



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	個別軌道輸送システムにおけるトラヒックの性能評価モデルに関する研究
Author(s)	栗原, 正仁
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	乙第3041号
Issue Date	1986-06-30
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/32644
Type	doctoral thesis
File Information	3041.pdf



個別軌道輸送システムにおける
トラヒックの性能評価モデルに関する研究

栗 原 正 仁

目 次

	頁
第 1 章 序 論	
1. 1 新交通システム導入に至る歴史的背景と現状	1
1. 2 新交通システムの分類	5
1. 3 個別軌道輸送システムの特徴	7
1. 4 個別軌道輸送システムにおけるトラヒック解析の重要性と特徴	15
1. 5 システム工学的な考え方の重要性	20
1. 6 本論文の目的と構成	24
1. 7 関連の研究	27
第 2 章 マルコフ再生過程とシグナルフローグラフ	
2. 1 まえがき	30
2. 2 マルコフ連鎖	30
2. 3 マルコフ再生過程	35
2. 4 シグナルフローグラフ	47
2. 5 マルコフ再生過程とシグナルフローグラフの関連	54
2. 6 状態部分集合における再帰時間	65
2. 7 非再生点を含むマルコフ再生過程	69
2. 8 まとめ	72
第 3 章 多バース駅モデルの構成と解析	
3. 1 まえがき	73
3. 2 多バース駅モデル	74
3. 3 マルコフ再生過程による確率モデル	77
3. 4 解析	86
3. 5 GPSによるシミュレーション	98
3. 6 非再生点を含むマルコフ再生過程による出発待ち行列の解析	108
3. 7 まとめ	121

第4章	平面交差点の同期制御アルゴリズムとトラヒックの評価	
4.1	まえがき	123
4.2	交差点の形態と車両の挙動	124
4.3	同期制御アルゴリズム	126
4.4	議論	133
4.5	マルコフ連鎖モデル	135
4.6	解析	136
4.7	数値例	140
4.8	まとめ	144
第5章	優先路と非優先路からなる立体交差点の 同期制御アルゴリズムとトラヒックの評価	
5.1	まえがき	146
5.2	交差点の形態と車両挙動	147
5.3	MT乗換えの同期制御方式	149
5.4	従来の研究との比較	156
5.5	マルコフ連鎖モデル	158
5.6	解析	159
5.7	数値例	161
5.8	車両ダイナミクスのシミュレーション	163
5.9	まとめ	176

第6章	ネットワークの専用シミュレータ	
6.1	まえがき	178
6.2	制御方式のモデル化	181
6.3	シミュレータの概観	183
6.4	車両の位置・移動	185
6.5	車両の運行	187
6.6	車両の発生と消滅	189
6.7	交差点・駅	190
6.8	統計出力	193
6.9	ネットワークの例	195
6.10	議論	196
6.11	ソフトウェア構成	197
6.12	車両属性	199
6.13	スキャナ	199
6.14	命令実行ルーチン	200
6.15	まとめ	201
第7章	結 論	
7.1	トラヒック評価のためのシステム技法と 個別軌道輸送システムへの適用	203
7.2	結 言	207
謝辞		208
参考文献		209

第1章 序 論

1.1 新交通システム導入に至る歴史的背景と現状

システム（system）とは、「多数の構成要素が有機的な秩序を保ち、同一目的に向かって行動するもの」であり、システム工学（Systems Engineering）とは、「システムの目的を最もよく達成するために、対象となるシステムの構成要素、組織構造、情報の流れ、制御機構などを分析し設計する技術」である[1]。

本研究は、コンピュータ技術や制御技術の発展により実現可能となり、都市交通の諸問題を解決することが期待されている新交通システムに対してシステム工学を適用し、その計画と設計に寄与しようとするものである。冒頭の定義から明らかなように、システムはそれ自体が「目的」を持っていなければならない。目的がなければ、システムを実現する数多くの「手段」の中から適切な手段を選びようがない。目的があって初めてシステムの良し悪しが議論できる。交通システムも当然何らかの目的を持っている。しかし、それは時代の流れとともに様々に変化してきた。そして、この目的の変化が、新交通システムという手段を選ばせるに至ったのである。以下ではまず、交通システムの目的が歴史的にどう変化してきたか[2]を概観することにより、本論文の対象である新交通システムの位置付けを明らかにしよう。

昭和20年代：戦時中に荒廃した陸海の輸送施設の回復と増強が最大の目的であった。鉄道は急速に復興していったが、道路、港湾はその容量不足が経済成長のネックとなるに至った。

昭和30年代：高度成長期に入り、自動車や航空機が増加してきた。この時代の交通システムの中心的目的は、鉄道、道路、港湾、空港の交通容量増加と、高速道路、新幹線による高速化であった。

昭和40年代：自動車の急速な普及は、交通混雑、交通事故、環境破壊、公共交通の経営悪化という四大交通問題をもたらした。また、環境問題は沿線住民の反発を買う結果となり、交通システム整備の新しい障壁として住民問題が発生した。これらの問題を解決する、自動車にかわる交通機関として新交通システムの開発が進められた。

昭和50年代：40年代末期の石油危機は交通システムの目的を一変させた。第一は省エネルギー型交通体系が重要目標として登場したことである。第二は交通施設整備に

対する経済的制約が大きくなったことである。自動車増加に道路建設で立ち向かうことに対する反省なども出現した。そのほか、交通サービスに対する欲求が多様化してきた。たとえば、平等性などはその典型的なものである。これは、自動車の運転ができない人、自動車が持てない人、幼児、老人、身障者など、いわゆる交通弱者にも平等な交通手段を与えようとするものである。以上を簡単にまとめたのが表 1. 1 である。

表 1. 1 交通システムの目的の変化

年 代	新たに生じた目的
昭和 2 0 年代	交通容量増加
昭和 3 0 年代	高速化
昭和 4 0 年代	交通問題・住民問題への対処
昭和 5 0 年代	省エネルギー、省コスト 交通サービスへの多様なニーズ

このように、新交通システムは、自動車の急速な普及がもたらした都市交通問題を解決するというのが最大の目的であることがわかる。都市交通問題は次の 4 点に集約される。

- (1) 公共交通手段のサービス低下： 待ち時間増大、混雑、ノロノロ運転
- (2) 公営交通事業の経営悪化： 国鉄、路面電車、バスの赤字
- (3) 自動車交通問題： 渋滞、駐車難
- (4) 生活環境の悪化： 交通事故、排気ガス、騒音

図 1. 1 にはこれらの問題に対して、その原因と対策がまとめられている[3]。具体策の 1 つとして「新交通システムの開発と整備」が挙げられており、これにより、低コストで無公害な大量輸送システムの実現が期待されていることがわかる。

このような流れの中で、我が国でも最近次々と新交通システムが開業し（表 1. 2）[4,5,6]、さらに現在建設中のものがある。これらは新交通システムの中でも、「中量

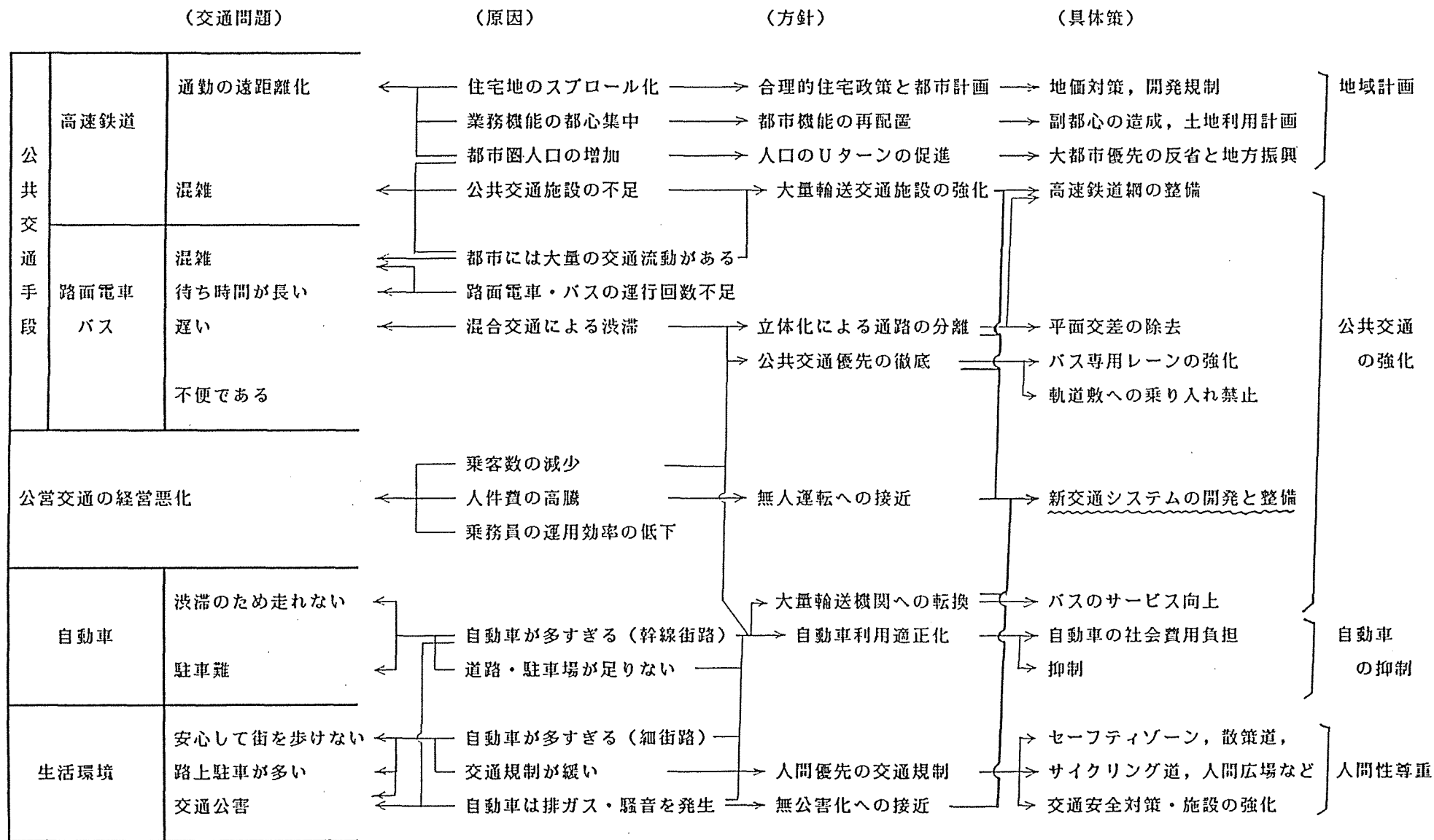


図 1. 1 都市交通問題の原因と将来の方針

表 1. 2 日本で営業中の新交通システムの概要 (1984年現在)

システム名称	神戸新交通 ポートアイランド線	大阪南港 ポートタウン線	ユーカリが丘線	埼玉新都市交通 伊奈線
営業地域	神戸市生田区 国鉄三宮駅 ～ポートアイランド	大阪市住之江区 地下鉄住之江公園駅 ～南港ポートタウン	千葉県佐倉市上座 ユーカリが丘駅 ～ニュータウン	国鉄大宮駅 ～伊奈町羽貫 (部分開業)
営業路線長(km)	複線 2.9 単線 3.5	複線 6.6	単線 4.3	複線 8.2 単線 3.5
駅数	9	8	6	12
車両定員(人/両)	73	72	65	55
一列車車両数	6	4	3	4.6
最高運転速度(km/h)	60	60	50	60
最小運転間隔(分)	2.5	2.25	7.0	3.0
最大輸送力(人/h)	10700	12000	1220～2610	8300
運転方式	監視自動運転 (一部無人運転)	監視自動運転 (将来は無人運転)	ワンマン運転	ワンマン運転
事業主体	神戸新交通㈱	大阪市交通局	山万㈱	埼玉新都市交通㈱
総建設費(億円)	437	420	21	292
開業年	1981	1981	1982	1983

軌道輸送システム」として分類されるものである。このシステムは、在来の鉄道技術にコンピュータによる自動運転技術を取り入れたもので、技術的には比較的实现しやすいものといえる。本論文で扱うシステムは「個別軌道輸送システム」といわれる、さらに進んだ未来指向のシステムである。個別軌道輸送システムは、自動運転、小型車両（4～6人乗り）、個別輸送（乗り合い制でない）、デマンド運転、面的ネットワーク等を特徴とする、在来のシステムと全く異なった形態を持つシステムであるため、技術的に解決すべき点も多い。しかし、都市型交通システムとしてはほぼ理想に近いものであり、今後の多くの研究が期待されている。次節では、新交通システムの開発にいち早く着手した米国の資料に基づいて新交通システムを分類しよう。

1.2 新交通システムの分類

新しい技術あるいは既存技術の新しい組み合わせによる新しい価値をもつ交通手段を新交通システムと呼ぶならばその範囲はかなり広いものになる。たとえば、表1.3に示したような要素の各種組み合わせを考えただけでもそのことがいえる。

表1.3 輸送システムを特徴づける主要因

輸送範囲	都市内／都市間／国際間
輸送力	小量／中量／大量
運転速度	低速／中速／高速
運転頻度	連続／非連続
走行路	有軌道／無軌道
自動化レベル	有人／無人
サービス形態	スケジュール運転／デマンド運転
路線形状	線・ループ／単純ネットワーク／複雑ネットワーク
動力方式	車上動力／地上動力／リニアモータ方式
支持方式	鉄車輪／ゴムタイヤ（接触） 空気浮上／磁気浮上（非接触）

我が国の交通関係者の間では、一般に都市内における中量、中速、非連続、有軌道の輸送手段で無人運転を前提としたものを新交通システムと呼んでいるようであるが明確な定義はない。一方、米国では、新交通システムを総称して Automated Guideway Transit (AGT) と呼び、かなり明確な定義付けを行なっている[7,8]。それによれば、AGTシステムとは専用路上を2～120名の定員を持つ車両が無人運転されるもので、大きく次の3つに分類される。

- (1) SLT (Shuttle and Loop Transit systems ; 大量軌道輸送システム)
- (2) GRT (Group Rapid Transit systems ; 中量軌道輸送システム)
- (3) PRT (Personal Rapid Transit systems ; 個別軌道輸送システム)

SLTは、AGTの中で路線形状が最も単純なもので、線状路線を往復運転するか(shuttle)、環状路線を回るか(loop)のどちらかである。定員20～120名の車両があらかじめ作成されたスケジュールに従って運転される。駅はすべて本線上に設置され(オンライン駅)、従来鉄道に近い運用形態を持つものである。

GRTは、SLTと同様に乗り合い制であるが、車両はやや小型になり、オンライン駅に加えて側線上に設置されたオフライン駅を持つ。路線形状もSLTより複雑になり分岐が多用され、スケジュール運転だけでなくデマンド運転も可能となる。既に述べたように、我が国で最近次々と開業しているシステム(表1.2)はGRTである。

PRTは自動運転のタクシーのようなものであり、デマンドに応じて目的地に直行する完全な個別輸送システムである。路線形状は一般に密なネットワーク状となり、すべてオフライン駅が設けられる。車両は2～6人乗りと小さく、3秒以下という最小運転間隔を持つものである。我が国で開発されたCVSはPRTの典型的なシステムである。

表1.4 新交通システム(AGT)の分類

SLT	線状(shuttle) / 環状(loop)	大型(20～120名)	乗合	スケジュール	オンライン	数分	タンバ空港など
GRT	SLTよりは複雑で分岐を多用	中型(8～40名)	乗合	スケジュール / デマンド	オンライン / オフライン	数十分	ダラス空港など
PRT	密なネットワーク状	小型(2～6名)	個別	デマンド	オフライン	数秒	モルガンタウンなど

以上をまとめたのが表 1. 4 である。自動運転制御という観点からこの A G T システムを眺めてみると、S L T および G R T（大型車両）のほとんどは従来の自動化された鉄道で実用化されている制御技術で実現可能である。しかし、P R T になるとより高度な制御技術ならびに運用ソフトが要求され、残されている課題も多い。本研究は、新交通システム中で最も開発リスクの大きい P R T を対象としている。次節では P R T（個別軌道輸送システム）についてさらに詳しく説明する。

1. 3 個別軌道輸送システムの特徴

個別軌道輸送システム（P R T）は、自動運転のタクシーのようなものであり、デマンドに応じてノンストップで目的地に直行する。このような特徴を実現するため他の新交通システム（A G T）と特に異なるサブシステムは、①自動運転制御システムと②軌道ネットワークである。

