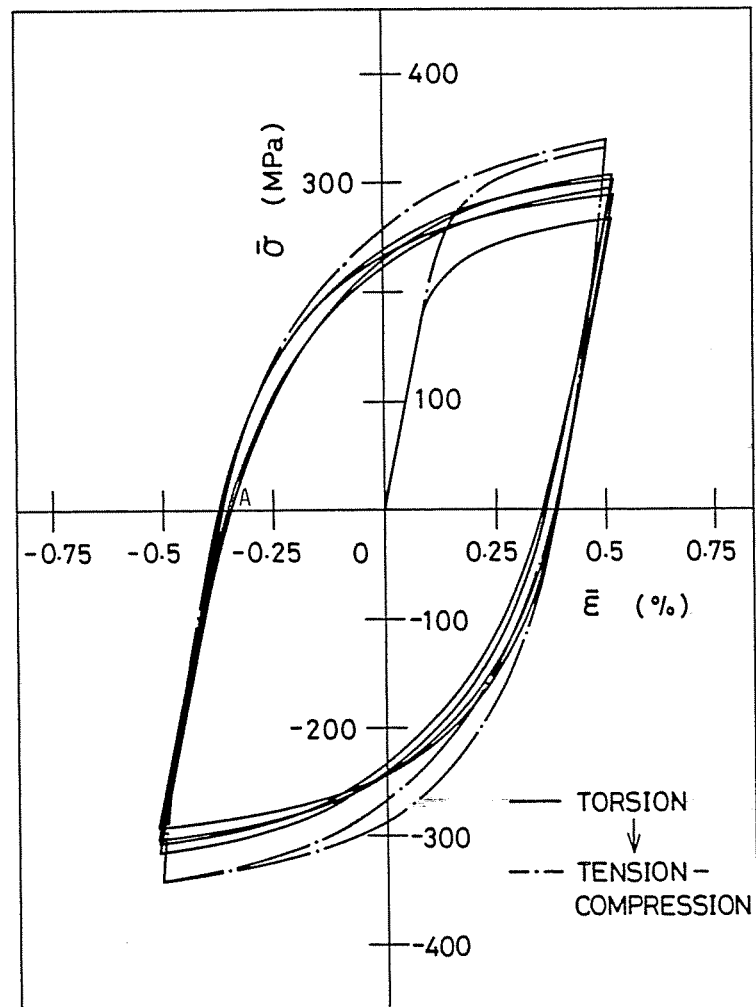


図2・12 一定ひずみ振幅ねじりの繰返し負荷と引張り・圧縮の繰返し負荷を交互に行った場合 ($\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ 、実験)

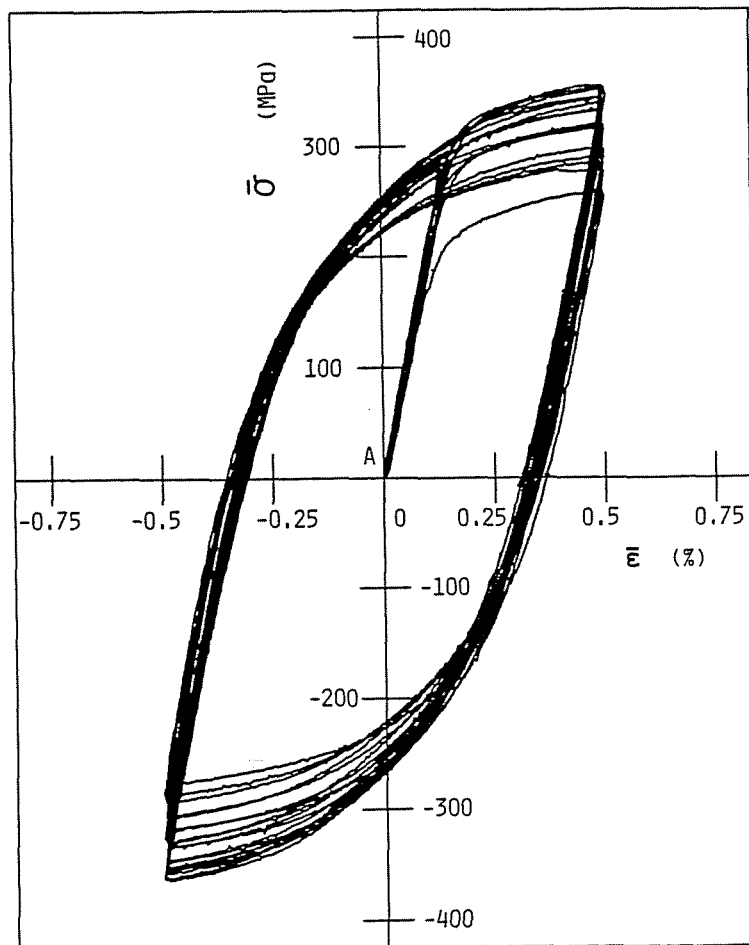


図2・13 一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷とねじりの繰返し負荷を交互に行った場合 ($\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ 、実験)

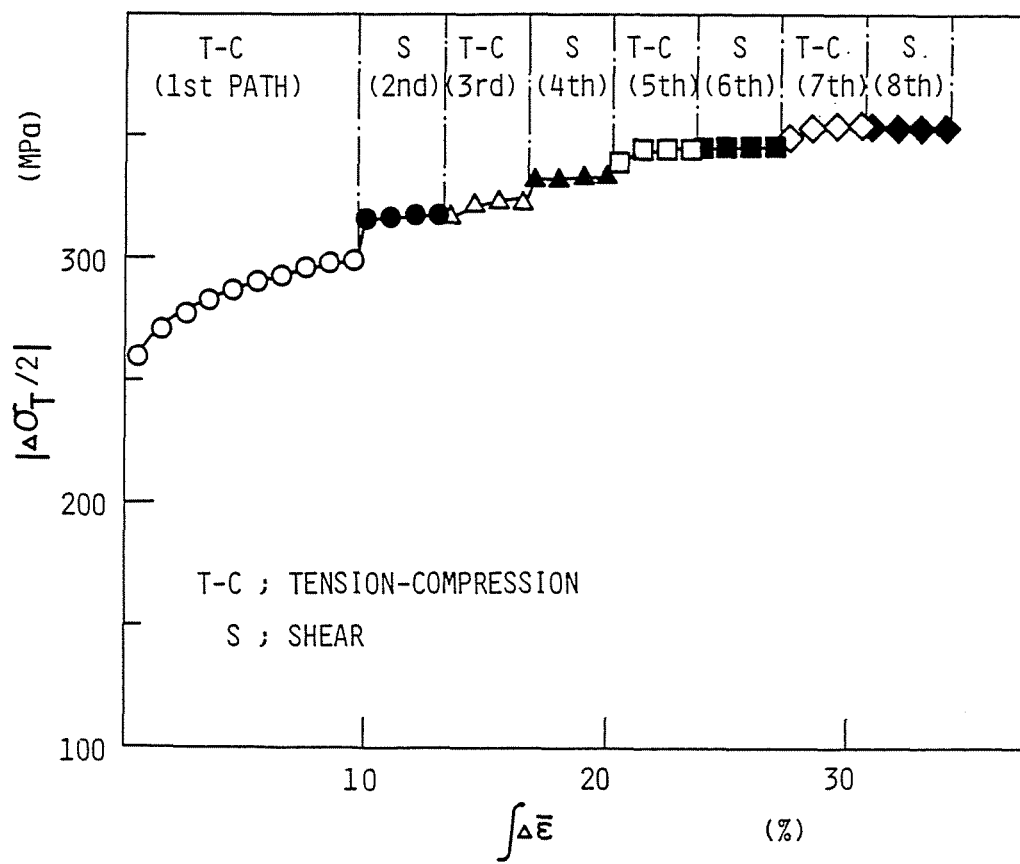


図2・14 応力振幅と累積ひずみ

2・5・2 円サイクル負荷

引張り・圧縮とねじりの位相外負荷による非比例繰返し負荷で最も硬化の著しい負荷として円サイクル負荷がある[45]。円サイクル負荷とは、図2・15に示すように $\epsilon - \tau/\sqrt{3}$ 平面で、ひずみ経路がひずみ振幅の半分を半径とする真円上をなぞる繰返し負荷のことを言う。

図2・16にひずみ振幅 $\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ における円サイクル負荷時のひずみ経路を10サイクル重ね合わせた結果を示す。ひずみ経路はほぼ完全に一つの円となり、その真円からの隔たりもわずかである。このことは、2・3節で述べた実験装置によるひずみ制御の精度と再現性が十分であることを示す。図2・17にその時の応力経路を示す。応力経路はきれいな渦巻状になり、繰返し硬化した後にほぼ円に漸近し安定することが分かる。図2・18と図2・19に円サイクル負荷時の軸応力－軸ひずみとせん断応力－せん断ひずみ関係をそれぞれ示す。図2・18と図2・19を比較すると軸応力－軸ひずみ関係とせん断応力－せん断ひずみ関係は、相当応力、相当ひずみ表示すると、ほぼ同じ関係になることが分かる。また、軸方向、せん断方向の応力－ひずみ関係は、どちらともそれぞれ単独に負荷した場合（図2・6）、すなわち比例繰返し負荷の場合と比べるとまったく違う形状を有し、円サイクル負荷による硬化が著しいことが分かる。図2・20は、円サイクル負荷と、図2・13の引張り・圧縮とねじりの繰返し負荷を交互に行った場合の硬化量を比較した図である。図2・20で縦軸は応力振幅の1/2、横軸は累積ひずみである。また、○印は引張

り・圧縮とねじりの繰返し負荷を交互に行った時の応力、●印は円サイクルの応力を示し、一点鎖線は比例繰返し負荷を示す。ここでも、円サイクル負荷による硬化量が著しく大きいことが分かる。例えば、安定化したときの応力は円サイクル負荷で460MPa、引張り・圧縮とねじりの繰返し負荷を交互に行った場合では350MPaであり、両者を比較すると円サイクル負荷の硬化量が30%以上高い値を示す。このことは、円サイクルによる異方性の発達過程の複雑さを示している。

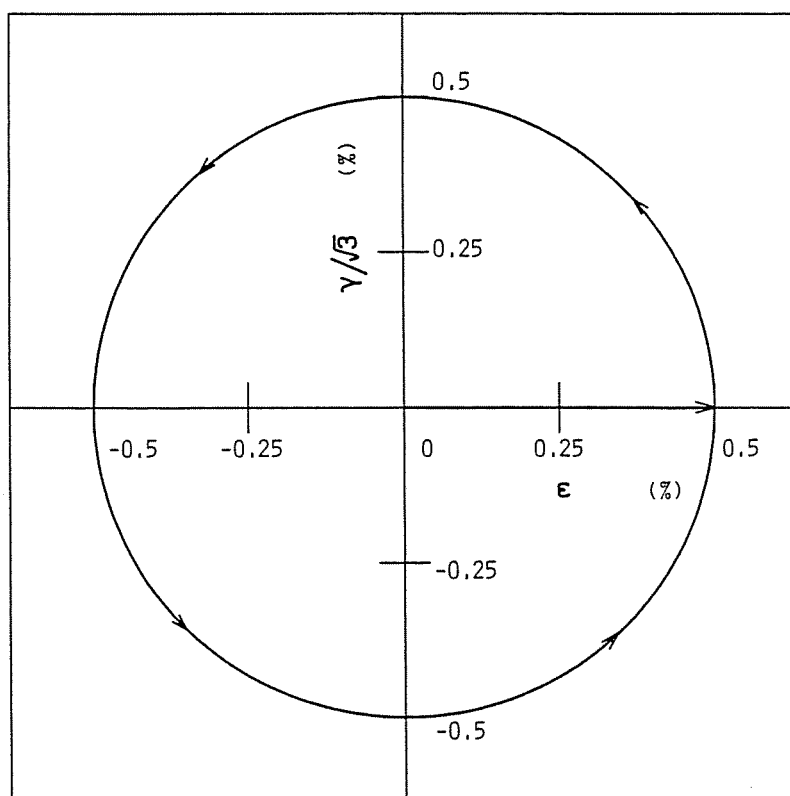


図 2・15 円サイクル負荷

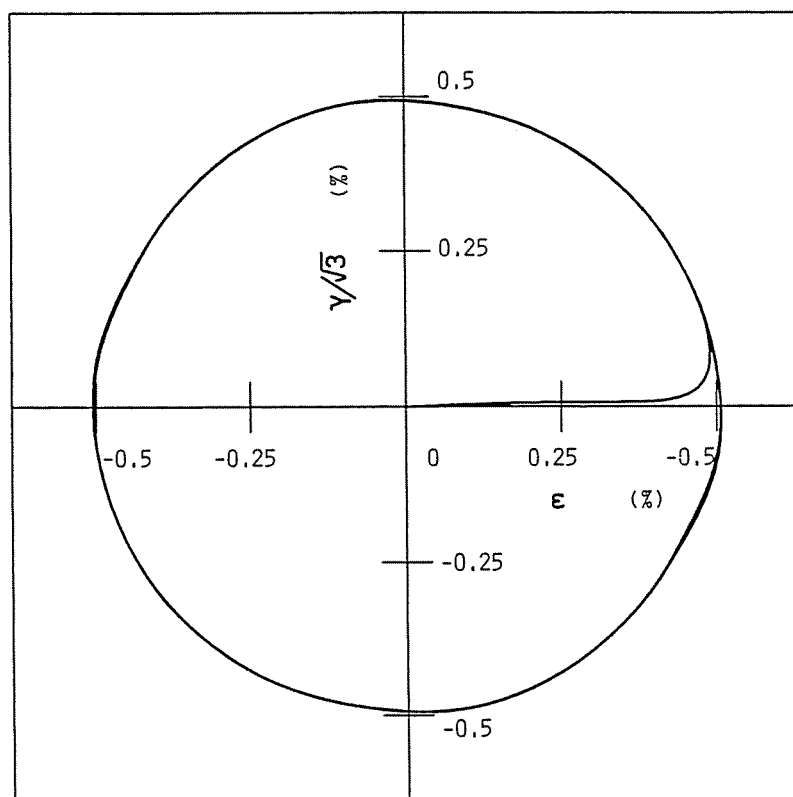


図2・16 円サイクル負荷時のひずみ経路
(実 験)

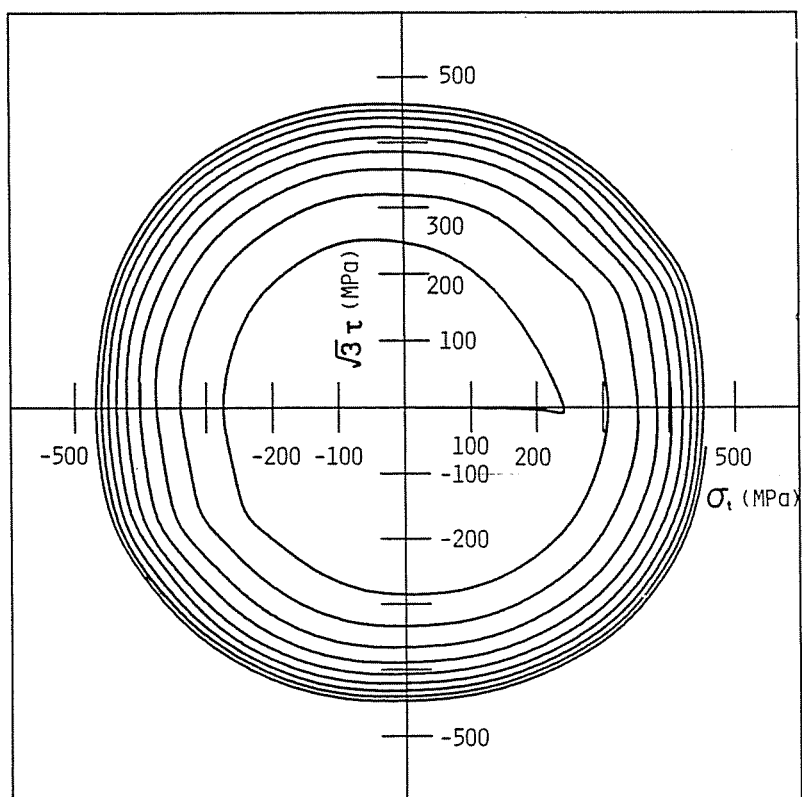


図 2・17 円サイクル負荷時の応力経路
(実 験)

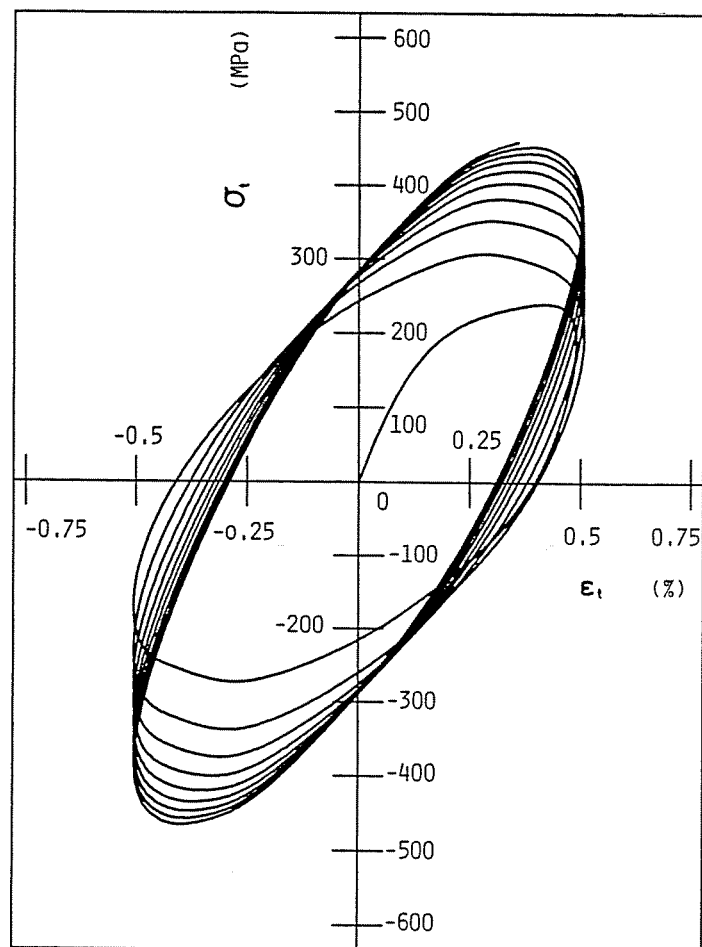


図2・18 円サイクル負荷時の軸応力－軸ひずみ関係
(実 験)

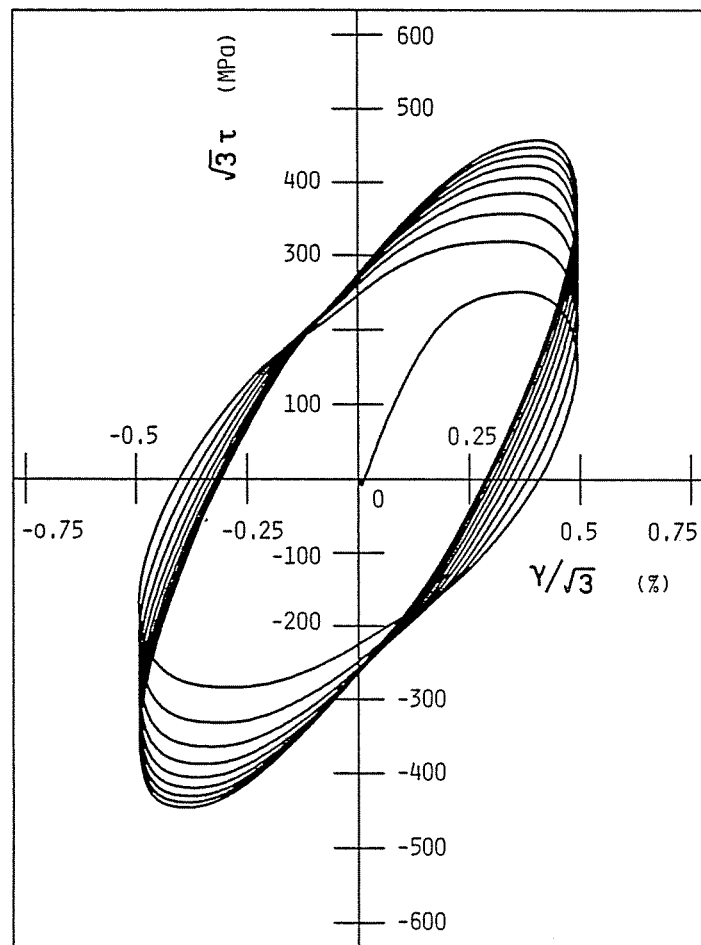


図 2・19 円サイクル負荷時のせん断応力－せん断ひずみ関係
(実 験)

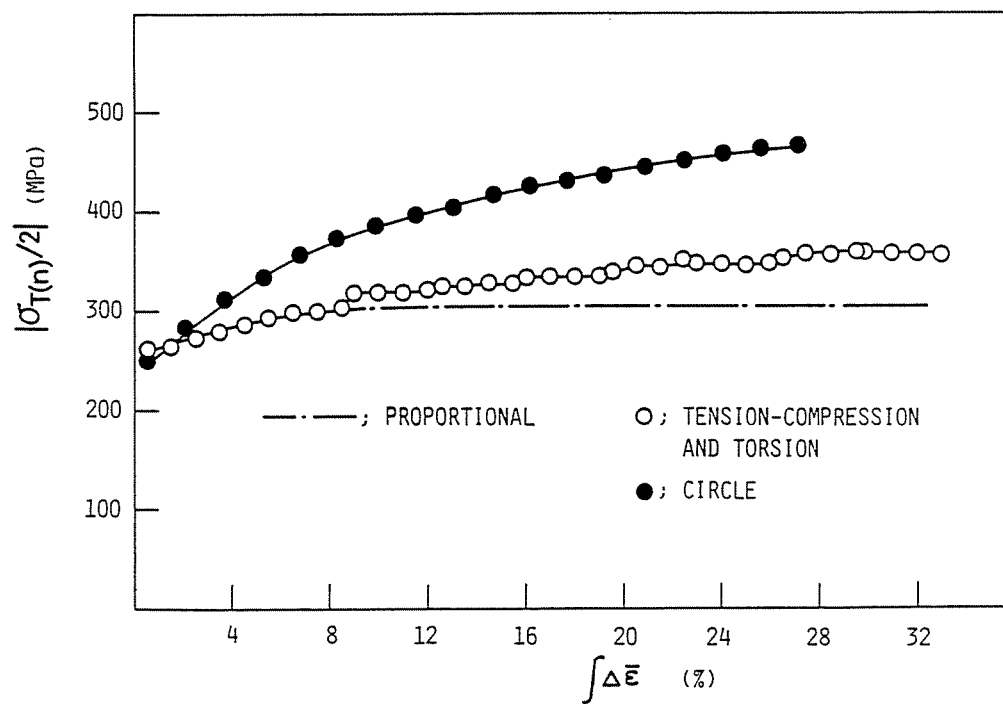


図 2・20 硬化量の比較

2・5・3 ラチェット負荷

ある方向に一定荷重をかけ、他方向に繰返し負荷を行ったとき、一定荷重方向のひずみが増加する。このような現象をラチェット現象と言う。本研究では、この負荷をラチェット負荷と呼ぶ。

図2・21に引張り方向に降伏応力の $3/4$ の応力すなわち、124MPaをかけ、一定ひずみ振幅 $\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ のねじりの繰返し負荷を行った時の引張り方向へのひずみの増加のようすを示す。図2・21で横軸がせん断ひずみを相当ひずみで、縦軸がラチェット方向（軸方向）ひずみを表している。また、図2・22にせん断方向の相当応力－相当ひずみ関係を示す。せん断方向に繰返し負荷を行うことにより、軸方向のひずみが鋸波状に増加していくようすが図2・21より分かる。しかし、せん断方向の応力－ひずみ関係が安定して行くにつれて、軸方向のひずみの増加量も減少している。また、図2・22のせん断方向の応力－ひずみ関係と図2・6の一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷時の応力－ひずみ関係を比較すると、ラチェット負荷時の硬化量の方が大きいことが明かである。つまり、ラチェット負荷の場合にも非比例繰返し負荷特有の硬化が生じていることが図2・22より分かる。

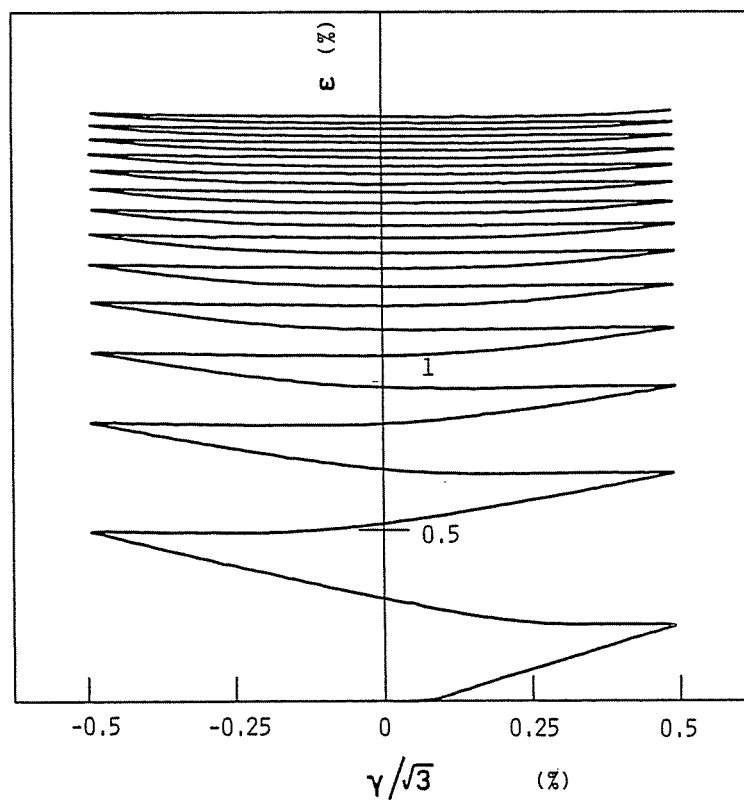


図 2・21 ラチェット時のひずみ挙動
(実 験)

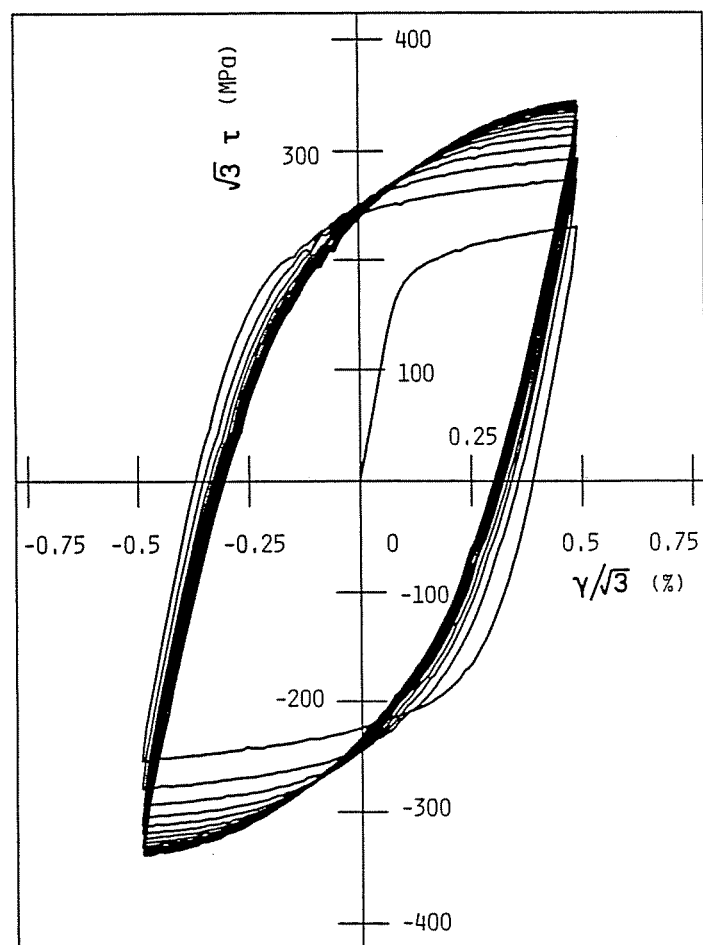


図 2・22 ラチェット時のせん断応力－せん断ひずみ関係
(実 験)

本章では、繰返し構成式を構築する際の基礎的資料となる、繰返し負荷を受ける材料の塑性挙動を実験により明らかにした。すなわち、SUS304鋼に比例繰返し負荷、非比例繰返し負荷を与え、その時の応力－ひずみ関係について詳しく調べた。その結果、以下の結論を得た。

(1) 材料に一定ひずみ振幅の比例繰返し負荷を行うと、材料の応力－ひずみ関係は繰返し硬化を示した後安定する。また、安定するまでのサイクルはひずみ振幅に依存し、ひずみ振幅が大きくなるにつれ多くのサイクルを必要とする。

(2) 一定ひずみ振幅比例繰返し負荷で、安定した材料にひずみ振幅を増加し、さらに繰返し負荷を与えると、再び安定するまで硬化する。しかも、その安定時のループは、増加後のひずみ振幅単独で繰返し負荷を行った場合の安定時ループと一致する。しかし、一定ひずみ振幅を減少させた場合には軟化後安定し、その安定時ループは、減少後のひずみ振幅単独で繰返し負荷を行った場合の安定時ループとはまったく一致しない。すなわち、比例繰返し負荷時のひずみ硬化挙動は、材料が現段階までに受けた中で最大のひずみ振幅に従う。

(3) 非比例繰返し負荷のもとでの材料のひずみ硬化は、比例繰返し負荷でのひずみ硬化に比べて著しく大きい。これは、繰返し負荷による異方性の発達の影響と考えられる。中でも円サイクル負荷時の硬化量が最も大きく、円サイクル負荷による異

方性の発達が最も顕著である。また、ラチェット負荷の場合にも非比例繰返し負荷特有の硬化が見られた。

以上のように本章では、比例繰返し負荷および非比例繰返し負荷による特徴的な材料の変形の様子を明らかにすることができた。

第3章 繰返し負荷時の降伏曲面

3・1 緒 言

第2章では、繰返し塑性構成式を構築する際の基礎的資料となる、繰返し負荷を受ける材料の応力－ひずみ関係について述べた。本章ではさらに、繰返し負荷を受ける材料の降伏曲面の変形挙動について実験的に調べる。

第1章で述べたように、塑性ポテンシャルとして降伏曲面を用いる場合、降伏曲面の形状が塑性変形によりどのように変化するのかを調べるのが構成式を構築する上で大変重要である。そのため、降伏曲面の実験的研究は数多くなされている。例えば、Phillips[1-5]らは、1100-0アルミニウムに種々の大きさの予ひずみを与え、予ひずみの大きさと降伏曲面の形状変化について、その温度変化の影響と共に調べている。また、白鳥[6]らは黄銅版を用い、降伏曲面には負荷方向にとがり点

(corner)が存在することを示している。また、Stout[15]らは1100-0アルミニウムを用い、降伏曲面が、負荷により収縮あるいは膨張することを示している。しかし、田中[10]らおよびLui[20]らを除くどの研究も繰返し負荷による降伏曲面の変動を論じていない。また、彼らも繰返し負荷時の降伏曲面について調べているが、降伏曲面の定式化がなされていない。

本章では、初期等方性材のSUS304材に繰返し負荷を与え、第2章で述べたように、 $50\mu\text{m}/\text{m}$ の相当塑性ひずみを生ずる応力を降伏応力として、後続降伏曲面を測定した。実験結果より、引張り・圧縮－ねじりの応力空間での比例繰返し負荷、非比例繰返し負荷を問わず、変形に誘起される異方性のため、降伏曲面が移動し、ゆがみ、膨張し、そして回転することが分かった。また、そのような降伏曲面の変形挙動を、応力の2次式として定式化できることを見いだした[75-77]。

3・2 実験方法

繰返し負荷中の降伏曲面を以下の方法により求めた。まず、所定の繰返しひずみを与えた後に、そのひずみにより降伏曲面の中心が移動したと予測される応力まで部分除荷を行う。次に、その中心応力から、 τ/σ が一定の比例負荷を行い、 $50\mu\text{m}/\text{m}$ の相当塑性ひずみが生じた時の応力を降伏応力と定めた後、直ちに中心に戻る。以下、同様に中心から放射線状に比例負荷を行い、10～12点ほどの降伏点を定める。

また、この時の降伏曲面の中心の移動量は、以下のように予測する。材料が繰返し負荷を受ける場合、最初の予ひずみ

(prestraining) による降伏曲面の中心移動量は、その応力-ひずみ関係から、降伏応力以降に硬化した応力として近似的に求めることができる[41]。1サイクル以降の降伏曲面の中心移動量は、繰返し負荷のループ端応力の増加量を予ひずみによる中心移動量に順次加えることにより算出する。

第1章でも述べたが、繰返し負荷を受けた後の材料の降伏曲面を求める場合、降伏曲面の中心がすでに繰返し負荷により移動しているため、その中心を考慮して測定するかしないかにより、その形状に大きな差がでてくる。その一例を以下に示す。

図3・1は0.5%まで引張ったあと完全除荷した時の応力-ひずみ関係である。図3・1でI、II、IIIの×印はそれぞれ降伏曲面を測定した際の中心を示す。すなわち、点Iは負荷後、微小量部分除荷した点で、Phillips[1-5]らが基準に用いた点であ

り、点IIIは負荷後完全除荷した点、点IIは負荷後、先に述べたような手段で降伏曲面の中心を定め、その応力まで部分除荷した点である。図3・2に各点で測定した後続降伏曲面を示す。図3・2でI、II、IIIは図3・1に対応した点であり、△、○、□印はそれぞれの点から測定した降伏点である。図3・2より明らかなように点Iと点IIIで測定した降伏曲面の形状は負荷方向に鋭く、逆負荷方向に滑らかな、いわゆる“おむすび形”になり、降伏曲面の形状を定式化するのは困難である。しかし、本研究で降伏曲面の中心として定めた点IIで測定した降伏曲面は、応力の2次形式としての滑らかなだ円で表示されることが明かである。すなわち、本研究で行った降伏曲面の測定方法は、降伏曲面を定式化し構成式に導入する上での的確な方法であると言える。