<自動運転制御システム>

自動運転制御システム[9] は、その機能面から次の 3 つのサブシステムに分けて考えることができる。

（1）車両群制御システム

（2）1 車両運転制御システム

（3）保安制御システム

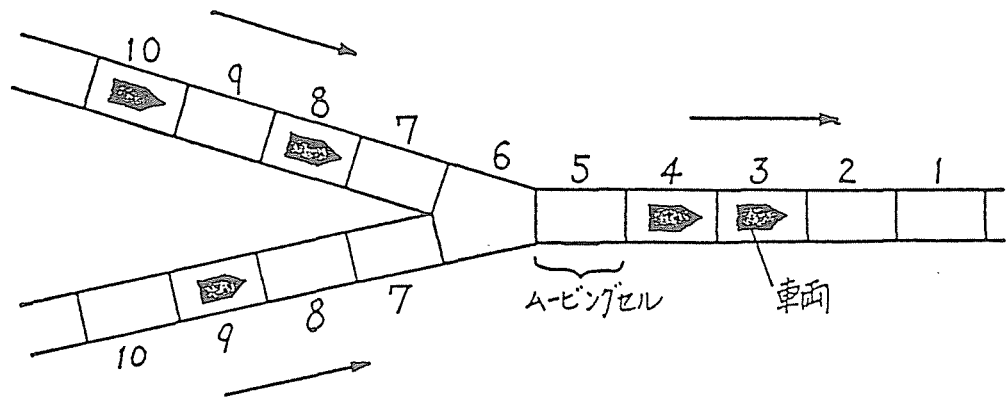
（1）は複数の車両を効率良く運用することによりシステム全体としての機能を十分発揮させるためのものである。（2）は（1）からの制御指令に基づいて実際に個々の車両を運転制御するものである。（3）は上記（1）、（2）のシステムが万一故障した場合でも乗客に対する安全を確保するためのバックアップシステムである。本研究では（1）のレベルでの制御システムを対象としているので、以下では（1）についてさらに述べることにする。（2）、（3）については文献[9] を参照されたい。

車両群制御に要求される機能は基本的運転方式、すなわち、スケジュール運転方式、デマンド運転方式のどちらを用いるかによってかなり異なったものとなる。スケジュール運転方式では、あらかじめ作成されたスケジュールに基づいて各車両を運転すればよい。デマンド運転方式は客のデマンドに応じて直ちに空車を配分し、客の待ち時間を最小にし、かつ、空車運転による無駄も最小にしようというものである。個別軌道輸送シ

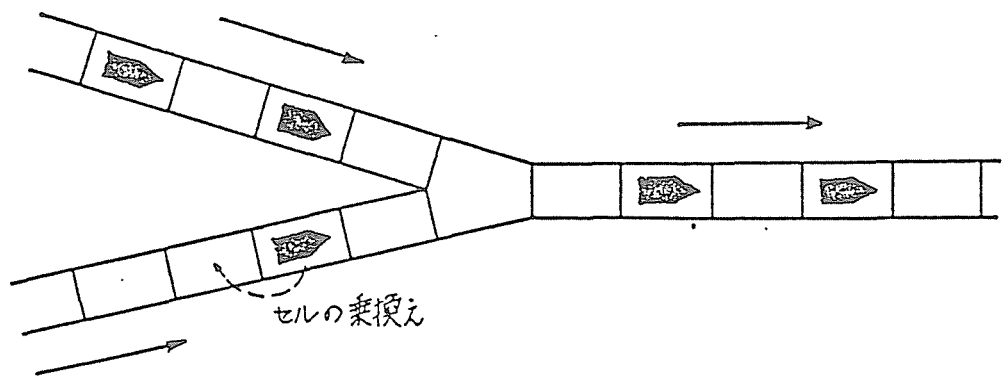
システムはデマンド運転を基本にしている。

デマンド運転方式における車両群制御方式としては点追従制御方式 (point-follower control) と車両追従制御方式 (vehicle-follower control) がある。車両追従制御方式では、先行車の走行状態に応じて速度制御を行なう。先行車との間隔が十分ある状態では、区間毎にあらかじめ定められた速度で走行するように制御される (command velocity control mode)。もし先行車にある程度接近した場合には、間隔制御に切り換えられる (space control mode)。米国および日本では点追従制御が採用されているため、本論文でも点追従制御方式を仮定して議論を進める。

点追従制御方式の基本的考え方は、計算機内において仮想のセルを軌道上に走行させ、デマンドが発生したときに空いているセルを割り当てるというものである。個々の車両は割り当てられたセルの動きに追従するように制御さえすれば他の車両を考慮に入れなくても安全に目的駅に到達できるという利点を持つ。合流点で一緒になるセルには同一番号を付し、番号が同じセルは一つとみなして1車両だけを割り当てるようにすれば合流点で競合を回避できる (図1.2(a))。このようにルート上のすべての合流点で同期するようにセルを割り当てる方法を同期制御方式 (synchronous control) [10,11] という。この方法ではネットワークが大規模になるとルート上のすべての合流点で同期のとれた空いたセルを見つけることが困難になり、駅での待ち時間が増大する[12]。そこで、駅を発車する時点では単に空いたセルを割り当て、合流点の手前で必要に応じてセルの乗換えを行なう方法を準同期制御方式 (quasi-synchronous control) [13,14] という (図1.2(b))。点追従制御を実現するために必要となる基本的機能を表1.5に示す。



(a) Synchronous control



(b) Quasi-synchronous control

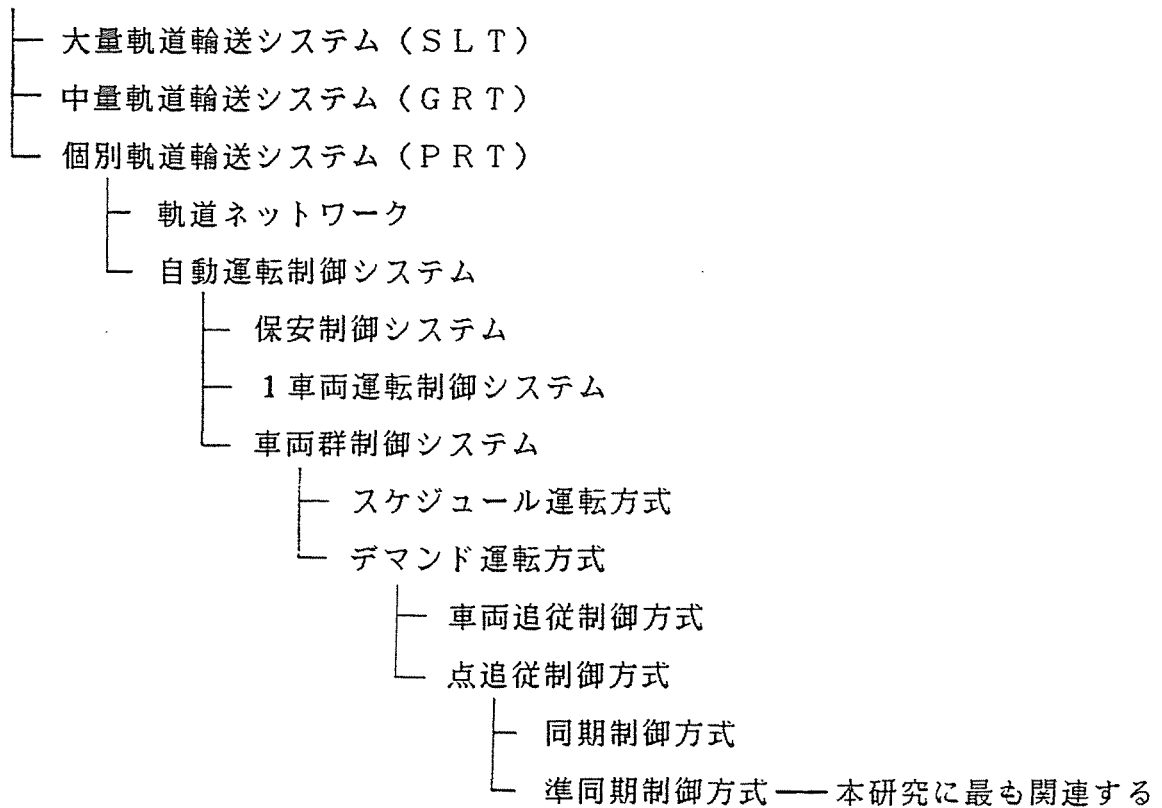
図 1. 2 点追従制御

表 1. 5 点追従制御に必要な基本的機能

セルジェネレーション	ある長さ、速度、ルートをもつセルをネットワーク上に発生させ走行させる
セルリザーベーション	各デマンドに対して目的駅に最も早く到達できる空いたセルを予約し割り当てる
セルチェンジ	準同期制御の場合、合流点で衝突しないように乗換えるセルを決定する
セルフォローイング	割り当てられたセルの動きに追従するように車両の位置、速度を制御する
空車割り当て	各デマンドに対して、適当な空車を選択しデマンド発生駅に直行させる
空車配分	迅速な空車割り当てができるように空車をネットワーク内に分布させる

前節以降ここまで、新交通システムの概要を特に本研究と関連の深い事項にしばって解説してきた。まとめる意味で、話をしばってきた過程を木構造で図示しておく。以下では軌道ネットワークについて解説する。

新交通システム（AGT）



<軌道ネットワーク>

個別軌道輸送システムの特徴を実現するためのネットワーク構成を、我が国のCVS [16-18] の例を用いて説明する。CVSの軌道ネットワークは基本的には図1.3のように構成される。約1 km間隔の大きなメッシュで張りめぐらされるスーパーウェイ（高速路）ネットワークと最小100 m間隔で密に張りめぐらされるバス（低速路）ネットワークがあり、これらが重なりあった二重構造となっている。この二重構造を構成する形態を図1.4に示す。バスネットワークの最小単位はカンタム、スーパーウェイネットワークの最小単位はモジュールと呼ばれ、バスとスーパーウェイが構成する最小単位がベイシックモジュール（図1.3）である。さらに、このベイシックモジュールによってシティと呼ばれる全体のシステムが構成される。スーパーウェイの1メッシュの中間にスーパーウェイとバスを結ぶモジュールゲートと呼ばれるインターチェンジが設置されている。

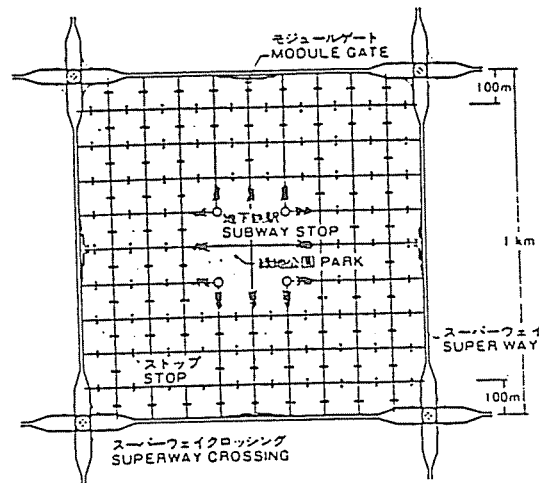


図1.3 PRTネットワーク基本概念図

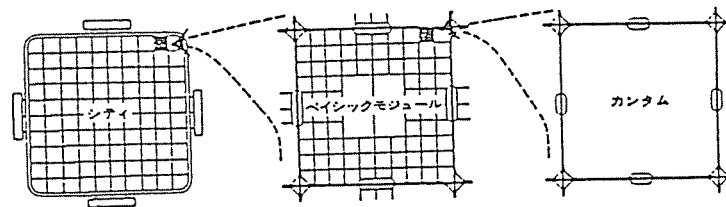


図1.4 PRTネットワークの構成

スーパーウェイでの車両は最高60 km/hの速度で走行し、スーパーウェイ同士の交差部は、右折（または左折）のみの立体交差を基本としている。また、スーパーウェイは交通需要に応じて片側1～3車線である。

バスでは最高40 km/hの速度で車両が走行し、バス同士の交差部はすべて平面交差とし、片側1車線となっている。スーパーウェイとバスの交差部は立体交差である。

駅（ストップ）は、スーパーウェイ上には設けず、バスの交差点間の中央毎に、オフライン駅の形式で配置される。したがって、駅間距離は最小100mとなる。駅は、通常1バス駅であるが、特に鉄道駅などとの連絡部分で交通需要が多くなると予想される場所では複数バス駅が考えられている。

個別軌道輸送システムの特徴であるデマンド運行、面的輸送がこのようなネットワークにより実現されることになる。

<個別軌道輸送システムの目的構造>

交通システムにおける個別軌道輸送システム（P R T）の位置付けをさらに明確にするために、個別軌道輸送システムの種々の特徴や交通システムの目的等をキーワード（要素）とし、これらの間の関係（～の目的は…である／～は…に寄与する）をISM法[19-21]を用いて構造化し、その結果を有向グラフとして示す（図1.5）。ここで要素*i*から*j*への矢線は「*i*の目的は*j*である」あるいは（ほぼ意味的に等価な）「*i*は*j*に寄与する」を意味する。以下は、この有向グラフの構造に基づいてその意味を解釈し、文書化したものである。

システムの最上位目的（レベル1）として7項目－「便利」、「快適」、「低料金」、「安全」、「混雑の緩和」、「低公害」、「都市景観」－を考える。（これらのさらに上位目的を含めて、これら以外にも種々の目的があり得るが、個別軌道輸送システムの目的・特徴を明らかにするにはこの程度で十分である。）これら7項目のうち、最初の4項目（便利で快適で低料金で安全）は利用者への直接的な効果（便益）である。ここで「便利」であるとは、交通機関の持つ本来の機能・目的（すなわち、より早く目的地へ移動する）が優れていることをいうものとする。したがって、便利であるためには

- ①出発地から交通機関へのアクセス時間（たとえば、自宅から駅、会社から駅、までかかる時間）が短いこと、
- ②待ち時間（駅についた後、目的地行きの電車を待つ時間）が短いこと、
- ③乗車時間（電車に実際に乗って移動している時間）が短いこと、
- ④乗り継ぎ時間（中継駅で別の電車に乗り継ぐための待ち時間）が短いこと、

が必要である。これら4項目が便利の下位目的を構成している。

「快適」であるとは、乗車中の心身の状態を良好に保つもので、「乗り心地」や「個別輸送性」（乗り合い制によらないタクシーのような輸送形態）がこれに寄与する。

「低料金」はシステムの「低コスト」化および「大量輸送」による料金収入によって実現される。

「安全性」は計算機の管理による信頼性の高い「自動運転」システムや「人と車の分離」によって保証される。

最上位目的の7項目のうち最後の4項目は社会へ悪影響を与えないための間接的な目的である。すなわち、交通システムは事故、混雑、公害、都市景観の破壊等を引き起こしてはならない。

次に、個別軌道輸送システムの運転方式・運用方式（広い意味でのソフトウェア）や

車両・ネットワーク形態（ハードウェア）が上記の目的にどのように寄与するかを考える。アクセス時間・待ち時間・乗車時間の短縮は図からわかるように、面的ネットワーク・デマンド運転・ノンストップ高速運転によりそれぞれ実現される。また個別軌道輸送システムでは出発駅から目的駅に至るまでノンストップなので途中で乗り継ぐ必要はない。図からわかるように、計算機による自動運転は多くの項目の実現に寄与している重要な項目である。すなわち、ノンストップを実現するには、交差点においても停止することなく、しかも、合流部で他の車両と衝突せずに安全に走行する必要がある、自動運転が不可欠である。また、自動運転により安全な車間距離を短くすることが可能であり、高密度運転が実現される。その他、自動運転は乗り心地・無人化・省エネルギー・安全性に寄与することはいうまでもない。

以上の諸項目をさらに種々のハードウェアがサポートしている。密で面的なネットワークはアクセス時間の短縮の他、実質的に道路幅を広げる作用をすることになり、大量輸送に寄与する。コンピュータはデマンドの処理や自動運転を通して多くの上位目的に寄与する。車両が小型でよいのは個別輸送性による。専用軌道は高速性・自動運転・人と車の分離のために必要である。駅をオフラインにするのは後続車両の走行を妨害しないようにすることにより、ノンストップ走行・高密度運転を実現するためである。車両がガソリン等でなく電気エネルギーで動くことは自動運転制御を行なうため当然であり、公害の低減にも寄与する（排気ガスが出ない。また、磁気浮上式とすれば騒音もない）。また、ガイドウェイをストリート・ファニーチャーとして高架に設置することにより都市景観にも十分考慮する。また、高架にすることにより、人と車が分離でき安全性が高まる。

1. 4 個別軌道輸送システムにおけるトラヒック解析の重要性と特徴

本研究は個別軌道輸送システムの駅および交差点をモデル化し、確率論的な方法や計算機シミュレーションによりトラヒック解析をし、これらのサブシステムの処理能力を定量的に明らかにしようとするものである。本節ではまず、トラヒック解析の重要性を示すために、システム工学方法論[22]の分野で議論されている、システムの計画・設計の手順（フェーズおよびステップ）におけるトラヒック解析の位置付けを明らかにする。次に、トラヒック解析の技法として確率論的な方法（待ち行列理論）や計算機シミュレーションが有用であること、および、それぞれの特徴を簡単に述べる。最後に、個別軌道輸送システムのトラヒック解析の特徴と難しさを指摘し、本研究の意義を議論するため

→ システム開発のステップ

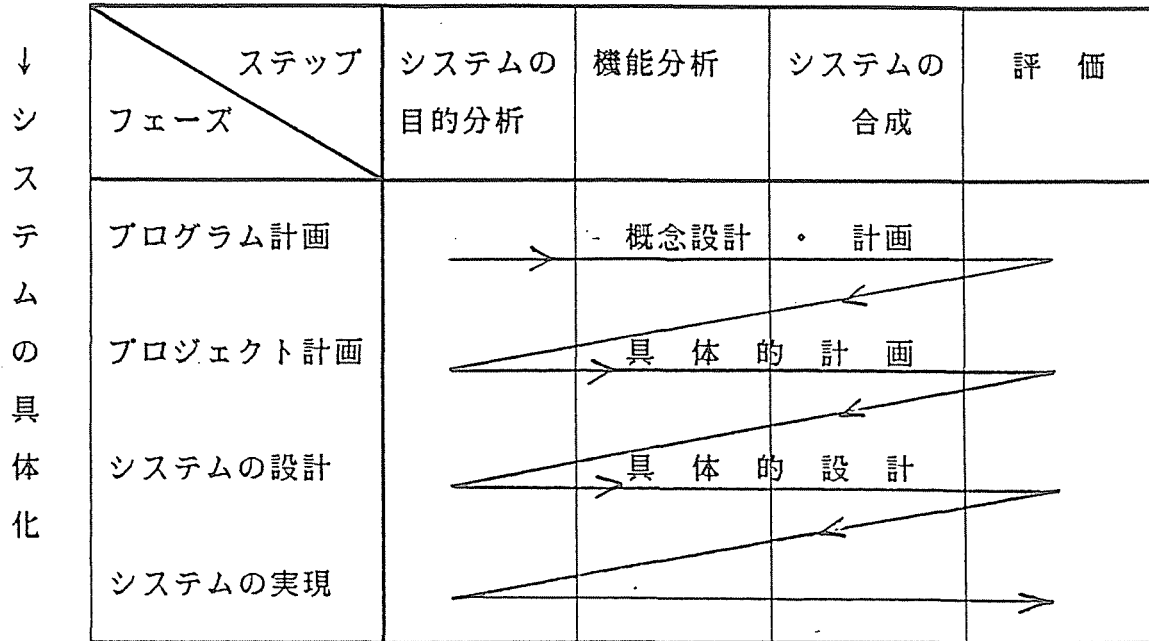


図 1. 6 システム開発のフェーズとステップの関連

表 1. 6 システム計画・設計の手順表

ステップ フェーズ 内 容	目 的 分 析	機 能 分 析	シ ス テ ム 合 成	評 価
	目的の明確化	要求される機能の分析	要求される機能を満足する手段方法の総合化とその代替案	各代替案の評価基準設定とその比較
プログラム計画 (概念計画)	・ 社会変化に対する問題点の抽出 ・ 対象の特性分析 ・ 国内外の現状分析 ・ 需要および技術予測 ・ 要求されるシステム目的の明確化	・ 社会制度、機構面からの検討 (可能性と効果) ・ 業務分析 (業務流れ図) ・ 境界条件の設定 (他システムとの関連, 入出力条件) ・ 問題点の抽出 ・ 要求される機能内容	・ 問題点解決のための対策, 方式の列挙 ・ 各代替案による運用, 制御, 情報処理方式の概要 ・ 各代替案のハードウェア構成と機能分担	・ 評価基準の策定 (技術動向, 関連技術, 企業体質, ハードウェア付加価値, 工期, 費用, 効果, 実現化) ・ 評価基準による代替案評価 ・ 技術再評価
プロジェクト計画 (具体計画)	・ システム目的・量的分析 ・ 範囲 (具体的境界, 他システムとの関連) の決定 ・ 工程目標, 概略費用の決定 ・ 管理体制の確立 (工期, マンパワー, 費用)	・ 機能整理 (管理および制御方式, 入出力) ・ 機能ブロック図 (各機能間の相互関連) ・ マンマシンインタフェースの基本方式の策定	・ 全体システム構成, 機能分担と運用方式の明確化 ・ 機能分担より要求される機器仕様, 開発技術 ・ 各代替案内容検討 (ソフトウェア, ハードウェア, 実現化)	・ 各代替案比較 (前提条件チェック, 処理能力, バックアップ, 応答性) ・ システム再評価 (工期, 費用, 効果/費用, システムバランス, 拡張性, 信頼性, 操作性, 保守性)
システム設計 (具体設計)	・ サブシステムの目的決定 ・ サブシステム間のインタフェースの明確化 ・ 制御管理方式の決定 ・ サブシステム管理体制の確立	・ サブシステム機能の明確化 ・ 最適管理, 制御方式の決定 ・ 機器仕様の決定 ・ 情報流の決定	・ 機器構成 ・ ソフトウェア構成 ・ 機器インタフェース ・ 開発工程 ・ サブシステム納入工程	・ 目標に対するチェック ・ サブシステム内代替案比較 (工期, 費用, 信頼度, 保守操作性, 設計および開発難易性)

の導入部とする。

システム工学では、システムの開発はニーズの探求の段階からシステムの実現に至るまでフェーズに分けて行なわれ、計画性が非常に重視されている。具体的には次の4つのフェーズがある。

- (1) Systems exploration (ニーズの探求)
- (2) Systems planning (システムの計画)
 - a) Systems program planning (プログラム計画)
 - b) Systems project planning (プロジェクト計画)
- (3) Systems engineering (システムの設計)
- (4) Systems development (システムの実現)

システム計画の各フェーズは図1.6のように目的分析・機能分析・システム合成・評価の4つのステップに分けられ、矢印に示す手順をふんで開発が行なわれる。表1.5は各フェーズにおけるステップ毎の作業内容を示したものである[23]。プログラム計画ではやや漠然としていた目標が、プロジェクト計画以降では量的に明確化される。目標を量的に評価するためにはシステム構成や運用方式などを明確化し、定量的に分析できるモデルを作成し、解析する必要がある。本研究のトラヒック解析はまさにここで必要となる。具体的にはシステムの処理能力が目標を達成するか否かをシステムを実現する以前に定量的に調べることができる。もし処理能力が不十分ならば駅や交差点の規模をどの程度大きくすれば目標を達成できるかを知ることができる。また、これらはシステムを実現するための費用や工期の見積りのためのデータを与える。さらにこれらは制御戦略やネットワーク配置等に関するいくつかの代替案の中から1つを選択する際の基礎資料となる。

トラヒック解析[24]は歴史的には電話交換システムに始まっている。電話が発明された翌年の1878年1月に世界最初の電話交換業務が加入者数21名で開始されたが、その後1か月たらずで加入希望者が急増し、当事者のBell電話会社では早くもトラヒック面からの設計を始めたといわれる。その後急速に主要国で電話業務が開始されるようになり、担当の会社や主管庁内ではトラヒック設計法を徐々にまとめはじめ、1908年コペンハーゲン電話会社のA.K.Erlangは学術論文の中で、確率論を応用したトラヒック理論を発表した。その後、トラヒック理論（あるいは一般に待ち行列理論ともいう）に関する多くの論文が発表されている。また、応用分野も拡がり、病院やマーケッ

トのような社会施設の解析や、オンライン・ネットワーク、計算機オペレーティング・システム、信頼性理論などにも盛んに適用されている。しかし一方、解析の対象とするシステムの複雑化とともに、理論的な解析にも限界が生じてきた。ここで登場した新しい解析手法がコンピュータ・シミュレーション[25]であった。シミュレーション (simulation) という言葉はもともとラテン語のsimulo (まねる、ふりをする) から出た古い言葉である。1940年代の末、すなわちコンピュータ時代の夜明けのころ、はじめて新しい意味でこの言葉が用いられた。はじめて使ったのは現在のコンピュータの思想的基盤を築いたフォン・ノイマンとウラムで、核遮蔽の問題を自作のコンピュータによりモンテ・カルロ法 (一様な乱数を用いた数値実験) で解いたとき、その手法をシミュレーションと呼んだといわれる。つまり、そのとき、古い言葉シミュレーションにやや科学的なニュアンスが付され、新しいコンピュータ技術用語シミュレーションが生まれたのである。シミュレーションはその後コンピュータの発展とともに新しいシステム設計の技法として見直されることになった。

本研究のトラヒック解析は確率論的手法による理論解析とシミュレーションを併用して行なっている。前者は解が陽に求まったり、あるいは陽に求まらないまでも比較的低コストで数値計算ができる長所がある反面、モデルが少し複雑になると解析不能になる欠点がある。一方、後者は複雑なモデルであっても計算機でその動作をシミュレートして解析できる長所がある反面、一般に乱数を用いるので、統計的に有意な解析結果を得るために何度もシミュレーションを行なわねばならず、計算コストがかかるという短所を持つ。本研究では原則として理論解析を用いようとの考えから、システムの本質をとらえた解析可能なモデルを構築し、理論的に解析しているが、モデルの妥当性を検証するためにシミュレーションを併用している。また個別軌道輸送システムネットワークなど理論解析が不可能なものは最初からシミュレーションを行なっている。

さて、トラヒック解析を行なうには、以上述べたように、待ち行列理論およびシミュレーションの2つの技法があり、様々な研究成果が得られている。しかし、交通システム、とくに個別軌道輸送システムの場合は、その特殊性のためにこれらの技法および成果をそのままの形では適用できないことが多い。その特殊性のいくつかは次のようなものである。

- ・車両同士を合流部で衝突させてはならないので、そのための論理をモデルに組み入れる必要がある。(通常の待ち行列モデルではこのような例はない。)

- ・車両の出駅の制御は、本線への車両の到来事象に依存して行なわれる。（これは待ち行列の用語でいうと、「サービス時間が到来事象と独立ではない」ということであり、これまで全く研究されていない。
- ・到来事象を複数個、考慮する必要がある。たとえば、駅には車両の到来と客の到来がある。交差点には交差する二路線にそれぞれ車両の到来がある。すなわち、待ち合せ系への入口が2ヶ所ある。さらに、車両には「車種」という属性がある。これらの複数の到来事象が相互に干渉し合ってシステムの挙動に影響を与える。（通常の待ち行列モデルでは、到来には優先度という属性はあるが、系への入口は一つである。）
- ・車両は交差点をノンストップで通過するよう制御される。したがって、車両は通常の待ち行列モデルのように（待合室で）止まって待っているのではない。減速することが待つことに対応するように、自然なモデル化が要求される。（これは個別軌道輸送システムの大きな特徴である。）

これらの特殊性のため、理論的に解析可能でしかも現実的なモデルの構築が困難となるほか、計算機シミュレーションにおいても標準的な技法の使用が難しくなる。本研究では、システム工学的な考え方や技法を用いてこれらの諸問題を解決した。次節ではその考え方を述べる。

1.5 システム工学的な考え方の重要性

前節で述べた問題点を解決するためにはシステム工学的な考え方が必要である。システム工学的な考え方にはいろいろなものがあるが、まず最初に強調したいものは「目的指向」の考え方である。システムのモデリングには、そのシステムを解析する目的に応じた適切なレベルの詳細度がある。したがって、目的を十分明らかにすることにより、本質的でない点は単純化し、本質的な点は強調して、合目的でかつ解析を低コストで行なえるモデルを構成できる。これにより多くの困難さを克服する。ここで問題となる点是这样して作られたモデルの妥当性 (validity) である。モデルの妥当性は、そのモデルと現実のシステムの2つだけを見比べて結論を出せる性質のものではない。モデルは何らかの意味で現実と異なり、そして一般により単純であるからこそ重要なのであり、現実のシステムとの相違があるからといってそのモデルが妥当でないとは結論できない。モデルが妥当か否かは、そのモデルの目的（すなわち、そのモデルを用いて我々は何をしようとしているのか）に基づいて判定されなければならない。いまシステムを S 、そのモデルを M としよう。我々の目的はシステム S のふるまいに関する量（出力） Y_s を誤差 ε 以内で予測することであるとしよう。このとき、モデル M の解析による Y_s の予測値 Y_m が $|Y_m - Y_s| \leq \varepsilon$ を満たすならこのモデルは所与の目的のもとで妥当なものといえる。しかし、このモデルは別の出力 Z_s に対しては誤差が大きいかもかもしれない。それでもモデル M は、我々の唯一の目的が Y_s の予測である限り妥当なモデルである。この議論はあえてここで述べるほどのことでもない当然のことであろう。しかし、複雑なシステム・複雑な問題の詳細に入るにしたがって、我々は本来の目的を忘れがちになる。そのためシステム工学では、目的を陽に記述すること、目的を構造化することなどが各フェーズの最初に行なわれるべきステップであり、重要なものとしているのである。本論文のモデルも、この議論をふまえなければ非現実的であり、妥当なモデルでないと錯覚されがちなものがある。それらを予めここに述べておこう。

○多バース駅モデル（第3章）において、解析の便宜上、客の乗降時間分布を指数分布とした。現実には客の乗降時間分布が指数分布であることなどあり得ない。しかし、我々の目的の1つは平均入駅時間間隔を予測することであった。理論解析の後、乗降時間分布をより現実的な分布としてシミュレーションを行なった結果、それは理論解析の結果と見事に一致した。他の目的についてもすべて同様であった。（実は著者は、そうなるであろうとの確信があった。）したがって、ここで用いた一見

非現実的と思われるモデルは実は妥当なモデルであり、しかも簡単化してあることにより容易に理論解析ができるという点で優れているものといえるだろう。ただし、我々の目的がたとえば入駅時間間隔の平均ばかりでなく分散も予測しようとするものであったなら、このモデルは妥当なものではなかったろう。

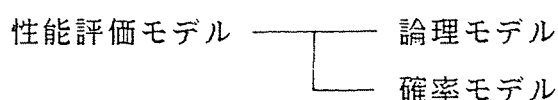
○PRTネットワークのシミュレータ（第6章）において、各車両が交差点の直進を希望するか右折を希望するかは乱数により確率的に決めることにしている。すなわち、交差点 i において目的駅 j へ向かう車両は確率 $d(i, j)$ で分岐を希望し、確率 $1 - d(i, j)$ で直進を希望するものとしている ($0 \leq d(i, j) \leq 1$)。しかし、実際のシステムでは確率的に経路を決めるのではなく、交差点 i から目的地 j までの各経路長やその時点での混雑状況により決定論的に経路選択をしている。しかし、ここでの我々の目的は車両群の流れをマクロにあるいは統計的にとらえることによりネットワークのグローバルなトラヒックを把握することであった。パラメータ $d(i, j)$ は目的のレベルが異なる別の解析手法により与えられる。この目的のもとでは、我々のモデルは妥当なものであるといえよう。

システム工学的な考え方の第2は「分解と統合」の考え方である。これは複雑なシステムを取り扱う際の最も基本的かつ有効な考え方である。システムをできるだけ互いに独立なサブシステムに分解し、各サブシステムのモデルを統合してトータル・システムのモデルを構築する。たとえば、本論文ではネットワークのモデルを構築する際に、サブシステムとして駅と交差点の各モデルを構築している。（これは当然のことで、強調することではないが。）本論文で強調したい分解と統合の考え方は、各サブシステムの性能評価モデル（Performance model）を論理（制御）モデル（Logical（Control）model）と確率モデル（Stochastic model）とに分けて考えることである。制御モデルは、システムがどのように制御されるかを記述したものであり、さらに論理レベルの制御と物理レベルの制御に分解できる。本論文の場合、論理レベルの制御とは、あたえられた論理的な制約と戦略のもとで、各時刻において車両がいるべき位置を論理的に決定する（そして、必要に応じて適当なサブシステムに指令を出す）作業である。また、物理レベルの制御とは、その論理的な車両挙動を種々の物理的制約や外乱のもとで、物理的に実現する作業である。この2レベルからなる制御モデルにより、システムの論理とダイナミクスが明らかとなる。本論文では特に論理レベルでの制御モデル（論理モデル）に重点を置いている。論理モデルの表現法は種々のものがあるが、本論文では、各モデル

毎に適切な方法で表現する（たとえば、流れ図、決定表、ブロック図、状態推移図、シミュレーション言語、日本語など）。

確率モデルは、システムの論理的な挙動に影響を与える確率的な要因を抽出したもので、主に確率分布関数などに関する数学的な仮定よりなる。たとえば、駅への車両の到来をポアソン過程としたり、客の乗降時間分布を指数分布としたりするのがその例である。ただし、本論文ではあくまでもシステムの論理的な挙動を中心に解析を進めるので、物理的挙動に影響を与える外乱などの確率的要因は考慮しない。

システムのトラヒック特性を評価するために、論理モデルに確率モデルの構造を付与して統合したものが性能評価モデルである。



このモデルを確率過程論あるいはシミュレーションによって解析することにより、システムの性能を評価できる。

このような分解と統合は一般にはごく自然なことであり、本論文で改めて強調すべきではないかもしれない。しかし、少なくともトラヒック解析に関するこれまでの研究はこのような考えに基づくものはまれであり、システムの論理的な挙動を十分に明らかにしないまま確率論的な定式化に至っているものが多い。そのため、そのモデルの本質が確率論の陰に隠れてしまい、モデルの理解や妥当性の検証の障害となっている。最近になってようやくこの点（すなわち、モデリングの過程）の重要性が認識され始めてきた。たとえば、論理モデルとしてペトリネットを採用し、それに確率的な構造を与えたものとして確率ペトリネットを構成し、性能評価モデルとするものがある[26]。しかし、モデルがある程度複雑になると、ペトリネットの表現力では不十分となり、人間の理解を妨げるようなモデルとなってくる。したがって、現段階では、ある程度モデルが複雑になると、そのモデルの特徴や目的に応じたヒューリスティックス（人間の洞察や経験に基づく知識やアイディア）を有効に利用した、問題独自の表現法が有効と思われる。

本論文ではこの考え方にに基づき、各モデルや目的毎にできるだけ理解しやすい論理モデルを構成して、システムの論理的な挙動を明らかにし、その後に確率論的な定式化を行なっている。さらに、確率論的な定式化の際にも単に数式の羅列にとどまらず、フローダイアグラム、シグナルフローグラフ、状態推移図などの図表により、モデルのトポロ

ジカルな構造を明らかにしている。これにより、この確率モデルに対して、見通しのよいエレガントな解析手法の発見が可能となり、また、解の物理的な意味の考察に大きな助けとなる。このように、複雑なシステムを構造化して全体像を人間に把握させ、システムに対する人間の直観力や洞察力を高めるアプローチ(intellectual amplifier)もシステム的な方法論の特徴である。