図3・3に繰返し負荷中の降伏曲面を測定した場所の略図を示す。図3・3でA点は繰返し負荷中に初めの負荷方向から降伏曲面の中心まで部分除荷した点、B点はA点とは逆に、初めの負荷とは逆の負荷方向から降伏曲面の中心まで部分除荷した点、C点は繰返し負荷後に残留ひずみ0になるように制御して降伏曲面の中心まで部分除荷した点である。本研究では、以上の3箇所について、繰返し負荷中の降伏曲面を測定した。

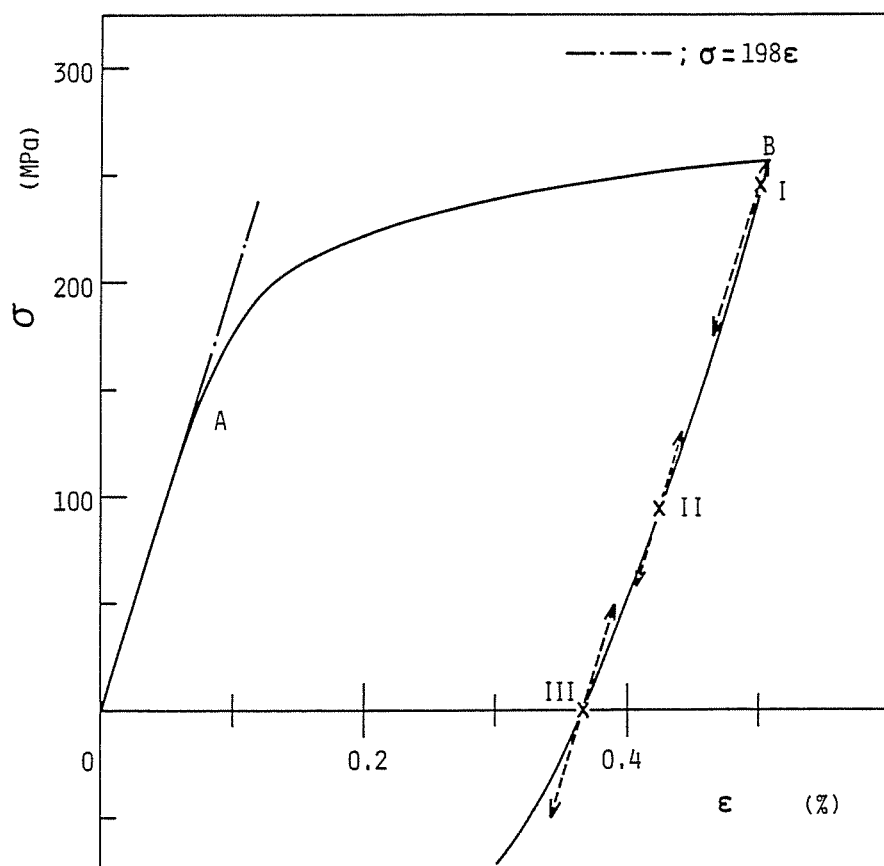


図3・1 降伏曲面の測定場所

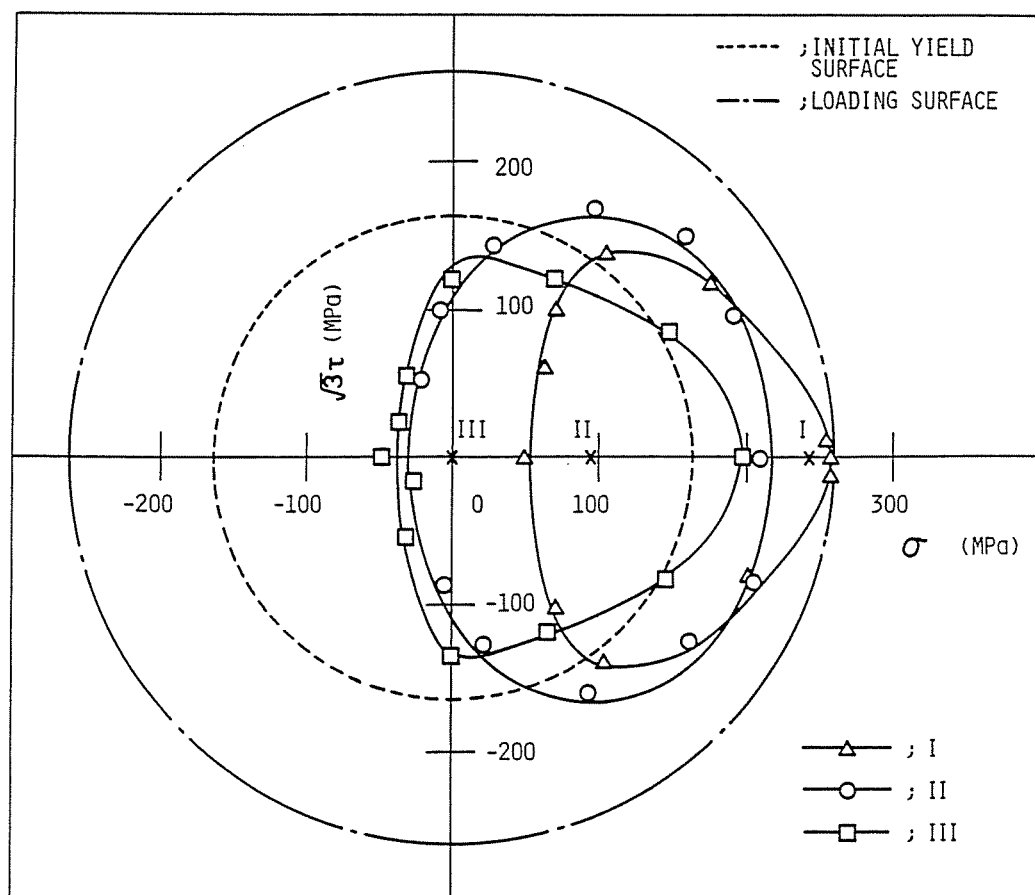


図3・2 種々の測定場所での降伏曲面の形状

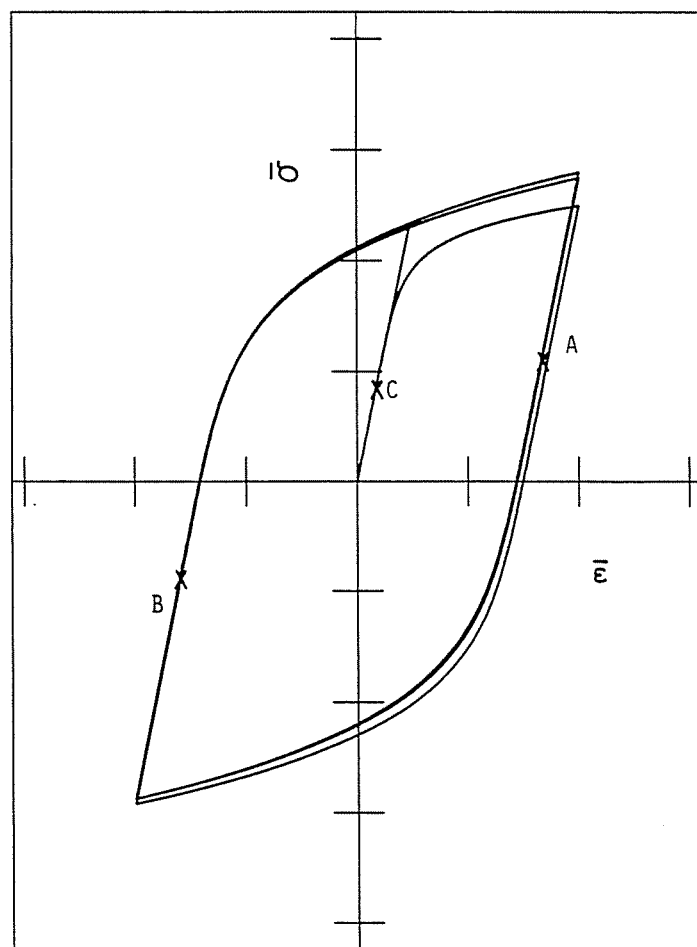


図3・3 繰返し負荷中の降伏曲面の測定場所

3・3 比例繰返し負荷時の降伏曲面

図3・4は、ひずみ振幅 $\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ のねじりの繰返し負荷中に図3・3のB点で測定した降伏曲面の変形挙動を示した図である。図3・4で○印は0.5サイクルの繰返し負荷を受けた後の降伏曲面、●印は1.5サイクルの繰返し負荷を受けた降伏曲面、×印は応力-ひずみ関係が安定後すなわち3.5サイクルでの降伏曲面である。いずれの降伏曲面も実線で示す同一の円で表示でき、一定ひずみ振幅繰返し負荷時の降伏曲面の形状は繰返し数に関係なく同一になることが分かる。また、図3・4に一点鎖線で示している初期降伏曲面と比較すると、負荷方向（せん断方向）の降伏応力は減少し、負荷と垂直な方向（引張り・圧縮方向）の降伏応力には変化がなく負荷方向への異方性の発達が認められる。同様な結果が引張り・圧縮の繰返し負荷、応力比 $\sqrt{3}\tau/\sigma = 1$ の繰返し負荷の場合にも得られ、その結果を図3・5に示す。図3・5では、ねじりの繰返し負荷時の降伏曲面を実線で、引張り・圧縮の繰返し負荷時の降伏曲面を破線で、応力比 $\sqrt{3}\tau/\sigma = 1$ の繰返し負荷時の降伏曲面を一点鎖線でそれぞれ示した。また、○、●印は実験値である。ただし、いずれの曲面も3サイクルでのループ安定時における結果であり、ねじりの繰返し負荷時の降伏曲面は図3・3のB点で、他の2つの降伏曲面は図3・3のA点で測定した結果である。この3種類の負荷経路での降伏曲面はすべてひずみ振幅 $\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ について得られたものであり、負荷経路にかかわらず同一の円で表せる。

また、降伏曲面の中心はそれぞれ負荷方向のみに移動し、その移動量も3種類の負荷経路で同じであった。なお、前述したが、この3種類の負荷経路での相当応力－相当ひずみ曲線も同じであった。（図2・7 参照）。

図3・6～図3・9は、ひずみ振幅0.5%、1%、1.5%、2%での第1経路の位相内（in-phase）繰返し負荷、すなわち比例繰返し負荷時における降伏曲面である。いずれのひずみ振幅においても、第1経路を引張り・圧縮方向で行った場合の結果であり、図3・3のA点で測定した結果である。なお、作図上、各サイクルでの降伏曲面の中心と、図の原点を一致させて表示した。図中の○、△、□印は、実験点であり、それぞれ、prestraining後、1サイクル後、飽和安定後に図3・3のA点で測定した後続降伏曲面を示す。実線は、実験点を最適化して求めただけである。また、一点鎖線は、初期降伏曲面である。図3・6～図3・9より明らかなように、比例繰返し負荷により、負荷方向すなわち、引張り・圧縮方向の降伏応力が減少することが分かる。しかし、負荷方向と垂直な方向、すなわち、せん断方向の降伏応力には変化がなく、いわゆる交差効果は見られなかった。さらに、降伏曲面は、全て実線で示すだけ円で表示でき、同じひずみ振幅では全て同一の円で表示できた。このことは、降伏曲面の形状が、いかなるひずみ振幅の場合においても、prestrainingによって決まることを示している。しかしながら、ひずみ振幅が増すにつれ、実験結果のばらつきは大きくなっている。また、図3・6～図3・9を比較すると、ひずみ振幅が増すにつれ、負荷方向の降伏応力が減少しているが、ひずみ振幅1.5

%と2%での降伏応力の値はほぼ同じであった。

次に、ひずみ振幅と引張り・圧縮方向の降伏応力、せん断方向の降伏応力の関係を調べた。その結果、降伏応力はひずみ振幅の関数で次式のように表せた。

$$Y = 105 \left\{ 1 + 0.57 \exp \left(- \frac{\Delta \bar{\epsilon}}{0.73} \right) \right\} \quad (\text{MPa}) \dots\dots\dots (3-1)$$

$$\sqrt{3} k = 165 \quad (\text{MPa}) \dots\dots\dots (3-2)$$

上式で、Yは引張り・圧縮方向の降伏応力、kはせん断方向の降伏応力であり、 $\Delta \bar{\epsilon}$ はひずみ振幅(%)である。なお、第1経路にねじり方向を選んだ場合は、式(3-1)、式(3-2)のY、 $\sqrt{3} k$ をそれぞれ入れ換えたものと等しい。

以上、比例繰返し負荷中の降伏曲面の変動のようすが明らかになった。

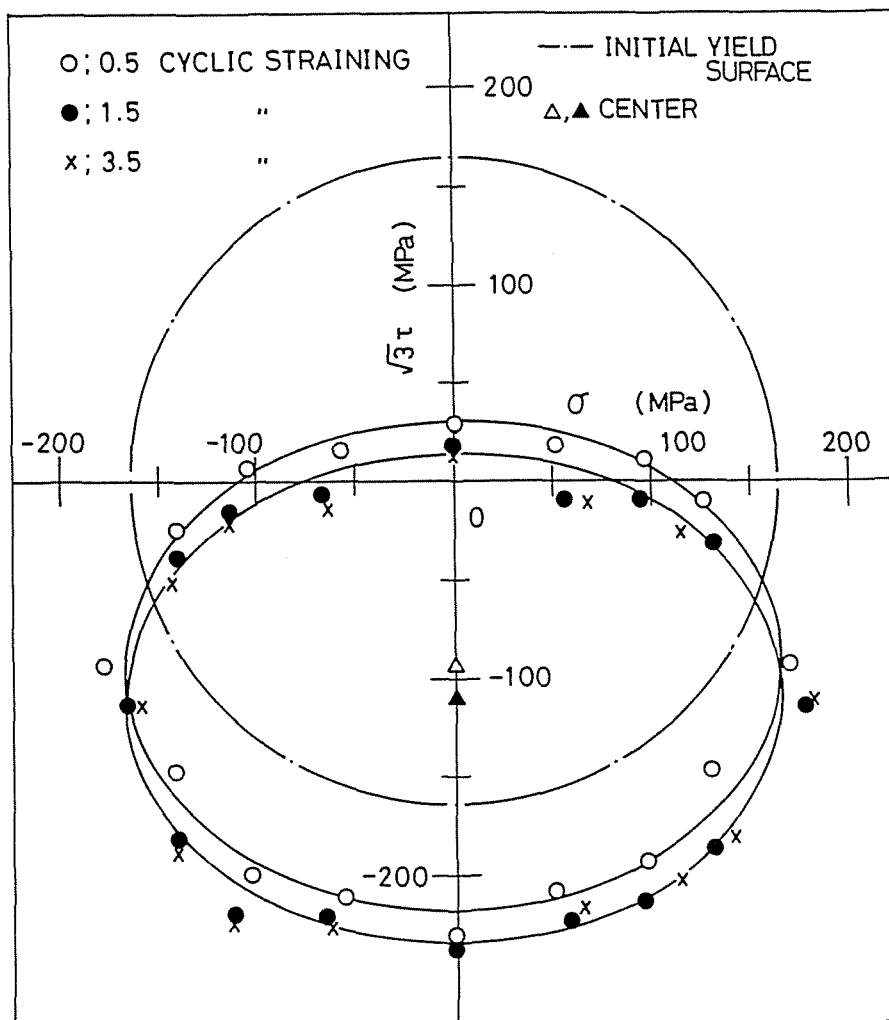


図3・4 一定ひずみ振幅ねじりの繰返し負荷時の降伏曲面

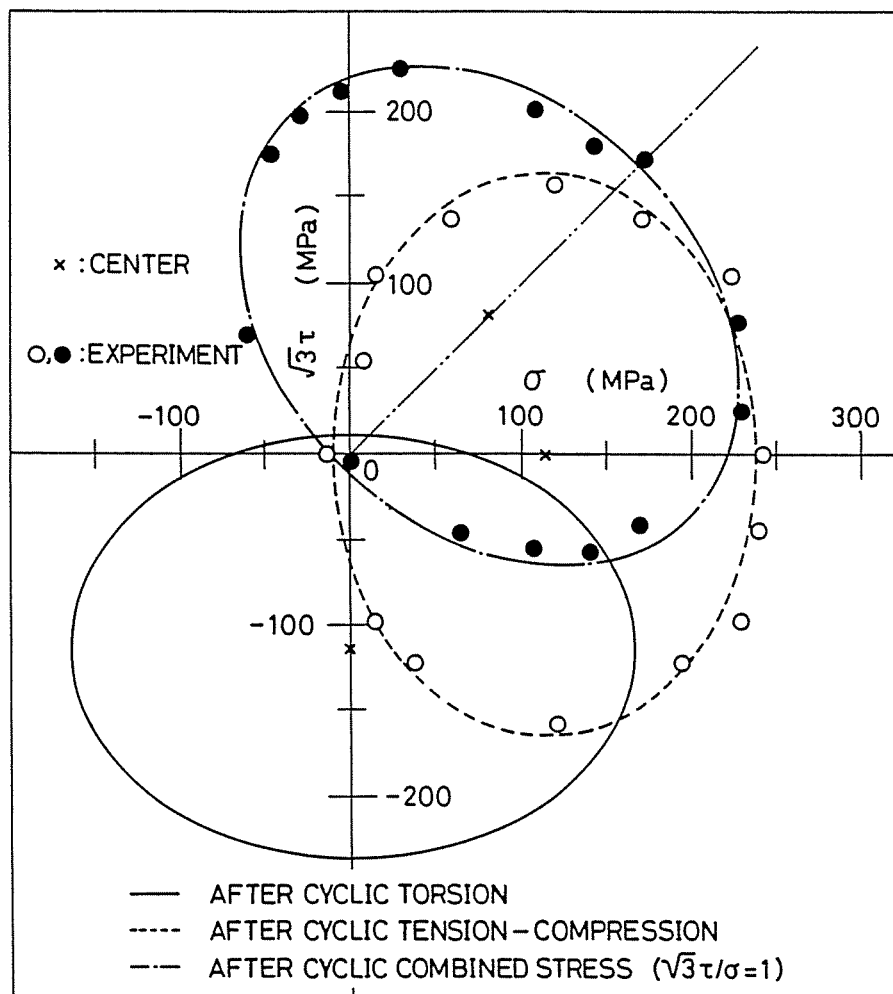


図3・5 3種類の負荷経路での繰返し負荷時の降伏曲面

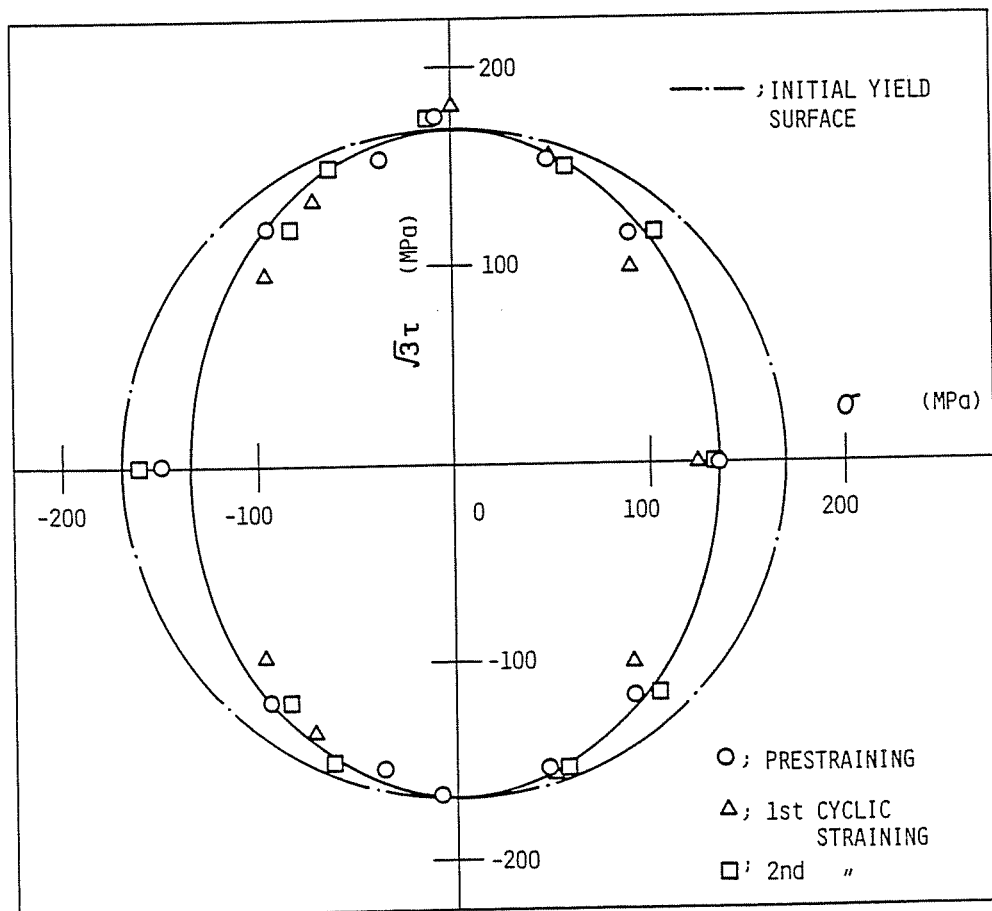


図3・6 一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷時の降伏曲面
($\Delta \bar{\epsilon} = 0.5\%$)

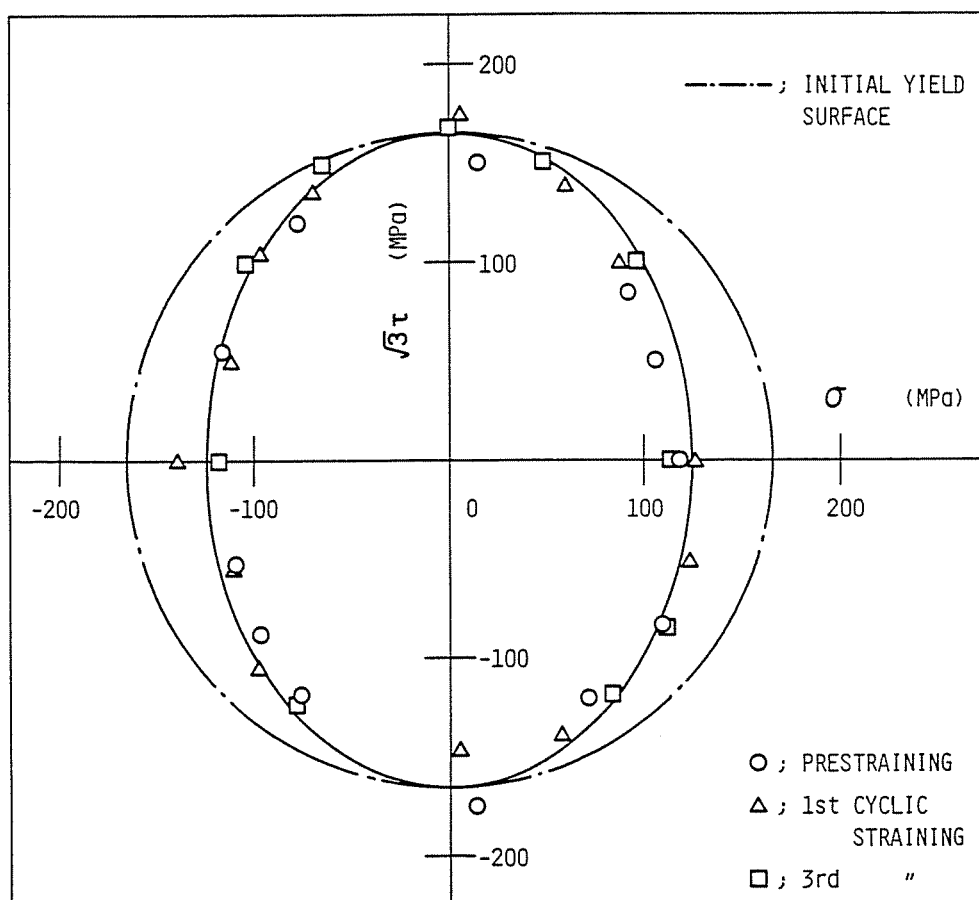


図3・7 一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷時降伏曲面
 ($\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$)

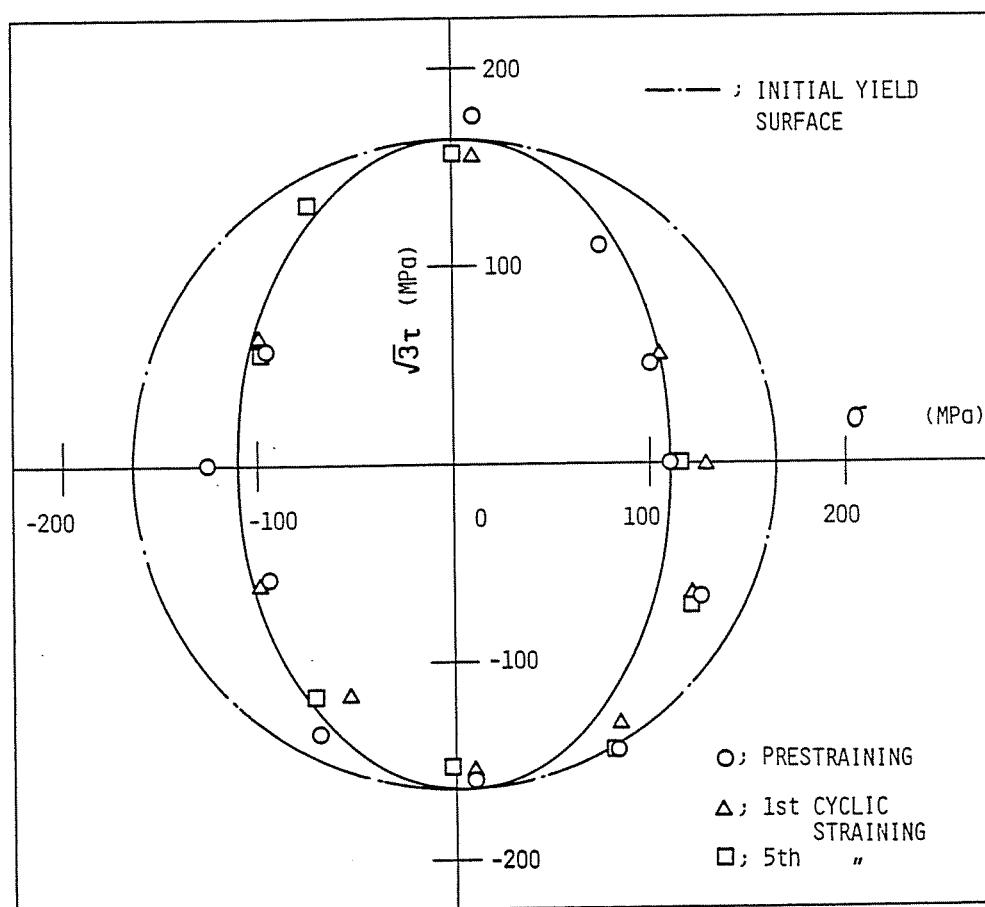


図3・8 一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷時の降伏曲面
 ($\Delta \bar{\epsilon} = 1.5\%$)

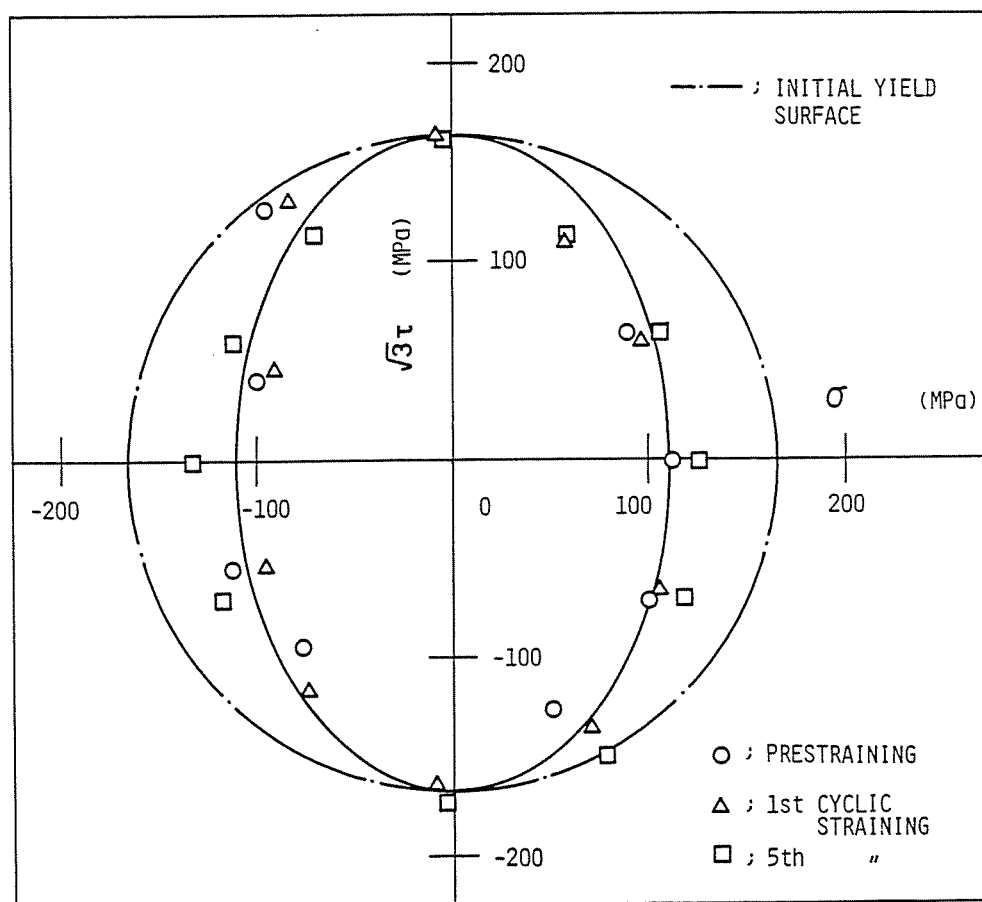


図3・9 一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷時の降伏曲面
($\Delta \bar{\epsilon} = 2\%$)

3・4 非比例繰返し負荷時の降伏曲面

3・4・1 一定ひずみ振幅引張り・圧縮とねじりの繰返し

負荷を交互に行った場合

図3・10に図2・13に示す引張り・圧縮－ねじりの位相外繰返し負荷中、第2～第4経路での降伏曲面、すなわち、非比例繰返し負荷時の降伏曲面を測定した結果を示す。図3・10は、第2～第4経路での飽和安定後の降伏曲面を重ね合わせて表示した図であり、図3・3のA点で測定した結果である。なお、図3・10は、図の原点と各降伏曲面の原点を一致させて作図した。図3・10で○、△、□印は実験点であり、実線、一点鎖線は同一振幅1%での比例負荷の際得られた降伏曲面（図3・7）と同一形状のだ円である。図3・10より第2経路以降の降伏曲面は、 $\sigma - \sqrt{3}\tau$ 平面上で繰返し負荷による異方性の発達により、回転することがわかる。また、その回転角は一点鎖線で示す 45° から実線で示す 60° の間であることが明かである。しかし、いずれにしても第2経路以降の降伏曲面は、負荷経路の変化にかかわらずすべてほぼ同じだ円で表示でき、その形状は、第1経路での降伏曲面と一致する。図3・11は降伏曲面と塑性ひずみ増分ベクトルの垂直性について調べた図である。図3・11で実線は図3・10で一点鎖線で示した 45° 回転しただ円であり、矢印は実験から得られた塑性ひずみ増分ベクトルの方向を示す。塑性ひずみ増分ベクトルは降伏曲面にほぼ垂直であることが図3・11より分かる。この

ことから降伏曲面は、引張り・圧縮とねじりの位相外繰返し負荷において $\sigma - \sqrt{3}\tau$ 平面で 45° 回転すると考えるのが妥当である。

図3・12は、図2・13の繰返し負荷における、第2～第4経路のそれぞれの経路でループ安定後、負荷応力、ひずみが共に0になるように完全除荷した時、すなわち、図3・3のC点で測定した時の降伏曲面である。図3・12で○、△、□印は、実験点であり、実線は実験点を最適化して求めただ円である。また、一点鎖線は図3・11と同じだ円である。図3・12より完全除荷後塑性ひずみがない状態の降伏曲面は、第2経路以降も全て同じだ円（実線）で示されたが、塑性ひずみを持っている時の降伏曲面のだ円（一点鎖線）と比較すると、多少膨張していることが分かる。この事は、SUS304材を用いたLiu[20]らの研究、さらに、Stout[15]らの1100-0アルミニウムによる研究でも既に示されている。また、降伏曲面の傾きは、図3・11の結果同様、 $\sigma - \sqrt{3}\tau$ 平面で 45° であった。

図3・13に図3・3のA点で測定した繰返し負荷時の降伏曲面の変動のようすを、応力空間の原点と図の原点を一致させて示す。図3・13で、実線、破線、一点鎖線、二点鎖線はそれぞれ、第1～第4経路におけるループ飽和安定後の降伏曲面であり、また、細線は初期降伏曲面である。図3・13より、非比例繰返し負荷による降伏曲面の移動、ゆがみ、回転のようすが良く分かる。さらに、降伏曲面は、それぞれの負荷経路において、その負荷方向に移動し、降伏曲面の中心の移動量は、第3経路以降でほぼ同じである。なお、図3・13の×印は降伏曲面の中心を示してい

る。

次に、図2・12で示した、一定ひずみ振幅ねじりの繰返し負荷後、同じ相当ひずみ振幅で引張り・圧縮の繰返し負荷をした場合の降伏曲面の挙動について調べた。すなわち、第1経路での繰返し負荷による塑性ひずみが残っている状態（図2・12のA点）で負荷方向を変えた場合についても降伏曲面を測定した。図2・12のねじりの繰返し負荷で飽和安定後の降伏曲面と引張り・圧縮の繰返し負荷で飽和安定後の降伏曲面を図3・14にそれぞれ実線と一点鎖線で示す。また、図3・14で○印は実験値である。ねじりの繰返し負荷後の引張り・圧縮の繰返し負荷により降伏曲面は形状変化を伴わずに並進および回転していることが図3・14より分かる。また、その回転角は 45° であり図3・11の結果と一致する。しかし、図2・12の繰返し負荷の場合には、初めのねじりの繰返し負荷後、永久ひずみのある状態から次の引張り・圧縮の繰返し負荷に移行したため、せん断方向の中心移動が残っている。また、第2経路方向への降伏曲面の中心移動量は、図3・13に比べると6 MPaほど小さい。なお、図3・14で第2経路の降伏曲面の回転方向が図3・11と反対であるが、これは第1経路において安定後、初めの負荷方向とは逆の方向から完全除荷した状態（図2・12のA点）から第2経路に移行したためである。

図3・15で実線は、第1経路にひずみ振幅1%のねじりの繰返し負荷を選び、以下図2・13に示すと同様、引張り・圧縮の繰返し負荷、ねじりの繰返し負荷を交互に与えた時の第8経路での引張り・圧縮による繰返し負荷の応力－ひずみ関係を示す。破線は、その第8経路後、ひずみ振幅を0.5%に減じて、引張り

・ 圧縮の繰返し負荷を行ったときの応力－ひずみ関係である。

また、一点鎖線は、第8経路後、ひずみ振幅を1.5%に増加し、ねじり方向で繰返し負荷を行ったときの応力－ひずみ関係である。なお、それぞれのひずみ振幅での応力－ひずみ関係を、飽和安定時についてのみ示した。図3・15のそれぞれのループに対応する図3・3のA点で測定した降伏曲面を図3・16に示す。図中○、△印は、それぞれ、実験点を示す。0.5%へとひずみ振幅を減少した場合には、降伏曲面（破線）は、ひずみ振幅1%の時の降伏曲面（実線）と大きさ、形、傾きとも全て一致する。

すなわち、非比例繰返し負荷時の降伏曲面の挙動は、材料が現時点までに受けた中で最大のひずみ振幅に従う。しかし、1.5%へと振幅を増加した場合には、降伏曲面（一点鎖線）の形状は、振幅1%の時の形状とは異なり、振幅1.5%単独で繰返し負荷を受けたときと一致する。また、その傾きは0°であり、比例負荷時の場合と同じである。つまり、非比例繰返し負荷で、新たにひずみ振幅の大きい負荷を与えると、前の履歴はすべて消滅し、降伏曲面は、その大きなひずみ振幅で初期材に負荷を加えた時と同じ降伏曲面となる。すなわち、降伏曲面の挙動も応力－ひずみ関係と同じように、現段階までに受けた中で最大のひずみ振幅に依存することが、図3・16から分かる。

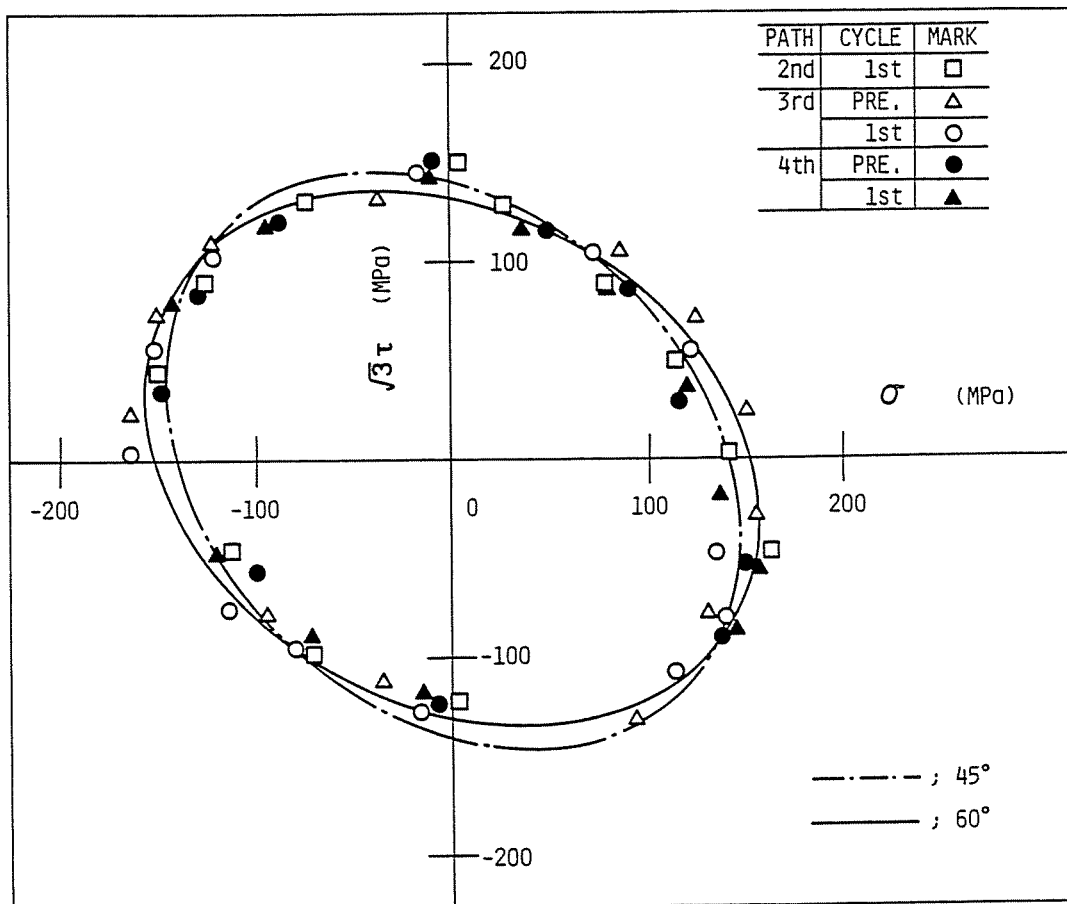


図3・10 後続降伏曲面の回転角

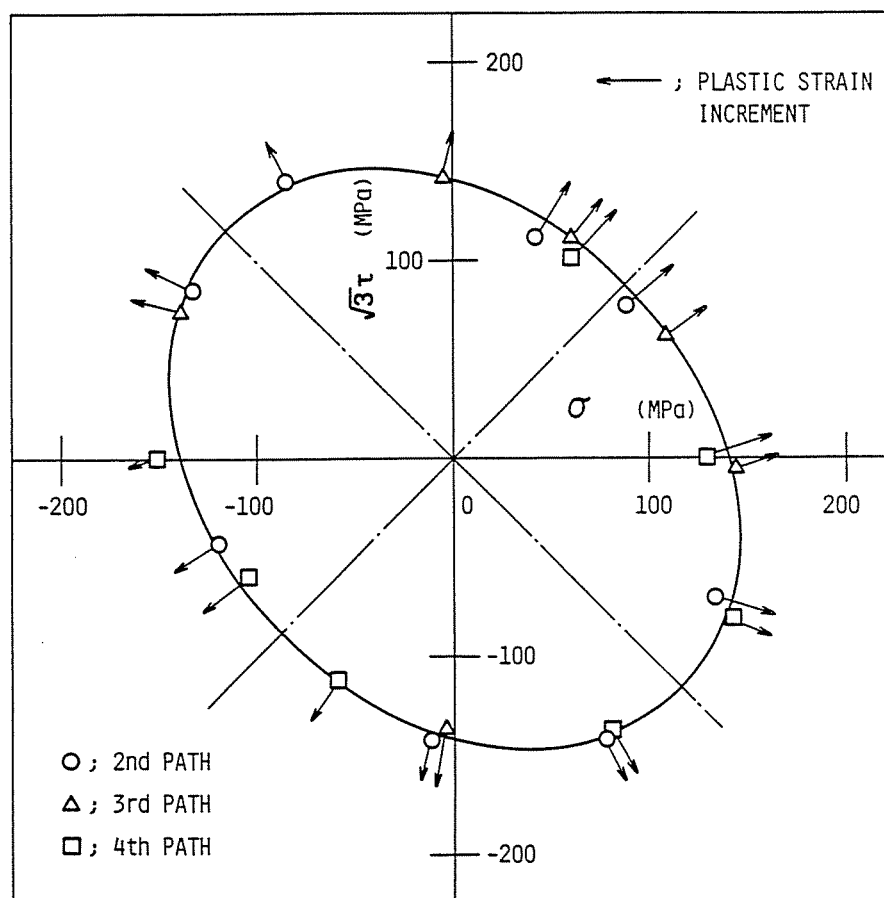


図3・11 降伏曲面と塑性ひずみ増分ベクトルとの垂直性

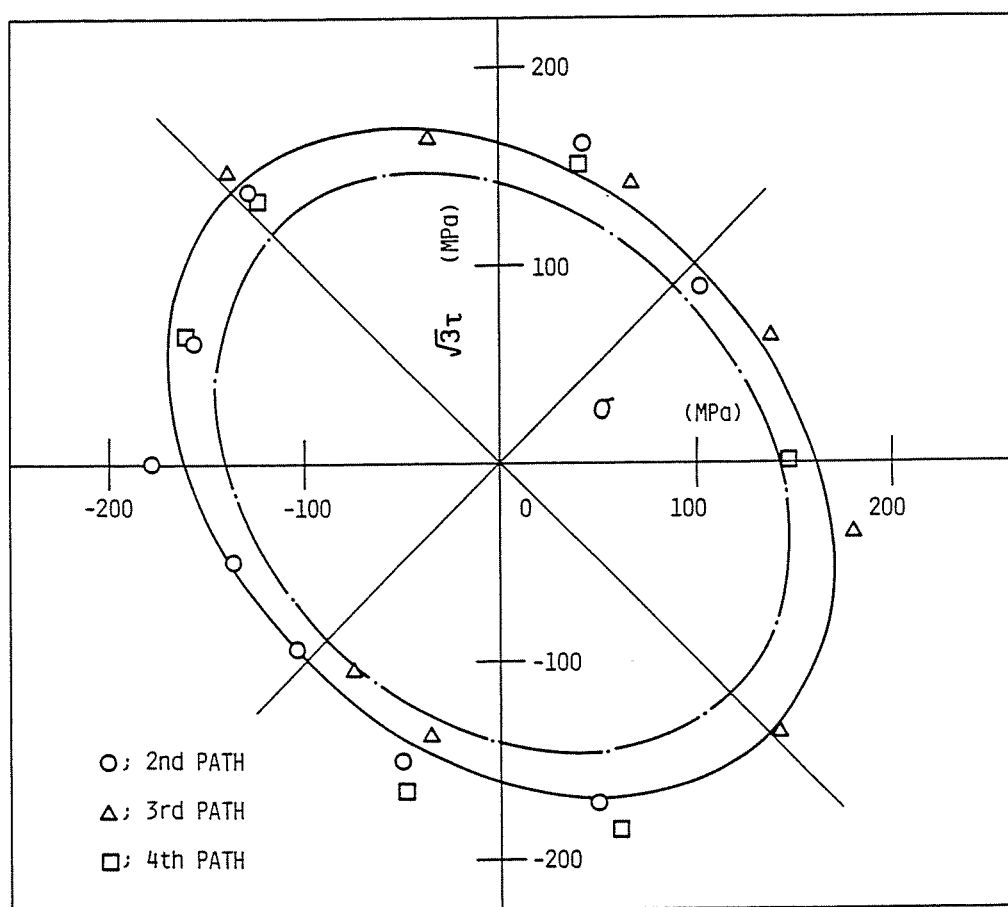


図3・12 原点での降伏曲面

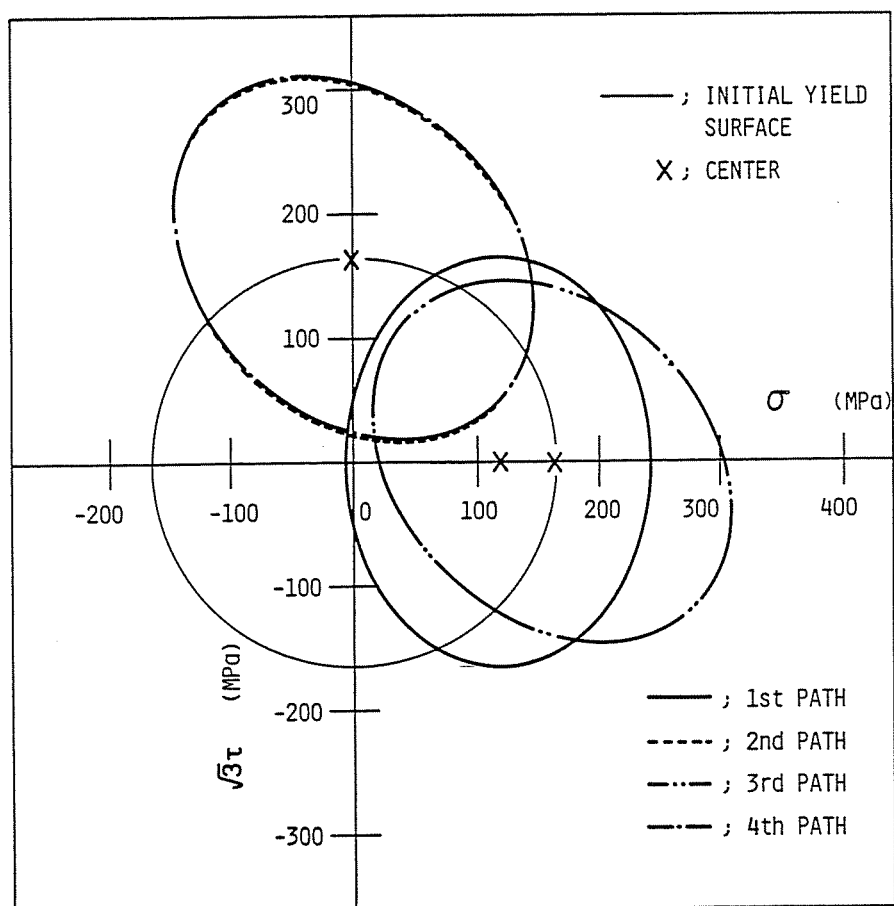


図3・13 繰返し負荷時の降伏曲面の変動

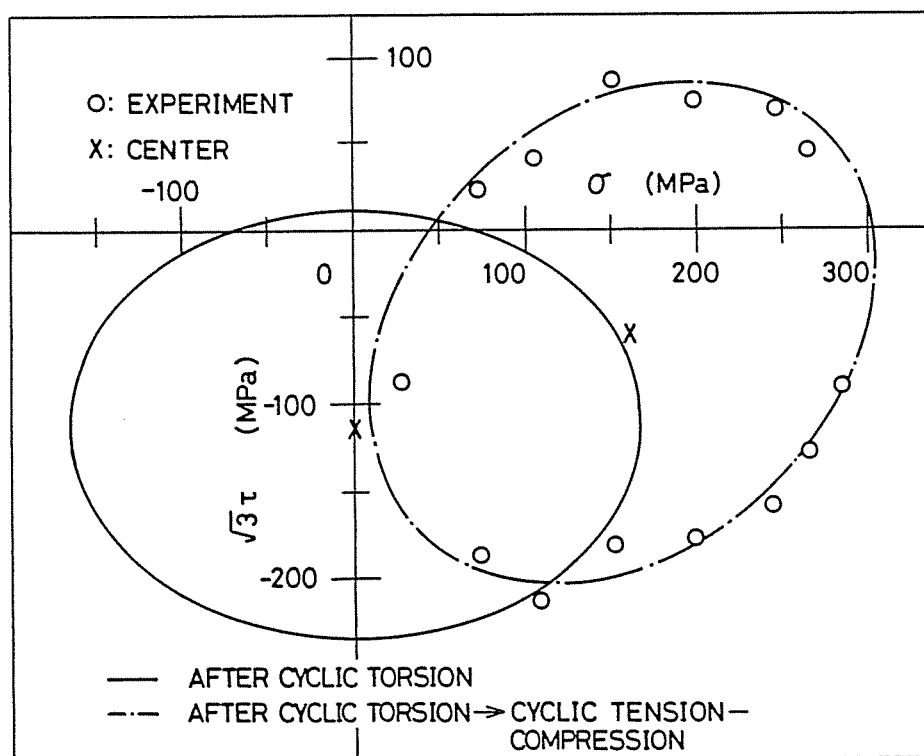


図3・14 繰返し負荷時の降伏曲面の変動

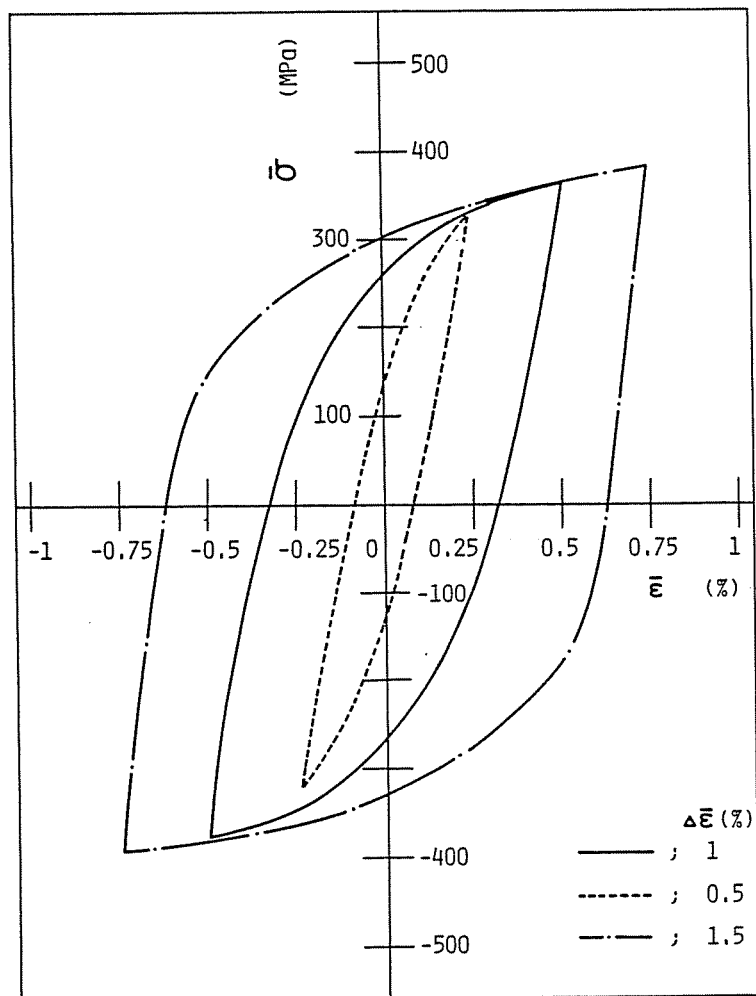


図 3・15 変動ひずみ振幅繰返し負荷

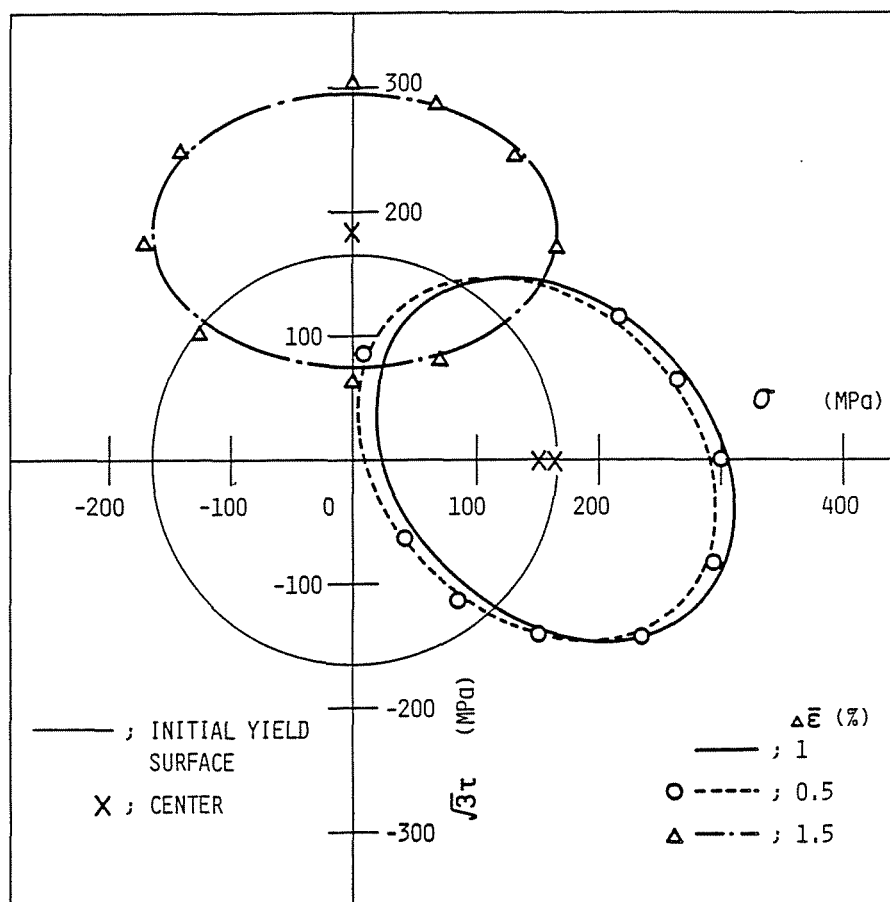


図3・16 変動ひずみ振幅繰返し負荷時の降伏曲面の変動

3・4・2 円サイクル負荷およびラチェット負荷の場合

円サイクル負荷およびラチェット負荷時の降伏曲面を測定した研究はいまだない。そこで、本研究では円サイクル負荷時およびラチェット負荷時の降伏曲面の測定も試みた。

図3・17に図2・15の相当ひずみ振幅1%の円サイクル負荷時の10サイクル目での降伏曲面を示す。なお、図3・17は降伏曲面の原点を図の原点に一致させて表した図である。降伏曲面は、初めの引張り方向の予ひずみ ($\bar{\epsilon} = 0.5\%$) により、一点鎖線で示す図3・7と同じだ円になるが、硬化が安定した10サイクル目では実線で示す円で表示される。さらに、その円の半径はだ円の短軸の大きさと一致する。このことより、円サイクル負荷中に降伏曲面は、だ円から徐々に円に近ずき、硬化安定時に真円になると考えられる。

図3・18は図2・21、図2・22のひずみ振幅 $\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ のラチェット負荷において、繰返し負荷が飽和安定した12サイクル目に測定した降伏曲面である。なお、図3・18は降伏曲面の原点を図の原点に一致させて表した図である。降伏曲面は、ラチェット方向にひずみが1.7%進行したことにより、ひずみ振幅 $\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ でねじりの繰返し負荷を単独で行った比例負荷時の降伏曲面（一点鎖線）とは異なり、せん断方向の降伏応力が小さい。しかし、その傾き角は、比例負荷時の降伏曲面の傾き角と同じく 0° であり、また、軸方向の降伏応力も比例負荷時の降伏応力と一致する。そこで、ラチェット負荷時の降伏曲面と比例繰返し負荷時の降伏曲面との関連性を調べた。その結果、ねじり方

向のひずみ振幅 $\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ に、ラチェットひずみ 1.7% を単純に加えた値を $\Delta \bar{\epsilon}$ とし、式(3-1)、式(3-2)に代入して得た、図3・18中に実線で示すだ円で降伏曲面をよく表せる。また、降伏曲面の中心のラチェット方向の応力は、初めにラチェット方向に負荷した応力 (124MPa) と同じであった。

以上のように、円サイクル負荷、ラチェット負荷時の降伏曲面も、円およびだ円としての応力の2次形式で表示可能であることが本研究により初めて明らかになった。

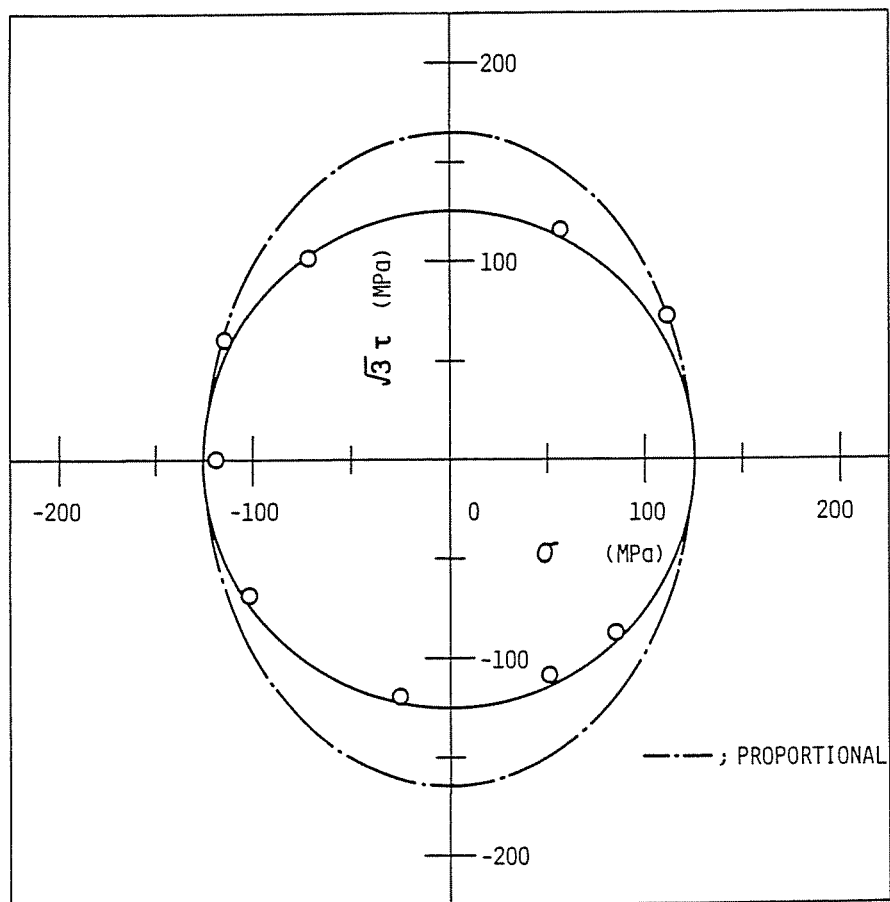


図3・17 円サイクル負荷時の降伏曲面

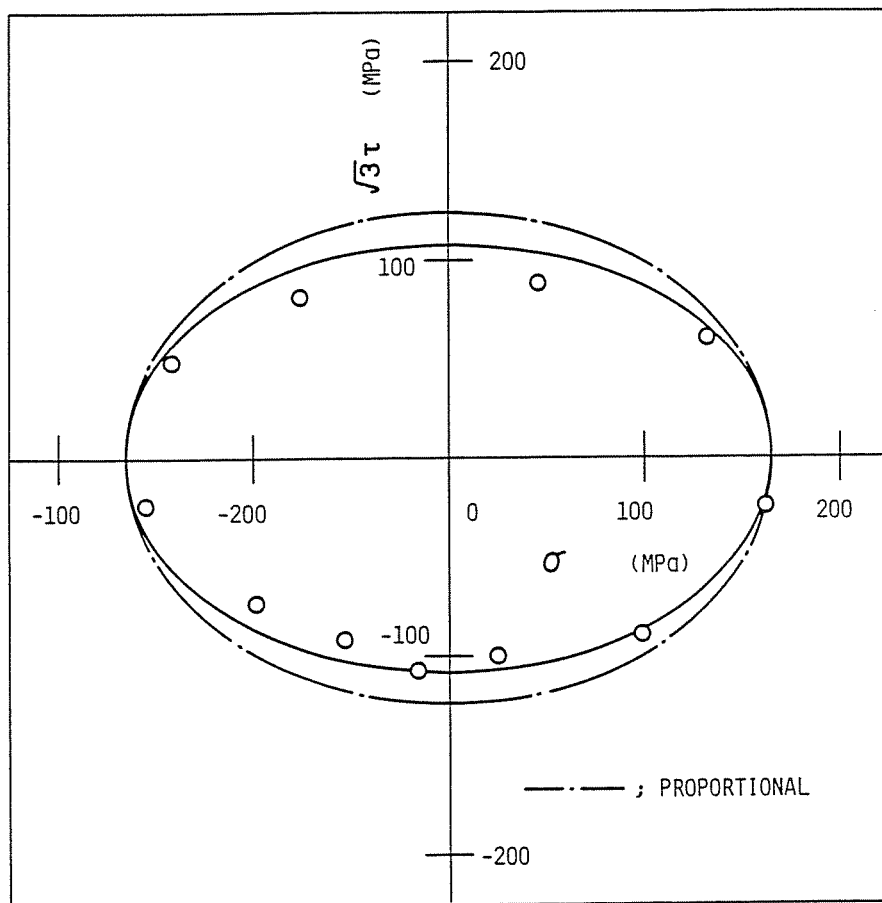


図3・18 ラチェット負荷時の降伏曲面

3・5 本章の結論

本章では、第2章で述べた比例繰返し負荷、非比例繰返し負荷を受けたときのSUS304材の降伏曲面について調べた。得られた結果は以下のとおりである。

(1) 比例繰返し負荷により、負荷方向の降伏応力が減少し、負荷方向への異方性の発達が確認され、降伏曲面を応力の2次式としてのだ円で表示できた。また、そのだ円の形状は、ひずみ振幅の関数で定められた。

(2) 非比例繰返し負荷により、降伏曲面はゆがむだけでなく、回転もした。その回転角は本研究の位相外同一ひずみ振幅の繰返し負荷の場合 $\sigma - \sqrt{3}\tau$ 平面で 45° であった。

(3) 比例繰返し負荷および引張り・圧縮とねじりの位相外繰返し負荷による降伏曲面の形状は、その第1経路の予ひずみ (prestraining) により定められ、負荷中は常に移動 (translation) と回転 (rotation) のみ生じ、形状のゆがみ (distorsion) は、生じない。

(4) 降伏曲面の中心は、比例負荷、非比例負荷をとわず負荷方向に移動する。

(5) 塑性ひずみ増分ベクトルが負荷面に対して垂直であることが確かめられた。

(6) 完全除荷後、塑性ひずみがない状態の降伏曲面は、塑性ひずみをもっている時の降伏曲面と比較すると膨張する。しかし、傾き角には変化がなかった。

(7) 降伏曲面の形状は、材料が現段階までに受けた中で最大のひずみ振幅に従う。現段階が、最大のひずみ振幅であれば、前の履歴はすべて消滅し、降伏曲面は初期材に負荷を加えたときと同一となる。

(8) 今まで測定例のなかった、円サイクル負荷、ラチェット負荷時の降伏曲面の形状を明らかにすることができた。また、その形状が、円およびだ円としての応力の2次形式で表示可能であることも明らかになった。

第4章 繰返し塑性構成式

4・1 緒 言

本論文の第2章、第3章では、SUS304材が比例繰返し負荷および非比例繰返し負荷を受けた場合の特徴的な塑性変形挙動を明らかにし、塑性変形により誘起される異方性が、比例繰返し負荷、非比例繰返し負荷による材料の硬化に大きく寄与していることを示した。本章では、比例繰返し負荷、非比例繰返し負荷を受けた材料の塑性変形挙動を記述するために、塑性変形により誘起される異方性の発達を考慮した繰返し塑性構成式を構築する。

繰返し負荷を記述するモデルとして、繰返し負荷による負荷履歴を考慮した等方一移動硬化則に従うモデルがある。例えば、Mroz[30]は、応力空間の曲面群の概念から等方一移動硬化則に従う多面モデルを提案している。この多面モデルの概念から Dafalias[25]らは、塑性内部変数を用い塑性関係式を一般的な形で定式化する際に、負荷面 (loading surface) のほかに境界面 (boundary surface) の概念を導入している。また、Krieg[32]は、等方的に膨張・収縮する負荷面とは別に、負荷面の膨張・収縮とは無関係に移動し、等方的に膨張し負荷面を包絡する限界面 (limit surface) を用いた塑性理論を提案し

ている。また、Lamba[33,34]らや、最近になってMcDowell[35, 36] もこの2面モデルの概念を非比例繰返し負荷に適用している。さらに、石川[41]は、負荷面の中心移動をRamberg-Osgood則[43]に適用した独自の繰返し塑性モデルを提案し、引張り・圧縮の繰返し負荷へ適用している[42]。一方Valanis[50-52]は、負荷履歴を考慮したモデルとして内部時間理論 (endochronic theory) を提案している。また、渡部[53,54] は降伏曲面の異方効果を考慮した内部時間理論を提案している。さらに、Ohno [26,27] は非硬化ひずみ領域を考慮した繰返し塑性モデルを提案し切欠丸棒の解析をしている[78]。しかし、いずれの研究も繰返し塑性構成式を定める上で十分系統だった研究とは言えない。

そこで、本章では、第3章で塑性変形により誘起される異方性の降伏曲面に与える影響が明らかになったことから、塑性変形により誘起される異方性を考慮した降伏曲面を塑性ポテンシャルとして用い、新たな時間非依存性の繰返し塑性構成式を構築する。すなわち、Prager-Zieglerの移動硬化則より定める降伏曲面の中心移動と塑性変形により誘起される異方性を考慮した負荷関数を用いて、降伏曲面と塑性ひずみ増分ベクトルとの垂直性から繰返し塑性構成式を導いた。また、降伏曲面の中心から全ての応力経路についての相当応力－相当ひずみ関係にRamberg-Osgood則を適用した。

4・2 塑性構成式の基礎

温度 T のもとでの負荷関数 f は応力テンソル σ_{ij} 、降伏曲面の中心応力テンソル σ_{ij}^c 、塑性ひずみテンソル ε_{ij}^p 、塑性内部変数の一つである硬化パラメータ κ を用いて次式のように表示されると仮定する。

$$f = f(\sigma_{ij}, \sigma_{ij}^c, \varepsilon_{ij}^p, \kappa, T) \dots\dots\dots (4-1)$$

$\bar{\sigma}$ 、 $d\bar{\varepsilon}^p$ 、 dW^p をそれぞれ、相当応力、相当塑性ひずみ増分、塑性仕事増分として、Hill[82]の塑性異方性に関する議論を参照すると等方性材、異方性材を問わず、加工硬化パラメータ $d\kappa$ は次式で表示できる。

$$d\kappa = dW^p = \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^p = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c) d\varepsilon_{ij}^p \dots\dots\dots (4-2)$$

第3章の実験結果（図3・11）を考慮して、降伏曲面上の滑らかな点において、塑性ひずみ増分ベクトルが降伏曲面の法線方向と一致するためには、負荷関数 f を塑性ポテンシャルとして次式が成り立たなければならない。

$$d\varepsilon_{ij}^p = \Lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \dots\dots\dots (4-3)$$

上式は、塑性流れ則を与え、塑性ポテンシャル面への垂直性（normality）として知られている。なお、式（4-3）の正当性は後述するように、熱力学的にも裏付けられている。

式（4-3）の比例係数 Λ は、塑性変形中は応力点が降伏曲面上

に存在すると言う Prager の適合条件 [61] より求める。 κ を ε_{ij}^p の関数と仮定すると、負荷の間次式が成り立つ。

$$d f = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d \sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^c} d \sigma_{ij}^c + \frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d \varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \cdot \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{ij}^p} d \varepsilon_{ij}^p + \frac{\partial f}{\partial T} d T = 0 \quad \dots\dots\dots (4-4)$$