ある複雑で漠然とした問題を解決しようとするとき、（あるいは、複雑で漠然としたシステムを設計・解析しようとするとき、）システム工学が対象とするものはその問題（システム）ばかりでなく、その問題を解こうとしている人（そのシステムを設計・解析しようとしている人）をも含むのである。さらに場合によってはその問題を出した人（システムを発注した人）さえ含むことがある（図1.7）。多くのシステム設計者・解析者が解こうとしている問題は、通常、ある優秀な（あるいは天才的な）研究者が定式化した問題をさらに深く考察したり、ちょっと変形したりして解こうとしていることが多い。しかし、多くの場合、このようなアプローチで得られる成果は限られている。つまり、与えられた問題の枠内にいる限り、どのような方法を用いても話が複雑になるばかりでうまくいかない場合が多いように思われる。このようなとき、その問題の枠から飛び出すためのメタ的な方法が必要であり、これがシステム工学方法論であるとみることがもできる。すなわち、「この問題の目的は何か？なぜこれを解かなくてはならないか？」との問いから、同じ目的を達成するための別な問題を作り出せるかもしれない。

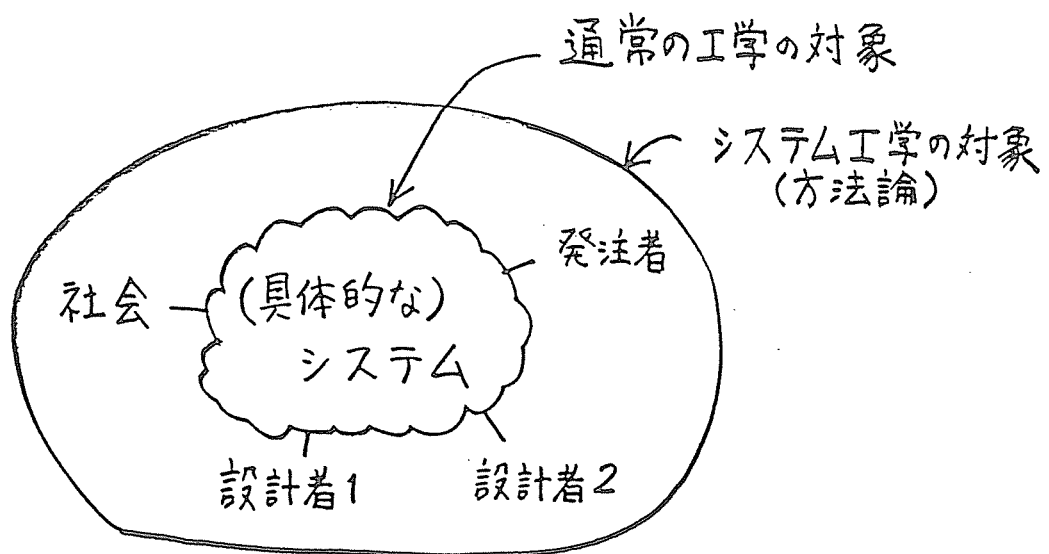


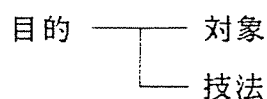
図1.7 システム工学の対象

さらに、その目的自体について「目的は本当にこれか？」との問いから、全く異なった価値観に基づく別の目的が作られ、さらにその目的から全く新しい問題が定式化され、これまでの問題が本当の意味で解決されるかもしれない。このように、既に述べた目的指向の考え方がここでも有用である。第4章の平面交差点モデルはまさにこの発想と、すでに述べた論理モデルと確率モデルへの分解とから得られた。本研究以前に発表されていた立体交差点モデルをそのまま変形してモデルを構築しようとしていたら成功は得られなかったであろう。これまで発表されていたモデルは「待ち行列理論を応用して何とか解こう」という、本来はごく小さな目標がいつのまにか大目標になってしまったため、不自然なモデルになってしまったと思われる。確率モデルが前面に出過ぎていた。本研究ではこの点に疑問をいだき、目標を「システムの挙動と性能を明らかにすること」という本来の目標に設定しなおしたため、ここで確率論の話にはこだわらない態度が得られた。そして、分解と統合の考え方により、サブシステムである平面交差点の目的・機能・制約を再度確認し、平面交差点の論理モデルにのみ集中することにした。この結果、平面交差点の目的・機能・制約を満たす合理的な論理モデルが得られ、結果的には確率論的解析も容易に行なうことができた。

価値観が急激に変化しつつある現代では全く新しい発想に基づいたシステムの創造が必要となる。個別軌道輸送システムもそのようなシステムの一つであろう。このようなシステムを扱う上で「創造工学」ともいえるシステム工学方法論はますます重要となろう。

1.6 本論文の目的と構成

本論文の目的は、対象および技法の二つの側面からなる。



前者は、個別軌道輸送システムという対象の持つ諸問題のうち、トラヒック評価問題に焦点をあて、個別軌道輸送システムのトラヒックに関する諸特性を明らかにすることにより、個別軌道輸送システムの設計と実現に関する有効な知見を得ることである。具体的には、本研究は次のような問いに対する正確で定量的な解答を与える。

- ・ 駅および交差点への負荷の増加とともに、処理能力・サービス水準はどのように変化するか？（これはトラヒックの最適化や経路選択アルゴリズムのための基礎データとなる。一般に、処理能力（スループットなど）とサービス水準（待ち時間など）

はトレードオフの関係となる。)

- ・駅および交差点の設備規模の拡大の効果はどの程度か？（これらは設備規模の最適化のための基礎データとなる。一般に設備規模を拡大すると処理能力・サービス水準が改善されるが、コストが増大する。)

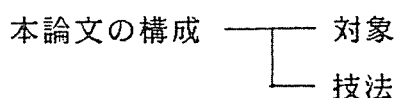
後者の目的(技法)は、この問題を通して、トラヒックのモデリングおよび解析技法に前節で述べたような体系的なアプローチを取り入れ、その有効性を示すことである。その骨子となる考え方は既に述べた次の3点である。

- ・モデリングおよび解析の目的を明らかにし、適切な手段を選択する。(これが結局は少ない労力による実用的なモデルや解析結果につながる。)
- ・論理モデルを明確にし、その妥当性を十分に検討した後、確率モデルを構築する。
(他人に対してモデルの妥当性を論理的かつ明確に説明でき、十分理解してもらえるモデルでなければならない。数学的詳細にとらわれないこと。)
- ・上記のモデリング・解析の過程で、図表など様々なシステム表現を用いて人間(すなわちモデル生成者・解析者である自分)の創造性や直観を刺激する。(これは、エレガントなモデルや解法を生むきっかけとなる。また、しばしばシステムの基本構想にまで影響を与える。)

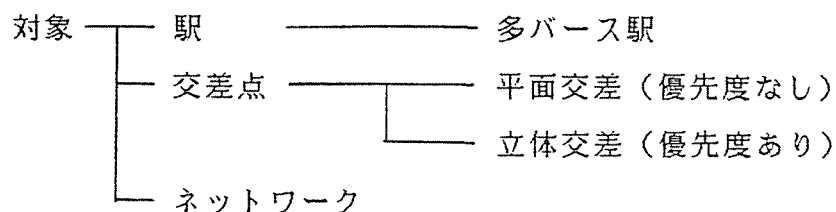
これらはある意味では当然な事項であるが、これまでのトラヒック解析では数学的な側面が強調されがちで、このようなシステム工学的なアプローチは不十分であった。本論文ではこれらの考えに基づいて、種々の複雑なシステムの解析に成功している。また、具体的な技法としてマルコフ再生過程およびシミュレーションに関する次のような技法を開発し、有効に適用している。

- ・巨大な状態集合のうちのある部分集合に着目する解析手法
- ・個別軌道輸送システムの特徴をうまく利用した、マン・マシン・インターフェースに優れたシミュレータの構成。これは他の種々のシステムにも応用可能である。

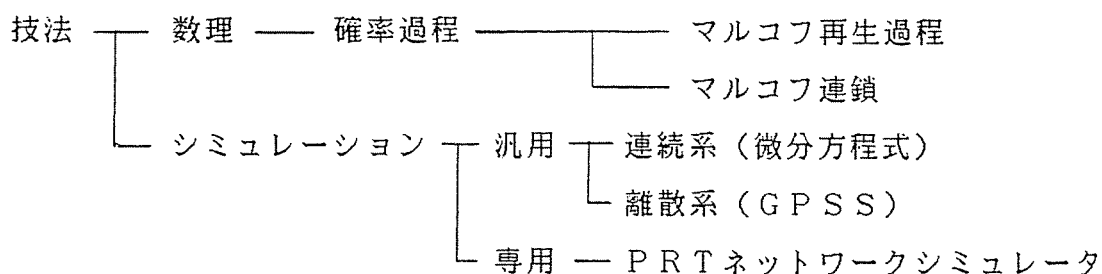
本論文の構成も対象および技法の二つの軸に分解すると説明しやすい。(これも「分解と統合」の考え方。)



対象は個別軌道輸送システムにおける駅（多バース駅）、交差点（二路線間に優先度のない平面交差点、優先度のある立体交差点）、およびネットワークである。



使用している解析技法は、マルコフ再生過程、マルコフ連鎖などの確率論的な数理や、連続系、離散系および専用シミュレータによるシミュレーションである。



これら二つの軸の組み合わせに基づき、本論文は7つの章から構成されている。第2章～第6章の位置付けを表1. 7に示した。

表1. 7 本論文の構成

対象 \ 技法	マルコフ再生過程	マルコフ連鎖	シミュレーション
多バース駅	3 章		3 章（離散系）
平面交差点		4 章	
立体交差点		5 章	5 章（連続系）
ネットワーク			6 章（専用系）
技法の概説	2 章	2 章	6 章

第2章は、第3～5章で用いる数理的基礎としてマルコフ再生過程とマルコフ連鎖について概説し、シグナルフローグラフとの関係を論じている。

第3章は、多バース駅モデルをマルコフ再生過程として定式化し、解析している。また、モデルの検証のため、GPSSによるシミュレーションを実施している。

第4章、第5章は平面交差点および立体交差点をそれぞれモデル化し、マルコフ連鎖により解析している。特に第4章の平面交差点モデルはこれまでの研究にはみられない新しいアプローチにより得られたものである。一見複雑そうなシステムがこのように簡潔な確率モデルになろうとは著者自身驚きであった。第5章では、連続系シミュレーションにより、システムのダイナミクスを明らかにし、モデルをより鮮明なものとしている。

第6章はシミュレーション技法の概観の後、個別軌道輸送システム・ネットワークのための専用シミュレータの構成について述べている。

第7章は結論である。本研究の成果がまとめられ、今後の研究方向を展望している。

1.7 関連の研究

本論文の内容と関連の深い研究の文献番号を、前節の分類に従って表1.8に示す。表中で下線のついた文献は著者らによる研究で、本論文はそれらの研究に基づいている。

表1.8 関連の研究

対象	技法	確 率 論	シミュレーション
駅	1バース	27, 28, 29, 30	35, 36
	2バース	31	
	nバース	<u>32</u> , <u>33</u> , <u>34</u>	
交差点	立体交差	37, 38, 39, 40, <u>41</u>	44, 45
	平面交差	<u>42</u> , <u>43</u>	
ネットワーク			46, 47, <u>48</u>

駅の評価は、これまで主にシミュレーション [35, 36] によるものが多かった。これらの研究は駅部の詳細にわたってシミュレートするものであるが、システムの計画・設計段階で、多大のコストをかけてそこまで詳細化して解析する必要性は小さいと思われる。中田 [27, 28, 29]、米山 [30] らは、1 バース駅を確率論に基づいてモデル化し、駅近傍における車両挙動や駅の性能評価に関する有益な資料を、陽に、かつ、低コストで算出することに成功している。しかし、これらの研究をそのまま多バース駅に拡張するのは困難である。栗原 [32, 33, 34] らは、解析可能でかつ実用的な多バース駅モデルを構築し、多バース駅の諸性質を明らかにした。その後、中村 [31] らにより、2 バース駅についてより詳細な解析がなされた。

交差点についても、これまではシミュレーション [44, 45] によるものが多かった。これに対し、Thangavelu [40] らは待ち行列理論 ($M/D/1$, $G/M/1$) を用いて交差点の設計・解析を行なう方法を発表している。浜松 [37, 38, 39] らもマルコフ連鎖の手法により、種々の制御戦略に基づく立体交差点の性能評価を行なっている。しかし、これらの交差点モデルは、通常の技法で直接解析できるようにモデル化しているため、いずれも不自然な点があり、結果の正確さに問題がある。また、わが国の C V S では平面交差点を用いるにもかかわらず、平面交差に関する研究はこれまで全くなかった。これらの点に動機付けられ、栗原 [42, 43] らは平面交差のアルゴリズムをモデル化し、そのアルゴリズムに忠実に基づく正確なモデルを構築し、確率論的に解析して、種々の性能評価尺度を陽に求めた。さらにその手法を立体交差点 [41] にも適用している。

ネットワークを確率論的に扱う例はこれまでなく、いずれもシミュレーションによるものである。たとえば、Munson [13]、Rubin [14]、Mcginley [46]、Dooley [47] などの研究がある。栗原 [48] らは、P R T のネットワーク記述に適した簡易シミュレーション言語を開発し、ユーザ・インターフェースを重視したシミュレータを発表している。

本論文の内容と直接は関係ないが、個別軌道輸送システムの物理レベルの制御（主として、たて制御）の実現法として Wilkie [49]、Garrard [50] を挙げておく。第 5 章のシミュレーションモデルはこれらを参考にしている。また、わが国での開発に関連して白井 [51]、石井 [52, 53] の論文および機械振興協会 [15] のレポートを挙げておく。交通計画の立場から個別軌道輸送システムを論じたものとしては、Macdonald [54]、Iverson [55] などがある。

確率過程論に関する研究は次章の参考文献を参照していただくことにとどめたい。

第2章 マルコフ再生過程とシグナルフローグラフ

2.1 まえがき

第1章で述べたように、本論文で用いる技法の中心となるものはマルコフ再生過程およびマルコフ連鎖という確率過程論の応用である。一般に確率論というと数学の中でも初心者にとって修得しがたいものの一つとなっているようである。特に本論文のように、その目的が応用的なものであって、数学的興味ではない場合には、このような理論の難解さはモデルを作り、解析し、その成果を理解してもらう上での障害となる。しかし、幸いなことに、マルコフ再生過程とマルコフ連鎖は、システム工学や制御工学でよく用いられるシグナルフローグラフで表現されることが知られている。解析によって求めたい多くの量は、確率論を陽に適用しなくても、シグナルフローに関する簡単な操作により、比較的容易に求められる。本章はこれらの基礎的な事項の概説である。2.2節でマルコフ連鎖、2.3節でマルコフ再生過程、2.4節でシグナルフローグラフの基礎的な定義や性質を述べた後、2.5節でこれらの間の関係を調べる。残りの節はやや応用的な内容である。2.6節は大きな状態空間を持つシステムの扱い方の1つを示している。2.7節は非再生点を含み得るよう拡張されたマルコフ再生過程を紹介している。

本章の内容の大部分は既に多くの教科書で説明されているものなので、詳細については適当な参考書を参照していただくことにとどめた。しかし、2.5節の一部は本論文が初めてまとめた結果である。また、2.6節は本研究を遂行する過程で著者が開発した手法である。

2.2 マルコフ連鎖

本節では、最も基本的な確率過程であるマルコフ連鎖を概説する。マルコフ連鎖は第4章、第5章において、個別軌道輸送システムの交差点の解析に用いられているほか、次節以降から第3章にかけて述べられているマルコフ再生過程の基礎となる。本節では、本論文で必要な範囲内に限定して、マルコフ連鎖に関する諸定義と諸性質を簡単にまとめる。詳しくは参考書[56-59]などを参照されたい。

< 基本的定義 >

一つのシステムの状態を離散的な時点 $n = 0, 1, 2, \dots$ で考える。このシステムがとりうる状態 (state) を $s_1, s_2, \dots$ で表わす。状態数は有限でも可算無限個でもよい。状態全体の集合 $S = \{s_1, s_2, \dots\}$ を 状態空間 (state space) という。各状態は番号で指定されるから、以下では状態 s_i のことを単に状態 i と記し、状態空間を $S = \{1, 2, \dots\}$ とする。

時点 n における状態を確率変数 X_n で表わし、確率変数列 (確率過程) $\{X_n\}$ を考える。 $X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}$ であつたとき、 $X_n = j$ となる条件付き確率が、条件 $X_{n-1} = i_{n-1}$ だけに關係し、それ以前の経過に無關係であるとき、すなわち

$$P[X_n = j \mid X_0 = i_0, X_1 = i_1, \dots, X_{n-1} = i_{n-1}] = P[X_n = j \mid X_{n-1} = i_{n-1}] \quad (2.1)$$