式 (4-3) を式 (4-4) に代入し Λ を求めると次式となる。

$$\Lambda = G \left(\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d \sigma_{kl} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}^c} d \sigma_{kl}^c + \frac{\partial f}{\partial T} d T \right) \quad \dots\dots\dots (4-5)$$

ただし、

$$G = - \frac{1}{\left(\frac{\partial f}{\partial \varepsilon_{ij}^p} + \frac{\partial f}{\partial \kappa} \cdot \frac{\partial \kappa}{\partial \varepsilon_{ij}^p} \right) \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}} \quad \dots\dots\dots (4-6)$$

したがって、式 (4-3) と式 (4-5) より結局、塑性流れ則は次式となる。

$$d \varepsilon_{ij}^p = G \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d \sigma_{kl} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}^c} d \sigma_{kl}^c + \frac{\partial f}{\partial T} d T \right] \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad \dots\dots\dots (4-7)$$

以上のように、塑性ポテンシャル関数 f を用いて塑性ひずみ増分テンソルを算出することができる。

4・3 負荷関数

4・3・1 負荷関数の定義および応力テンソルと異方性テンソル係数の対称性

降伏曲面を塑性ポテンシャルを表す負荷関数として次式のよ
うに仮定する。

$$f = \frac{1}{2} C_{ijkl} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c) (\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c) - \frac{1}{3} \bar{\sigma}^2(\kappa, T) = 0 \quad \dots (4-8)$$

式(4-8)で C_{ijkl} は、塑性変形により誘起される4階異方性テン
ソル係数である。式(4-8)は、 $\Sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c$ とおき展開すると
次式のようにになる。

$$f = \frac{1}{2} [$$

$$C_{1111} \Sigma_{11} \Sigma_{11} + C_{1122} \Sigma_{11} \Sigma_{22} + C_{1133} \Sigma_{11} \Sigma_{33} + C_{1112} \Sigma_{11} \Sigma_{12} + C_{1113} \Sigma_{11} \Sigma_{13} + C_{1121} \Sigma_{11} \Sigma_{21} + C_{1123} \Sigma_{11} \Sigma_{23} + C_{1131} \Sigma_{11} \Sigma_{31} + C_{1132} \Sigma_{11} \Sigma_{32}$$

$$+ C_{2211} \Sigma_{22} \Sigma_{11} + C_{2222} \Sigma_{22} \Sigma_{22} + C_{2233} \Sigma_{22} \Sigma_{33} + C_{2212} \Sigma_{22} \Sigma_{12} + C_{2213} \Sigma_{22} \Sigma_{13} + C_{2221} \Sigma_{22} \Sigma_{21} + C_{2223} \Sigma_{22} \Sigma_{23} + C_{2231} \Sigma_{22} \Sigma_{31} + C_{2232} \Sigma_{22} \Sigma_{32}$$

$$+ C_{3311} \Sigma_{33} \Sigma_{11} + C_{3322} \Sigma_{33} \Sigma_{22} + C_{3333} \Sigma_{33} \Sigma_{33} + C_{3312} \Sigma_{33} \Sigma_{12} + C_{3313} \Sigma_{33} \Sigma_{13} + C_{3321} \Sigma_{33} \Sigma_{21} + C_{3323} \Sigma_{33} \Sigma_{23} + C_{3331} \Sigma_{33} \Sigma_{31} + C_{3332} \Sigma_{33} \Sigma_{32}$$

$$+ C_{1211} \Sigma_{12} \Sigma_{11} + C_{1222} \Sigma_{12} \Sigma_{22} + C_{1233} \Sigma_{12} \Sigma_{33} + C_{1212} \Sigma_{12} \Sigma_{12} + C_{1213} \Sigma_{12} \Sigma_{13} + C_{1221} \Sigma_{12} \Sigma_{21} + C_{1223} \Sigma_{12} \Sigma_{23} + C_{1231} \Sigma_{12} \Sigma_{31} + C_{1232} \Sigma_{12} \Sigma_{32}$$

$$+ C_{1311} \Sigma_{13} \Sigma_{11} + C_{1322} \Sigma_{13} \Sigma_{22} + C_{1333} \Sigma_{13} \Sigma_{33} + C_{1312} \Sigma_{13} \Sigma_{12} + C_{1313} \Sigma_{13} \Sigma_{13} + C_{1321} \Sigma_{13} \Sigma_{21} + C_{1323} \Sigma_{13} \Sigma_{23} + C_{1331} \Sigma_{13} \Sigma_{31} + C_{1332} \Sigma_{13} \Sigma_{32}$$

$$+ C_{2111} \Sigma_{21} \Sigma_{11} + C_{2122} \Sigma_{21} \Sigma_{22} + C_{2133} \Sigma_{21} \Sigma_{33} + C_{2112} \Sigma_{21} \Sigma_{12} + C_{2113} \Sigma_{21} \Sigma_{13} + C_{2121} \Sigma_{21} \Sigma_{21} + C_{2123} \Sigma_{21} \Sigma_{23} + C_{2131} \Sigma_{21} \Sigma_{31} + C_{2132} \Sigma_{21} \Sigma_{32}$$

$$+ C_{2311} \Sigma_{23} \Sigma_{11} + C_{2322} \Sigma_{23} \Sigma_{22} + C_{2333} \Sigma_{23} \Sigma_{33} + C_{2312} \Sigma_{23} \Sigma_{12} + C_{2313} \Sigma_{23} \Sigma_{13} + C_{2321} \Sigma_{23} \Sigma_{21} + C_{2323} \Sigma_{23} \Sigma_{23} + C_{2331} \Sigma_{23} \Sigma_{31} + C_{2332} \Sigma_{23} \Sigma_{32}$$

$$+ C_{3111} \Sigma_{31} \Sigma_{11} + C_{3122} \Sigma_{31} \Sigma_{22} + C_{3133} \Sigma_{31} \Sigma_{33} + C_{3112} \Sigma_{31} \Sigma_{12} + C_{3113} \Sigma_{31} \Sigma_{13} + C_{3121} \Sigma_{31} \Sigma_{21} + C_{3123} \Sigma_{31} \Sigma_{23} + C_{3131} \Sigma_{31} \Sigma_{31} + C_{3132} \Sigma_{31} \Sigma_{32}$$

$$+ C_{3211} \Sigma_{32} \Sigma_{11} + C_{3222} \Sigma_{32} \Sigma_{22} + C_{3233} \Sigma_{32} \Sigma_{33} + C_{3212} \Sigma_{32} \Sigma_{12} + C_{3213} \Sigma_{32} \Sigma_{13} + C_{3221} \Sigma_{32} \Sigma_{21} + C_{3223} \Sigma_{32} \Sigma_{23} + C_{3231} \Sigma_{32} \Sigma_{31} + C_{3232} \Sigma_{32} \Sigma_{32}]$$

$$- \frac{1}{3} \bar{\sigma}^2 = 0 \quad \dots (4-9)$$

式(4-9)で異方性係数 C_{ijkl} は81個あるが、応力テンソルの対
称性を考慮すると、独立な係数は21個となり式(4-9)は次式
になる。

$$\begin{aligned}
f = & \frac{1}{2} [C_{1111}\Sigma_{11}\Sigma_{11} + 2C_{1122}\Sigma_{11}\Sigma_{22} + 2C_{1133}\Sigma_{11}\Sigma_{33} + 4C_{1112}\Sigma_{11}\Sigma_{12} + 4C_{1113}\Sigma_{11}\Sigma_{13} + 4C_{1123}\Sigma_{11}\Sigma_{23} \\
& + C_{2222}\Sigma_{22}\Sigma_{22} + 2C_{2233}\Sigma_{22}\Sigma_{33} + 4C_{2212}\Sigma_{22}\Sigma_{12} + 4C_{2213}\Sigma_{22}\Sigma_{13} + 4C_{2223}\Sigma_{22}\Sigma_{23} \\
& + C_{3333}\Sigma_{33}\Sigma_{33} + 4C_{3312}\Sigma_{33}\Sigma_{12} + 4C_{3313}\Sigma_{33}\Sigma_{13} + 4C_{3323}\Sigma_{33}\Sigma_{23} \\
& + 4C_{1212}\Sigma_{12}\Sigma_{12} + 8C_{1213}\Sigma_{12}\Sigma_{13} + 8C_{1223}\Sigma_{12}\Sigma_{23} \\
& + 4C_{1313}\Sigma_{13}\Sigma_{13} + 8C_{1323}\Sigma_{13}\Sigma_{23} \\
& + 4C_{2323}\Sigma_{23}\Sigma_{23}] - \frac{1}{3}\sigma^2 \\
= & 0 \dots\dots\dots (4-10)
\end{aligned}$$

さらに、等方応力は塑性変形に影響を与えない条件より、式(4-10)の $(\Sigma_{11}, \Sigma_{22}, \Sigma_{33})$ を、静水圧 P を用い $(\Sigma_{11}-P, \Sigma_{22}-P, \Sigma_{33}-P)$ で置き換えた場合、 f は不変でなければならない。この置換を行い、式(4-10)に等値すると次式の関係を得る。

$$\begin{aligned}
& (C_{1111} + 2C_{1122} + 2C_{1133} + C_{2222} + 2C_{2233} + C_{3333})P^2 \\
& - [(2C_{1111} + 2C_{1122} + 2C_{1133})\Sigma_{11} \\
& + (2C_{2222} + 2C_{1122} + 2C_{2233})\Sigma_{22} \\
& + (2C_{3333} + 2C_{1133} + 2C_{2233})\Sigma_{33} \\
& + (4C_{1122} + 4C_{2212} + 4C_{3312})\Sigma_{12} \\
& + (4C_{1113} + 4C_{2213} + 4C_{3313})\Sigma_{13} \\
& + (4C_{1123} + 4C_{2223} + 4C_{3323})\Sigma_{23}]P = 0 \dots\dots\dots (4-11)
\end{aligned}$$

すなわち、式(4-11)より、以下の6個の式が成立するとき静水圧 P 、および応力 Σ_{ij} に無関係に、負荷関数 f は恒等的に満足される。

$$\begin{aligned}
C_{1111} + C_{1122} + C_{1133} &= 0 \\
C_{2222} + C_{1122} + C_{2233} &= 0 \\
C_{3333} + C_{1133} + C_{2233} &= 0 \quad \dots\dots\dots (4-12) \\
C_{1112} + C_{2212} + C_{3312} &= 0 \\
C_{1113} + C_{2213} + C_{3313} &= 0 \\
C_{1123} + C_{2223} + C_{3323} &= 0
\end{aligned}$$

結局、 C_{ijkl} の独立な成分の数は 15 個となる。また、以上のことは次のように求めることもできる。 $\Sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_{ii}^e$ とおき式 (4-8) より次式を得る。

$$f = \frac{1}{2} C_{ijkl} \Sigma_{ij} \Sigma_{kl} - \frac{1}{3} \bar{\sigma}^2 = 0 \quad \dots\dots\dots (4-13)$$

等方応力が塑性変形に影響を与えない条件は次式で与えられる。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{mm}} = 0 \quad \dots\dots\dots (4-14)$$

すなわち、任意の σ_{kl} に対して、 $C_{mmkl} \sigma_{kl} = 0$ とならなければならない。このことは $C_{mmkl} = 0$ 、すなわち式 (4-12) の独立した 6 個の条件式を与えることを示す。

4.3.2 直交異方体の場合

互いに直交する3つの面に関して対称な性質を持つ異方性、すなわち直交異方体の場合、負荷関数がどのようなになるかを考える。

いま、異方性の主軸に一致させて1,2,3-座標をとり、 $\xi = 1$ 、 $\eta = 2$ 、 $\zeta = -3$ の座標変換を考える。異方性の対称性により式(4-10)はこの座標変換に対して不変でなければならない。

いま、 $\Sigma_{\xi\xi} = \Sigma_{11}$ 、 $\Sigma_{\eta\eta} = \Sigma_{22}$ 、 $\Sigma_{\zeta\zeta} = \Sigma_{33}$ 、 $\Sigma_{\eta\zeta} = -\Sigma_{23}$ 、 $\Sigma_{\zeta\xi} = -\Sigma_{31}$ 、 $\Sigma_{\xi\eta} = -\Sigma_{12}$ がこの変換による ξ, η, ζ -座標成分であることに注意すると、次式の異方性係数の関係が導かれる。

$$\begin{aligned} C_{1111} &= C_{1122} = C_{2211} = C_{2233} = C_{3311} = C_{3322} = C_{1212} = C_{1221} \\ &= 0 \dots\dots\dots (4-15) \end{aligned}$$

同様に $\xi = -1$ 、 $\eta = 2$ 、 $\zeta = 3$ 、または、 $\xi = 1$ 、 $\eta = -2$ 、 $\zeta = 3$ の変換により、次式の関係が得られる。

$$C_{1112} = C_{2212} = C_{3312} = C_{1323} = 0 \dots\dots\dots (4-16)$$

式(4-12)、式(4-15)、式(4-16)より直交異方性材料に対して式(4-10)は、次式となる。

$$\begin{aligned} f = \frac{1}{2} & \left[-C_{1122}(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 - C_{2233}(\Sigma_{22} - \Sigma_{33})^2 \right. \\ & - C_{3311}(\Sigma_{33} - \Sigma_{11})^2 + 4C_{1212}\Sigma_{12}\Sigma_{12} + 4C_{1313}\Sigma_{13}\Sigma_{13} \\ & \left. + 4C_{2323}\Sigma_{23}\Sigma_{23} \right] - \frac{1}{3} \bar{\sigma}^2 = 0 \dots\dots\dots (4-17) \end{aligned}$$

式(4-17)は、 $H = C_{1122}$ 、 $F = C_{2233}$ 、 $G = C_{3311}$ 、 $L = 2C_{1212}$ 、 $M = 2C_{1313}$ 、 $N = 2C_{2323}$ 、 $\sigma_x = \Sigma_{11}$ 、 $\sigma_y = \Sigma_{22}$ 、 $\sigma_z = \Sigma_{33}$ 、 $\tau_{xy} = \Sigma_{12}$ 、 $\tau_{yz} = \Sigma_{13}$ 、 $\tau_{zx} = \Sigma_{23}$ とおくと次式で示すHill [82]の降伏条件式と一致する。

$$f = \frac{1}{2} \{ H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 2N\tau_{xy}^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 \} - \frac{1}{3} \bar{\sigma}^2 = 0 \quad \dots\dots\dots(4-18)$$

式(4-18)より相当応力は次式となる。

$$\bar{\sigma} = \left[\frac{3}{2} \{ H(\sigma_x - \sigma_y)^2 + F(\sigma_y - \sigma_z)^2 + G(\sigma_z - \sigma_x)^2 + 2N\tau_{xy}^2 + 2L\tau_{yz}^2 + 2M\tau_{zx}^2 \} \right]^{1/2} \quad \dots\dots\dots(4-19)$$

また相当塑性ひずみ増分は、式(4-2)の関係を用いて式(4-18)より次式となる。

$$d\bar{\epsilon}^p = \left[\frac{2}{3} \left\{ H \left(\frac{Fd\epsilon_x^p - Gd\epsilon_y^p}{GH + HF + FG} \right)^2 + F \left(\frac{Gd\epsilon_y^p - Hd\epsilon_z^p}{GH + HF + FG} \right)^2 + G \left(\frac{Hd\epsilon_z^p - Fd\epsilon_x^p}{GH + HF + FG} \right)^2 + (d\gamma_{xy}^p)^2 / 2N + (d\gamma_{yz}^p)^2 / 2L + (d\gamma_{zx}^p)^2 / 2M \right\} \right]^{1/2} \quad \dots\dots\dots(4-20)$$

4・3・3 回転対称の異方体の場合

回転対称の軸を3軸にとり1,2,3-基軸座標のまわりに θ だけ回転して得られる座標を ξ, η, ζ ($\zeta = 3$) とする。回転対称の場合は、式(4-17)の降伏条件式が、 θ に無関係に次の関係を満足しなければならない。

$$\begin{aligned}
 & -C_{1122}(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 - C_{2233}(\Sigma_{22} - \Sigma_{33})^2 \\
 & - C_{3311}(\Sigma_{33} - \Sigma_{11})^2 + 4C_{1212}\Sigma_{12}\Sigma_{12} + 4C_{1313}\Sigma_{13}\Sigma_{13} \\
 & + 4C_{2323}\Sigma_{23}\Sigma_{23} \\
 & = \\
 & C_{1122}(\Sigma_{\xi\xi} - \Sigma_{\eta\eta})^2 - C_{2233}(\Sigma_{\eta\eta} - \Sigma_{\zeta\zeta})^2 \\
 & - C_{3311}(\Sigma_{\zeta\zeta} - \Sigma_{\xi\xi})^2 + 4C_{1212}\Sigma_{\xi\eta}\Sigma_{\xi\eta} + 4C_{1313}\Sigma_{\xi\zeta}\Sigma_{\xi\zeta} \\
 & + 4C_{2323}\Sigma_{\eta\zeta}\Sigma_{\eta\zeta} \dots\dots\dots (4-21)
 \end{aligned}$$

計算の便宜上、上式を次式のように書き換える。

$$\begin{aligned}
 & [-(C_{3311} + C_{1122})\Sigma_{11}^2 + 2C_{1122}\Sigma_{11}\Sigma_{22} - (C_{2233} + C_{1122})\Sigma_{22}^2 \\
 & + 4C_{1212}\Sigma_{12}\Sigma_{12}] \\
 & + 2(C_{3311}\Sigma_{11} + C_{2233}\Sigma_{22})\Sigma_{33} + (4C_{1313}\Sigma_{13}\Sigma_{13} \\
 & + 4C_{2323}\Sigma_{23}\Sigma_{23}) - (C_{2233} + C_{3311})\Sigma_{33}^2 \\
 & = [-(C_{3311} + C_{1122})\Sigma_{\xi\xi}^2 + 2C_{1122}\Sigma_{\xi\xi}\Sigma_{\eta\eta} \\
 & - (C_{2233} + C_{1122})\Sigma_{\eta\eta}^2 + 4C_{1212}\Sigma_{\xi\eta}\Sigma_{\xi\eta}] \\
 & + 2(C_{3311}\Sigma_{\xi\xi} + C_{2233}\Sigma_{\eta\eta})\Sigma_{\zeta\zeta} + (4C_{1313}\Sigma_{\xi\zeta}\Sigma_{\xi\zeta} \\
 & + 4C_{2323}\Sigma_{\eta\zeta}\Sigma_{\eta\zeta}) - (C_{2233} + C_{3311})\Sigma_{\zeta\zeta}^2 \dots\dots\dots (4-22)
 \end{aligned}$$

ξ, η, ζ -座標における応力成分を、1,2,3-座標の応力成分

で書き表した変換式は次のとおりである。

$$\begin{aligned}
 \Sigma_{\xi\xi} &= \frac{1}{2} (\Sigma_{11} + \Sigma_{22}) + \frac{1}{2} (\Sigma_{11} - \Sigma_{22}) \cos 2\theta + \Sigma_{12} \sin 2\theta \\
 \Sigma_{\eta\eta} &= \frac{1}{2} (\Sigma_{11} + \Sigma_{22}) - \frac{1}{2} (\Sigma_{11} - \Sigma_{22}) \cos 2\theta - \Sigma_{12} \sin 2\theta \\
 \Sigma_{\xi\eta} &= -\frac{1}{2} (\Sigma_{11} - \Sigma_{22}) \sin 2\theta + \Sigma_{12} \cos 2\theta \\
 \Sigma_{\zeta\zeta} &= \Sigma_{33}, \quad \Sigma_{\eta\zeta} = \Sigma_{23} \cos \theta - \Sigma_{31} \sin \theta, \\
 \Sigma_{\xi\zeta} &= \Sigma_{23} \sin \theta + \Sigma_{31} \cos \theta \\
 &\dots\dots\dots(4-23)
 \end{aligned}$$

式(4-22)の右辺に式(4-23)を代入し、式(4-22)の左辺と比較すると、変換後の Σ_{33} の係数が θ に無関係に

$2(C_{3311}\Sigma_{11} + C_{2233}\Sigma_{22})$ となるためには、 $C_{3311} = C_{2233}$ が必要十分条件である。 $C_{3311} = C_{2233}$ を考慮して他の項の係数を求めると、それぞれ次式となる。

$$\begin{aligned}
 &\Sigma_{11}^2 + \Sigma_{22}^2 \text{ の係数;} \\
 &-\frac{1}{2} C_{2233} + \left(-\frac{1}{2} C_{2233} - C_{1122}\right) \cos^2 2\theta + C_{1212} \sin^2 2\theta \\
 &\Sigma_{11} \Sigma_{22} \text{ の係数;} \\
 &-C_{2233} + (C_{2233} + C_{1122}) \cos^2 2\theta - 2C_{1212} \sin^2 2\theta \\
 &\Sigma_{12} \Sigma_{12} \text{ の係数;} \\
 &2(-C_{2233} - 2C_{1122}) \sin^2 2\theta + 4C_{1212} \cos^2 2\theta \\
 &(\Sigma_{11} - \Sigma_{22}) \Sigma_{12} \text{ の係数;} \\
 &2(-C_{2233} - 2C_{1122} - 2C_{1212}) \sin 2\theta \cos 2\theta \quad \dots\dots\dots(4-24)
 \end{aligned}$$

$2C_{1212} = -(C_{2233} + 2C_{1122})$ のとき、 $(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})\Sigma_{12}$ の係数は 0 となる。また、その他の項は左辺に対応する項と一致し、 θ を含まない。一方、 $C_{1313}\Sigma_{55}\Sigma_{55} + C_{2323}\Sigma_{75}\Sigma_{75}$ は座標変換によって次式となる。

$$\begin{aligned} & C_{1313}\Sigma_{55}\Sigma_{55} + C_{2323}\Sigma_{75}\Sigma_{75} \\ &= \Sigma_{23}\Sigma_{23}(C_{1313}\sin^2\theta + C_{2323}\cos^2\theta) \\ &+ \Sigma_{13}\Sigma_{13}(C_{1313}\cos^2\theta + C_{2323}\sin^2\theta) \\ &+ \Sigma_{13}\Sigma_{23}(C_{1313} - C_{2323})\sin 2\theta \quad \dots\dots\dots(4-25) \end{aligned}$$

この場合も $C_{1313} = C_{2323}$ の時、左辺の対応する項と一致する。

以上のように、回転対称軸を 3 軸にとると異方性パラメータの間に次式の関係が成立する。

$$C_{3311} = C_{2233}, \quad 2C_{1212} = -(C_{2233} + 2C_{1122}) \quad \dots\dots\dots(4-26)$$

また、回転対称軸を 2 軸にとると次式の関係が成立する。

$$C_{2233} = C_{1122}, \quad 2C_{1313} = -(C_{1122} + 2C_{1133}) \quad \dots\dots\dots(4-27)$$

さらに、回転対称軸を 1 軸にとると次式の関係が成立する。

$$C_{1122} = C_{3311}, \quad 2C_{2323} = -(C_{3311} + 2C_{2233}) \quad \dots\dots\dots(4-28)$$

したがって、特に、 $-3C_{1122} = -3C_{2233} = -3C_{3311}$
 $= 2C_{1212} = 2C_{2323} = 2C_{3131} = 1$ の関係が成立するとき式(4-17)は次式で示す von Mises の降伏条件式となる。

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} [(\Sigma_{11} - \Sigma_{22})^2 + (\Sigma_{22} - \Sigma_{33})^2 + (\Sigma_{33} - \Sigma_{11})^2 \\ &+ 6(\Sigma_{12}\Sigma_{12} + \Sigma_{23}\Sigma_{23} + \Sigma_{31}\Sigma_{31})] = \bar{\sigma}^2 \quad \dots\dots\dots(4-29) \end{aligned}$$

また、この時の異方性パラメータは式(4-12)よりそれぞれ次式となる。

$$C_{1111} = C_{2222} = C_{3333} = \frac{2}{3},$$

$$C_{1212} = C_{2323} = C_{3131} = \frac{1}{2} \quad \dots\dots\dots (4-30)$$

4・4 塑性ひずみ増分ベクトルの垂直性に関する熱力学的考察

塑性ひずみ増分ベクトルの降伏曲面への垂直性は、Martin [83]により考察されており、その概略を以下に示す。

微小変形中になされた仕事増分 dW は、応力 σ_{ij} 、ひずみ増分 $d\varepsilon_{ij}$ とすると、単位体積当り次式で表せる。

$$dW = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} \dots\dots\dots (4-31)$$

非弾性体内の微細構造の再配置（変化）を規定する内部変数を $\chi_n (n=1, 2, \dots, N)$ とすると、Helmholtz の単位体積当りの自由エネルギーは次式で与えられる。

$$F = F(T, \varepsilon_{ij}, \chi_n) \dots\dots\dots (4-32)$$

ここで T は温度である。熱力学変数の微小変化に伴う Helmholtz の自由エネルギーの変化は次式となる。

$$dF = -SdT + \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \chi_n} d\chi_n \dots\dots\dots (4-33)$$

上式で S は単位質量当りのエントロピーであり、次式で表せる。

$$S = - \frac{\partial F}{\partial T} \dots\dots\dots (4-34)$$

また、可逆仕事 dW^R は式 (4-33) より次式となる。

$$dW^R = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} d\varepsilon_{ij} + \frac{\partial F}{\partial \chi_n} d\chi_n \dots\dots\dots (4-35)$$

すなわち、 ε_{ij} に共役な応力が σ_{ij} であるので、式(4-35)より次式が成り立つ。

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial F}{\partial \varepsilon_{ij}} \dots\dots\dots (4-36)$$

内部構造の変化を生ずる原因として、内部でなんらかの力が作用したためと考えられる。そこで、 χ_n に共役なそのような力を、熱力学的力と総称し Z_n とすると Z_n は次式で表せる。

$$Z_n = - \frac{\partial F}{\partial \chi_n} \dots\dots\dots (4-37)$$

したがって、式(4-35)は次式となる。

$$dW^R = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} - Z_n d\chi_n \dots\dots\dots (4-38)$$

式(4-36)、式(4-37)は非弾性体の状態式である。

内部変数 χ_n の変化割合を規定する動力学的関係を次式のよう
に仮定する。

$$\dot{\chi}_n = \dot{\chi}_n(T, Z_n, \chi_n) \dots\dots\dots (4-39)$$

上式を移行方程式と呼ぶ。内部散逸によるエントロピ生成速度は、次式で与えられる。

$$\dot{\zeta} \equiv \sigma_{ij} \dot{\varepsilon}_{ij} - \dot{W}^R = Z_n \dot{\chi}_n \dots\dots\dots (4-40)$$

上式で $\dot{\zeta}$ は負になることがないから、移行方程式(4-39)には次式で示される熱力学的制約を受ける。

$$Z_n \dot{\chi}_n \geq 0 \dots\dots\dots (4-41)$$

式(4-36)、式(4-37)、式(4-39)は広範囲な非弾性体に適用可能である。これらの式より χ_n と ε_n を消去することにより、いわゆる構成式が導き出される。

材料に微細構造の再配置が生じない場合、その応答は弾性であることが必要条件となる。すなわち、任意の温度 T に対して χ_n が一定であることを意味し、 M_{ijkl} を定数とすると次式が成り立つ。

$$d\varepsilon_{ij} = M_{ijkl} d\sigma_{kl} \dots\dots\dots (4-42)$$

また、任意の σ_{ij} に対して χ_n が一定であることは、 α_{ij} を定数とすると次式が成り立つことを意味する。

$$d\varepsilon_{ij} = \alpha_{ij} dT \dots\dots\dots (4-43)$$

すなわち、全ひずみ ε_{ij} は次式で表せることが分かる。

$$\varepsilon_{ij} = M_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} (T - T^0) + \varepsilon_{ij}^p(\chi_n) \dots\dots\dots (4-44)$$

上式で、 ε_{ij}^p はひずみの非弾性成分である。ひずみの弾性成分を ε_{ij}^e とすると、 ε_{ij}^e は式(4-44)より次式で表せる。

$$\varepsilon_{ij}^e(T, \sigma_{ij}) = M_{ijkl} \sigma_{kl} + \alpha_{ij} (T - T^0) \dots\dots\dots (4-45)$$

したがって、式(4-44)は次式となる。

$$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial \chi_n} d\chi_n \dots\dots\dots (4-46)$$

式(4-46)を用いて、式(4-33)を書き改めると、式(4-36)、式(4-37)を考慮して次式となる。

$$\begin{aligned}
 dF &= -SdT + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e + \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial \chi_n} d\chi_n - Z_n d\chi_n \\
 &= -SdT + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e + \left(\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial \chi_n} - Z_n \right) d\chi_n \dots\dots\dots (4-47)
 \end{aligned}$$

式(4-45)より、 σ_{ij} は ε_{ij}^e と T のみに依存するので、次のポテンシャル関数が存在する。

$$F^e = F^e(T, \varepsilon_{ij}^e) \dots\dots\dots (4-48)$$

$$dF^e = -S^e dT + \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e \dots\dots\dots (4-49)$$

式(4-47)と式(4-49)を比較すると次式を仮定することができる。

$$F = F^e(T, \varepsilon_{ij}^e) + F^p(T, \chi_n) \dots\dots\dots (4-50)$$

ここで、 dF^p は次式となる。

$$dF^p = -S^p dT + \frac{\partial F^p}{\partial \chi_n} d\chi_n \dots\dots\dots (4-51)$$

全エントロピー S はエントロピーの弾性成分と非弾性成分の和であり、次式で示される。

$$S = S^e + S^p \dots\dots\dots (4-52)$$

式(4-52)を考慮して式(4-47)、式(4-50)、式(4-51)より次式を得る。

$$\sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial \chi_n} - Z_n = \frac{\partial F^p}{\partial \chi_n} \dots\dots\dots (4-53)$$

上式を書き換えて次式を得る。

$$Z_n = \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial \chi_n} - \frac{\partial F^p}{\partial \chi_n} \dots\dots\dots (4-54)$$

次に、微細構造再配置の原因となる熱力学的力 Z_n が応力 σ_{ij} の一次式となっていることに注目し、上式を σ_{ij} で微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial Z_n}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial \chi_n} \dots\dots\dots (4-55)$$

すなわち、 Z_n の σ_{ij} への依存を知ることにより、 ε_{ij}^p の χ_n への依存を規定でき、またその逆も可能である。

材料の非弾性挙動は移行方程式(4-39)に支配される。式(4-39)が、ある温度 T 、 χ_n に対する Z_n のポテンシャル関数から導出可能であるなら、式(4-39)が次式のように書けると仮定できる。

$$\dot{\chi}_n = \frac{\partial P(T, Z_n, \chi_n)}{\partial Z_n} \dots\dots\dots (4-56)$$

ここで、 P はポテンシャル関数である。上式と式(4-55)から次式を得る。

$$\begin{aligned} \dot{\varepsilon}_{ij}^p &= \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial \chi_n} \dot{\chi}_n = \frac{\partial P}{\partial Z_n} \cdot \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial \chi_n} = \frac{\partial P}{\partial Z_n} \cdot \frac{\partial Z_n}{\partial \sigma_{ij}} \\ &= \frac{\partial P(T, \sigma_{ij} \frac{\partial \varepsilon_{ij}^p}{\partial \chi_n} - \frac{\partial F^p}{\partial \chi_n}, \chi_n)}{\partial \sigma_{ij}} \dots\dots (4-57) \end{aligned}$$

上式より、非弾性ひずみ速度は、与えられた T 、 χ_n に対し、応力空間のポテンシャル関数の勾配として表示されることが分

かる。つまり、 $\partial P / \partial \sigma_{ij}$ が連続なら、 ε_{ij}^p はポテンシャル関数のあるレベル面に対して垂直になることを意味する。すなわち、塑性ひずみ増分ベクトルと降伏曲面との垂直性が明らかである。

以上により、式(4-3)が熱力学的に裏付けられた。

4・5 塑性流れ則と降伏曲面の中心移動

4・5・1 塑性流れ則

4・2節に述べた手順にしたがって負荷関数(4-8)に関連する塑性流れ則を求める。

式(4-8)を σ_{ij} で偏微分すると次式を得る。

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} = C_{ijk} (\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c) \dots\dots\dots (4-58)$$

したがって、式(4-7)は次式となる。

$$d\varepsilon_{ij}^p = G \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^c} d\sigma_{ij}^c + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right] C_{ijk} (\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c) \dots\dots (4-59)$$

式(4-2)の関係に注意して、上式より次式を得る。

$$\begin{aligned} dW^p &= \bar{\sigma} d\bar{\varepsilon}^p = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c) d\varepsilon_{ij}^p \\ &= G \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^c} d\sigma_{ij}^c + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right] C_{ijk} (\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c) (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c) \\ &= G \left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^c} d\sigma_{ij}^c + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right] \frac{2}{3} \bar{\sigma}^2 \dots\dots\dots (4-60) \end{aligned}$$

したがって、上式よりGは次式で表される。

$$G = \frac{\frac{3 d\bar{\varepsilon}^p}{2 \bar{\sigma}}}{\left[\frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} + \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}^c} d\sigma_{ij}^c + \frac{\partial f}{\partial T} dT \right]} \dots\dots\dots (4-61)$$

式(4-61)を式(4-59)に代入し、次式を得る。

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3d\bar{\varepsilon}^p}{2\bar{\sigma}} C_{ijkl} (\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c) \dots\dots\dots (4-62)$$

式(4-62)が、降伏曲面の中心が移動し、しかも降伏曲面が塑性変形により誘起される異方性によってゆがみ、回転する例として負荷関数 f が式(4-8) で与えられる場合の塑性流れ則である。

式(4-62)の偏差応力表示について考える。いま、式(4-62)は $\Sigma_{ij} = \sigma_{ij} - \sigma_m^c$ 、 $S_{ij} = s_{ij} - s_{ij}^c$ 、 $S_{ij} = \Sigma_{ij} - \delta_{ij} P$ とすると次式となる。

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3d\bar{\varepsilon}^p}{2\bar{\sigma}} C_{ijkl} (S_{kl} + \delta_{kl} P) \dots\dots\dots (4-63)$$

ただし、 $P = \sigma_m - \sigma_m^c$ 、 δ_{ij} はクロネッカ・デルタである。また、 σ_m は平均応力である。上式より、例えば、