が任意の $n > 1$ および起こりうる任意の状態列 $(i_0, i_1, \dots, i_{n-1})$ および任意の状態 j に対して成り立つとき、 $\{X_n\}$ を マルコフ連鎖 (Markov chain) という。特に、状態数が有限なマルコフ連鎖を 有限マルコフ連鎖 (finite Markov chain) という。

$$p_{ij}(n, n+1) = P[X_{n+1} = j \mid X_n = i] \quad (2.2)$$

で与えられる $p_{ij}(n, n+1)$ をマルコフ連鎖の 推移確率 (transition probability) という。また、 $p_{ij}(n, n+1)$ が n に無關係のとき、マルコフ連鎖は時間的に 一様 (homogeneous) であるといひ、その推移確率を単に p_{ij} で表わす。行列 $P = (p_{ij})$ を 推移確率行列 (transition matrix) という。明らかに

$$p_{ij} \geq 0 \quad (i, j = 1, 2, \dots) \quad (2.3)$$

$$\sum_j p_{ij} = 1 \quad (2.4)$$

が成り立つ。実用上用いられるマルコフ連鎖は一様なものが多い。本論文で用いるマルコフ連鎖も一様であるので、以下ではすべて一様なマルコフ連鎖を仮定する。

状態空間 S を頂点集合とし、 $p_{ij} > 0$ なる (i, j) の全体を辺の集合 E とするグラフを 状態推移図 (transition diagram) という。

$$G = (V, E)$$

$$V = S$$

$$E = \{(i, j) \mid p_{ij} > 0, \quad i \in S, j \in S\}$$

辺 (i, j) には重み p_{ij} が付けられる。たとえば、推移確率行列が

$$P = \begin{bmatrix} 0.7 & 0.3 & 0 \\ 0.5 & 0 & 0.5 \\ 0 & 0.6 & 0.4 \end{bmatrix}$$

で与えられるマルコフ連鎖の状態推移図は図 2. 1 となる。

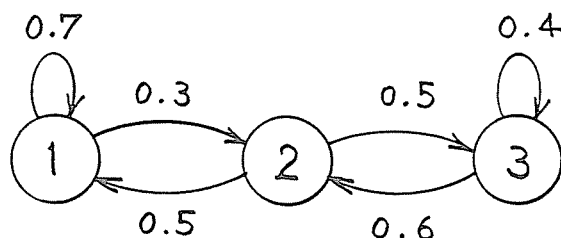


図 2. 1 状態推移図の例

X_0 の確率分布 $\{p_i\}$

$$p_i = P[X_0 = i] \quad (2.5)$$

$$p_i \geq 0, \quad \sum_i p_i = 1$$

を初期分布(initial distribution)という。このとき、 n ステップ推移確率

$$p_{ij}(n) = P[X_{m+n} = j \mid X_m = i] \quad (2.6)$$

の行列 $P(n) = (p_{ij}(n))$ は

$$P(n) = P^n \quad (2.7)$$

X_n の分布は

$$\begin{aligned} \pi(n) &= (\pi_1(n), \pi_2(n), \dots) \\ &= p P^n \end{aligned} \quad (2.8)$$

$$\text{ただし、} \pi_j(n) = P[X_n = j]$$

$$p = \pi(0)$$

$$= (p_1, p_2, \dots) : \text{初期確率ベクトル}$$

となる。

<状態の分類>

$p_{ij}(n) > 0$ となるような $n \geq 0$ が存在するとき、状態 i から状態 j へ到達可能 (reachable) であるという。任意の状態から、他のどの状態にも到達可能であるとき、そのマルコフ連鎖は既約 (irreducible) であるという。

状態 i から出発して n 回目の推移で初めて状態 j に到達する確率を $f_{ij}(n)$ とする。

$$f_{ij}(n) = P[X_n=j, X_\nu \neq j, \nu=1, 2, \dots, n-1 \mid X_0=i] \quad (2.9)$$

確率変数 n を初期通過時間 (first passage time)、その分布 $\{f_{ij}(1), f_{ij}(2), \dots\}$ を状態 i から状態 j への初期通過時間分布という。

$$f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}(n) \quad (2.10)$$

は、状態 i から出発したときいつかは状態 j に到達する確率である。したがって、 $f_{ij} > 0$ は状態 i から状態 j へ到達可能であることと同値である。 $f_{ij} = 1$ のとき、状態 i から出発すると確率 1 でいつかは状態 j に達する。このとき

$$\mu_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}(n) \quad (2.11)$$

を状態 i から状態 j への平均初期通過時間という。特に $i = j$ のとき、 n を再帰時間 (recurrence time)、分布 $\{f_{ij}(n)\}$ を再帰時間分布という。

$f_{jj} = 1$ のとき、状態 j から出発すると、いつかは必ず状態 j に戻ってくる。このとき状態 j を再帰的状态 (recurrent state) という。 $f_{jj} < 1$ のとき、状態 j を過渡的状态 (transient state) という。状態 j が再帰的なとき

$$\mu_j = \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}(n) \quad (2.12)$$

を平均再帰時間という。 $\mu_j < \infty$ のとき、状態 j は正再帰 (non-null) であるといい、 $\mu_j = \infty$ のとき状態 j は零再帰 (null) であるという。すべての状態が (正) 再帰であるとき、そのマルコフ連鎖は (正) 再帰的であるという。

$f_{jj} = 1$ の場合に、状態 j の再帰がただか $n = t, 2t, 3t, \dots$ ($t \geq 2$) だけで起こりうる時、状態 j は周期的 (periodic) であるといい、このような最大の整数 t を d_j と表わし、状態 j の周期という。周期が 1 のときその状態は非周期的という。すべての状態が非周期的なとき、そのマルコフ連鎖は非周期的であるという。

例：図2．2のマルコフ連鎖を考える。このマルコフ連鎖は、1回の推移で状態の番号は高々1しか増減しない。このようなマルコフ連鎖を1次元乱歩(one-dimensional random walk)という。この例では状態数が無限個のものを考える。このマルコフ連鎖は既約で非周期的であり、 $p < q$ のとき正再帰、 $p = q$ のとき零再帰、 $p > q$ のときは再帰的でない（非再帰）ことが知られている。〔例終〕

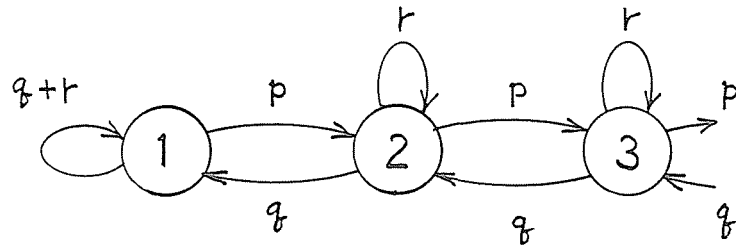


図2．2 1次元乱歩 ($p+q+r=1$)

<極限確率とエルゴード性>

システムが n 回推移の後、状態 j にある確率を

$$\pi_j(n) = P[X_n = j] \quad (2.13)$$

とし、その極限を

$$\pi_j = \lim_{n \rightarrow \infty} \pi_j(n) \quad (2.14)$$

とする。 π を極限確率(limiting probability)という。確率分布 $\{P_j\}$ は、 P_j を初期分布に選んだとき ($\pi_j(0) = P_j$)、すべての n に対して $\pi_j(n) = P_j$ が成り立つならば定常分布(stationary distribution)であるという。既約かつ非周期的マルコフ連鎖においては極限確率が常に存在し、それは初期分布とは無関係であり、次のいずれかが成り立つことがわかっている。

(a) すべての状態が過渡的またはすべての状態が零再帰的である。この場合にはすべての j に対して $\pi_j = 0$ となり、定常分布は存在しない。

(b) すべての状態が正再帰的であり、すべての j に対して $\pi_j > 0$ である。この場合には、定常分布は極限確率分布と等しく、次式により一意的に決定される。

$$\pi_j = \sum_i \pi_i p_{ij} \quad j=1,2,\dots \quad (2.15)$$

$$\sum_i \pi_i = 1 \quad (2.16)$$

また、平均再帰時間は次式で求められる。

$$\mu_j = 1 / \pi_j \quad (2.17)$$

状態 j は、非周期的かつ正再帰的のときエルゴード的(ergodic)であるという。すべての状態がエルゴード的であるとき、そのマルコフ連鎖はエルゴード的であるという。エルゴード的なマルコフ連鎖においては、確率分布 $\{\pi_j(n)\}$ は初期分布に独立な極限定常分布 $\{\pi_j\}$ に収束する。エルゴード的マルコフ連鎖の極限確率 $\{\pi_j\}$ は初期分布の影響が消えるという意味で平衡状態確率(equilibrium state probability)とも呼ばれる。また、有限非周期的既約マルコフ連鎖はエルゴード的であることが知られている。本論文で扱うマルコフ連鎖はいずれもエルゴード的である。

2.3 マルコフ再生過程

マルコフ連鎖では確率変数列として、推移していく状態の系列のみに着目した。これを各状態の持続時間の系列をも考慮するよう拡張したものがマルコフ再生過程である。本論文では第3章において個別軌道輸送システム多バース駅の状態変化をマルコフ再生過程としてモデル化し、解析している。そのための基礎として、本節ではマルコフ再生過程に関する諸定義と諸性質をまとめて述べる。数学的な証明など詳しくは参考書[60, 61]などやPykeの原論文[62, 63]を参照されたい。

<マルコフ再生過程の非形式的説明>

マルコフ再生過程を正式に定義する前に、マルコフ連鎖の自然な拡張としてセミマルコフ過程というものが考えられ、さらにそれを包含する確率過程のクラスとしてマルコフ再生過程が考えられることを非形式的に述べる。

マルコフ連鎖では状態の系列のみを問題とし、状態の確率的な推移を規定するために状態推移図の辺の上に重みとして推移確率 p_{ij} を付けて表わした(図2.3(a))。これを拡張し、状態の持続時間をも考慮するために、辺の上にさらに状態の持続時間分布 $F_{ij}(t)$ を付けるのは自然な考えである(図2.3(b))。または、 p_{ij} 、 F_{ij} の組と等価なものとして、 $Q_{ij}(t) = p_{ij} F_{ij}(t)$ をつけてもよい(図2.3(c))。ただし、

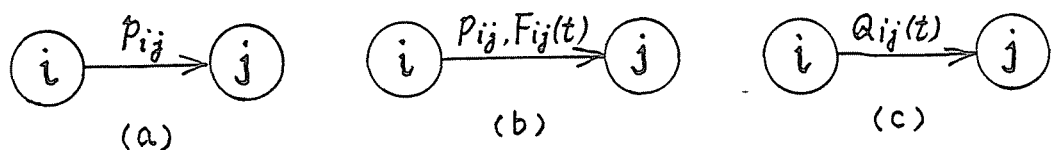


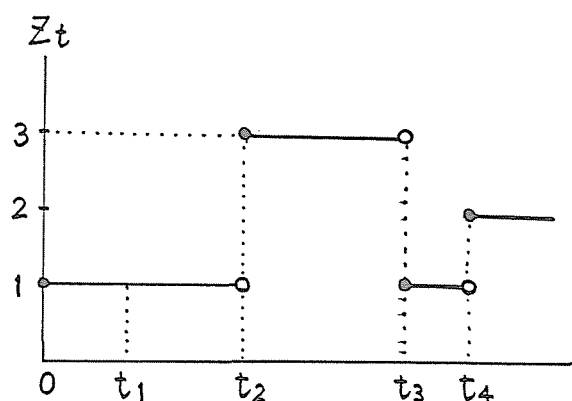
図2.3 マルコフ連鎖，セミマルコフ過程，マルコフ再生過程の状態推移図

$F_{ij}(t)$ = 状態が i から j へ推移したときの、状態 i の持続時間分布

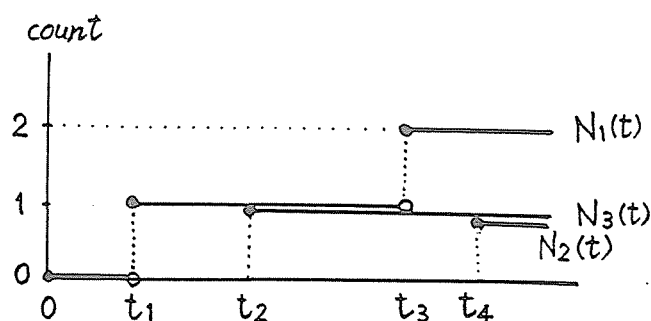
$Q_{ij}(t)$ = 状態が i に推移してきたとき、次の推移が j への推移であり、かつ、その推移が時間 t 以内に発生する確率

である。

このようなシステムの時刻 t における状態を Z_t とし、系列 $\{Z_t; t \geq 0\}$ を観測するものとする。確率過程 $\{Z_t\}$ をセミマルコフ過程という。セミマルコフ過程はマルコフ連鎖に時間の要素を自然に導入したものであるが、状態 i から状態 i への推移、状態推移図でいうと自己ループに対応する推移が観測できないことに注意されたい。たとえば、図 2. 4(a) の実現値（標本関数）においては、時刻 t_2 と t_3 において状態推移が発生したことはわかるが、時刻 t_1 に状態 1 から状態 1 への推移が発生したことは観測し得ない。確率過程の数学的理論は、実現値の全体に確率的構造を付加したものを基礎として構成されている。したがって、自己ループの推移をも解析対象としたい場合（たとえば、状態 1 への推移がどのくらいの頻度で発生するか等）には、セミマルコフ過程の理論のみでは不十分である。



(a)



(b)

図 2. 4 セミマルコフ過程とマルコフ再生過程の実現値の例

マルコフ再生過程はこのような自己ループの推移をも扱えるようにするため、一種の計数過程(counting process)として定義される。時刻 t までに状態 j に推移した回数を $N_j(t)$ とする。状態空間を $\{1, 2, \dots, m\}$ としたとき、 m 次元ベクトル確率過程 $\{\vec{N}\}$ 、 $\vec{N} = (N_1(t), N_2(t), \dots, N_m(t))$ をマルコフ再生過程という。図 2. 4(a) のセミマルコフ過程の実現値に対応するマルコフ再生過程の実現値の第 1 成分 $N_1(t)$ は図 2. 4(b) のようになり、状態 1 から状態 1 への推移が読み取れる。

<マルコフ再生過程の定義>

以下では、Pyke [62, 63] にしたがってマルコフ再生過程を構成的に定義する。すなわち、公理的にマルコフ再生過程を定義するのではなく、マルコフ連鎖の自然な拡張である (J, X) 過程という基本的な二次元マルコフ過程に基づいて実際に確率変数列 $\{N(t)\}$ を構成することによってマルコフ再生過程を定義する。なお、本節の終わりに諸記号をリストとしてまとめておくので必要に応じて参照されたい。

状態空間 $\{1, 2, \dots, m\}$ の上の値をとる確率変数列 $\{J_n; n \geq 0\}$ と非負の値をとる確率変数列 $\{X_n; n \geq 0\}$ を結合した二次元の確率過程 $\{(J_n, X_n); n \geq 0\}$ を考える。 J_n は n 回推移した後のシステムの状態、 X_n は状態 J_{n-1} の持続時間を表わす。これらは以下の式を満たすと仮定する。

$$X_0 = 0 \quad (\text{a.s.}) \quad (2.18)$$

$$P[J_0 = k] = a_k \quad (k = 1, 2, \dots, m) \quad (2.19)$$

$$P[J_n = k, X_n \leq x \mid J_0, X_0, J_1, X_1, \dots, J_{n-1}, X_{n-1}] = Q_{J_{n-1}, k}(x) \quad (\text{a.s.}) \quad (2.20)$$

ただし、(a.s.)は(almost surely)の略であり、確率 1 でその命題が成り立つことを表わしている。たとえば、(2.18)は $P[X_0 = 0] = 1$ の意味である。

a_k は初期状態が k である確率である。

$A = (a_1, a_2, \dots, a_m)$, $a_i \geq 0$, $\sum_{i=1}^m a_i = 1$ (2.21)
を初期確率ベクトルという。

$Q_{jk}(x)$ は状態が j であるとき、その状態の持続時間が x 以下であり、かつ、次の推移が状態 k への推移である確率である。すなわち、 $Q_{jk}(x)$ は離散変数 k と連続変数 x の 2 変数 (k, x) の条件付確率分布で、 $x \leq 0$ に対しては値 0、 $x \geq 0$ に対しては単調増加する mass function (全変分が 1 に等しいとは限らない分布関数) である。 $Q_{jk}(+\infty)$ の k についての総和は 1 に等しくなければならない。 $Q = (Q_{ij})$ を セミマルコフ行列(semi-Markov matrix)という。

式(2.20)は、左辺の条件付確率が J_{n-1} にのみ依存することを表わしている。したがって、 (J_n, X_n) はマルコフ過程である。

ある状態へ推移することをその状態を訪問する(visit)、また、状態の持続時間のことを滞在時間(sojourn time)ということもある。

行列 Q の行和

$$H_j(t) = \sum_{k=1}^m Q_{jk}(t) \quad (2.22)$$

は t について分布関数であり、状態 j の滞在時間分布(状態が j に推移してきたとき、時間 t 以内に次の推移が発生する確率。次の推移が j 自身への推移でもよい)となる。

$$p_{jk} = Q_{jk}(+\infty) \quad (2.23)$$

は、 k について確率分布で

$$\sum_{k=1}^m p_{jk} = 1 \quad (2.24)$$

であり、状態が j であるとき、次に状態 k へ推移する確率となる。すなわち、 $\{J_n\}$ は $P = (p_{ij})$ を推移確率行列とするマルコフ連鎖をなす。

$$F_{jk}(t) = Q_{jk}(t) / p_{jk} \quad (2.25)$$

とすると、 $F_{jk}(t)$ は t について分布関数となり、状態が j から k へ推移したという条件のもとでの状態 j での滞在時間分布を表わす。これら H 、 p 、 F の性質を形式的にまとめると以下のようなになる。

$$P[X_n \leq x \mid J_0, \dots, J_{n-1}] = H_{J_{n-1}}(x) \quad (2.26)$$

$$P[J_n = j \mid J_0, \dots, J_{n-1}] = p_{J_{n-1}, j} \quad (2.27)$$

$$P[X_n \leq x \mid J_0, \dots, J_n] = F_{J_{n-1}, J_n}(x) \quad (2.28)$$

(J_n, X_n) は二次元のマルコフ過程であるが、 $S_n = X_0 + \dots + X_n$ とおくと、 S_n は n 回目の推移が発生する時刻を表わし、 (J_n, S_n) も二次元のマルコフ過程となることがわかる。マルコフ再生過程はこの (J_n, S_n) 過程に基づいて次のように定義される。まず、

$$N(t) = \max \{n; S_n \leq t\} \quad (2.29)$$

とする。確率変数 $N(t)$ は、時間 t 以内での状態推移回数を表わす。

$$N_j(t) = 0 < k < N(t) + 1 \text{ に対し、} J_k = j \text{ となる回数}$$

= 時間 t 以内での状態 j への訪問回数

$$(\text{ただし、初期状態は数えない}) \quad (2.30)$$

とすれば

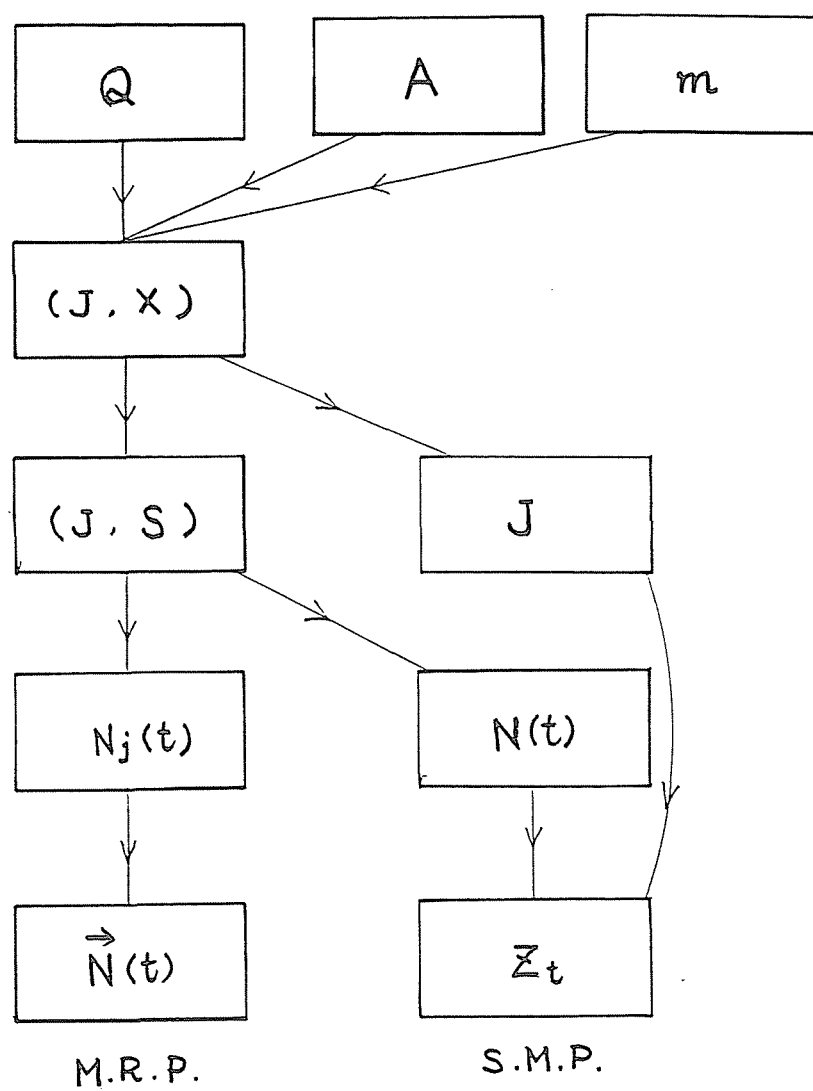


図 2. 5 マルコフ再生過程(M.R.P.)とセミマルコフ過程(S.M.P.)の構成的定義

$$N(t) = \sum_{j=1}^m N_j(t) \quad (2.31)$$

である。このとき m 次元ベクトル確率過程 $\{\vec{N}(t); t \geq 0\}$ 、 $\vec{N}(t) = (N_1(t), \dots, N_m(t))$ をマルコフ再生過程(Markov renewal process)という。これは状態の数 m 、初期確率分布 A 、およびセミマルコフ行列 Q によって定まる。また、時刻 t における状態を $N(t)$ 回目に訪問した状態、すなわち

$$Z_t = J_{N(t)} \quad (2.32)$$

で定義するとき、確率過程 $\{Z_t; t \geq 0\}$ を (m, A, Q) によって定まるセミマルコフ過程(semi-Markov process)という。また、 m 、 A 、および推移確率行列 $Q(+\infty) [= P = (p_{ij})]$ によって定まるマルコフ連鎖 $\{J_n\}$ をこのマルコフ再生過程に対応するマルコフ連鎖(corresponding Markov chain)という。対応するマルコフ連鎖が再帰的なとき、そのマルコフ再生過程は再帰的である。以下では状態数 m が有限で、再帰的なマルコフ再生過程を仮定して議論する。

これまで、Pyke の原論文にそって構成的にマルコフ再生過程とセミマルコフ過程を定義した。図 2.5 にこれらの定義に至る諸定義間の構造を図示した。図において、矢線 $i \rightarrow j$ は、 j の定義に i の定義が用いられていることを表わす。

<ラプラス・スティルチェス変換とたたみこみ>

$F(t)$ のラプラス・スティルチェス変換(Laplace-Stieltjes transform; 以下 LS 変換と略) $f(s)$ は次式で定義される。

$$f(s) = LS[F(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-st) dF(t) \quad (2.33)$$

ここで $F(t)$ にあたる関数は、本論文においてはすべて分布関数か mass function であり、 $t < 0$ のとき $f(t) = 0$ であるから、上式の積分の下限は $0-$ から初めてもよい。また、本論文では特に断わらない限り、分布関数や mass function を大文字の記号で示し、その LS 変換を対応する小文字で示すことにする。

$K(t)$ と $L(t)$ のたたみこみ(convolution) は次式で定義される。

$$\begin{aligned} K(t) * L(t) &= \int_{0-}^t K(t-y) dL(y) & t \geq 0 \\ &= 0 & t < 0 \end{aligned} \quad (2.34)$$

関数 $K(\cdot) * L(\cdot)$ のことを単に $K * L$ と記す。たたみこみの LS 変換は、各々の LS 変換の積に等しいことが知られている。

$$LS[K * L] = LS[K] \cdot LS[L] \quad (2.35)$$

また、

$$K^{(n)} = K^{(n-1)} * K \quad (n=1, 2, \dots) \quad (2.36)$$

$$K^{(0)} = U_0(\cdot) \quad (2.37)$$

$$(1-K)^{(-1)} = \sum_{n=0}^{\infty} K^{(n)} \quad (2.38)$$

と定義する。ただし、 $U(\cdot)$ は単位ステップ関数である。

$$U(x) = \begin{cases} 1 & , x \geq 0 \\ 0 & , x < 0 \end{cases} \quad (2.39)$$

これらのLS変換は

$$LS[K^{(n)}] = (k(s))^n \quad n=0,1,2,\dots$$

$$LS[(1-K)^{(-1)}] = 1/(1-k(s))$$

となることが容易に確かめられる。また、

$F(t)$ が分布関数またはmass function であるとき

$$f(0) = F(+\infty) \quad (2.40)$$

分布 $F(x)$ をもつ確率変数 X の期待値を $\bar{x}$ とすると

$$\bar{x} = \int_{-\infty}^{\infty} x dF(x) = [-dF(s)/ds]_{s=0} \quad (2.41)$$

が成り立つ。特に、状態 i の持続時間の期待値を

$$\eta_i = \int_0^{\infty} t dH_i(t) = [-dh_i(s)/ds]_{s=0} \quad (2.42)$$

とおく。 η_i を平均滞在時間という。

<初期通過時間と再帰時間>

$$G_{ij}(t) = P[N_j(t) > 0 \mid Z_0 = i] \quad (2.43)$$

とする。状態 i から出発して初めて状態 j に到達するまでの時間を状態 i から状態 j への初期通過時間 (first passage time) という。 $G_{ij}(t)$ は、初期状態が i のとき、時間 t 以内に状態 j に到達する確率、すなわち状態 i から状態 j への初期通過時間分布を表わしている。特に $i = j$ のときの初期通過時間を再帰時間 (recurrence time)、 $G_{jj}(t)$ を再帰時間分布という。(注：再帰の場合、少なくとも1回は推移をすることを要する)

$$\mu_{ij} = \int_0^{\infty} t dG_{ij}(t) = [-dg_{ij}(s)/ds]_{s=0} \quad (2.44)$$

を平均初期通過時間という。特に $i = j$ のとき μ_{jj} を平均再帰時間という。

時刻0に状態が i であるとき、時刻 t までに状態 j へ到達する事象は次の2つに分けられる。

① 時間 t 以内に最初の推移で直接 j に推移する

② 時刻 τ ($0 \leq \tau < t$) でまず状態 k ($k \neq j$) に推移し、その後、分布 $G_{kj}(t - \tau)$

τ) に従って時刻 t までに状態 j に到達する

この2つは排反であるから次式が成り立つ。

$$G_{ij}(t) = Q_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} \int_0^t G_{kj}(t-\tau) dQ_{ik}(\tau)$$

$dQ_{ik}(\tau)$ は時刻 $\tau \sim \tau + \Delta\tau$ 間に状態 i から状態 k に直接推移する確率、 $G_{kj}(t-\tau)$ は状態 k から状態 j へ時間 $t-\tau$ 以内に到達する確率であることに注意。上式より、

$$\begin{aligned} G_{ij}(t) &= Q_{ij}(t) + \sum_{k \neq j} G_{kj}(t) * Q_{ik}(t) \\ &= \sum_{k=1}^m G_{kj}(t) * Q_{ik}(t) + [1 - G_{jj}(t)] * Q_{ij}(t) \end{aligned} \quad (2.45)$$

また、LS変換により、

$$\begin{aligned} g_{ij}(s) &= q_{ij}(s) + \sum_{k \neq j} g_{kj}(s) q_{ik}(s) \\ &= \sum_{k=1}^m g_{kj}(s) q_{ik}(s) + [1 - g_{jj}(s)] q_{ij}(s) \end{aligned} \quad (2.46)$$

を得る。

上式を (-1) 倍し、 $s=0$ における微分値を計算する。

$$\begin{aligned} [-dg_{ij}(s)/ds]_{s=0} &= [-dq_{ij}(s)/ds]_{s=0} + \sum_{k \neq j} [-dg_{kj}(s)/ds]_{s=0} q_{ik}(0) \\ &\quad + \sum_{k \neq j} g_{kj}(0) [-dq_{ik}(s)/ds]_{s=0} \end{aligned}$$

マルコフ再生過程が再帰的なとき

$$g_{kj}(0) = G_{kj}(+\infty) = 1$$

$$[-dg_{jj}(s)/ds]_{s=0} = \mu_{jj} \quad (\text{平均再帰時間})$$

であり、

$$\sum_{k=1}^m [-dq_{ik}(s)/ds]_{s=0} = [-dh_i(s)/ds]_{s=0} = \eta_i \quad (\text{平均滞在時間})$$

に注意すると次式を得る。

$$\mu_{ij} = \eta_i + \sum_{k \neq j} q_{ik}(0) \mu_{kj} \quad (2.47)$$

あるいは行列形で

$$(I - P I_j) \vec{\mu}_j = \vec{\eta} \quad j=1, 2, \dots, m \quad (2.48)$$

ただし

P : $q_{ij}(0)$ を (i, j) 要素とする正方行列

$\vec{\mu}_j$: μ_{ij} を第 i 成分とする列ベクトル

$\vec{\eta}$: η_i を第 i 成分とする列ベクトル

I : 単位行列

I_j : 単位行列の (j, j) 要素を0とした行列

$P I_j$: P の第 j 列をすべて 0 とした行列

ここで、 P を推移確率行列とするマルコフ連鎖（対応するマルコフ連鎖）の定常確率ベクトルを π とする。

$$\pi = (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_m)$$

$$\pi P = \pi \quad (2.49)$$

$$\sum_{i=1}^m \pi_i = 1 \quad (2.50)$$

式 (2.48) の両辺に左から π を乗じ、 $I_j = I - E_j$ (E_j は第 (j, j) 要素が 1 で他は 0 の行列) とおいて変形すると

$$\pi (I - P) \vec{\mu}_j + \pi P E_j \vec{\mu}_j = \pi \vec{\eta}$$

ここで (2.49) を用いると

$$\pi E_j \vec{\mu}_j = \pi \vec{\eta}$$

左辺は $\pi_j \mu_{jj}$ に等しいので結局次式を得る。

$$\mu_{jj} = \pi \vec{\eta} / \pi_j \quad (2.51)$$

$\vec{\eta}$ は行列 Q から陽に求まり、 π は連立一次方程式 (2.49) (2.50) から求められるので、(2.51) により平均再帰時間が容易に求められる。さらに後に述べるように、平均再帰時間が求まれば、他の重要な諸量をいろいろ求めることができる。

<平均訪問回数>

時刻 0 で状態 i にいるとき、時刻 t までに状態 j を訪れる平均回数（平均訪問回数）を $M_{ij}(t)$ 、その LS 変換を $m_{ij}(s)$ とする。

$$M_{ij}(t) = E [N_j(t) | Z_0 = i] \quad (t \geq 0) \quad (2.52)$$

$M = (M_{ij})$ を再生関数 (renewal function) という。さて、回数 $M_{ij}(t)$ を計算するため、初めて状態 j を訪れた時刻 u により場合分けする ($0 \leq u < t$)。時刻 u から $u + \Delta u$ 間に初めて状態 j を訪れる確率は $dG_{ij}(u)$ である。その後、時刻 u から t の間では状態 j を平均 $M_{jj}(t-u)$ 回訪問するので

$$M_{ij}(t) = \int_0^t \{1 + M_{jj}(t-u)\} dG_{ij}(u) \quad (2.53)$$

$$m_{ij}(s) = \{1 + m_{jj}(s)\} g_{ij}(s) \quad (2.54)$$

が成り立つ。再帰的なマルコフ再生過程 ($G_{ij}(+\infty) = g_{ij}(0) = 1$) においては、 $t \rightarrow \infty$ ($s \rightarrow 0$) のとき $M_{ij}(t)$ および $m_{ij}(s)$ は初期状態 i に無関係になることがわかるので、初期状態として j を選ぶと

$$m_{jj}(s) = g_{jj}(s) / [1 - g_{jj}(s)] \quad (2.55)$$

が得られる。したがって、平衡状態において単位時間あたりの j への平均訪問回数 ν_j

は次のように求められる。

$$\begin{aligned}
 \nu_j &= \lim_{t \rightarrow \infty} M_{jj}(t) / t \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} s m_{jj}(s) \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} s g_{jj}(s) / [1 - g_{jj}(s)] \\
 &= \lim_{s \rightarrow 0} [g_{jj}(s) + s g'_{jj}(s)] / [-g'_{jj}(s)] \\
 &= 1 / \mu_{jj} \quad (2.56)
 \end{aligned}$$

すなわち、ある状態への単位時間当たりの平均訪問回数は、その状態における平均再帰時間の逆数に等しい。これは直観的にも説明し得る。状態 j へ平均 μ_{jj} 時間に 1 回訪問するのであるから単位時間当たりの訪問回数は平均 $1 / \mu_{jj}$ 回となるわけである。

<定常確率>

時刻 0 で状態が i であるとき、時刻 t において状態が j となる確率（滞在確率）を $P_{ij}(t)$ 、その L S 変換を $\pi_{ij}(s)$ とする。

$$P_{ij}(t) = P[Z_t = j \mid Z_0 = i] \quad (t \geq 0) \quad (2.57)$$

$i \neq j$ のときには時刻 u ($0 \leq u < t$) で初めて j を訪れ、その後、確率 $P_{jj}(t-u)$ に従うから

$$P_{ij}(t) = \int_0^t P_{jj}(t-u) dG_{ij}(u)$$

となる。 $i = j$ のときにはこれにさらに、時刻 t まで 1 度も推移しない確率 $1 - H_i(t)$ が加算される。したがって、次式を得る。

$$P_{ij}(t) = P_{jj}(t) * P_{ij}(t) + \delta_{ij} [1 - H_i(t)] \quad (2.58)$$

$$\pi_{ij}(s) = \begin{cases} \pi_{jj}(s) g_{ij}(s) & (i \neq j) \\ [1 - h_j(s)] / [1 - g_{jj}(s)] & (i=j) \end{cases} \quad (2.59)$$

次に定常分布を求める。セミマルコフ過程の場合には、 $P_{ij}(t)$ の極限が存在してもこれが定常分布を与えるとは限らない。 P_{yke} は定常分布を与えるものとして、次のような確率の極限を考えた。

$$R_{jk}^{(i)}(x; t) = P[Z_t = j, J_{N(t)+1} = k, S_{N(t)+1} \leq t+x \mid Z_0 = i]$$