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{11}^p &= \frac{3d\bar{\varepsilon}^p}{2\bar{\sigma}} C_{11kl} (S_{kl} + \delta_{kl} P) \\ &= \frac{3d\bar{\varepsilon}^p}{2\bar{\sigma}} [C_{1111}S_{11} + C_{1122}S_{22} + C_{1133}S_{33} \\ &\quad + P(C_{1111} + C_{1122} + C_{1133}) \\ &\quad + 2(C_{1112}S_{12} + 2C_{1123}S_{23} + 2C_{1131}S_{31})] \dots\dots (4-64) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{12}^p &= \frac{3d\bar{\varepsilon}^p}{2\bar{\sigma}} C_{12kl} (S_{kl} + \delta_{kl} P) \\ &= \frac{3d\bar{\varepsilon}^p}{2\bar{\sigma}} [C_{1211}S_{11} + C_{1222}S_{22} + C_{1233}S_{33} \\ &\quad + P(C_{1211} + C_{1222} + C_{1233}) \\ &\quad + 2(C_{1212}S_{12} + 2C_{1223}S_{23} + 2C_{1231}S_{31})] \dots\dots (4-65) \end{aligned}$$

となる。式(4-12)の異方性パラメータの関係から、上式はそれぞれ次式となる。

$$d\varepsilon_{11}^p = \frac{3d\bar{\varepsilon}^p}{2\bar{\sigma}} C_{11k1} S_{k1}, \quad d\varepsilon_{12}^p = \frac{3d\bar{\varepsilon}^p}{2\bar{\sigma}} C_{12k1} S_{k1} \cdots (4-66)$$

したがって、他の成分も同様であり、結局式(4-63)は次式となる。

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3d\bar{\varepsilon}^p}{2\bar{\sigma}} C_{ijkl} S_{kl} = \frac{3d\bar{\varepsilon}^p}{2\bar{\sigma}} C_{ijkl} (s_{kl} - s_{kl}^c) \cdots \cdots (4-67)$$

このように、式(4-62)は式(4-67)のように偏差応力成分でも表せる。等方体でなおかつ降伏曲面の中心移動を考えない場合は、次式のようになり、従来のPrandtl-Reussの式に帰一する。

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{3d\bar{\varepsilon}^p}{2\bar{\sigma}} s_{ij} \cdots \cdots (4-68)$$

4・5・2 降伏曲面の中心移動

降伏曲面の中心移動 $d\sigma_{ij}^c$ は相当応力 $\bar{\sigma}$ の増減に影響される。

式(4-8)より次式を得る。

$$d f = \frac{1}{2} C_{ijkl} \{ (d\sigma_{ij} - d\sigma_{ij}^c)(\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c) + (d\sigma_{kl} - d\sigma_{kl}^c)(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c) \} \\ - \frac{1}{3} \bar{\sigma} d\bar{\sigma} = 0 \quad \dots\dots\dots (4-69)$$

4・2・1 節で示した C_{ijkl} の対称性を考慮すると、上式は次式のよう
に書き表すことができる。

$$C_{ijkl}(\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c)(d\sigma_{ij} - d\sigma_{ij}^c) - \frac{2}{3} \bar{\sigma} d\bar{\sigma} = 0 \quad \dots\dots\dots (4-70)$$

式(4-70)を書き改めると次式となる。

$$C_{ijkl}(\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c)d\sigma_{ij}^c = C_{ijkl}(\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c)d\sigma_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\sigma} d\bar{\sigma} \quad \dots\dots\dots (4-71)$$

降伏曲面の中心移動 $d\sigma_{ij}^c$ の方向が各瞬間の中心 σ_{ij}^c と負荷点 σ_{ij}
とを結ぶ径ベクトルに一致するとした次式の Prager-Ziegler の
仮定[61,62]を用いる。

$$d\sigma_{ij}^c = (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c)d\mu \quad \dots\dots\dots (4-72)$$

式(4-72)を式(4-71)に代入して次式を得る。

$$C_{ijkl}(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c)(\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c)d\mu = C_{ijkl}(\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c)d\sigma_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\sigma} d\bar{\sigma} \\ \dots\dots\dots (4-73)$$

式(4-8) と上式より式(4-72)の $d\mu$ は次式となる。

$$d\mu = \frac{3}{2\bar{\sigma}^2} [C_{ijkl}(\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c) d\sigma_{ij} - \frac{2}{3} \bar{\sigma} \left(\frac{d\bar{\sigma}}{dW^p} \right) dW^p] \quad \dots (4-74)$$

上式を式(4-72)に代入し、 $dW^p = (\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c) d\varepsilon_{kl}^p$ の関係より降伏曲面の中心移動は次式となる。

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij}^c &= \frac{3}{2\bar{\sigma}^2} [C_{ijkl}(\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c) d\sigma_{kl}] (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c) \\ &\quad - \left(\frac{2}{3} \bar{\sigma} \frac{d\bar{\sigma}}{dW^p} \right) \left(\frac{3}{2\bar{\sigma}^2} \right) (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c) (\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c) d\varepsilon_{kl}^p \quad \dots (4-75) \end{aligned}$$

上式に(4-62)を代入し次式を得る。

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij}^c &= \frac{3}{2\bar{\sigma}^2} [C_{ijkl}(\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c) d\sigma_{kl}] (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c) \\ &\quad - \left(\frac{2}{3} \bar{\sigma} \frac{d\bar{\sigma}}{dW^p} \right) \left(\frac{3}{2\bar{\sigma}^2} \right) (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c) (\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c) \\ &\quad \times \frac{3d\bar{\varepsilon}^p}{2\bar{\sigma}} C_{ijkl}(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c) \quad \dots (4-76) \end{aligned}$$

上式と式(4-70)より、結局降伏曲面の中心移動は次式となる。

$$\begin{aligned} d\sigma_{ij}^c &= \frac{3}{2\bar{\sigma}^2} [C_{ijkl}(\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c) d\sigma_{kl}] (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c) - \left(\frac{d\bar{\sigma}}{dW^p} \right) (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c) d\bar{\varepsilon}^p \\ &\quad \dots (4-77) \end{aligned}$$

式(4-62)と式(4-77)は本塑性構成式の塑性流れ則と降伏曲面の中心移動を与える。すなわち、相当応力 $\bar{\sigma}$ と塑性仕事 W^p の関係が分かると式(4-62)、式(4-77)は具体的な形で表示される。

負荷、除荷、再負荷、繰返し負荷を受ける場合の応力-ひずみ関係がすべて降伏曲面の中心移動を考慮した次式のRamberg-Osgood則の形で表示されたとする。

$$\varepsilon_t - \varepsilon_t^c = \frac{\sigma_t - \sigma_t^c}{E} \left[1 + K \left\{ \frac{\sigma_t - \sigma_t^c}{\sigma_{o(n)}} \right\}^{m(n)} \right] \quad \dots\dots\dots (4-78)$$

ε_t 、 σ_t 、 σ_t^c 、 ε_t^c は単軸のひずみ、応力と降伏曲面の中心応力、ひずみである。 K は定数であり、 $\sigma_{o(n)}$ 、 $m(n)$ は以前に $n-1$ 回の負荷履歴を受けた後に ε_o の塑性ひずみの生ずるときの単軸応力と硬化・軟化のパラメータである。また、 K と ε_o には $K = E \varepsilon_o / \sigma_{o(n)}$ の関係がある。

$\sigma_{o(n)}$ 、 $m(n)$ はそれぞれ次式に示すようにそれまでに受けた塑性仕事のみに依存すると仮定する。

$$\sigma_{o(n)} = \sigma_{o(\infty)} \left[1 \mp \alpha \exp \left\{ - \frac{W_{(n-1)}^p}{W_o} \right\} \right] \quad (n \geq 3) \quad \dots\dots\dots (4-79)$$

$$m(n) = m(\infty) \left[1 \mp \beta \exp \left\{ - \frac{W_{(n-1)}^p}{W_1} \right\} \right] \quad (n \geq 3) \quad \dots\dots\dots (4-80)$$

式(4-79)、式(4-80)で $\sigma_{o(\infty)}$ 、 $m(\infty)$ 、 α 、 β 、 W_o 、 W_1 は負荷履歴に依存する定数、 $W_{(n-1)}^p$ は $n-1$ 回の負荷履歴によって蓄積された塑性仕事である。また、式(4-79)、式(4-80)で α 、 β

は正の値であり、 α の前の符号が負である場合には加工硬化を意味し、正の場合には加工軟化を意味する。

相当応力－相当塑性ひずみは式(4-78)より、次式で表せると仮定する。

$$\bar{\varepsilon}^p = \frac{K}{E} \left\{ \frac{1}{\sigma_{o(n)}} \right\}^{m(n)} \cdot \bar{\sigma}^{m(n)+1} \dots\dots\dots (4-81)$$

上式の両辺を全微分すると次式を得る。

$$d\bar{\varepsilon}^p = \frac{K}{E} \{m(n)+1\} \left\{ \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{o(n)}} \right\}^{m(n)} \cdot d\bar{\sigma} \dots\dots\dots (4-82)$$

また、式(4-82)と式(4-70)より次式を得る。

$$d\bar{\varepsilon}^p = B \left\{ \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{o(n)}} \right\}^{m(n)} \cdot \frac{1}{\bar{\sigma}} [C_{ijkl}(\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c)(d\sigma_{kl} - d\sigma_{kl}^c)] \dots\dots\dots (4-83)$$

上式でBは次式で与えられる。

$$B = \frac{2K}{3E} \{m(n)+1\} \dots\dots\dots (4-84)$$

先に述べたように $\sigma_{o(n)}$ はn-1回の負荷履歴を受けた後に ε_o の永久ひずみの生ずる応力であるが、本研究では、できるだけ広範囲のひずみ振幅にRamberg-Osgood則が適用できるように ε_o を $500\mu m/m$ とする。

式(4-83)を式(4-62)に代入し、次の塑性ひずみ増分が求められる。

$$d\epsilon_{ij}^p = B \left\{ \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{o(n)}} \right\}^{m(n)} \frac{3}{2 \bar{\sigma}^2} [C_{mkl}(\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c)(d\sigma_{kl} - d\sigma_{kl}^c)] \\ \times C_{ijkl}(\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c) \dots\dots\dots (4-85)$$

式(4-85)がRamberg-Osgood則形硬化材の塑性ひずみ増分を与える。なお、式(4-81)から式(4-82)を導く際に $\sigma_{o(n)}$ 、 $m(n)$ は定数として扱っているが、式(4-79)、式(4-80)の $W^p_{(n-1)}$ がそれまでに蓄積された塑性仕事であり、現段階ではその量により定められる $\sigma_{o(n)}$ 、 $m(n)$ を有すること、すなわち、各段階毎に $\sigma_{o(n)}$ 、 $m(n)$ は一定の値をとることによる。

相当応力 $\bar{\sigma}$ が降伏応力以上であるなら塑性変形の状態にあり、前段階より新に蓄積された塑性仕事 ΔW^p により $\bar{\sigma}$ は降伏曲面上の式(4-79)と同じ形の式で表される。つまり、塑性仕事を負荷履歴のパラメータとして相当応力 $\bar{\sigma}$ は次式で表せると仮定できる。

$$\bar{\sigma} = \bar{\sigma}(\infty) \left[1 \mp \alpha \exp \left\{ - \frac{W^p}{W_0} \right\} \right] \dots\dots\dots (4-86)$$

ここで、 $W^p = W^p_{(n-1)} + \Delta W^p$ である。また、上式より次式を得る。

$$\frac{d\bar{\sigma}}{dW^p} = \pm \bar{\sigma}(\infty) \frac{\alpha}{W_0} \exp \left(- \frac{W^p}{W_0} \right) \dots\dots\dots (4-87)$$

また、式(4-77)に式(4-83)、式(4-87)を代入し次式の降伏曲面の中心移動増分を得る。

$$\begin{aligned}
d\sigma_{ij}^c &= \frac{3}{2\bar{\sigma}^2} [C_{ijkl}(\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c) d\sigma_{kl}] (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c) \\
\mp \bar{\sigma}(\infty) \frac{\alpha}{W_0} \exp\left(-\frac{W^p}{W_0}\right) B\left\{\frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{o(n)}}\right\}^{m(n)} \cdot \frac{1}{\bar{\sigma}} \\
&\times [C_{ijkl}(\sigma_{kl} - \sigma_{kl}^c)(d\sigma_{ij} - d\sigma_{ij}^c)] (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^c) \dots\dots\dots (4-88)
\end{aligned}$$

以上のように、全ての負荷経路の応力-ひずみ関係に、降伏曲面の中心からRamberg-Osgood則を適用した場合、塑性ひずみ増分、降伏曲面の中心移動は、式(4-85)、式(4-88)でそれぞれ与えられる。

4・7 引張り・圧縮とねじりの組合わせ負荷への適用

本研究では、繰返し負荷として引張り・圧縮とねじりの組合わせ負荷を行った。そこで、引張り・圧縮とねじりの組合わせ負荷の場合の負荷関数、塑性ひずみ増分、降伏曲面の中心移動について表示する。

(i) 降伏曲面は式(4-8)は、引張り・圧縮とねじりの組合わせ負荷を受ける場合、次式で表せる。

$$C_t(\sigma_t - \sigma_t^c)^2 + 4C_{ts}(\sigma_t - \sigma_t^c)(\tau - \tau^c) + 4C_s(\tau - \tau^c)^2 \\ = \frac{2\bar{\sigma}^2}{3} \dots\dots\dots(4-89)$$

上式で、 $C_t = C_{1111}$ 、 $C_{ts} = C_{1112} = C_{1211} = C_{2111} = C_{1121}$ 、 $C_s = C_{1212} = C_{2112} = C_{1221} = C_{2121}$ であり、等方性材に対しては、 $C_t = 2/3$ 、 $C_{ts} = 0$ 、 $C_s = 1/2$ である。また、 τ 、 τ^c はそれぞれせん断応力と降伏曲面の中心のせん断応力である。

(ii) 軸方向の塑性ひずみ増分と降伏曲面の中心移動は、式(4-85)、式(4-88)よりそれぞれ次式で表せる。

$$d\varepsilon_t^p = B \left\{ \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{o(n)}} \right\}^{m(n)} \cdot \frac{3}{2\bar{\sigma}^2} [C_t \sigma d\sigma + 2C_{ts} \sigma ds + 2C_{st} s d\sigma \\ + 4C_s s ds] (C_t \sigma + 2C_{ts} s) \dots\dots\dots(4-90)$$

$$\begin{aligned}
d\sigma_t^c &= \frac{3}{2\bar{\sigma}^2} [C_t \sigma d\sigma_t + 2C_{ts} \sigma d\tau + 2C_{st} s d\sigma_t + 4C_s s d\tau] \sigma \\
&\mp \bar{\sigma}(\infty) \frac{\alpha}{W_0} \exp\left(-\frac{W^P}{W_0}\right) B \left\{ \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{o(n)}} \right\}^{m(n)} \frac{1}{\bar{\sigma}} \\
&\times [C_t \sigma d\sigma + 2C_{ts} \sigma ds + 2C_{st} s d\sigma + 4C_s s ds] \sigma \\
&\dots\dots\dots(4-91)
\end{aligned}$$

式(4-90)、式(4-91)で $\sigma = \sigma_t - \sigma_t^c$ 、 $s = \tau - \tau^c$ である。

(iii) せん断方向の塑性ひずみ増分と降伏曲面の中心移動は同様に、式(4-85)、式(4-88)より次式となる。

$$\begin{aligned}
d\tau^p &= 2B \left\{ \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{o(n)}} \right\}^{m(n)} \frac{3}{2\bar{\sigma}^2} [C_t \sigma d\sigma + 2C_{ts} \sigma ds + 2C_{st} s d\sigma \\
&+ 4C_s s ds] (C_{st} \sigma + 2C_s s) \dots\dots\dots(4-92)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d\tau^c &= \frac{3}{2\bar{\sigma}^2} [C_t \sigma d\sigma_t + 2C_{ts} \sigma d\tau + 2C_{st} s d\sigma_t + 4C_s s d\tau] s \\
&\mp \bar{\sigma}(\infty) \frac{\alpha}{W_0} \exp\left(-\frac{W^P}{W_0}\right) B \left\{ \frac{\bar{\sigma}}{\sigma_{o(n)}} \right\}^{m(n)} \frac{1}{\bar{\sigma}} \\
&\times [C_t \sigma d\sigma + 2C_{ts} \sigma ds + 2C_{st} s d\sigma + 4C_s s ds] s \\
&\dots\dots\dots(4-93)
\end{aligned}$$

(iv) 第3章で比例繰返し負荷、非比例繰返し負荷により、降伏曲面が、ゆがみ、回転、移動することを示した。このような降伏曲面の変形挙動を式(4-89)で表示すると異方性パラメータ C_t 、 C_{ts} 、 C_s は以下のようなになる。例えば、第1経路として引張り・圧縮の繰返し負荷を選び、引張り・圧縮とねじりの繰返し負荷を交互に行う負荷の場合、つまり、図2・13の負荷について考えてみる。その時の降伏曲面のゆがみと回転(図3・13)

を考慮すると、異方性パラメータはそれぞれ次式で表示される。

$$\begin{aligned}
 C_t &= \frac{2}{3} \left\{ \cos^2 \omega + \frac{Y^2}{(\sqrt{3} k)^2} \sin^2 \omega \right\} \\
 C_{ts} &= \frac{1}{\sqrt{3}} \left\{ 1 - \frac{Y^2}{(\sqrt{3} k)^2} \right\} \sin \omega \cos \omega \\
 C_s &= \frac{1}{2} \left\{ \sin^2 \omega + \frac{Y^2}{(\sqrt{3} k)^2} \cos^2 \omega \right\}
 \end{aligned}
 \dots\dots\dots (4-94)$$

上式で Y 、 k は、比例繰返し負荷時の引張り・圧縮とねじりのそれぞれの降伏応力であり、 ω は降伏曲面の回転角度である。
 また、第1経路としてねじりの繰返し負荷を選んだ場合、異方性パラメータは式(4-94)で Y と $\sqrt{3}k$ を入れ換えた形で表示できる。このように実験から求めた降伏曲面の挙動から、式(4-94)を用いて異方性パラメータを決定することができる。

本章では、繰返し負荷を受ける材料の塑性変形挙動を記述するために、繰返し塑性構成式を構築した。その際に、比例繰返し負荷および非比例繰返し負荷による材料の特徴的な変形挙動を記述できるように、塑性変形により誘起される異方性を考慮した降伏曲面を塑性ポテンシャルとして用いた。その結果、以下の結論を得た。

(1) Prager-Zieglerの移動硬化則より定める降伏曲面の中心移動と塑性変形により誘起される異方性を考慮した負荷関数を用いて、降伏曲面と塑性ひずみ増分ベクトルとの垂直性から繰返し塑性構成式を導くことができた。また、降伏曲面の中心から全ての応力経路についての相当応力－相当ひずみ関係にRamberg-Osgood則を適用した。

(2) 構成式で用いた材料定数が実験により簡単に定められる形で表示できた。

(3) 塑性変形により誘起される異方性のパラメータを、実験より得られる降伏曲面の変形挙動から直接決定できた。

(4) (1)～(3)より、本構成式は、比例繰返し負荷のみならず、非比例繰返し負荷をも記述できる可能性を見いだした。また、本構成式は、有限要素法などの数値解析のプログラムに組み込み易い形で求められた。

第5章 繰返し塑性構成式によるシミュレーション

5・1 緒 言

第1章でも述べたように、これまでに繰返し塑性構成式に関する研究は数多くある。しかし、非比例繰返し負荷、中でも円サイクル負荷やメカニカルラチェットなどを、正確に記述できる構成式はいまだ見あたらない。例えば、Nouailhas[38]らは、円サイクル負荷へ構成式を適用しているが、その実験的裏付けが不十分である。さらに、香川[57]らはMiller[56]のモデルを、また、Shiratori[11]らは独自のモデルをそれぞれメカニカルラチェット変形挙動に適用しているが、いずれの場合もそのシミュレーションが正確であるとは言えない。そのため、Chaboche[67]は、円サイクル負荷やメカニカルラチェット変形挙動は従来の構成式ではその記述が困難であると断言している。

本章では、第4章で構築した繰返し塑性構成式を第2章、第3章の繰返し負荷実験に適用し、提案した構成式の妥当性について検証する。まず、比例繰返し負荷に本構成式を適用し、その特徴的な硬化挙動が表示可能であることを示し、さらに、比例繰返し負荷時の材料定数のひずみ振幅依存性について論ずる。また、繰返し負荷後に負荷経路を変えて再負荷を行ったときの応力-ひずみ関係から、材料定数の負荷方向の依存性について

も調べる[84]。ついで、第3章で明らかになった、降伏曲面のゆがみ、並進、回転を考慮することにより、引張り・圧縮とねじりの繰返し負荷を交互に行う負荷による材料の塑性変形挙動を、提案した構成式により正確に表示できることを示す。さらに、非比例繰返し負荷の中でも特に、従来の構成式では記述が難しいと言われている円サイクル負荷、メカニカルラチェットなどによる材料の塑性変形挙動も、繰返し負荷時の降伏曲面のゆがみ、回転を考えることにより、本構成式で十分表示可能であることを示す。

5・2 比例繰返し負荷への適用

5・2・1 材料定数の決定方法

比例繰返し負荷に本構成式を適用する場合、式(4-79)、式(4-80)の材料定数 $\sigma_{o(\infty)}$ 、 $m(\infty)$ 、 α 、 β 、 W_0 、 W_1 を次のように決定する。

式(4-79)は、 $n \geq 3$ に対して有効であるが、負荷面の中心移動が $n \geq 2$ では未知のため $\sigma_{o(3)}$ は実験結果より測定できない。しかし、3・2節で述べたように、1サイクル目の中心移動量は実験より近似的に測定できるので、 $\sigma_{o(2)}$ を実験により定めることが可能である。そこで、 $\sigma_{o(2)}$ を用い第1近似として $\sigma_{o(3)} = \sigma_{o(2)}$ 、さらに $W^P_{(2)} = 0$ とし、式(4-79)と図5・1より次式を得る。

$$\frac{\sigma_{o(2)}}{\sigma_{o(\infty)}} = 1 + \alpha \dots\dots\dots(5-1)$$

$$\frac{\Delta \sigma_B}{\Delta \sigma_A} = \exp \left\{ - \frac{\sigma_{o(\infty)}}{W_0} \cdot 2n \cdot \Delta \varepsilon^P \right\} \dots\dots\dots(5-2)$$

ここで、 $\Delta \varepsilon^P$ は塑性ひずみ振幅、 $\Delta \sigma_A$ 、 $\Delta \sigma_B$ はそれぞれ安定時のループ端応力と図5・1中の点A、点Bでの応力との差である。また、 $n = n_A - n_B$ である。式(5-2)より第1近似とした $W_0 / \sigma_{o(\infty)}$ が得られる。次に、式(5-1)を用いて $\sigma_{o(\infty)}$ を逐次仮定し α を算定する。この近似的に算出した $\sigma_{o(\infty)}$ と α の

2つの値を用いてシミュレーションを行った結果と実験結果とを比較し、実験結果を最もよく表示する σ_{∞} と α を最終的に選ぶ。また、シミュレーションにより算出された各ループの硬化指数 n の値が、式(4-80)で表せるように、 n_{∞} 、 β 、 W_1 の各材料定数を最適化しそれぞれの値を定める。

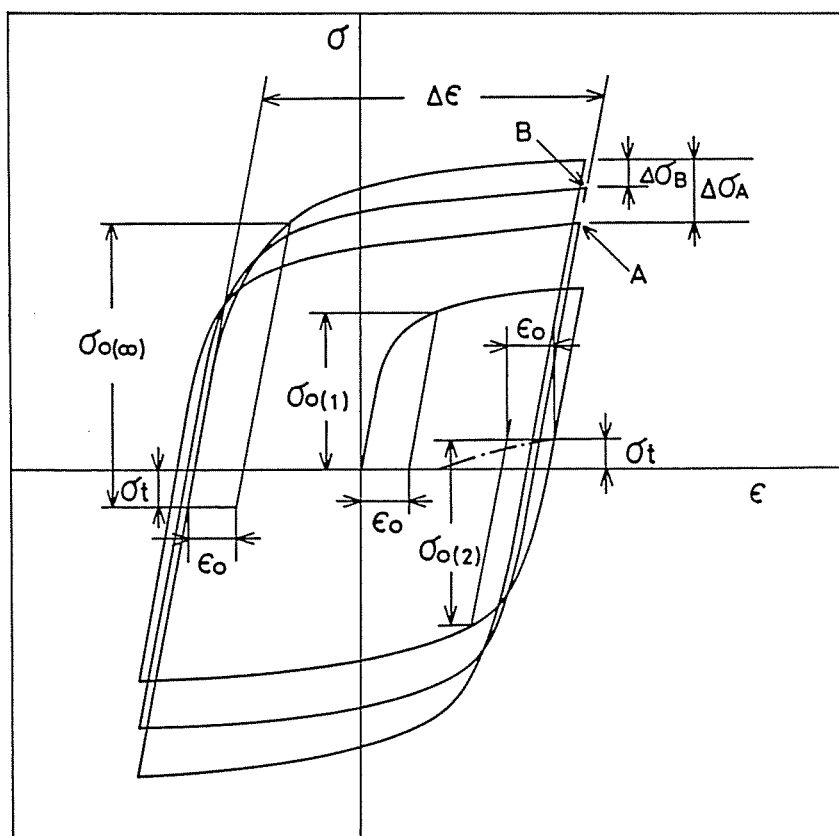


図5・1 材料定数の決定方法

5・2・2 材料定数のひずみ振幅依存性

初めに、本構成式で用いた式(4-78)のRamberg-Osgood則の純粋引張り、純粋ねじり、引張りとなじりの組合わせ負荷

($\tau/\sigma = \text{一定}$) に対する適用性を確かめた。その結果を図5・2に示す。図5・2で○、△、□はそれぞれ純粋引張り、純粋ねじり、引張りとなじりの組合わせ負荷($\tau/\sigma = 1$)時の実験点である。また、実線はRamberg-Osgood則による計算結果である。ひずみが0.125%付近で実験結果と計算結果に多少の差はあるが、計算結果は実験結果を全体的によく表していることが図5・2から分かる。なお、計算の際に用いた式(4-78)の材料定数 $\sigma_{0.1}$ 、 $m_{0.1}$ はそれぞれ、206MPa、8.5であった。

図5・3は5・2・1で述べた手順に従って決定した材料定数を用いて、一定ひずみ振幅1%の引張り・圧縮の繰返し負荷をシミュレーションした結果である。同じ条件での実験結果である図2・6と図5・3とを比較すると、よく一致している。また、降伏曲面の中心移動量は、繰返し安定時においてシミュレーション結果では125MPa、第3章の実験結果では118MPaであり、7MPaほどの差はあるがほぼ一致している。この2つの結果から、本構成式は一定ひずみ振幅の比例繰返し負荷に適用可能であることが明らかである。このことから、次に、材料定数とひずみ振幅の関係について調べた。

図2・7で示したように、一定ひずみ振幅の比例繰返し負荷では、負荷方向に関係なく同じ結果が得られることがすでに明らかである。そこで、一定ひずみ振幅 $\Delta \bar{\epsilon} = 0.6\%$ 、 2.2% の引張

り・圧縮の繰返し負荷実験、 $\Delta \bar{\epsilon} = 1.27\%$ 、 1.91% のねじりの繰返し負荷実験を行い、それらの負荷に本構成式を適用し、シミュレーションを行った。その結果、各材料定数はひずみ振幅 $\Delta \bar{\epsilon}$ (%)の関数で次式により表示されることが分かった。

$$\begin{aligned}\sigma_{o(\infty)} &= 64.5(\Delta \bar{\epsilon}) + 193 \\ \alpha &= 0.08(\Delta \bar{\epsilon}) + 0.01 \\ W_o / \sigma_{o(\infty)} &= 0.049(\Delta \bar{\epsilon}) - 0.008 \\ \sigma_{o(2)} &= 53.3(\Delta \bar{\epsilon}) + 184 \\ m_{(\infty)} &= 1.8(\Delta \bar{\epsilon}) + 2.9 \\ m_{(2)} &= 1.0(\Delta \bar{\epsilon}) + 3.9\end{aligned}\quad \dots\dots\dots(5-3)$$

ただし、 $m_{(1)} = 8.5$ 、 $\sigma_{o(1)} = 206\text{MPa}$ であり、 β は0であった。

図5・4に前述の $\Delta \bar{\epsilon} = 1.91\%$ のねじりの繰返し実験により求めた $\sigma_{o(n)}$ と $m_{(n)}$ の値をそれぞれ記号○、●で示す。また、式(5-3)を用いて得た、式(4-79)と式(4-80)の計算結果を実線と一点鎖線で示してある。仮定した式(4-79)、式(4-80)が妥当なことが図5・4よりわかる。

図5・5は変動ひずみ振幅繰返し負荷を、式(5-3)を用いてシミュレーションした結果を示す。すなわち、ひずみ振幅 $\Delta \bar{\epsilon} = 0.9\%$ で繰返し負荷を行い応力-ひずみ関係が安定した後、ひずみ振幅を $\Delta \bar{\epsilon} = 1.6\%$ に増加し応力-ひずみ曲線が再度安定してから、ひずみ振幅を $\Delta \bar{\epsilon} = 0.9\%$ に減少し再度安定するまで繰返し負荷を行ったときのシミュレーション結果である。図5・5にそれぞれの変動段階における応力-ひずみ曲線を実線、一点鎖線、破線で示してある。また、細線は降伏曲面の中心移

動を表す。図5・5の場合と同一条件のもとでの変動ひずみ振幅繰返し負荷の実験結果である図2・11と図5・5を比較すると、よく一致していることが分かり、式(5-3)の正当性が明らかである。なお、シミュレーションを行うに際し、式(5-3)から材料定数を求める場合、第2章で材料の硬化挙動が最大ひずみ振幅に依存することが判明していることから、ひずみ振幅を増加させる場合には各ひずみ振幅を用いて、また、ひずみ振幅を減少させる場合には材料が現段階までに受けた過程の中で最大のひずみ振幅 ($\Delta \bar{\epsilon} = 1.6\%$) を用いて求めた。さらに、シミュレーションに際して、異方性パラメータは、式(3-1)、式(3-3)から算出した Y 、 k と、降伏曲面の回転角度 ω を 0° として式(4-94)を用い定めた。

以上のように、本構成式は比例繰返し負荷をシミュレーション可能であることが明らかになった。

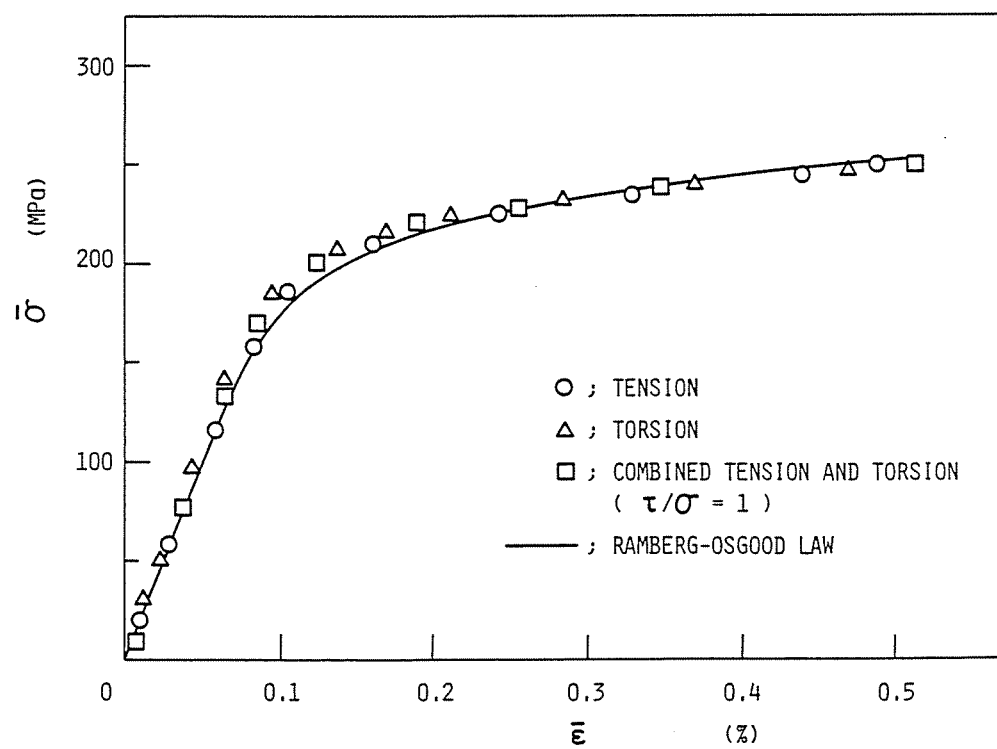


図 5・2 3 種類の負荷経路でのシミュレーション結果

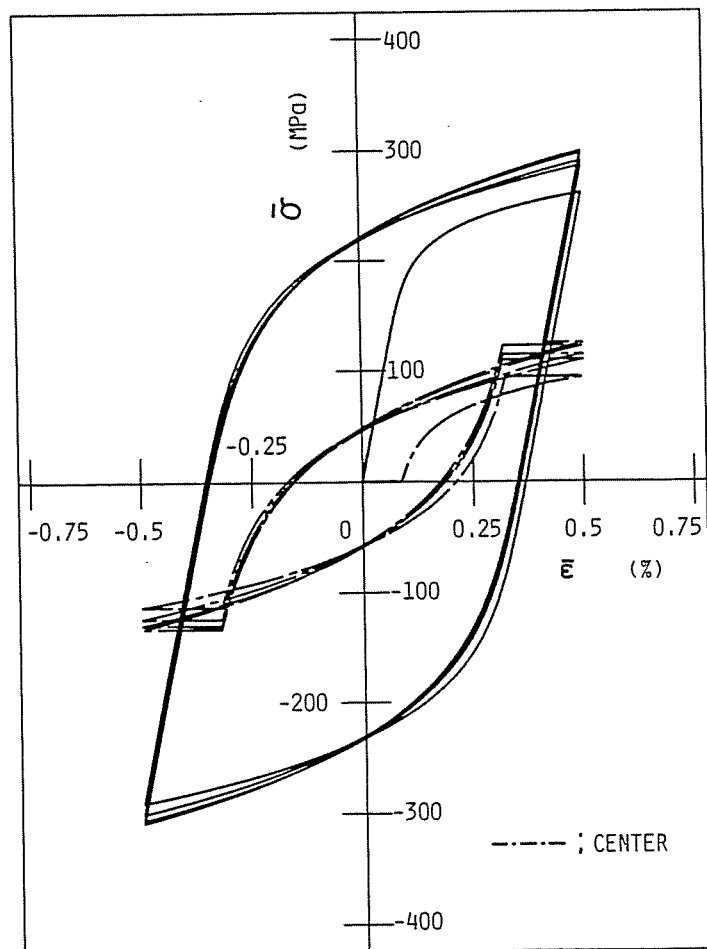


図5.3 一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷
($\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ 、シミュレーション)