これは、初期状態が i のとき、時刻 t の状態が j となり、かつ次の推移が $t+x$ ($x > 0$) までに起こり、推移後の状態が k である確率である。これを用いると

$$P_{ij}(t) = \sum_{k=1}^m R_{jk}^{(i)}(\infty; t)$$

であり、この極限をとることにより、平均滞在時間 $\eta_j < \infty$ のときには

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = G_{ij}(\infty) \eta_j / \mu_{jj}$$

となることが示される。特に正再帰なセミマルコフ過程においては $G_{ij}(\infty) = 1$ であ

るから、この極限は初期状態に無関係に

$$p_j = \lim_{t \rightarrow \infty} P_{ij}(t) = \eta_j / \mu_{jj} \quad (2.60)$$

あるいは(2.51)を用いて

$$p_j = \pi_j \eta_j / \pi \vec{\eta} \quad (2.61)$$

となる。

<まとめ>

本節で用いた諸記号を以下にまとめておく。[] 内の数字は関連する式の番号である。

m : 状態数

$A = (a_1, \dots, a_m)$: 初期確率ベクトル [21]

$Q_{jk}(x)$: 状態 j に推移してきたという条件のもとで、時間 x 以内に状態 k に直接推移する確率 [20]

J_i : i 回推移した後の状態 (J_0 は初期状態)

X_i : 状態 J_{i-1} の持続時間 (ただし、 $X_0 = 0$)

S_i : i 回目の推移が発生した時刻

$H_i(t)$: 状態 i に推移してきたとき、時間 t 以内に次の推移が発生する確率 (滞在時間分布) [22,26]

$F_{ij}(t)$: 状態 i から状態 j へ推移したという条件のもとでの状態 i での滞在時間分布 (条件付き滞在時間分布) [25,28]

P_{ij} : 状態 i に推移してきたとき、次に状態 j へ推移する確率。(対応するマルコフ連鎖の推移確率) [23,27]

$N(t)$: 時刻 t までの全推移回数 [29,31]

$N_j(t)$: 時刻 t までの状態 j への訪問回数 [30]

Z_t : 時刻 t における状態 (セミマルコフ過程) [32]

η_i : 平均滞在時間 [42]

$G_{ij}(t)$: 初期通過時間分布、 $i = j$ のとき再帰時間分布 [43,45]

μ_{ij} : 平均初期通過時間、 $i = j$ のとき平均再帰時間 [51]

$M_{ij}(t)$: 平均訪問回数 [52,53]

ν_j : 単位時間当たりの平均訪問回数 [56]

$P_{ij}(t)$: 滞在確率 [57,58]

$\pi_{ij}(s)$: $P_{ij}(t)$ の L S 変換 [59]

p_j : 定常確率 [60,61]

2. 4 シグナルフローグラフ

本節ではシグナルフローグラフとその変形およびノード間のゲインについて述べる。次節で述べるように、マルコフ再生過程はシグナルフローグラフで表現することができ、その解析を見通し良く行なうことができる。また、シグナルフローグラフは電気・電子工学の技術者にもなじみが深い。したがって、マルコフ再生過程を一旦シグナルフローグラフで表現すれば、確率論を持ちださなくても機械的に解析をすすめることができる。シグナルフローグラフに限らず、このようなグラフ論的アプローチは、複雑なシステムを扱う上での重要な方法である。

シグナルフローグラフ (signal-flow graph) [64, 65] は連立一次方程式を表現する、以下のような規則により構成される重み付き有向グラフである。

1. ノード i の重み x_i (ノード変数; node variable) は変数を表わす。(未知でも既知でもよい)

2. 枝 (i, j) の重み t_{ij} (トランスミッタンス; transmittance) は、ノード変数間に成り立つ線形関係の係数を表わす。

3. 入力枝 ($\cdot, j$) を持つ各ノード j について次の式が成り立つ。

$$x_j = \sum_i t_{ij} x_i$$

ただし、上記の和はノード j のすべての先行ノード i についてとられる (図 2. 6(a))

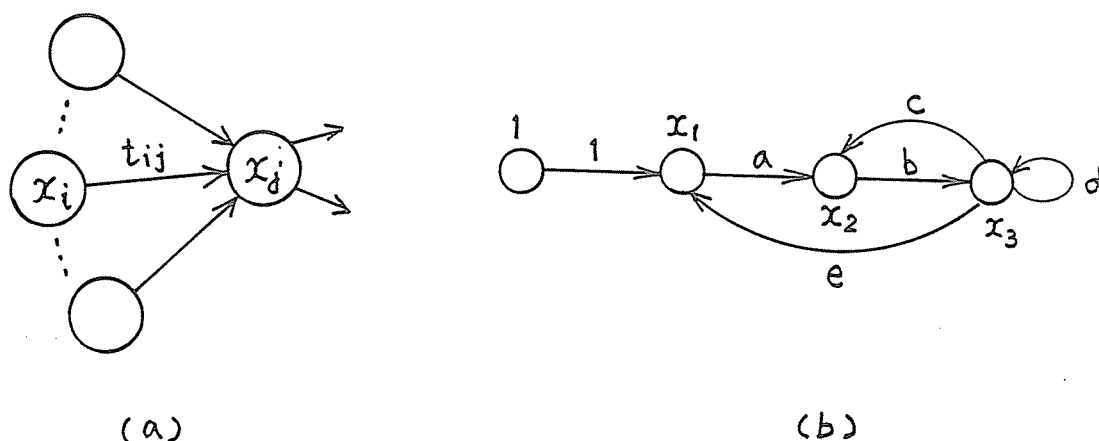


図 2. 6 シグナルフローグラフの例

図2. 6(b) にシグナルフローグラフの例を示す。このシグナルフローグラフは次の関係を表わしている。

$$x_1 = 1 + e x_3$$

$$x_2 = a x_1 + c x_3$$

$$x_3 = b x_2 + d x_3$$

シグナルフローグラフの性質を用いることにより、シグナルフローグラフを変形できる。図2. 7にその例として基本変形を4つ示す。たとえば (a) は

$$x_2 = a x_1$$

$$x_3 = b x_2$$

より

$$x_3 = a b x_1$$

となることから明らかである。同様に (d) は

$$x_2 = x_1 + g x_2$$

$$x_3 = x_2$$

より

$$x_3 = [1 / (1 - g)] x_1$$

となることを表わしている。これらの基本変形を用いてもっと複雑なシグナルフローグラフを簡略化できる。図2. 8はその例で、(a) が(b),(c),(d) を経て(e) に簡略化される過程を示している。

一般にシグナルフローグラフ上には直接描かれることは少ないが、各ノード i にはソース (source) と呼ばれるノードから信号 S_i が入力されており、シンク (sink) と呼ばれるノードにノード変数 x_i の値が取りだされていると考える (図2. 9)。ノード i への入力を $S_i = 1$ とし、それ以外の入力を $S_k = 0$ ($k \neq i$) としたときのノード j における出力をノード i からノード j までのゲイン (gain) といい、 γ_{ij} と書く。シグナルフローグラフ上の道 (path) $i_0 \ i_1 \ i_2 \ \cdots \ i_n$ 上のトランスミッタンスの積 $t_{i_0 i_1} t_{i_1 i_2} \cdots t_{i_{n-1} i_n}$ をこの道のパスゲイン (path gain) という。特にこの道の始点と終点が同じノードのとき、すなわち、この道がループ (loop) のときのパスゲインをループゲイン (loop gain) という。ゲイン γ_{ij} はノード i のソースからノード j のシンクに至るすべての道 (同じノードや辺を何度通ってもよい) のパスゲインの総和に等しいことが知られている。

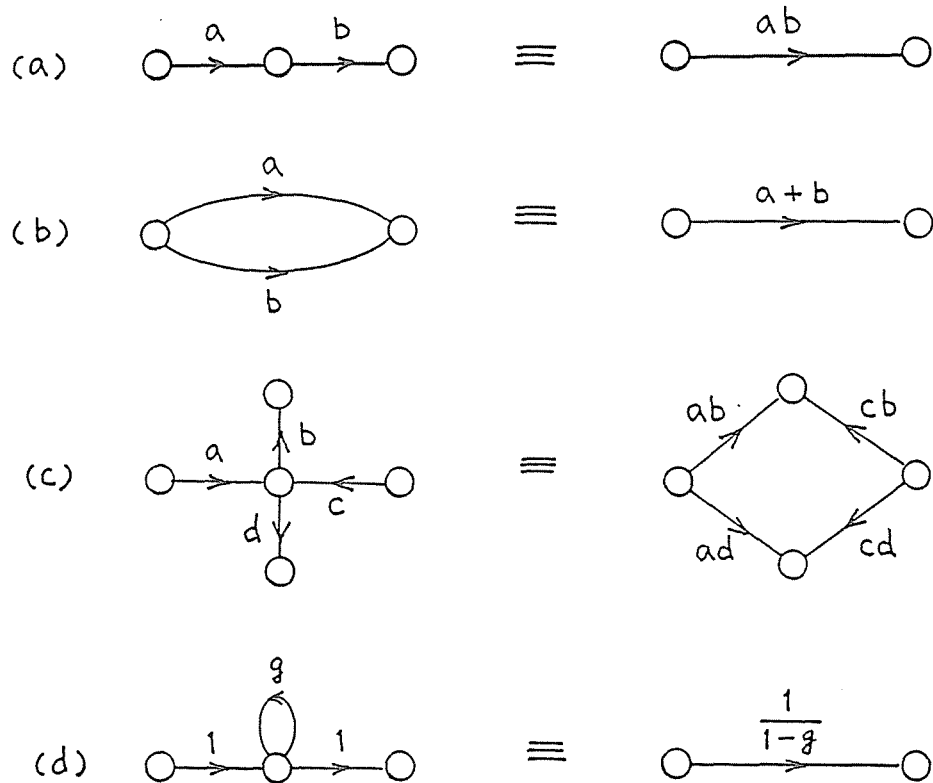


図 2. 7 シグナルフローグラフの基本変形

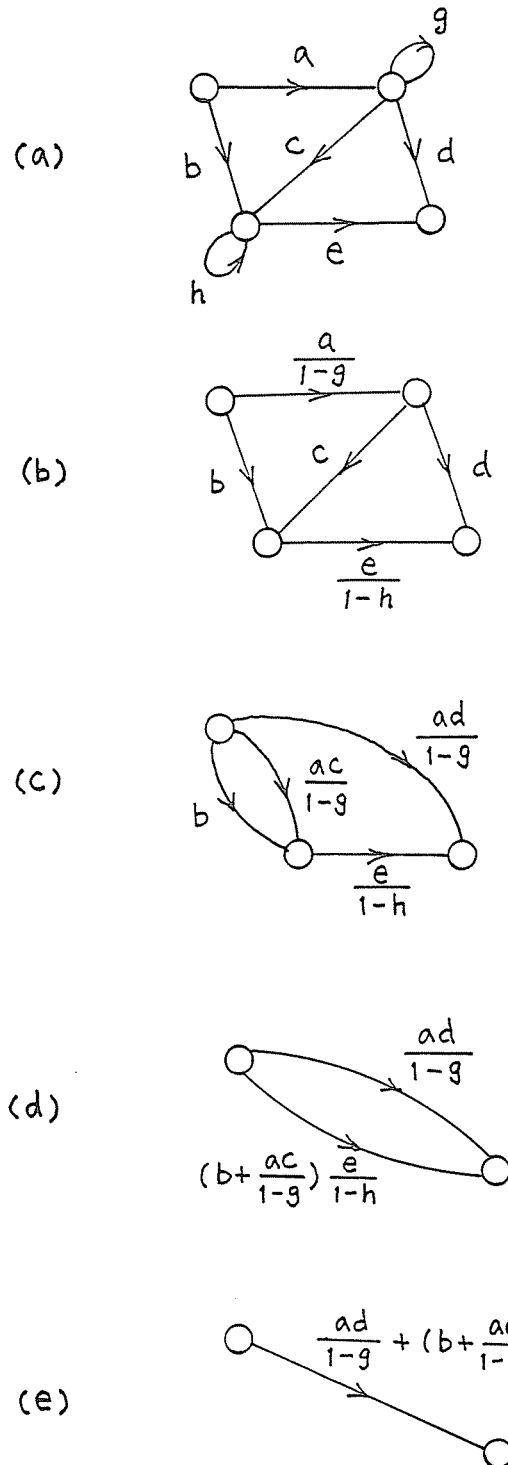


図 2. 8 シグナルフローグラフの変形の例

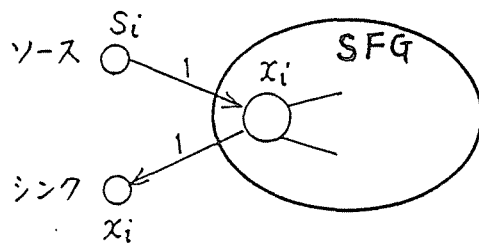
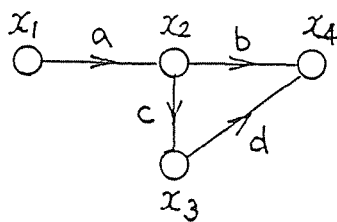
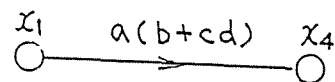


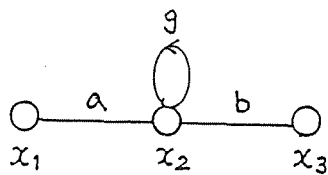
図 2. 9 ソースとシンク



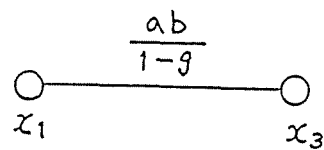
(a)



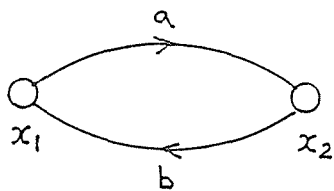
(b)



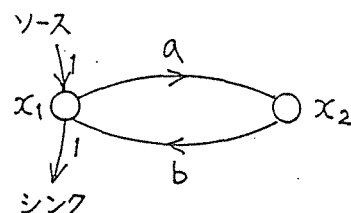
(c)



(d)



(e)



(f)

図 2. 10 ゲイン計算のための例

例：図2. 10 (a) においてノード1から4へのゲインを求めると

$$\begin{aligned}x_1 &= 1 \\x_2 &= a x_1 \\x_3 &= c x_2 \\x_4 &= b x_2 + d x_3\end{aligned}$$

より

$$r_{14} = x_4 = a b + a c d$$

となる。これはノード1から4に至る道1, 2, 4および1, 2, 3, 4のパスゲインの和になっている。また、(a)を簡略化して(b)とすると、 r_{14} はトランスミッタンス t_{14} に等しくなる。また同図(c)の例では

$$r_{13} = a b / (1 - g)$$

であるが、これはパスゲインの総和として

$$r_{13} = a b + a g b + a g^2 b + a g^3 b + \dots$$

としても求められる。

$i \neq j$ の場合はソースとシンクを陽に描かなくてもグラフの解析を間違えることは少ないが、 $i = j$ のときは注意を要する。図2. 10 (e) のシグナルフローグラフにおいてゲイン r_{11} を求める際には、同図(f)のようにノード1にソースとシンクをつけてシグナルフローグラフを簡略化することにより

$$r_{11} = 1 / (1 - a b)$$

と求まる。

ループを構成する各枝のトランスミッタンスの積をそのループのループゲインという。互いに接しない n 個のループを n 次のループという。Masonは、シグナルフローグラフの道とループの解析によってゲインを求める次のような公式を求めた[66]。

$$r_{ij} = (\sum_k P_k \Delta_k) / \Delta \quad (2.62)$$

ただし

$\Delta = 1 -$ すべてのループゲインの和

+すべての2次のループのループゲインの和

-すべての3次のループのループゲインの和

+ ...