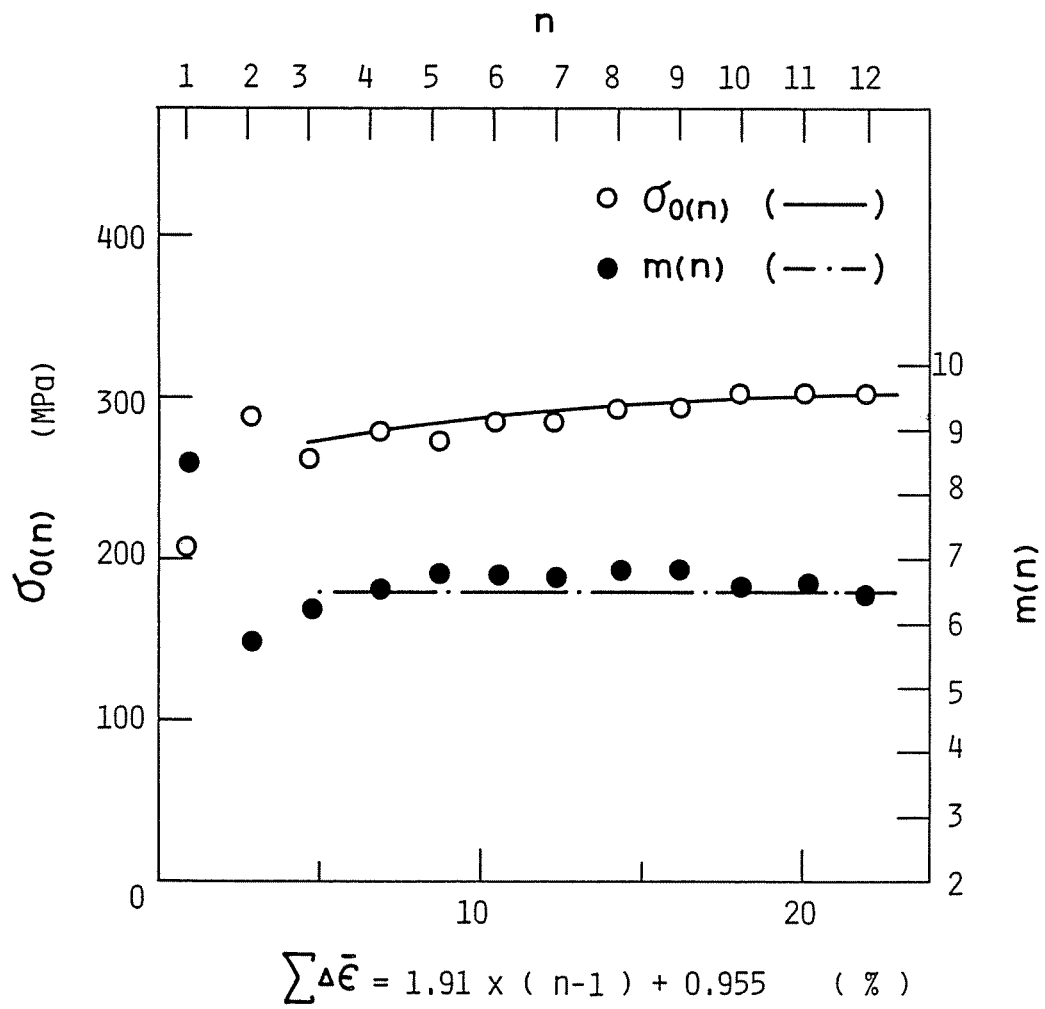


図5・4 材料定数 $\sigma_0(n)$ と $m(n)$

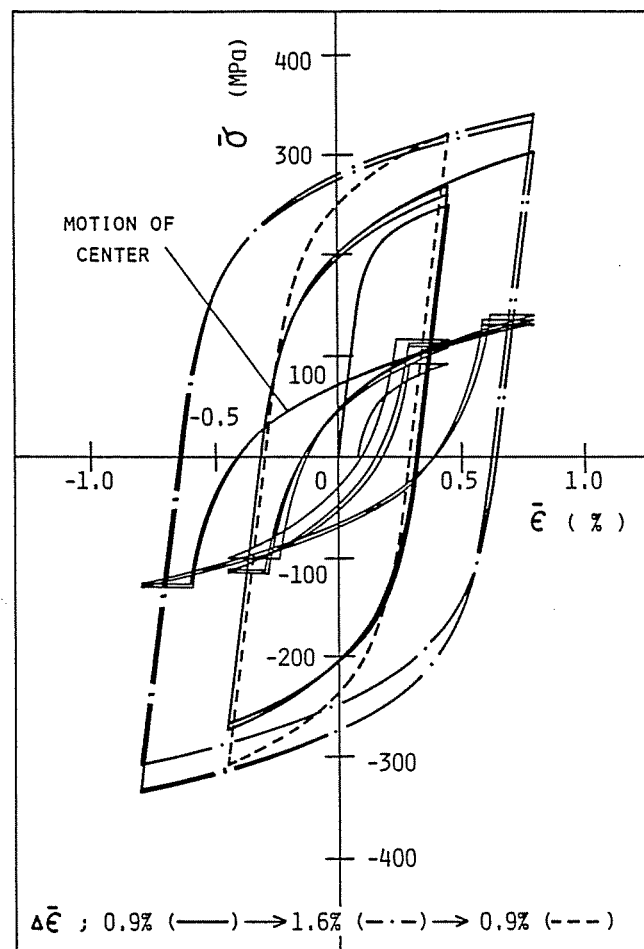


図5・5 変動ひずみ振幅繰返し負荷 ($\Delta \bar{\epsilon} = 0.9\% \rightarrow 1.6\% \rightarrow 0.9\%$ 、シミュレーション)

5・3 材料定数の負荷方向依存性

5・3・1 実験方法

予ひずみを受けた材料、すなわち、異方性の性質を持った材料の変形挙動について調べることは、構成式が非比例繰返し負荷をシミュレーションできるかどうか判断する上で非常に重要な意味を持つ。例えば、大橋[63-65]らは、黄銅に単軸引張りによる予ひずみを与えた後の後続変形について詳しく調べている。また、新津[66]らは、SUS304材にねじりの予ひずみを与えた後の後続変形について、その温度の影響と共に検討している。

本節では、構成式が異方性材に対しても適用可能かどうか調べ、材料定数の負荷方向依存性を明らかにするために、以下のような実験を行った。すなわち、まず、初期材に一定ひずみ振幅1%の引張り・圧縮の繰返し負荷を与える。応力-ひずみ関係が安定した後、図5・6(b)に示したように、A点まで部分除荷を行うか、あるいはB点まで完全除荷を行う。ここで、A点は繰返し負荷により移動した降伏曲面の中心であり、前述したように、シミュレーションにより求まる。次に、応力比

$(\sqrt{3}\tau/\sigma)$ が一定の比例負荷をA点あるいはB点を中心にして行う。比例負荷は図5・6(a)に示すように、それぞれ単独に7種類の負荷方向について行う。以下、A点を中心に負荷を行った場合をケースA、B点を中心に負荷を行った場合をケースBと呼ぶこととする。なお、A点の応力は前節のシミュレーショ

ン結果より125MPaであった。

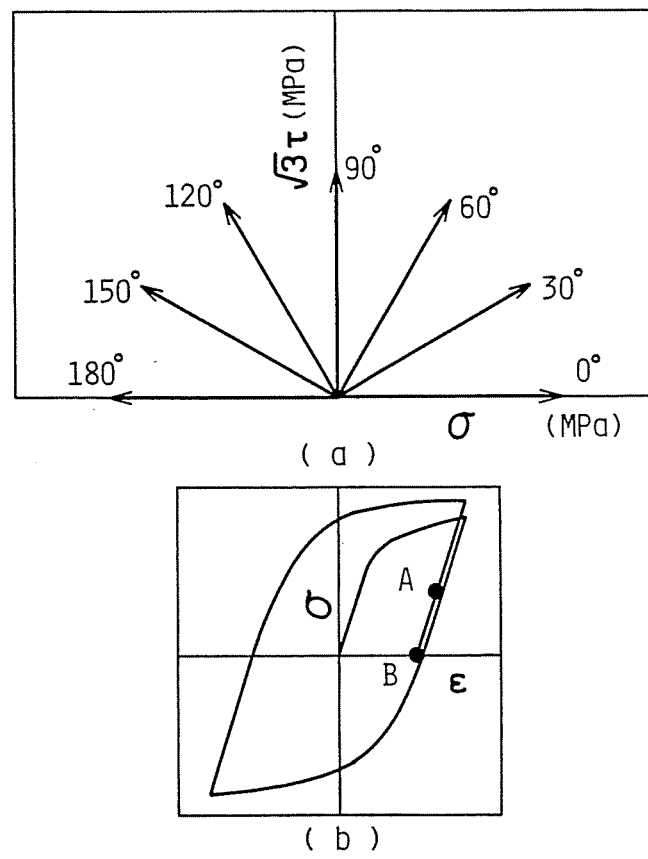


図5・6 繰返し負荷後の負荷経路

5.3.2 降伏曲面の中心から再負荷した場合

図5.7 は、図2.6 で示した一定ひずみ振幅1%の引張り・圧縮の繰返し負荷後、降伏曲面の中心（A点）から図5.6(a)に示す応力比が一定の負荷を行ったケースAの相当応力－相当ひずみ関係であり、7種類の負荷経路での結果を示した図である。図5.7 より、引張り・圧縮の繰返し負荷を受けた後の材料の相当応力－相当ひずみ関係は、図2.4 で示した初期材の相当応力－相当ひずみ関係とは異なり、1本の曲線で全ての負荷経路を表せないことが明らかである。また、負荷経路の角度が降伏曲面の中心移動方向（引張り方向）に対して大きくなるに従い、ひずみ硬化量が大きくなる傾向があることも図5.7 より分かる。

そこで、ひずみ硬化量と負荷経路の関係を調べるために、4種類のoffsetひずみ500,1000,1500,2000($\mu\text{m}/\text{m}$)での等塑性ひずみ面を測定した。その結果を図5.8 に示す。図5.8 で、○、△、□、◇印はそれぞれ実験点であり、実線は実験点に合うように求めただけである。A点、B点は図5.6(b)中のA点、B点での応力点である。また、破線はoffsetひずみを無限大にとった場合に予想される、2面モデルなどで用いられている限界面（limit surface）であり、B点を中心とした円で表示される。さらに＋印と一点鎖線は、図3.7 で示した一定ひずみ振幅1%の引張り・圧縮の繰返し負荷後の降伏曲面である。図5.8 より、この4種類のoffsetひずみでの等塑性ひずみ面は、降伏曲面と同様に、だ円で表示できることが分かる。しかし、offsetひずみが大きくなるにつれて、だ円は真円（限界面）に近ずき、その

だ円の中心（●、▲、■、◆印）は無負荷点（B点）に近づく。
 このことは、等塑性ひずみ面は、offsetひずみが小さいときには移動硬化で表され、offsetひずみの大きいときには等方硬化で表されるという、従来言われていることと一致する [21-23]。

第4章で示した構成式で、 $500\mu\text{m}/\text{m}$ の相当塑性ひずみの生ずる応力 $\sigma_{0.2}$ を重要な材料定数の一つとして用いている。そこで、 $500\mu\text{m}/\text{m}$ の等塑性ひずみ面に注目すると、図5・8より等塑性ひずみ面は次式により表示できる。

$$\frac{(\sigma + 25)^2}{(194)^2} + \frac{(\sqrt{3}\tau)^2}{(270)^2} = 1 \quad \dots\dots\dots(5-4)$$

このように、降伏曲面の中心から負荷経路を変えて負荷した場合には、等塑性ひずみ面がだ円で表示でき、材料定数 $\sigma_{0.2}$ が構成式に用いやすく求められる。

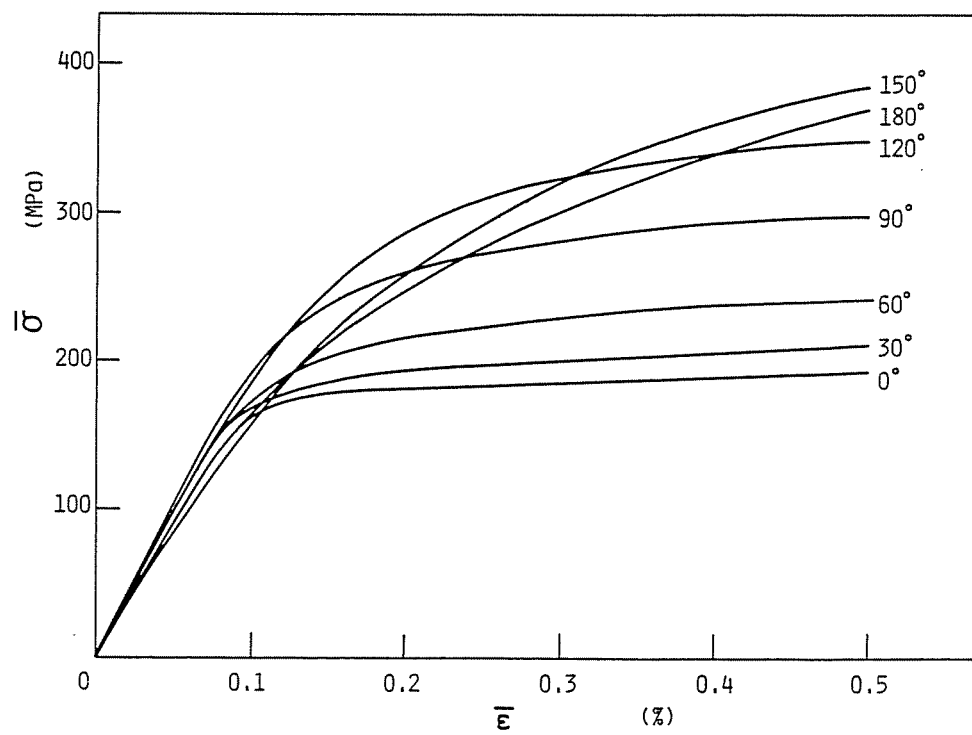


図 5.7 繰返し負荷後の相当応力－相当ひずみ関係
(ケース A、実験)

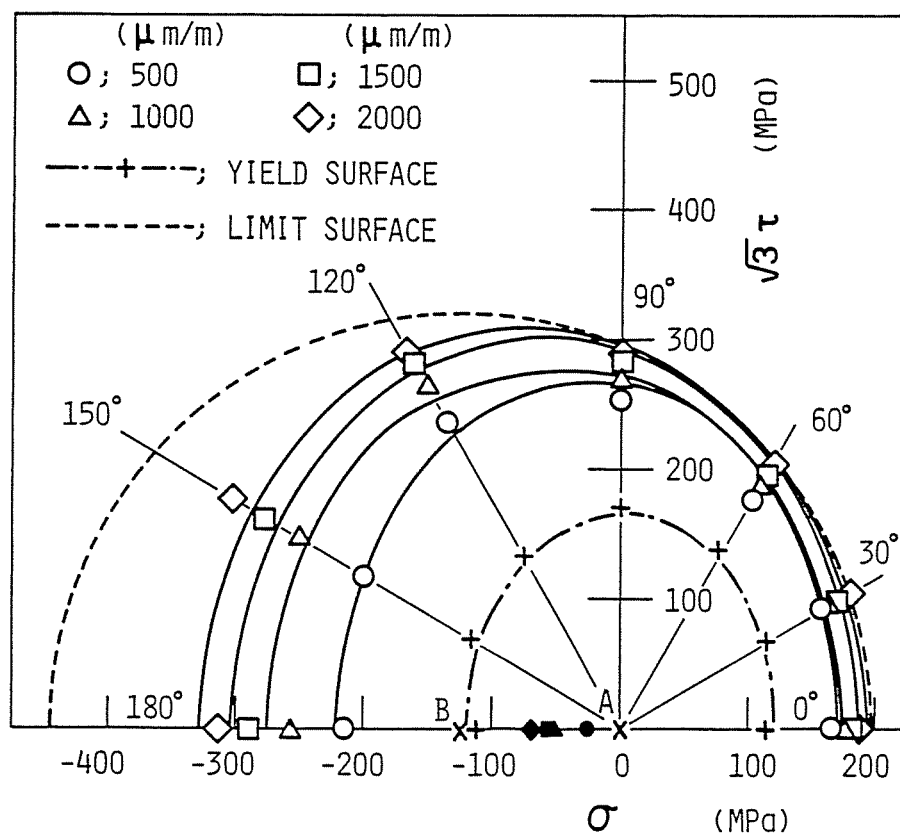


図5・8 繰返し負荷後の等塑性ひずみ面
 (ケースA)

5・3・3 完全除荷後再負荷した場合

図5・9 は、図2・6 で示した一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷後、完全除荷点Bを中心に応力比が一定の負荷をした時の相当応力－相当ひずみ関係であり、図5・7 と同様に、7種類の負荷経路の結果を示した図である。図5・9 より、ケースBの相当応力－相当ひずみ関係も、ケースAと同様、負荷経路により異なることが分かる。そこで、ケースAと同じように、4種類のoffsetひずみでの等塑性ひずみ面を測定した。その結果を図5・10に示す。図5・10で○、△、□、◇印はそれぞれ実験点であり、実線は実験点を結んだ曲線である。また、破線は限界面であり、図5・8 のケースAの場合の限界面と同じ円で表示される。＋印はB点から測定した降伏曲面の実験点であり、一点鎖線は実験点に合うように求めた曲線である。図5・10より、ケースAの場合と異なり、降伏曲面を含めた全ての等塑性ひずみ面は、降伏曲面の中心移動方向（引張り方向）に鋭く、逆方向（圧縮方向）に滑らかなびつな形（おむすび形）になり、数式で表示しにくいことが分かる。なお、ケースBの場合も、offsetひずみが大きくなるに従って、等塑性ひずみ面は円（限界面）に近づくことも図5・10より分かる。

ケースBの場合について、降伏曲面の中心を考慮にいて実験データを整理し直すことにより、等塑性ひずみ面がどのように変わるかを調べてみた。降伏曲面の中心を考慮する場合には、原点（降伏曲面の中心A点）から、点Bまで降伏曲面の背応力がだけ圧縮した後点Bを中心にして、応力比が一定の比例負

荷をしたものとする。このように、ケース B で降伏曲面の中心を考慮した場合をケース B° と呼ぶ。つまり、ケース B とケース B° の違いは、応力 σ_c を考慮するかしないかである。

図 5・11 にケース B° の相当応力－相当ひずみ関係を示す。図 5・11 の相当応力－相当ひずみ関係から、4 種類の offset ひずみ 500, 1000, 1500, 2000 ($\mu m/m$) での応力を測定し直し、図 5・11 が初めから降伏曲面の中心 (A 点) から、図 5・6 に示した負荷経路で負荷して得られた結果と考え、その応力を各負荷経路の応力比で軸方向応力とせん断方向応力に分解した。図 5・12 に、その結果得られた等塑性ひずみ面を示す。図 5・12 で、○、△、□、◇印はそれぞれ実験点であり、実線は実験点に合うように求めただけの円である。また、●、▲、■、◆印はそれぞれの円の中心である。さらに、+印は降伏曲面の実験点であり、一点鎖線は実験点に合うように求めただけの円である。降伏曲面の中心を考慮することにより、図 5・10 で示したいびつな形をした等塑性ひずみ面が、すべての offset ひずみに対し、円で表示可能になることが図 5・12 から分かる。図 5・12 より、構成式で用いた材料定数 $\sigma_{0.2}$ を与える 500 $\mu m/m$ の等塑性ひずみ面は、ケース A の時と同様に次式のように表すことができた。

$$\frac{(\sigma + 25)^2}{(194)^2} + \frac{(\sqrt{3} \tau)^2}{(314)^2} = 1 \quad \dots\dots\dots (5-5)$$

以上のように、完全除荷点での 500 $\mu m/m$ offset の等塑性ひずみ面も、降伏曲面の中心を考慮することにより、式 (5・5) のように円で表示が可能となった。

なお、式(5-4)のケースAの等塑性ひずみ面と式(5-5)のケースB°の等塑性ひずみ面との関係を調べてみると、引張り・圧縮方向の応力は両ケースで一致しているが、せん断方向の応力には、44MPaほどの応力差があり、ケースB°の方が大きいことが分かる。

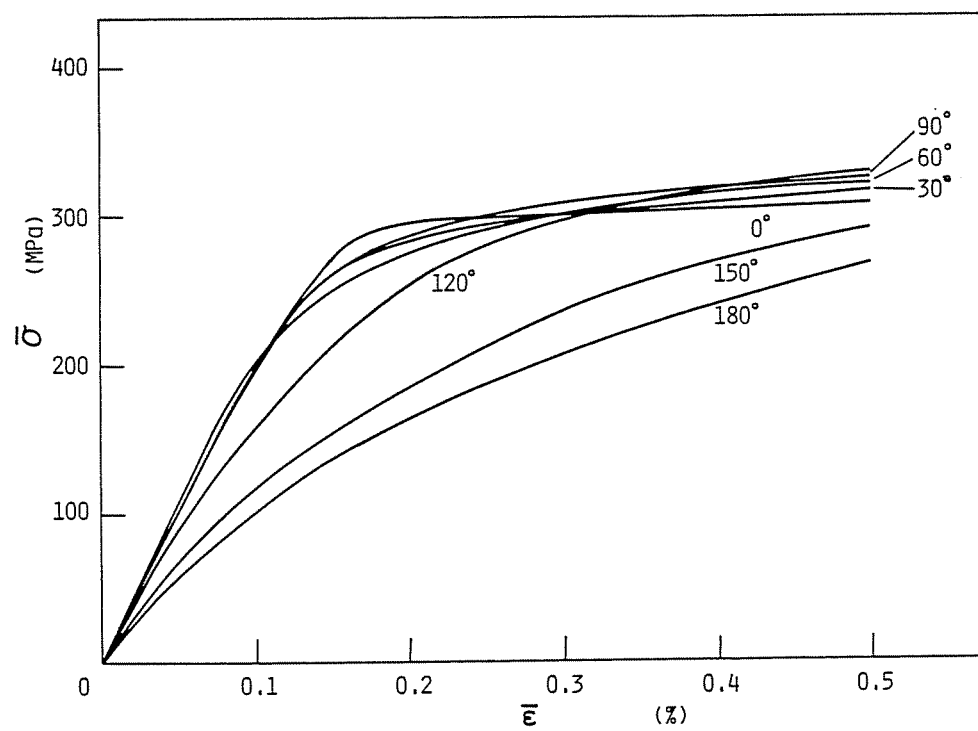


図5・9 繰返し負荷後の相当応力－相当ひずみ関係
(ケースB、実験)

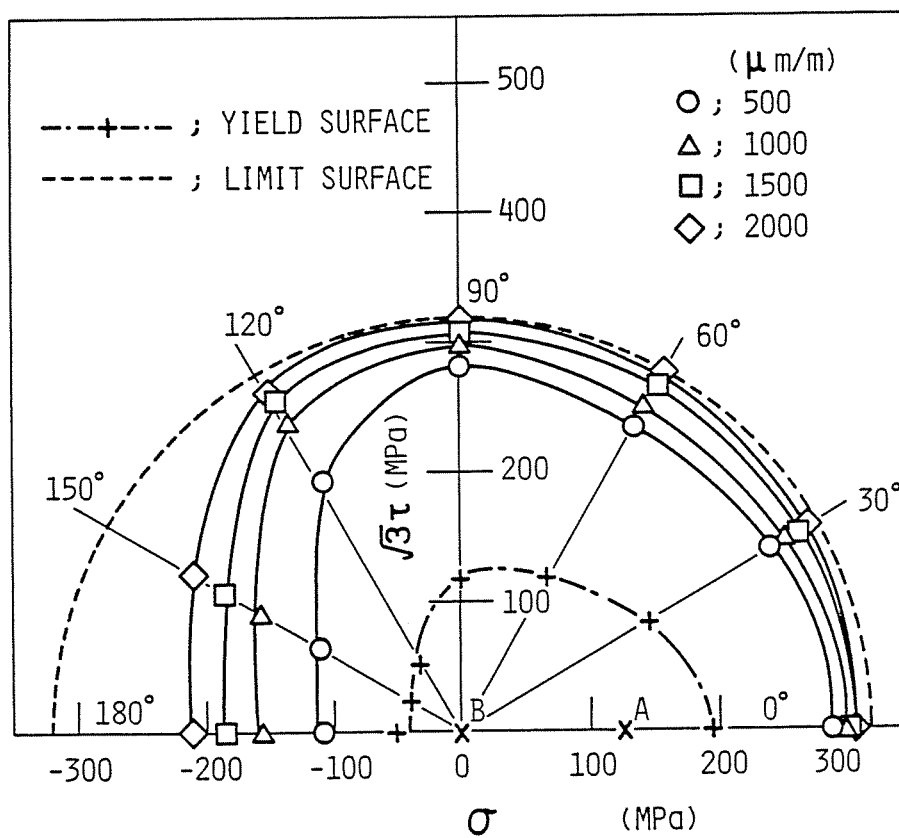


図5・10 繰返し負荷後の等塑性ひずみ面
(ケースB)

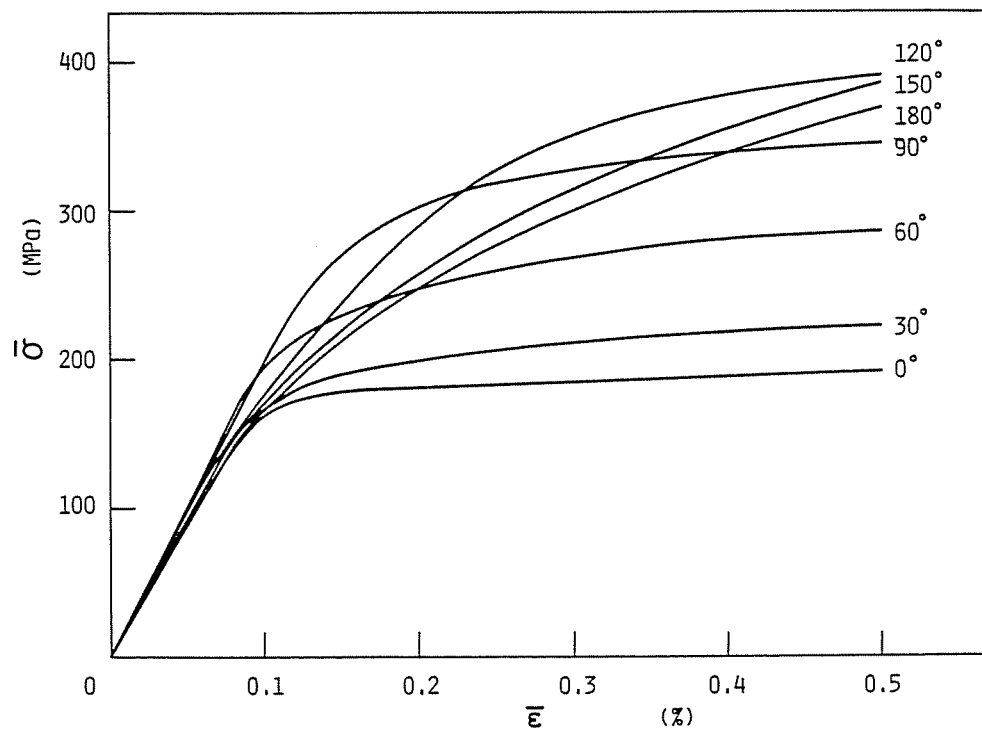


図5・11 繰返し負荷後の相当応力－相当ひずみ関係
(ケースB°、実験)

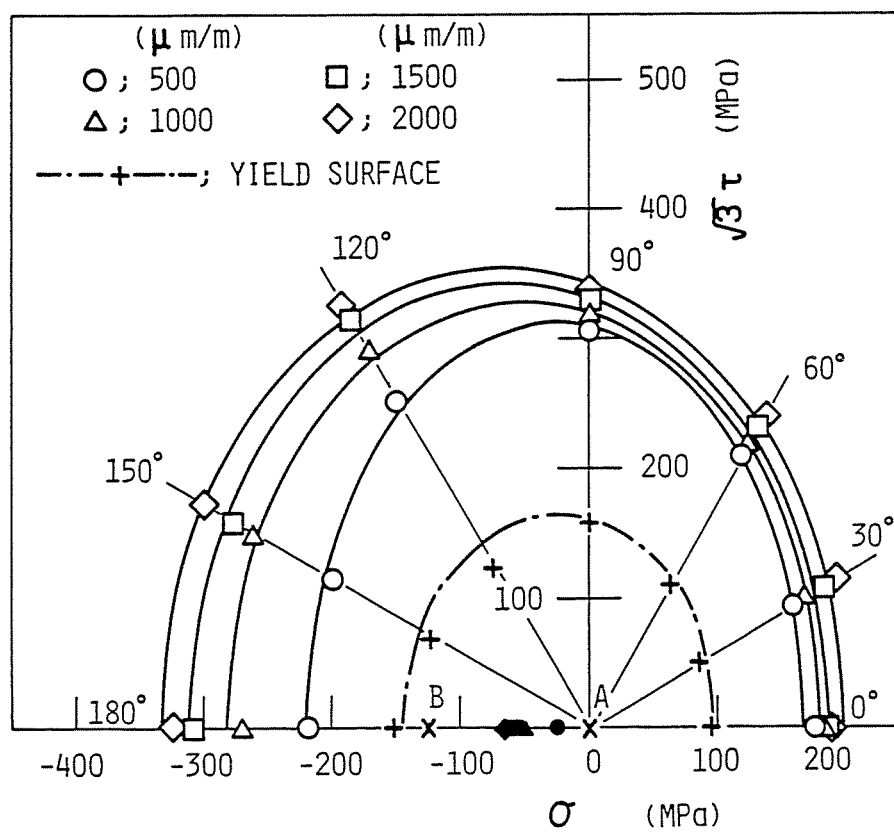


図5・12 繰返し負荷後の等塑性ひずみ面
 (ケースB°)

5.3.4 シミュレーション結果

構成式による、ケース A、ケース B のシミュレーションを試みた。なお、シミュレーションに際して、材料定数 $\sigma_{0(1)}$ は式 (5-4)、式 (5-5) から求めた。また、降伏曲面のゆがみ、回転による異方性パラメータ C_t 、 C_{ts} 、 C_s を次のように求めた。式 (4-94) より異方性パラメータ C_t 、 C_{ts} 、 C_s は、比例繰返し負荷時の引張り・圧縮降伏応力とせん断降伏応力、降伏曲面の傾き ω の 3 つの値さえ求まれば決定できる。ひずみ振幅 1 % の引張り・圧縮の繰返し負荷後、同じ相当ひずみ振幅でねじりの繰返し負荷を行った場合の降伏曲面の回転角度 ω 、比例負荷時の引張り・圧縮とねじりの降伏応力 Y 、 $\sqrt{3}k$ は、それぞれ、 45° 、 125MPa 、 165MPa であることが第 3 章よりすでに明らかである。しかし、 Y 、 k は後続の負荷方向に関わらず一定であるが、降伏曲面の回転角度 ω は、後続の負荷方向に影響を受けると考えられる。そこで、後続の負荷経路が 90° の場合の降伏曲面の回転角度 ω は上述したように 45° であることがすでに確かめられており、また、負荷経路が 0° 、 180° の降伏曲面の回転角度は、共に 0° であることが明らかであるので、後続の負荷経路が 0° と 90° 、 90° と 180° の間で降伏曲面の回転角度を比例配分し、それぞれの負荷経路に対する降伏曲面の回転角度と仮定した。

また、材料定数 $m_{(1)}$ を以下のように求めた。すなわち、実験結果から得た各負荷方向の相当応力－相当ひずみ曲線から定めた $\sigma_{0(1)}$ の値と全ひずみで 0.5 % の時の応力を、式 (4-78) が相当応力－相当ひずみ関係にも適用可能であると仮定して式 (4-7

8)に代入し、第1近似としての $m_{(1)}$ を求める。さらに、その値を基にして実験結果に合うように適度に $m_{(1)}$ を変動させ最適な値を最終的に求めた。

図5・13、図5・14にケースAと、ケースBの場合についてシミュレーションした相当応力-相当ひずみ関係をそれぞれ示す。図5・13と図5・7、図5・14と図5・9をそれぞれ比較すると、シミュレーション結果と実験結果がよく一致している。

図5・15と図5・16にケースAとケースBでのひずみ経路の実験結果と構成式によるシミュレーション結果を合せて示す。図5・15と図5・16で、実線は実験結果を示し、一点鎖線はシミュレーション結果を示す。また、図5・16でA点、B点は、図5・1のA点、B点でのひずみ点である。2つのケースとも実験結果とシミュレーション結果はよく一致している。すなわち、構成式で降伏曲面の中心移動、回転、ゆがみを考えることにより、相当応力-相当ひずみ関係のみならず、組合わせ負荷による複雑なひずみ経路までも正確にシミュレーションできることが、図5・15、図5・16から明かである。なお、シミュレーションに用いた硬化指数 $m_{(1)}$ と負荷経路の角度 θ $\{= \tan^{-1}(\sqrt{3}\tau/\sigma)\}$ の関係調べた結果、ケースAの場合、次式の結果を得た。

$$m_{(1)} = 13 \quad (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$$

$$m_{(1)} = 2.4 \left\{ 1 + 4.4 \exp\left(-\frac{\theta - 90}{16}\right) \right\} \quad (90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$$

.....(5-6)

また、ケースBの場合には、次式のように表示できた。

$$m_{(1)} = 13 \quad (0^\circ \leq \theta \leq 90^\circ)$$

$$m_{(1)} = 1.1 \left\{ 1 + 10.8 \exp\left(-\frac{\theta - 90}{14}\right) \right\} \quad (90^\circ \leq \theta \leq 180^\circ)$$

.....(5-7)

以上により、前履歴として一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷を与えた場合の後続負荷のようすが明らかになり、材料定数の負荷方向依存性も明らかになった。

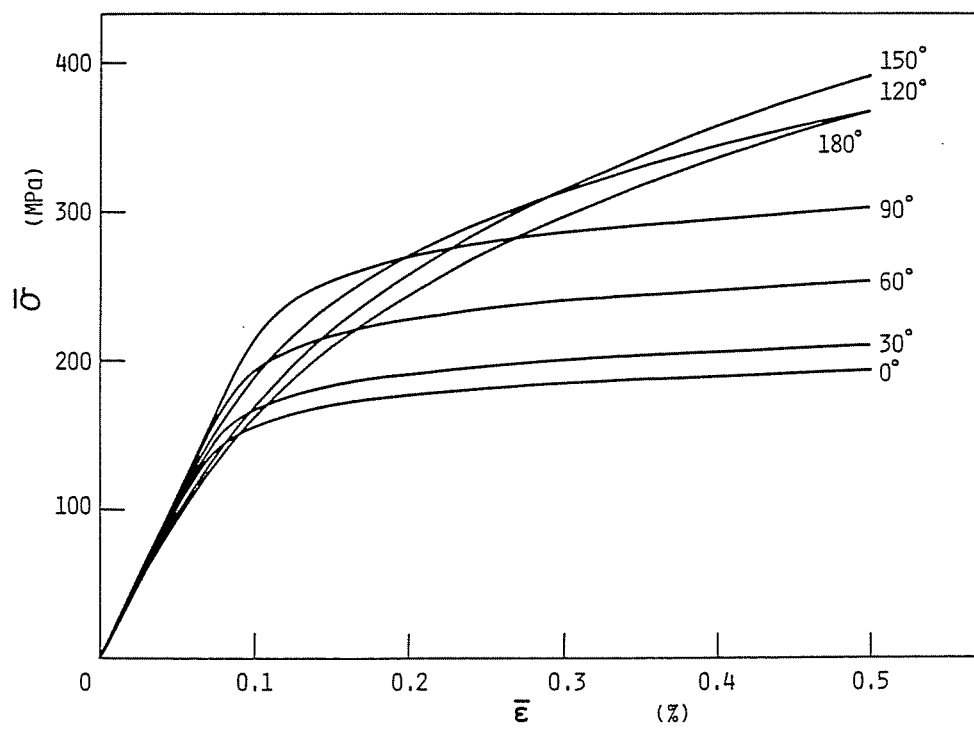


図5.13 繰返し負荷後の相当応力－相当ひずみ関係
(ケースA、シミュレーション)

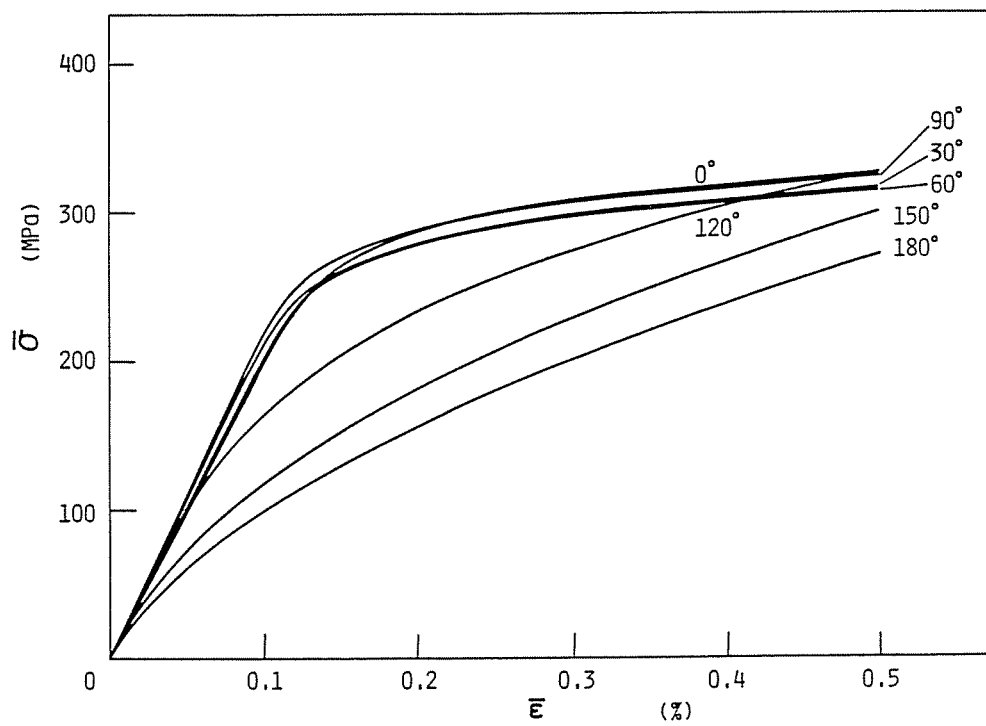


図 5.14 繰返し負荷後の相当応力－相当ひずみ関係
(ケース B、シミュレーション)

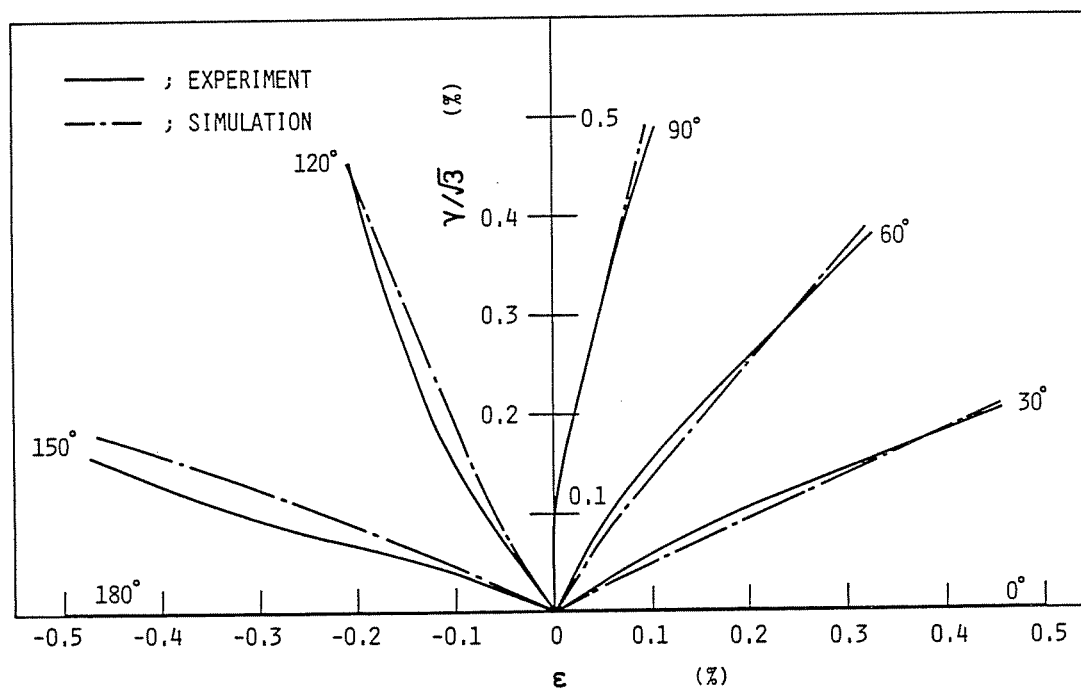


図 5・15 ひずみ経路 (ケース A)

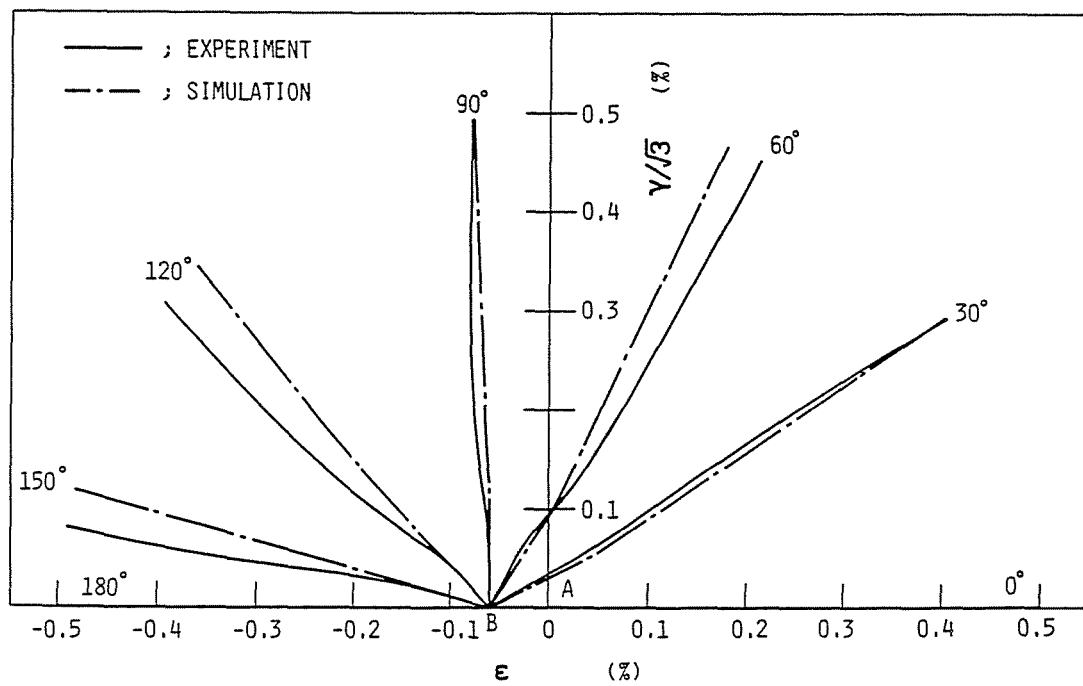


図 5.16 ひずみ経路 (ケース B)

5・4 非比例繰返し負荷への適用

非比例繰返し負荷の最も簡単な例として、一定ひずみ振幅 $\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ でのねじりの繰返し負荷と引張り・圧縮の繰返し負荷を交互に行った時の応力－ひずみ関係についてシミュレーションを行った。その結果を図5・17に示す。図5・17でねじりの繰返し負荷を実線で、引張り・圧縮の繰返し負荷を一点鎖線でそれぞれ示す。また、破線は降伏曲面の中心移動を示す。図5・17と同じ条件で行った実験結果である図2・12と比較するとシミュレーションと実験結果はよく一致している。なお、シミュレーションに際し、ねじりの繰返し負荷の場合は式(5-3)より求めた材料定数を用い、後続の引張り・圧縮の繰返し負荷の場合には次式に示した材料定数を用いた。

$$\begin{aligned}\sigma_{o(1)} &= 284 \text{MPa}, \quad m_{(1)} = 13, \quad m_{(2)} = 4.9 \\ \sigma_{o(\infty)} &= 294 \text{MPa}, \quad m_{(\infty)} = 4.9 \\ \bar{\sigma}_{(\infty)} &= 294 \text{MPa}, \quad \alpha = 0, \\ \beta &= 0, \quad W_o / \sigma_{o(\infty)} = 0.057\end{aligned}\quad \dots\dots\dots (5-8)$$

また、第2経路の降伏曲面が45°回転することが第3章で明らかである。このことから、異方性パラメータは式(3-1)、式(3-2)から得られたY、kと $\omega = 45^\circ$ として、式(4-94)より得られた値を用いた。

図5・18～図5・20にひずみ振幅1%での円サイクル負荷をシミュレーションした結果を示す。図5・18は応力経路、図5・19、図

5・20はそれぞれ軸方向とせん断方向の応力－ひずみ関係である。まず、同じ条件の実験から得られた応力経路である図2・17と図5・18を比較すると、シミュレーションの方が最初の1～3サイクルの硬化量が大きくでているが、それ以降は安定時のサイクルも含めてよく一致している。次に、図5・19、図5・20それぞれの対応する実験結果である図2・18、図2・19と比較すると、応力経路の場合と同じように1～3サイクルまでの硬化量を多少正確に表されていないが、図5・19、図5・20は全体的な傾向をよくとらえている。なお、図5・18～図5・20は、式(4-79)の α の前の符号を負として、以下に示す材料定数の値を用いてシミュレーションを行った。

$$\begin{aligned}
 \sigma_{o(1)} &= 206 \text{MPa}, \quad m_{(1)} = 8.5, \quad m_{(2)} = 4.7 \\
 \sigma_{o(\infty)} &= 284 \text{MPa}, \quad m_{(\infty)} = 4.7 \\
 \bar{\sigma}_{(\infty)} &= 349 \text{MPa}, \quad \alpha = 0.25, \\
 \beta &= 0, \quad W_o / \sigma_{o(\infty)} = 0.057
 \end{aligned}
 \qquad \dots\dots\dots(5-9)$$

また、円サイクル負荷の場合、異方性パラメータは以下のように定めた。先に図3・17で示したように、円サイクル負荷時の10サイクル目での降伏曲面は、初めの引張り方向の予ひずみ ($\bar{\epsilon} = 0.5\%$) では、比例負荷時のだ円と一致するが、硬化が安定した10サイクル目では図3・17の実線で示す円で示され、さらに、その円の半径は初めのだ円の短軸の大きさと一致する。そこで、円サイクル負荷中に降伏曲面を、最終的に安定時である10サイクル目で真円になるように、比例的に徐々にだ円から円に近づけた。また、降伏曲面の回転角度 ω は、軸応力 σ_t とせん断応力

τ より $\omega = \tan^{-1} (\sqrt{3} \tau / \sigma_t)$ と仮定した。このようにして時々刻々と得られる Y 、 k 、 ω を式(4-94)に代入し、異方性パラメータを定めた。

軸方向に降伏応力の 3/4 倍の応力すなわち、124MPa の応力をかけ、ひずみ振幅 1 % でねじりの繰返し負荷を行う、いわゆるラチェット負荷時のシミュレーション結果を図 5・21、図 5・22 に示す。図 5・21 はラチェット方向（軸方向）のひずみの増加のようすを表した図である。同じ条件で行った実験結果である図 2・21 と比較すると、シミュレーションは、ラチェットひずみの安定していく過程をよく捕らえていることが分かる。香川[57]らや Shiratori[11] ともメカニカルラチェットのシミュレーションを試みているが、これほど正確にラチェットひずみの安定していくようすを捕らえていない。しかしながら、実験では、5 サイクル目以降でさらにラチェットが進行しているが、図 5・21 のシミュレーションでは 5 サイクルで安定してしまう。この原因として、シミュレーションで算出されるラチェット方向への降伏曲面の中心移動が大きくなりすぎるためと考えられる。図 5・22 はせん断方向の応力ひずみ関係であるが、図 2・22 の実験結果と比較すると円サイクル負荷と同様に硬化量が実験結果に比べてシミュレーションの方がやや大きい、全体としてよく一致している。図 5・23、図 5・24 にシミュレーションに用いた材料定数の値を示す。図 5・23 は $\sigma_{0(n)}$ の値を示し、図 5・24 は $m_{(n)}$ を示す。両図で横軸は累積ひずみ、縦軸は各材料定数であり、○、● はそれぞれラチェット方向、せん断方向の値である。図 5・23、図 5・24 より分かるように、材料定数は、ラチェット方向とせん

断方向の値が違い、それぞれ次式となる

ラチェット方向：

$$\begin{aligned}\sigma_{o(1)} &= 206\text{MPa}, \quad m_{(1)} = 8.5, \quad m_{(2)} = 7.5 \\ \sigma_{o(\infty)} &= 311\text{MPa}, \quad \sigma_{o(2)} = 216\text{MPa}, \quad m_{(\infty)} = 13.3 \\ \bar{\sigma}_{(\infty)} &= 311\text{MPa}, \quad \alpha = 0.57, \quad \beta = 1, \\ W_o / \sigma_{o(\infty)} &= 0.03, \quad W_1 / \sigma_{o(\infty)} = 0.02\end{aligned} \quad \dots (5-10)$$

せん断方向：

$$\begin{aligned}\sigma_{o(1)} &= 206\text{MPa}, \quad m_{(1)} = 8.5, \quad m_{(2)} = 5.5 \\ \sigma_{o(\infty)} &= 319\text{MPa}, \quad \sigma_{o(2)} = 216\text{MPa}, \quad m_{(\infty)} = 4.6 \\ \bar{\sigma}_{(\infty)} &= 319\text{MPa}, \quad \alpha = 0.33, \quad \beta = 0.25, \\ W_o / \sigma_{o(\infty)} &= 0.07, \quad W_1 / \sigma_{o(\infty)} = 0.02\end{aligned} \quad \dots (5-11)$$

また、図5・23、図5・24の実線、一点鎖線は上式を用いて式(4-79)、式(4-80)より計算した結果であるが、各材料定数をよく表している。なお、せん断方向の $m_{(n)}$ の場合のみ式(4-80)の β の前の符号が正であり、他の場合は、式(4-79)の α および式(4-80)の β の前の符号は負である。

ところで、ラチェット負荷の場合の異方性パラメータは以下のように定めた。材料が飽和安定したときの降伏曲面の形状は第3章の実験より、式(3-1)、式(3-2)に一定ひずみ振幅 $\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ にラチェットひずみを単純に加えた値を $\Delta \bar{\epsilon}$ として求められた。そこで、各サイクルでのラチェットひずみにひずみ振幅を加えた値を式(3-1)、式(3-2)に代入し Y 、 k を求め、さらに図3・18より降伏曲面の回転が無いことから $\omega = 0$ として、式

(4-94)から、各サイクルでの異方性パラメータを定めた。

以上のように、本構成式は、非比例繰返し負荷にも適用可能であることが確認された。また、特に従来記述が難しいと言われていた円サイクル、ラチェット負荷などの変形挙動も記述可能であることが明かになった。

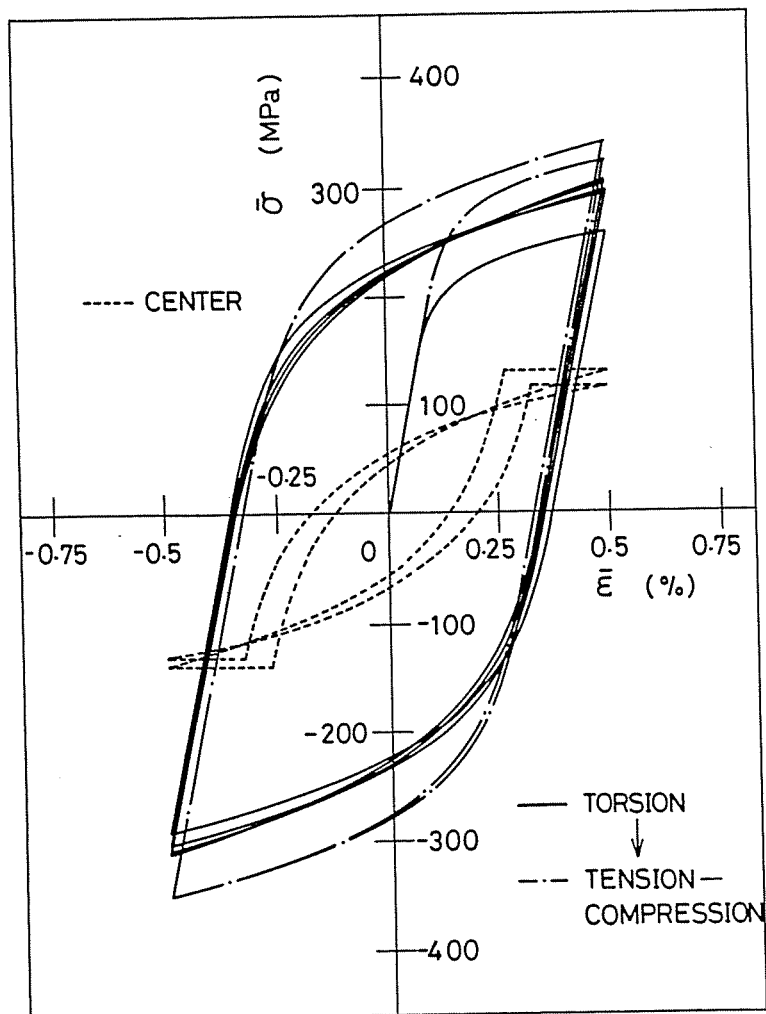


図5・17 一定ひずみ振幅ねじりの繰返し負荷とその後の引張り

・ 圧縮の繰返し負荷

($\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ 、シミュレーション)

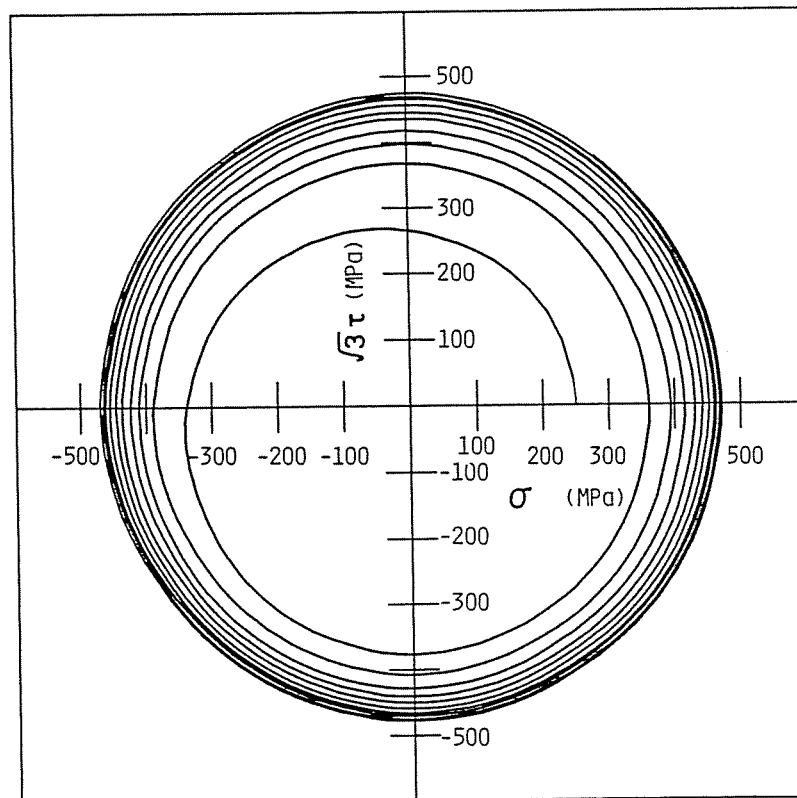


図5・18 円サイクル負荷時の応力経路
(シミュレーション)

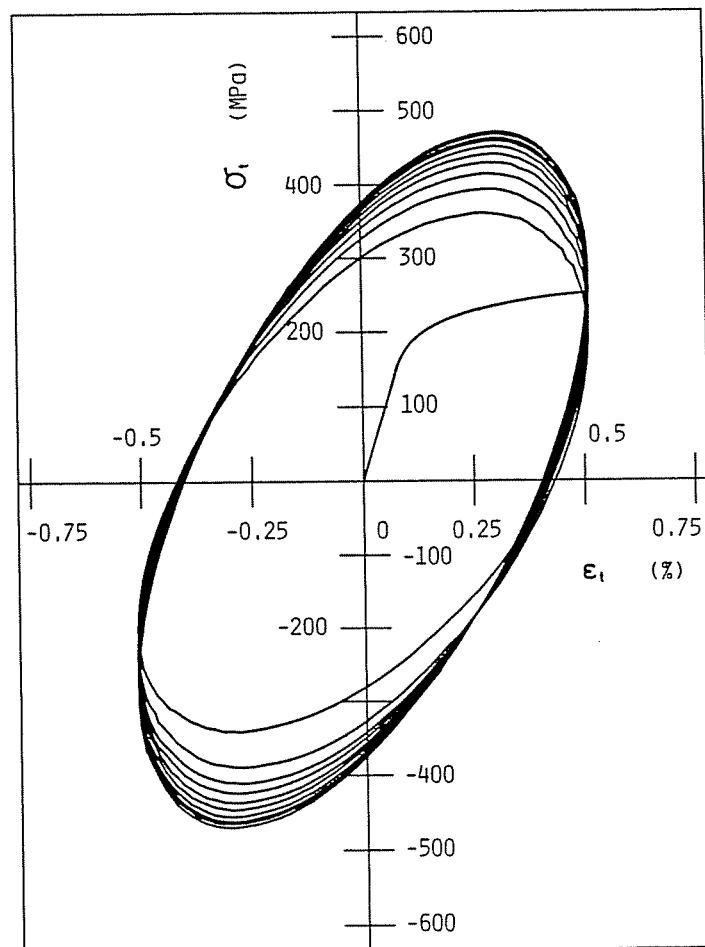


図5・19 円サイクル負荷時の軸応力－軸ひずみ関係
(シミュレーション)

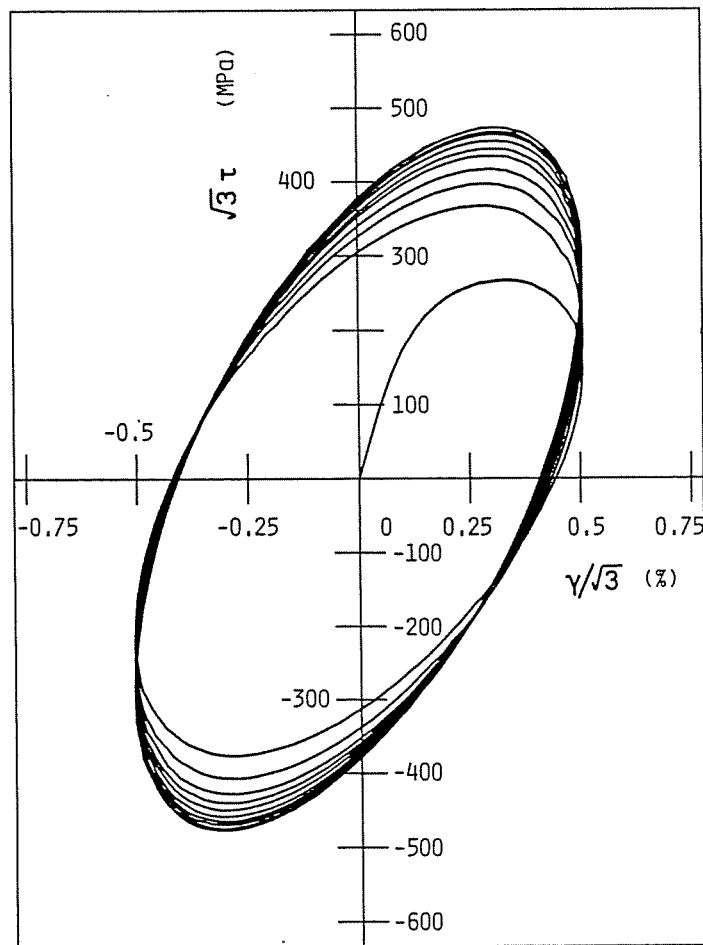


図5・20 円サイクル負荷時のせん断応力－せん断ひずみ関係
(シミュレーション)

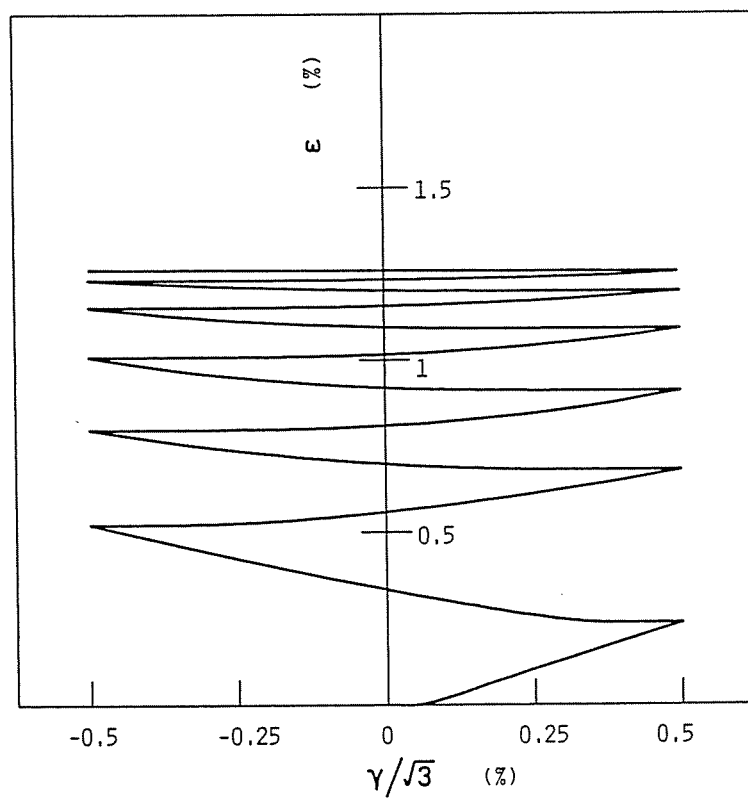


図 5・21 ラチェット負荷時のひずみ挙動
(シミュレーション)

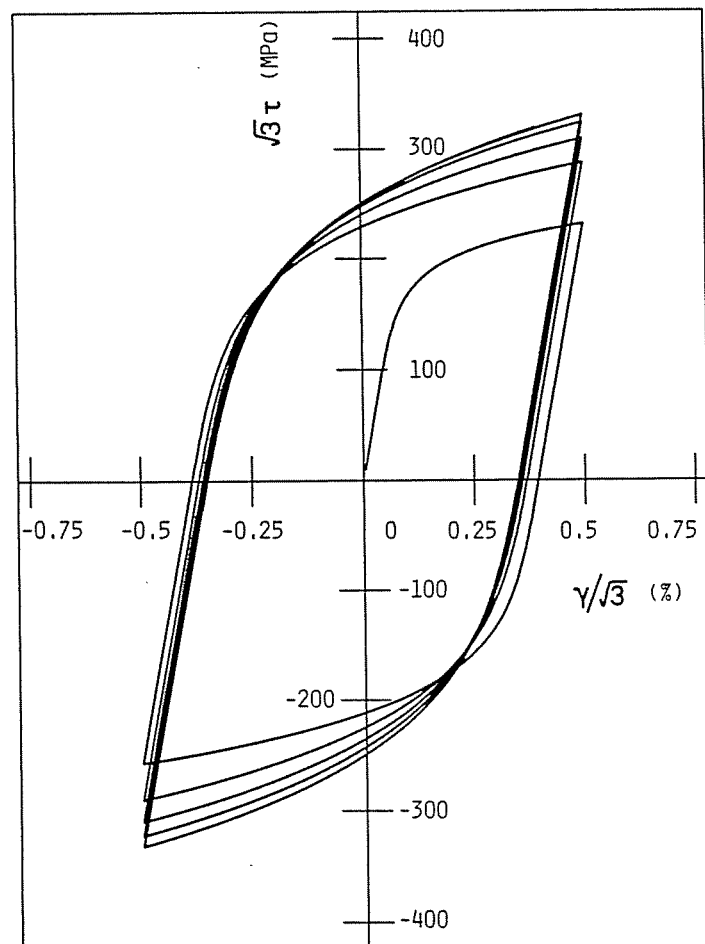


図5・22 ラチェット負荷時のせん断応力－せん断ひずみ関係
(シミュレーション)

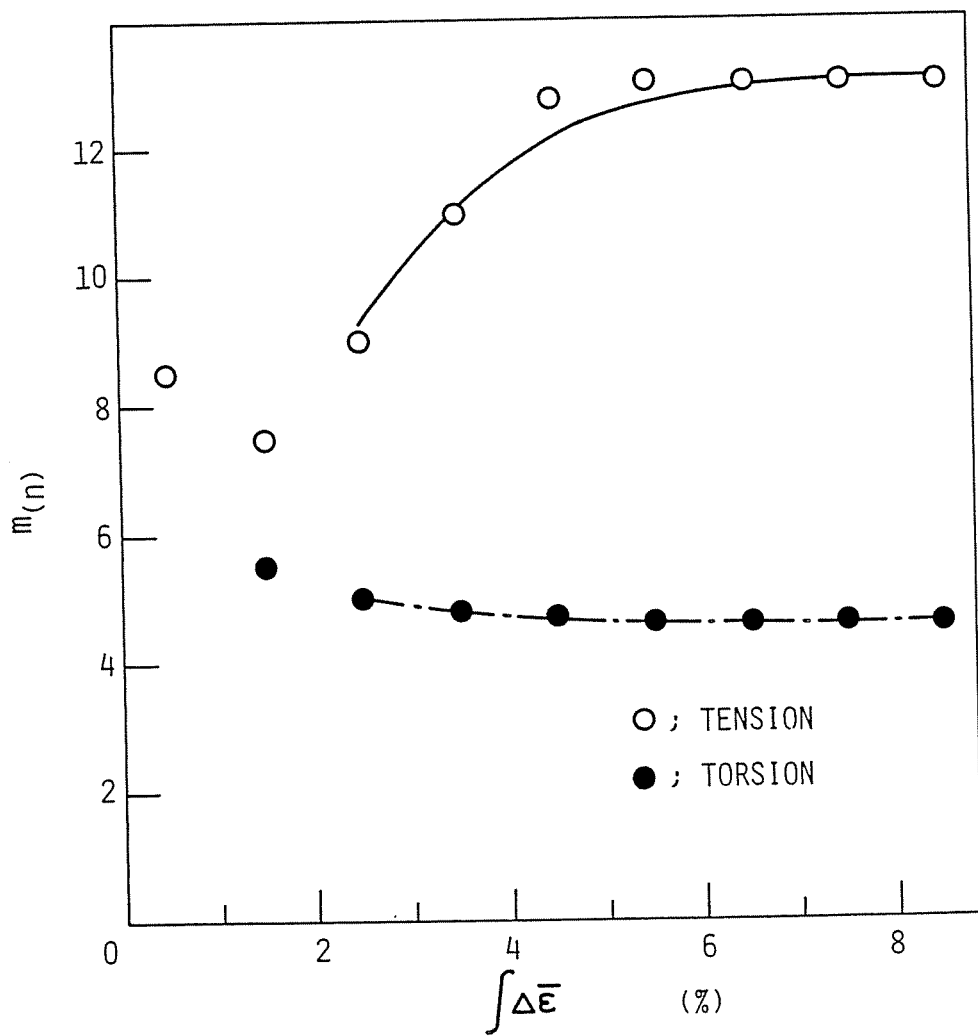


图 5·23 材料定数 $m(n)$

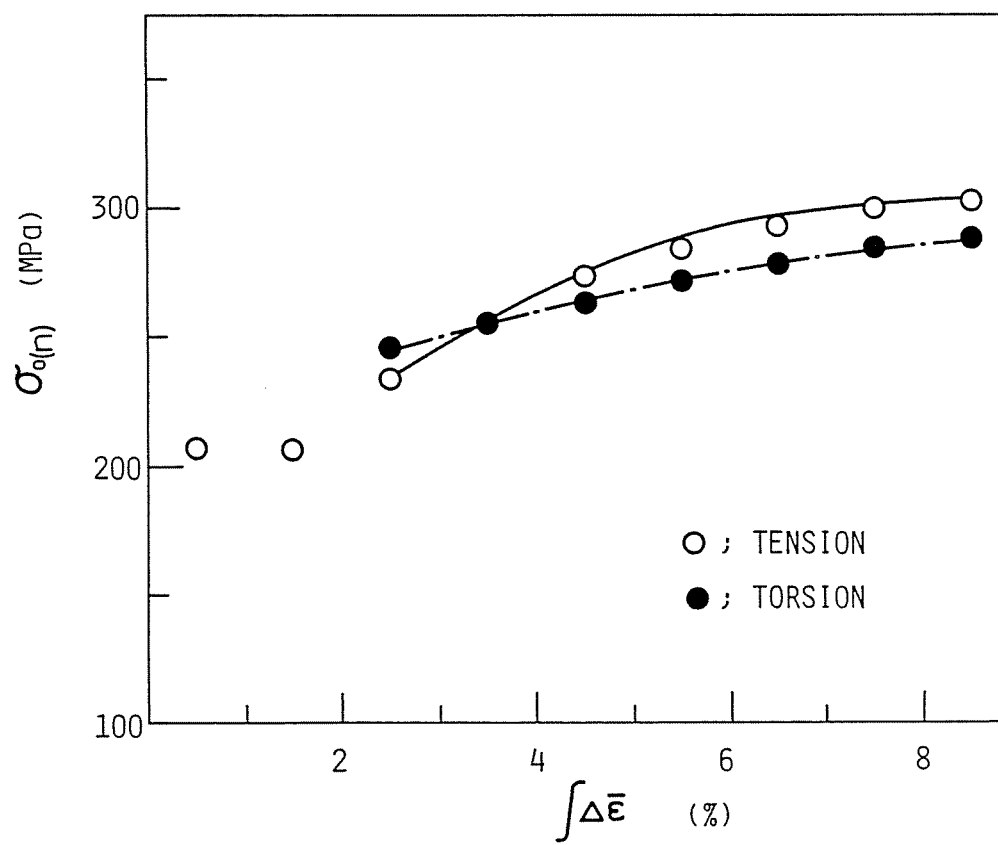


图 5·24 材料定数 $\sigma_{0(n)}$

本章では第4章で提案した繰返し塑性構成式の繰返し負荷への適用性を調べた。すなわち、第2章、第3章で行ったSUS304鋼を用いた実験を基にして実験検証を行った。また、構成式で用いた材料定数の負荷方向依存性についても調べた。その結果以下の結論を得た。

(1) SUS304鋼における一定ひずみ振幅のねじりおよび引張り・圧縮の比例繰返し負荷の挙動が、本構成式により比較的簡便に、かつ精度良くシミュレーションできる。さらに、変動ひずみ振幅の比例繰返し負荷時における特徴的挙動、すなわち、ひずみ振幅増加に起因するひずみ硬化とひずみ振幅減少に起因するひずみ軟化の挙動も、本構成式でシミュレーションできる。

(2) 一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷後、降伏曲面の中心を原点として後続負荷を行った場合の等塑性ひずみ面を4種類のoffsetひずみ500, 1000, 1500, 2000 ($\mu\text{m}/\text{m}$)で調べた結果、4種類全てのoffsetひずみに対し、等塑性ひずみ面をだ円で表示できた。

(3) 一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷後、完全除荷点を原点として後続負荷を行った場合の等塑性ひずみ面は、除荷方向に滑らかで逆方向に鋭いびつな形になった。しかし、降伏曲面の中心移動を考慮して整理し直すと、等塑性ひずみ面をだ円で表示できた。

(4) 提案した構成式で用いた材料定数を定めるoffsetひずみ

500 $\mu\text{m}/\text{m}$ の等塑性ひずみ面を、(2)、(3)の結果より数式化でき、構成式に用いやすい形となった。

(5) 一定ひずみ振幅引張り・圧縮とねじりの繰返し負荷を交互に行う非比例繰返し負荷実験より得た、降伏曲面のゆがみ、回転による異方性パラメータと(4)の結果を用い、構成式によりシミュレーションした結果、後続負荷の相当応力-相当ひずみ関係のみならず、ひずみ経路についてもシミュレーション可能であることが明らかとなった。

(5) 構成式で用いた硬化指数も負荷経路の角度の関数で表示でき、用いやすい形となった。

(6) 一定ひずみ振幅のねじりの繰返し負荷で安定した後、同じひずみ振幅量で引張り・圧縮の繰返し負荷を行う非比例繰返し負荷のシミュレーションを行った。降伏曲面のゆがみ、回転による異方性パラメータを用いると、このような非比例繰返し負荷の挙動についても、本構成式は実験結果を的確にシミュレーションできることが確かめられた。

(7) 従来の構成式では記述が困難であると言われている円サイクル負荷、ラチェット負荷についても、塑性変形に誘起される異方性の発達による降伏曲面の回転、ゆがみを表す異方性パラメータを用いると本構成式でシミュレーション可能であることが分かった。

第6章 総括

本研究では、繰返し熱負荷、繰返し負荷などを受けるような環境でよく用いられるオーステナイト系ステンレス鋼SUS304材に、比例繰返し負荷、非比例繰返し負荷を与え、その時の応力－ひずみ関係と降伏曲面の変動について実験的に調べ、その特徴的な変形挙動を明らかにした。そして、その結果を参考に、誘起異方性を考慮した繰返し塑性構成式を構築し、比例、非比例繰返し負荷へのシミュレーションにより、その適用性を検証した。

本研究で得られた結論を各章毎に説明する。

第1章は、本研究の緒言であり、本研究の背景、目的、研究例について述べている。

第2章では、SUS304鋼に比例繰返し負荷および非比例繰返し負荷を与えたときの応力－ひずみ挙動について詳しく調べた。その結果、以下に示す比例繰返し負荷、非比例繰返し負荷による材料の特徴的挙動が明らかになった。すなわち、一定ひずみ振幅比例繰返し負荷で、硬化後安定した材料にひずみ振幅を増加し、さらに繰返し負荷を与えると、再び安定するまで硬化する。しかも、その安定時のループは、増加後のひずみ振幅単独で繰返し負荷を行った場合の安定時ループと一致する。しかし、一定ひずみ振幅を減少させた場合には、軟化後安定し、その安定時ループは、減少後のひずみ振幅単独で繰返し負荷を行った

場合の安定時ループとはまったく一致しない。すなわち、比例繰返し負荷時の塑性挙動は、現段階までに受けた中で最大のひずみ振幅に従う。一方、非比例繰返し負荷のもとでの金属材料のひずみ硬化は、比例繰返し負荷でのひずみ硬化に比べて著しく大きい。これは、繰返し負荷により異方性が発達したためと考えられる。中でも円サイクル負荷時の硬化量が著しく大きく、異方性の発達が最も顕著であると考えられる。また、メカニカルラチェット変形挙動の場合にも非比例繰返し負荷特有の硬化が見られた。

第3章では、塑性変形によって誘起される異方性を考慮するために、構成式の中で塑性ポテンシャルとして用いられる降伏曲面が、第2章で行った比例繰返し負荷および非比例繰返し負荷中にどのように移動し、変形するかを調べた。その結果、比例繰返し負荷により、負荷方向の降伏応力が減少し、負荷方向への異方性の発達が確認されたが、降伏曲面はだ円で表示できること、さらに、そのだ円の形状は、ひずみ振幅で定められることなどが明らかになった。一方、非比例繰返し負荷時の降伏曲面は、ゆがみだけではなく、回転し、その回転角は本研究の位相外同一ひずみ振幅の繰返し負荷の場合 $\sigma - \sqrt{3}\tau$ 平面で 45° であることも判明した。また、比例、非比例負荷を問わず、繰返し負荷による降伏曲面の形状は、その第1経路の予ひずみ (prestraining) により定められ、負荷中は常に移動 (translation) と回転 (rotation) のみ生じ、形状のゆがみ (distorsion) は、生じないことも分かった。また、繰返し塑

性構成式を構築する際の重要な仮定の1つである、塑性ひずみ増分ベクトルの降伏曲面への垂直性も実験により確かめられた。さらに、今までの研究ではなされていなかった、円サイクル負荷およびメカニカルラチェット変形挙動の降伏曲面も明らかになった。

第4章では、第2章、第3章の結果を基に、繰返し負荷を受ける材料の塑性挙動を記述するための繰返し塑性構成式を構築した。非比例繰返し負荷による、著しい硬化を構成式で記述できるように、塑性変形により誘起される異方性を構成式の構築の際に考慮した。すなわち、Prager-Zieglerの移動硬化則より定める降伏曲面の中心移動と塑性変形により誘起される異方性を考慮した負荷関数を用いて、降伏曲面と塑性ひずみ増分ベクトルとの垂直性から繰返し塑性構成式を導いた。また、降伏曲面の中心から全ての応力経路についての相当応力-相当ひずみ関係にRamberg-Osgood則を適用した。構成式に塑性変形に誘起される異方性の影響を組み込んだことにより、比例繰返し負荷はもとより、非比例繰返し負荷、特に従来の構成式では記述が困難であると言われている円サイクル負荷、メカニカルラチェット変形挙動をも、提案した構成式でシミュレーションできる可能性を見いだした。

第5章では、第2章、第3章で行ったSUS304鋼を用いた実験を基にして、第4章で提案した構成式による比例、非比例繰返し負荷へのシミュレーションを行った。その結果、SUS304鋼に

おける一定ひずみ振幅のねじりおよび引張り・圧縮の比例繰返し負荷の挙動が、本構成式により比較的簡便に、かつ精度良くシミュレーションできること、さらに、変動ひずみ振幅の比例繰返し負荷の際における特徴的挙動、すなわち、ひずみ振幅増加に起因するひずみ硬化とひずみ振幅減少に起因するひずみ軟化の挙動も、本構成式でシミュレーションできることなど、比例繰返し負荷に対する本構成式の適用性が確認された。また、一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷をすでに受けた材料のように、負荷方向によって変形挙動に違いのある場合に提案した構成式を適用し、構成式で用いた材料定数の負荷方向依存性についても確かめた。降伏曲面の中心移動を考慮することにより、重要な材料定数の一つである offset ひずみ $500 \mu\text{m}/\text{m}$ の等塑性ひずみ面を応力の 2 次関数で数式化でき、さらに、硬化指数も負荷経路の角度の関数で表示でき、材料定数の負荷方向依存性も明らかになった。さらにまた、非比例繰返し負荷、特に円サイクル負荷、メカニカルラチェット変形挙動を実験結果を基に求めた異方性パラメータを用いることにより、本構成式で十分記述可能であることを明らかにした。

以上のように本研究では、比例繰返し負荷、非比例繰返し負荷の応力-ひずみ関係、降伏曲面の変形挙動を実験的に把握し、それらの結果を参考にして構成式を構築した。また、塑性変形に誘起される異方性が、材料の硬化挙動に重要な影響を与えていることを明かにした。本論文で提案した誘起異方性を考慮した繰返し塑性構成式で比例繰返し負荷のみならず、従来困難と

されていた非比例繰返し負荷のシミュレーションも可能であることが確認できた。なお、提案した構成式はすでに、異方性を考慮しない場合についてではあるが、有限要素法による円孔帯板の解析に用いられており[85]、有限要素法などの数値解析プログラムに組み込み易い形であることが確かめられている。

なお、提案した構成式は、材料の粘性については考えていないが、熱負荷を受ける材料の変形挙動を記述するためには、粘性を考慮しなければならない。そのためには、構成式にひずみ速度の影響を考慮する必要があるが、このことは将来の課題である。

参 考 文 献

- [1] Phillips, A., and Tang, J.L., "The Effect of Loading Path on the Yield Surface at Elevated Temperatures", Int. J. Solids Struct., 8, (1972), 463-474.
- [2] Phillips, A., and Weng, G.J., "An Analytical Study of an Experimentally Verified Hardening Law", Trans. ASME, J. Appl. Mech., 42, (1975), 375-378.
- [3] Phillips, A., and Ricciuti, M., "Fundamental Experiments in Plasticity and Creep of Aluminum-Extension of Previous Results", Int. J. Solids Struct., 12, (1976), 159-171.
- [4] Phillips, A., and Lee, C.W., "Yield Surfaces and Loading Surfaces. Experiments and Recommendations", Int. J. Solids Struct., 15, (1979), 715-729.
- [5] Phillips, A., and Lu, W.L., "An Experimental Investigation of Yield Surfaces and Loading Surfaces of Pure Aluminum With Stress-Controlled and Strain-Controlled Paths of Loading", Trans, ASME, J. Eng. Mater. Technol., 106, (1984), 349-354.
- [6] 白鳥・池上・岡野, "前にあたえた塑性変形が、その後の降伏条件におよぼす影響について", 日本機械学会論文集, 33-254, (1967), 1546-1551.
- [7] Shiratori, E., and Ikegami, K., "Experimental Study of The Subsequent Yield Surface by Using Cross-Shaped Specimens", J. Mech. Phys. Solids, (1968), 373-394.
- [8] Yoshimura, Y., and Takenaka, Y., "Strain History Effects in Plastic Deformation of Metals", Second-Order Effects in Elasticity, Plasticity and Fluid Dynamics (ed. by Reiner, M. and Abiv, D.), Pergamon, (1964), 729-750.
- [9] Baltov, A., and Sawczuk, A., "A Rule of Anisotropic Hardening", Acta

Mach., 1, 1965, 81-92.

- [10] 田中・石崎・井上, "降伏曲面の温度依存性に関する研究", 日本機械学会論文集, 38-314, (1972), 2439-2446.
- [11] Shiratori, E., Ikegami, K., and Yoshida, F., "Analysis of Stress-Strain Relations by Use of an Anisotropic Hardening Plastic Potential", J. Mech. Phys. Solids, 27, (1979), 213-229.
- [12] Eisenberg, M.A., and Yen, C.F., "The Anisotropic Deformation of Yield Surfaces", Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol., 106, (1984), 355-360.
- [13] Rees, D.W.A., "An Examination of Yield Surface Distortion and Translation", Acta Mech., 52, (1984), 15-40.
- [14] Daneshi, G.H., and Hawkyard, J.B., "An Investigation into Yield Surfaces and Plastic Flow Laws for F.C.C. Metals at Room Temperature and a Low Temperature", Int. J. Mech. Sci., 18, (1976), 195-200.
- [15] Stout, M.G., Martin, P.L., Helling, D.E., and Canova, G.R., "Multi-axial Yield Behavior of 1100 Aluminum Following Various Magnitudes of Prestrain", Int. J. Plast., 1, (1985), 163-174.
- [16] Stout, M.G., and Follansbee, P.S., "Strain Rate Sensitivity, and Yield Behavior of 304L Stainless Steel", Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol., 108, (1986), 344-353.
- [17] Helling, D.E., Miller, A.K., and Stout, M.G., "An Experimental Investigation of Yield Loci of 1100-0 Aluminum, 70:30 Brass, and an Overaged 2024 Aluminum Alloy after Various Prestrains", Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol., 108, (1986), 313-320.
- [18] Helling, D.E., and Miller, A.K., "The Incorporation of Yield Surface Distortion into a Unified Constitutive Model, Part 1: Equation Development", Acta Mech., 69, (1987), 9-23.
- [19] Helling, D.E., and Miller, A.K., "The Incorporation of Yield Surface Distortion into a Unified Constitutive Model, Part 2: Predictive Capabilities", Acta Mech., 72, (1988), 39-53.

- [20] Liu, K.C., and Greenstreet, W.L., "Experimental Studies to Examine Elastic-Plastic Behaviors of Metal Alloys Used in Nuclear Structures", Constitutive Equations in Viscoplasticity: Computational and Engineering Aspects (ed. by Stricklin, J.A., and Saczalski, K.J.), ASME, AMD-20, (1975), 35-55.
- [21] 池上, "種々の前負荷後の降伏曲面について—その研究の発展過程と現状 (その1)—", 材料, 24-261, (1975), 497-502.
- [22] 池上, "種々の前負荷後の降伏曲面について—その研究の発展過程と現状 (その2)—", 材料, 24-263, (1975), 709-718.
- [23] Hecker, S., "Experimental Study of Yield Phenomena in Biaxially Loaded Metals", Constitutive Equations in Viscoplasticity: Computational and Engineering Aspects (ed. by Stricklin, J.A., and Saczalski, K.J.), ASME, AMD-20, (1975), 1-33.
- [24] Eisenberg, M.A., "A Generalization of Plastic Flow Theory With Application to Cyclic Hardening and Softening Phenomena", Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol., 98, (1976), 221-228.
- [25] Dafalias, Y.F., and Popov, E.P., "Plastic Internal Variables Formalism of Cyclic Plasticity", Trans. ASME, J. Appl. Mech., Ser E, 43, (1976), 645-651.
- [26] Drucker, D.C., and Palgen, L., "On Stress-Strain Relations Suitable for Cyclic and Other Loading", Trans. ASME, J. Appl. Mech., 48, (1981), 479-485.
- [27] Ohno, N., "A Constitutive Model of Cyclic Plasticity With a Non-hardening Strain Region", Trans. ASME, J. Appl. Mech., 49, (1982), 721-727.
- [28] Ohno, N., and Kachi, Y., "A Constitutive Model of Cyclic Plasticity for Nonlinear Hardening Materials", Trans. ASME, J. Appl. Mech., 53, (1986), 395-403.
- [29] 大野・佐藤・高橋・桑原, "温度変動下のSUS304の繰返し塑性構成式", 日本機械学会論文集, 54-501, (1988), 1140-1150.

- [30] Mroz, Z., "On the Description of Anisotropic Workhardening", J. Mech. Phys. Solids, 15, (1967), 163-175.
- [31] Kujawski, D., and Mroz, Z., "A Viscoplastic Material Model and Its Application to Cyclic Loading", Acta Mech., 36, (1980), 213-230.
- [32] Krieg, R.D., "A Practical Two Surface Plasticity Theory", Trans. ASME, J. Appl. Mech., Ser. E, 42-4, (1975), 641-646.
- [33] Lamba, H.S., and Sidebottom, O.M., "Cyclic Plasticity for Non-proportional Paths: Part 1-Cyclic Hardening, Erasure of Memory, and Subsequent Strain Hardening Experiments", Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol., 100, (1978), 96-103.
- [34] Lamba, H.S., and Sidebottom, O.M., "Cyclic Plasticity for Non-proportional Paths: Part 2-Comparison with Predictions of Three Incremental Plasticity Models", Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol., 100, (1978), 104-111.
- [35] McDowell, D.L., "An Experimental Study of the Structure of Constitutive Equations for Nonproportional Cyclic Plasticity", Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol., 107, (1985), 307-315.
- [36] McDowell, D.L., "An Evaluation of Recent Developments in Hardening and Flow Rules for Rate-Independent, Nonproportional Cyclic Plasticity", Trans. ASME, J. Appl. Mech., 54, (1987), 323-334.
- [37] Krempl, E., and Lu, H., "The Hardening and Rate-Dependent Behavior of Fully Annealed AISI Type 304 Stainless Steel Under Biaxial In-Phase and Out-of-Phase Strain Cycling at Room Temperature", Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol., 106, (1984), 376-382.
- [38] Nouailhas, J.L., Chaboche, S., Savalle, S., and Cailletaud, G., "On the Constitutive Equations for Cyclic Plasticity under Non-proportional loading", Int. J. Plast., 1, (1985), 317-330.
- [39] Chaboche, J.L., and Rousselier, G., "On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations-Part I: Rules Developed with Internal Variable Concept", Trans. ASME, J. Pressure Vessel Technol., 105, (1983),

153-158.

- [40] Chaboche, J.L., and Rousselier, G., "On the Plastic and Viscoplastic Constitutive Equations-Part 2: Application of Internal Variable Concepts to the 316 Stainless Steel", Trans. ASME, J. Pressure Vessel Technol., 105, (1983), 159-164.
- [41] 石川, "繰返し負荷を受ける材料の塑性流れ (第1報 理論の提案)", 日本機械学会論文集, 50-452, (1984), 729-736.
- [42] 石川・Lippmann, H., "繰返し負荷を受ける材料の塑性流れ (第2報, 実験検証)", 日本機械学会論文集, 51-461, (1985), 72-80.
- [43] Ramberg, W., and Osgood, W.R., "Description of Stress-Strain Curves by Three Parameters", NACA, Technical Note, No.902, (1943), 1-14.
- [44] Chu, C.C., "The Analysis of Multiaxial Cyclic Problems with an Anisotropic Hardening Model", Int. J. Solids Struct., 23, (1987), 569-579.
- [45] 田中・村上・大岡, "多軸非比例塑性ひずみサイクルにおける繰返し硬化の経路形状履歴依存性", 日本機械学会論文集, 51-468, (1985), 1941-1950.
- [46] 田中・村上・大岡, "多軸非比例塑性ひずみサイクルにおける繰返し硬化の振幅履歴依存性", 日本機械学会論文集, 51-469, (1985), 2162-2171.
- [47] 田中・村上・大岡・永井, "多軸非比例塑性ひずみサイクルにおけるひずみ経路形状の等価性と繰返し硬化の回復", 日本機械学会論文集, 52-479, (1986), 1716-1723.
- [48] 田中・村上・大岡, "非比例負荷に対する繰返し塑性構成式の定式化 (第1報, 基礎概念の定式化と基礎式の展開)", 日本機械学会論文集, 52-480, (1986), 2054-2061.
- [49] 田中・村上・大岡, "非比例負荷に対する繰返し塑性構成式の定式化 (第2報, 材料定数と材料関数の決定方法, 並びに構成式の実験的検討)", 日本機械学会論文集, 52-483, (1986), 2520-2528.
- [50] Valanis, K.C., "Fundamental Consequences of a New Intrinsic Time Measure Plasticity as a Limit of Endochronic Theory", Acta Mech.,

32, (1980), 171-191.

- [51] Valanis, K.C., and Fan, J., "Endochronic Analysis of Cyclic Elastoplastic Strain Fields in a Notched Plate", Trans. ASME, J. Appl. Mech., 50, (1983), 789-794.
- [52] Valanis, K.C., "Continuum Foundations of Endochronic Plasticity", Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol., 106, (1984), 367-375.
- [53] 渡部, "内部時間を用いた塑性異方硬化則 (第1報, 降伏曲面の変形)", 日本機械学会論文集, 53-485, (1987), 139-147.
- [54] 渡部, "内部時間を用いた塑性異方硬化則 (第2報, 降伏曲面の交差および回転硬化)", 日本機械学会論文集, 53-493, (1987), 1844-1853.
- [55] Wu, H.C., and Yao, J.C., "Analysis of Stress Response to Various Strain-Paths in Axial-Torsional Deformation of Metals", Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol., 106, (1984), 361-366.
- [56] Miller, A., "An Inelastic Constitutive Model for Monotonic, Cyclic, and Creep Deformation: Part 1-Equation Development and Analytical Procedures", Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol., 98, (1976), 97-105.
- [57] 香川・朝田・三橋, "ラチェット効果への内部状態変数モデルの適用", 日本機械学会論文集, 50-452, (1984), 645-653.
- [58] Lowe, T.C., and Miller, A.K., "Improved Constitutive Equations for Modeling Strain Softening-Part 1: Conceptual Development", Trans. ASME, J. Eng. Mater. Technol., 106, (1984), 337-342.
- [59] 徳田・Kratochvil, J.・大橋, "多結晶金属の塑性異方性発達のメカニズムに関する一考察", 日本機械学会論文集, 48-426, (1982), 239-247.
- [60] 徳田・加藤, "組合わせ負荷を受ける多結晶金属の塑性挙動", 日本機械学会論文集, 50-460, (1984), 2000-2008.
- [61] Prager, W., "A New Method of Analysing Stresses and Strains in Work-Hardening Plastic Solids", Trans. ASME, Ser. E, 23, (1956), 493-496.

- [62] Ziegler, H., "A Modification of Prager's Hardening Rule", *Quart. Appl. Math.*, 17, (1959), 55-56.
- [63] Ohashi, Y., Kawashima, K., and Yokochi., "Anisotropy Due to Plastic Deformation of Initially Isotropic Mild Steel and Its Analytical Formulation", *J. Mech. Phys. Solids*, 23, (1975), 277-294.
- [64] 大橋・徳田・伊藤・三宅, "黄銅の塑性挙動のひずみ履歴依存性に関する実験的研究", *日本機械学会論文集*, 45-400, (1979), 1575-1584.
- [65] 大橋・河井・清水, "高温におけるクリープ変形の後続塑性変形に対する影響", *日本機械学会論文集*, 50-450, (1984), 216-224.
- [66] 新津・辻・池上, "引張りとなじりに組み合わせ応力下におけるSUS304の交差効果", *日本機械学会論文集*, 52-474, (1986), 486-491.
- [67] Chaboche, J.L., "Time-Independent Constitutive Theories for Cyclic Plasticity", *Int. J. Plast.*, 2, (1986), 149-188.
- [68] Krempl, E., "An Experimental Study of Room-Temperature Rate-Sensitivity, Creep and Relaxation of AISI Type 304 Stainless Steel", *J. Mech. Phys. Solids*, 27, (1979), 363-375.
- [69] Kujawski, D., Kallianpur, V., and Kremple, E., "An Experimental Study of Uniaxial Creep, Cyclic Creep and Relaxation of AISI Type 304 Stainless Steel at Room Temperature", *J. Mech. Phys. Solids*, 28, (1980), 129-148.
- [70] 村上・河井・青木・大見, "316ステンレス鋼における多軸繰返し硬化の温度依存性", *日本機械学会論文集*, 53-495, (1987), 2077-2084.
- [71] 村上・河井・大見, "316ステンレス鋼における多軸繰返し硬化の振幅変動履歴および温度変動履歴依存性", *日本機械学会論文集*, 54-501, (1988), 1131-1139.
- [72] 鋼の熱処理, 改訂5版, 丸善, (1976), 558-574.
- [73] 大橋・川嶋・徳田, "複合負荷自動試験機に用いる高精度変位計測装置の試作", *日本機械学会論文集*, 39-318, (1973), 534-545.

- [74] 芳賀・今谷・井上, "高温多軸応力下におけるSUS304鋼の非弾性挙動に関する研究", 日本機械学会論文集, 52-473, (1986), 49-57.
- [75] 石川・佐々木, "繰返し負荷を受けるSUS304材の降伏曲面", 日本機械学会論文集, 54-501, (1988), 1116-1123.
- [76] Ishikawa, H., and Sasaki, K., "Yield Surfaces of SUS304 Under Cyclic Loading", Trans. ASME., J. Eng. Mater. Technol., 110, (1988), 364-371.
- [77] Ishikawa, H., and Sasaki, K., "Yield Surfaces of SUS304 After Cyclic Preloading", JSME, Int. J., Ser. I, 32, (1989), 81-87.
- [78] Satra, M.・大野, "繰返し負荷を受ける切欠丸棒の詳細および簡易弾塑性解析", 日本機械学会論文集, 52-483, (1986), 2529-2537.
- [79] Ishikawa, H., and Sasaki, K., "Constitutive Modeling of Cyclic Plasticity Considering Induced Anisotropy", Constitutive Laws for Engineering Materials: Theory and Applications, (Dasai, C.S., et al., Editors), Elsevier Science Publishing, (1987), 581-587.
- [80] 石川・佐々木, "誘起異方性を考慮した繰返し塑性構成モデル", 日本機械学会論文集, 53-491, (1987), 1432-1439.
- [81] Ishikawa, H., and Sasaki, K., "Constitutive Modeling of Non-proportional Cyclic Plasticity", Proceeding of ICCM88-ATLANTA, (Atluri, S.N., and Yagawa, G., Editors) 1, (1988), 1611-1614, Springer-Verlag.
- [82] Hill, R., 塑性学, 培風館, (1965).
- [83] Martin, J.B., "Plasticity: Fundamentals and General Results", (1975), 339, MIT Press.
- [84] 石川・佐々木, "繰返し前負荷を受けたSUS304材の応力-ひずみ関係", 日本機械学会論文集, 論文No.88-0835, 校閲終了.
- [85] 石川・佐々木・中島, "繰返し負荷を受ける有孔帯板の数値解析", 日本機械学会論文集, 論文No.88-0359, 掲載決定.

図・表一覧

第2章 繰返し負荷時の応力－ひずみ関係

	頁
図2・1 試験片形状	17
図2・2 試験機外観	21
図2・3 試験機の模式図とブロック線図	22
図2・4 3種類の負荷経路での応力－ひずみ関係	29
図2・5 初期降伏曲面	30
図2・6 一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷 ($\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ 、実験)	33
図2・7 3種類の負荷経路での一定ひずみ振幅繰返し負荷 ($\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ 、実験)	34
図2・8 一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷 ($\Delta \bar{\epsilon} = 0.5\%$ 、実験)	35
図2・9 一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷 ($\Delta \bar{\epsilon} = 1.5\%$ 、実験)	36
図2・10 一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷 ($\Delta \bar{\epsilon} = 2\%$ 、実験)	37
図2・11 変動ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷 ($\Delta \bar{\epsilon} = 0.9\% \rightarrow 1.6\% \rightarrow 0.9\%$ 、実験)	39
図2・12 一定ひずみ振幅ねじりの繰返し負荷と引張り・圧縮の繰返し負荷を交互に行った場合 ($\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ 、実験)	42
図2・13 一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷とねじりの繰返し負荷を交互に行った場合 ($\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ 、実験)	43
図2・14 応力振幅と累積ひずみ	44
図2・15 円サイクル負荷	47

図2・16	円サイクル負荷時のひずみ経路（実験）	48
図2・17	円サイクル負荷時の応力経路（実験）	49
図2・18	円サイクル負荷時の軸応力－軸ひずみ関係（実験）	50
図2・19	円サイクル負荷時のせん断応力－せん断ひずみ関係（実験）	51
図2・20	硬化量の比較	52
図2・21	ラチェット時のひずみ挙動（実験）	54
図2・22	ラチェット時のせん断応力－せん断ひずみ関係（実験）	55
表2・1	供試材の化学成分（wt%）	16

第3章 繰返し負荷時の降伏曲面

図3・1	降伏曲面の測定場所	62
図3・2	種々の測定場所での降伏曲面の形状	63
図3・3	繰返し負荷中の降伏曲面の測定場所	64
図3・4	一定ひずみ振幅ねじりの繰返し負荷時の降伏曲面	68
図3・5	3種類の負荷経路での繰返し負荷時の降伏曲面	69
図3・6	一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷時の降伏曲面 ($\Delta \bar{\epsilon} = 0.5\%$)	70
図3・7	一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷時の降伏曲面 ($\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$)	71
図3・8	一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷時の降伏曲面 ($\Delta \bar{\epsilon} = 1.5\%$)	72
図3・9	一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷時の降伏曲面 ($\Delta \bar{\epsilon} = 2\%$)	73
図3・10	後続降伏曲面の回転角	78
図3・11	降伏曲面と塑性ひずみ増分ベクトルとの垂直性	79
図3・12	原点での降伏曲面	80
図3・13	繰返し負荷時の降伏曲面の変動	81
図3・14	繰返し負荷時の降伏曲面の変動	82
図3・15	変動ひずみ振幅繰返し負荷	83

図3・16	変動ひずみ振幅繰返し負荷時の降伏曲面の変動	84
図3・17	円サイクル負荷時の降伏曲面	87
図3・18	ラチェット負荷時の降伏曲面	88

第5章

図5・1	材料定数の決定方法	127
図5・2	3種類の負荷経路でのシミュレーション結果	131
図5・3	一定ひずみ振幅引張り・圧縮の繰返し負荷 ($\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ 、シミュレーション)	132
図5・4	材料定数 $\sigma_{o(n)}$ と $m(n)$	133
図5・5	変動ひずみ振幅繰返し負荷 ($\Delta \bar{\epsilon} = 0.9\% \rightarrow 1.6\% \rightarrow 0.9\%$ 、シミュレーション)	134
図5・6	繰返し負荷後の負荷経路	137
図5・7	繰返し負荷後の相当応力-相当ひずみ関係 (ケースA、実験)	140
図5・8	繰返し負荷後の等塑性ひずみ面 (ケースA)	141
図5・9	繰返し負荷後の相当応力-相当ひずみ関係 (ケースB、実験)	145
図5・10	繰返し負荷後の等塑性ひずみ面 (ケースB)	146
図5・11	繰返し負荷後の相当応力-相当ひずみ関係 (ケースB ^o 、実験)	147
図5・12	繰返し負荷後の等塑性ひずみ面 (ケースB ^o)	148
図5・13	繰返し負荷後の相当応力-相当ひずみ関係 (ケースA、シミュレーション)	152
図5・14	繰返し負荷後の相当応力-相当ひずみ関係 (ケースB、シミュレーション)	153
図5・15	ひずみ経路 (ケースA)	154
図5・16	ひずみ経路 (ケースB)	155
図5・17	一定ひずみ振幅ねじりの繰返し負荷とその後の引張り・圧縮の繰返し負荷 ($\Delta \bar{\epsilon} = 1\%$ 、シミュレーション)	161
図5・18	円サイクル負荷時の応力経路 (シミュレーション)	162

図5・19	円サイクル負荷時の軸応力－軸ひずみ関係 (シミュレーション)	163
図5・20	円サイクル負荷時のせん断応力－せん断ひずみ関係 (シミュレーション)	164
図5・21	ラチェット負荷時のひずみ挙動 (シミュレーション)	165
図5・22	ラチェット負荷時のせん断応力－せん断ひずみ関係 (シミュレーション)	166
図5・24	材料定数 $m_{(n)}$	167
図5・25	材料定数 $\sigma_{o(n)}$	168

謝 辞

本研究は、北海道大学工学部 石川博將教授の懇切なご指導のもとに行われたものであり、研究計画から論文作成に至るまで終始ご丁寧なご指導、ご助言をいただきました。さらに、研究のみにとどまらず、広い分野に渡って、多くの事柄をご教授いただきました。ここに心から感謝の意を表します。

本論文の作成にあたり、北海道大学工学部 渡辺勝也教授、鵜飼隆好教授には、ご専門の立場から有益なご検討とご意見をいただきました。ここに感謝の意を表します。

また、機会あるごとにご助言、ご激励をいただいた塑性加工学講座 但野茂講師に感謝の意を表します。

さらに、試験機、試験片の製作にあたり多大なご協力をいただいた塑性加工学講座 平賀正秋技官に感謝の意を表します。