(n 次のループとは、互いに接しない n 個のループのことをいう)

P_k = ノード i から ノード j に至る第 k 番目の道のパスゲイン。

ただし、この道は同一ノードを2度以上通らないものとする。

Δ_k = 道 P_k に接しないループのみについて Δ を計算したもの。

これをメイソンの公式 (Mason's rule) という。シグナルフローグラフの表わしている連立一次方程式との関連で、 Δ は行列式 (determinant)、 Δ_k は余因子 (cofactor) と呼ばれる。

例：図2. 11のシグナルフローグラフのノード0からノード3までのゲイン γ_{03} を求める。まず、ノード0から3へのすべての道とすべてのループを列挙する。

$$P_1 = a f, \quad P_2 = a c g, \quad P_3 = b g, \quad P_4 = b d f$$

$$L_1 = e, \quad L_2 = c d$$

L_1 と L_2 は接している。また、 P_2 、 P_3 、 P_4 は L_1 、 L_2 に接している。したがって

$$\Delta = 1 - (e + c d)$$

$$\Delta_1 = 1 - e, \quad \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 1$$

求めるゲインは

$$\gamma_{03} = [af(1-e) + acg + bg + bdf] / (1 - e - cd)$$

となる。この結果は、連立一次方程式を解いて求めた結果やシグナルフローグラフの簡略化を行なって求めた結果と一致することを確認められたい。(例終)

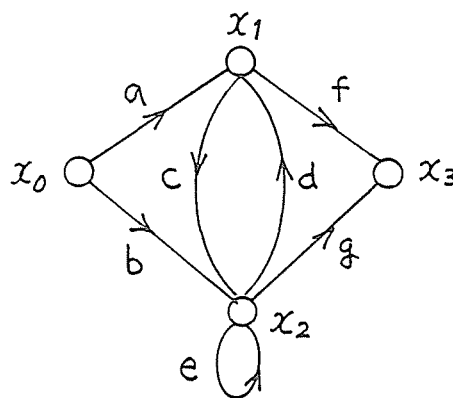


図2. 11 メイソンの公式の例題

2. 5 マルコフ再生過程とシグナルフローグラフの関連

マルコフ再生過程とシグナルフローグラフの間には密接な関連があり、マルコフ再生過程に関する多くの量をシグナルフローグラフの解析によって求めることができる。この基本的なアイデアは尾崎 [67- 69] らによるが、本節ではそれをさらに発展させ、かつ、数学的な根拠を明らかにしつつ説明する。

(m, A, Q) で定まるマルコフ再生過程を考える。これに次のようなシグナルフローグラフを対応させる。

$$G = (V, E)$$

$$V = \{1, 2, \dots, m\}$$

$$E = \{(i, j) \mid Q_{ij}(t) \neq 0\}$$

各枝 (i, j) にはトランスミッタンスとして $Q_{ij}(t)$ の LS 変換 $q_{ij}(s)$ を付ける。(ノード変数の意味は解析目的により解釈が異なるのでここでは触れない。)

たとえば

$$Q = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{21} & 0 & Q_{23} \\ Q_{31} & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

で与えられるマルコフ再生過程のシグナルフローグラフは図 2. 12 のようになる。

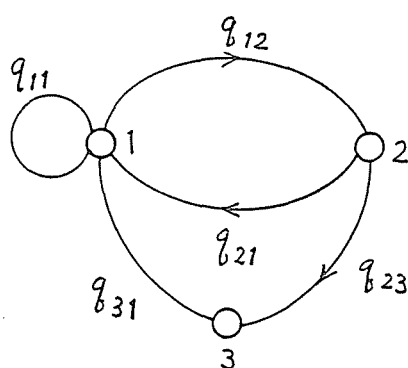


図 2. 12 マルコフ再生過程のシグナルフローグラフ表現

<初期通過時間分布、平均訪問回数、滞在確率>

最初に、初期通過時間分布 $G_{ij}(t)$ とシグナルフローグラフのゲインとの関連を考えるため、状態 i から出発して初めて状態 j に至るまでの長さ c の状態列 $i = k_0, k_1, \dots, k_c = j$ を考える ($k_1, k_2, \dots, k_{c-1} \neq j$)。状態 k_{c-1} の持続時間を X_c とすると、状態 i から j までの初期通過時間は $X_1 + X_2 + \dots + X_c$ となる。確率変数 $X_1, \dots, X_c$ は互いに独立である。独立な確率変数の和の分布はそれらの分布のたたみこみで与えられるから、初期通過時間分布は次式で与えられる。

$$G_{ij} = \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_{c-1} \neq j} Q_{ik_1} * Q_{k_1 k_2} * \dots * Q_{k_{c-1} j}$$

または、LS変換形で

$$g_{ij} = \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_{c-1} \neq j} q_{ik_1} q_{k_1 k_2} \dots q_{k_{c-1} j}$$

となる。この式の右辺はシグナルフローグラフ上のノード i からノード j へ至るすべての道のうち、途中で j を経由しないもののパスゲインの総和を表わしている。したがって、次の対応関係が明らかとなった。

対応 1 : $g_{ij}(s)$ は、対応するシグナルフローグラフにおいてノード i から j へのすべての道（同じノードや枝を何度通ってもよい）のうち、途中で j を経由しないもののパスゲインの総和に等しい。

例：図 2. 13 の場合、マルコフ再生過程の式（2. 46）より

$$g_{11} = q_{11} + q_{12} g_{21}, \quad g_{12} = q_{12} + q_{11} g_{12}$$

$$g_{21} = q_{21}, \quad g_{22} = q_{21} g_{12}$$

したがって

$$g_{11} = q_{11} + q_{12} q_{21}, \quad g_{12} = q_{12} / (1 - q_{11})$$

$$g_{21} = q_{21}, \quad g_{22} = q_{21} q_{12} / (1 - q_{11})$$

これらはシグナルフローグラフの解析によっても求められる。たとえば

$$\begin{aligned} g_{22} &= q_{21} q_{12} + q_{21} q_{11} q_{12} + q_{21} q_{11}^2 q_{12} + \dots \\ &= q_{21} q_{12} / (1 - q_{11}) \end{aligned}$$

（例終）

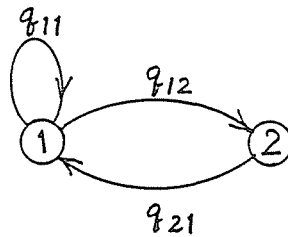


図 2. 13 例題のためのシグナルフローグラフ

対応 1 は次のように言い換えてもよいことは明らかである。

対応 1' : $g_{ij}(s)$ は

(a) $i \neq j$ のとき、ノード j から出る枝をすべて除去したシグナルフローグラフのノード i , j 間のゲイン

(b) $i = j$ のとき、ノード $i (= j)$ を i' と i'' に分割 (split) し、 i から出る枝は i' から出るようにし、 i へ入る枝は i'' へ入るようにしたシグナルフローグラフの i' から i'' までのゲイン

に等しい。

例：図 2. 13 の例の場合、 g_{12} は図 2. 14 (a) のノード 1 から 2 までのゲインを求め、 g_{11} は同図 (b) のノード 1' から 1'' までのゲインを求めて

$$g_{12} = q_{12} / (1 - q_{11})$$

$$g_{11} = q_{11} + q_{12} q_{21}$$

となる。 (例終)

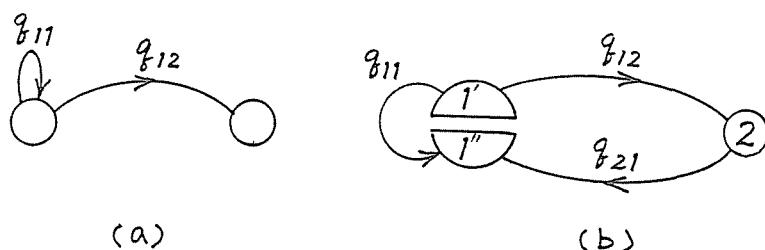


図 2. 14 ノードの分割

平均訪問回数 $M_{ij}(t)$ の LS 変換 $m_{ij}(s)$ とシグナルフローグラフのゲインとの対応を考える。Pyke [62, 63] によれば、 $m = (m_{ij})$ と $q = (q_{ij})$ には次の関係がある。

$$m = (I - q)^{-1} - I$$

ここで

$$(I - q)^{-1} = I + q + q^2 + \dots$$

であるから、その (i, j) 要素は

$$(I - q)^{-1}_{ij} = \delta_{ij} + q_{ij} + \sum_k q_{ik} q_{kj} + \sum_{k,l} q_{ik} q_{kl} q_{lj} + \dots$$

となる。この右辺は対応するシグナルフローグラフのノード i , j 間のゲインに等しい。

なぜなら、この式はノード i に付けられたソースからノード j に付けられたシンクまでのすべての道のパスゲインの総和を表わしているからである。（ $i = j$ のときパスゲイン = 1 の道があることにも注意。）したがって、次のことがいえる。

対応 2 : $m_{ij}(s)$ は、 $i \neq j$ のとき、対応するシグナルフローグラフのノード i , j 間のゲイン、 $i = j$ のとき、対応するシグナルフローグラフのノード i , j 間のゲイン - 1 に等しい。

$$m_{ij}(s) = r_{ij}(s) - \delta_{ij}$$

例：図 2. 13 の例で考える。マルコフ再生理論の式 (2. 54) (2. 55) によれば

$$\begin{aligned} m_{22} &= g_{22} / (1 - g_{22}) \\ &= q_{21} q_{12} / (1 - q_{11} - q_{21} q_{12}) \\ m_{12} &= (1 + m_{22}) g_{12} \\ &= q_{12} / (1 - q_{11} - q_{21} q_{12}) \end{aligned}$$

メイスンの公式により図 2. 15 のシグナルフローグラフのゲインを求めることによれば

$$\begin{aligned} m_{22} &= (1 - q_{11}) / (1 - q_{11} - q_{12} q_{21}) - 1 \\ m_{12} &= q_{12} / (1 - q_{11} - q_{12} q_{21}) \end{aligned}$$

が得られ、両者は一致する。（例終）

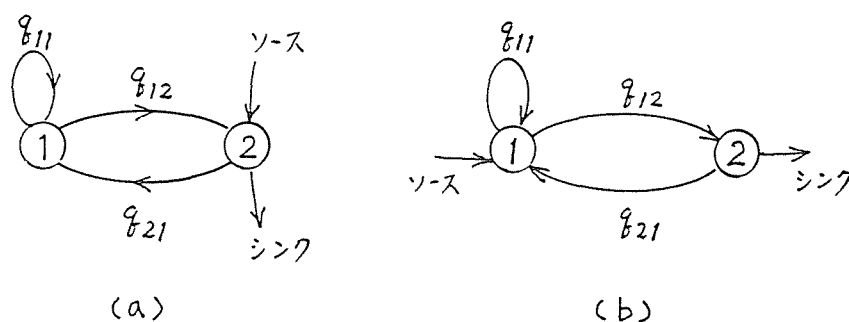


図 2. 15 例題のためのシグナルフローグラフ

滞在確率 $P_{ij}(t)$ の LS 変換 $\pi_{ij}(s)$ の行列を $\pi = (\pi_{ij})$ 、滞在時間分布 $H_i(t)$ の LS 変換 $h_i(s)$ の行列を $h = (\delta_{ij} h_i)$ とすると次の式が成り立つ。

$$\pi = (I - q)^{-1} (I - h)$$

$(I - q)^{-1}$ の (i, j) 要素が対応するシグナルフローグラフのノード i, j 間のゲイン $r_{ij}(s)$ に等しいことは既にみた。また $(I - h)$ は対角行列である。このことから次の対応関係がわかる。

対応 3: $\pi_{ij}(s)$ は、対応するシグナルフローグラフにおけるノード i, j 間のゲインを $r_{ij}(s)$ 、ノード j から出るすべての枝の上のトランスミッタンスの和を $h_j(s)$ とすると

$$\pi_{ij}(s) = r_{ij}(s) [1 - h_j(s)]$$

で求まる。

例：また図 2. 13 の例で考える。

$$h_1 = q_{11} + q_{12}, \quad h_2 = q_{21}$$

マルコフ再生理論の式 (2. 59) によると

$$\pi_{11} = (1 - h_1) / (1 - g_{11}) = (1 - q_{11} - q_{12}) / (1 - q_{11} - q_{12}q_{21})$$

$$\pi_{21} = \pi_{11} g_{21} = q_{21}(1 - q_{11} - q_{12}) / (1 - q_{11} - q_{12}q_{21})$$

$$\pi_{22} = (1 - h_2) / (1 - g_{22}) = (1 - q_{21})(1 - q_{11}) / (1 - q_{11} - q_{21}q_{12})$$

$$\pi_{12} = \pi_{22} g_{12} = q_{12}(1 - q_{21}) / (1 - q_{11} - q_{21}q_{12})$$

これは、シグナルフローグラフで考えて

$$r_{11} = 1 / (1 - q_{11} - q_{12}q_{21})$$

$$r_{21} = q_{21} / (1 - q_{11} - q_{12}q_{21})$$

$$r_{22} = (1 - q_{11}) / (1 - q_{11} - q_{21}q_{12})$$

$$r_{12} = q_{12} / (1 - q_{11} - q_{12}q_{21})$$

より

$$\pi_{11} = r_{11} (1 - h_1), \quad \pi_{12} = r_{12} (1 - h_2)$$

$$\pi_{21} = r_{21} (1 - h_1), \quad \pi_{22} = r_{22} (1 - h_2)$$

として求めた結果と一致する。

$$\pi_{11} + \pi_{12} = \pi_{21} + \pi_{22} = 1 \quad (\text{全確率})$$

が確かめられる。(例終)

<シグナルフローグラフとマルコフ再生過程の変換>

シグナルフローグラフの変換 (transformation) または簡略化 (simplification) の操作は、そのシグナルフローグラフによって表現されているマルコフ再生過程においては何に対応しているのでしょうか。以下では、例を通してこの対応関係を明らかにする。

図2. 16のシグナルフローグラフで表わされるマルコフ再生過程 $\{\vec{N}(t)\}$ 、 $\vec{N}(t) = (N_1(t), N_2(t), N_3(t))$ を考える。 $N_j(t)$ は時刻 t までに状態 j を訪問した回数である。いま、ある応用的な立場から、 $N_1(t)$ と $N_3(t)$ に着目して解析を進めたいものとしよう。たとえば、状態1と3の平均訪問回数が応用上重要である場合などを考えればよい。このとき、状態空間を $\{1, 3\}$ とした新たなマルコフ再生過程 $\{\vec{N}'(t)\}$ 、 $\vec{N}'(t) = (N_1(t), N_3(t))$ を構成できれば都合がよい。もちろん、 $\vec{N}'(t)$ における $N_1(t)$ 、 $N_3(t)$ の確率分布はもとの $\vec{N}(t)$ における $N_1(t)$ 、 $N_3(t)$ と同じであるとする。すなわち、 $\vec{N}'(t)$ は、もとのマルコフ再生過程において状態2への推移回数をカウントしないような計数過程であると解釈できる。

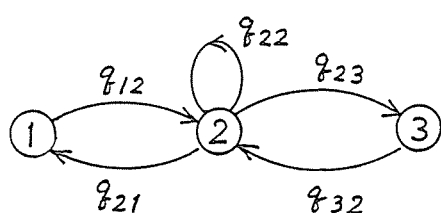


図2. 16 もとのシグナルフローグラフ

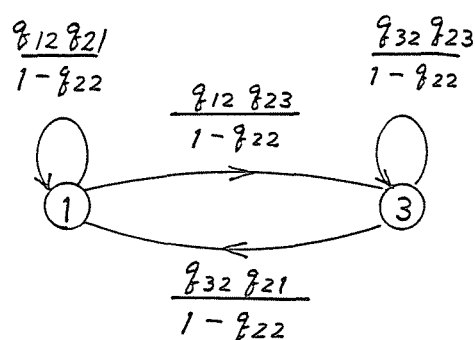


図2. 17 残留グラフ

このような $\vec{N}'(t)$ は容易に構成できる。結論を先に述べると、 $\vec{N}'(t)$ に対応するシグナルフローグラフは 残留グラフ (residual graph) [64] の考え方によって図 2. 17 のようになる。この残留グラフの作り方を説明する。(ただし、この方法がなぜ正しいかは後述する。) まず、残したいノード (残留ノード; residual nodes) を 1 と 3 に決め、ノード 2 は除去するものと決める。残留グラフ G' における枝 (i, j) (この例では、 $i, j \in \{1, 3\}$) の上のトランスミッタンス t'_{ij} は、もとのグラフ G におけるノード i, j 間の残留ゲインに等しくする。ただし、ノード i, j 間の 残留ゲイン (residual gain) とは、ノード i から j へのすべての道のうち、途中でいずれの残留ノードも経由しないようなもののパスゲインの総和のことである。いまの例では、1 から 3 への残留ゲインは

$$\begin{aligned} t'_{13} &= q_{12} q_{23} + q_{12} q_{22} q_{23} + q_{12} q_{22}^2 q_{23} + \cdots \\ &= q_{12} q_{23} / (1 - q_{22}) \end{aligned}$$

となる。こうして図 2. 17 が得られる。

ここで、新たなマルコフ再生過程 $\vec{N}'(t) = (N_1(t), N_3(t))$ について確率過程論的な意味を検討してみる。2. 3 で述べたように、マルコフ再生過程は (J, X) 過程に基づいて構成されている。ここで、 $(J_0, J_1, J_2, \dots)$ は訪問した状態の列、 $(X_1, X_2, \dots)$ は各状態での滞在時間 (X_i は状態 J_{i-1} での滞在時間) を表わしている。これに対応して、新たなマルコフ再生過程 $\vec{N}'(t)$ は、もとの (J, X) 過程から作られる次のような (J', X') 過程に基づいて構成されているものと解釈できる (その理由はすぐ後に述べる)。すなわち、 $(J'_0, J'_1, J'_2, \dots)$ はもとのマルコフ再生過程の $(J_0, J_1, J_2, \dots)$ のうち新たな状態空間 S' (いまの例では $\{1, 3\}$) に属しているもののみを順に取り出したものとする。また、 $(X'_1, X'_2, \dots)$ における X'_i は J'_{i-1} に推移してから J'_i に推移するまでの時間とする。すなわち、この方法によって $J'_{i-1} = J_\mu, J'_i = J_\nu$ ($J_\mu, J_\nu \in S'; J_{\mu+1}, J_{\mu+2}, \dots, J_{\nu-1} \notin S'$) の対応ができたとすると、 $X'_i = X_{\mu+1} + X_{\mu+2} + \cdots + X_\nu$ となる。

例：図 2. 16 のマルコフ再生過程において、次のような一つの実現値 (sample) を考える。

時刻 0 では状態 1

時刻 t_1 で状態 2 に推移

時刻 t_2 で状態 2 に推移

時刻 t_3 で状態 3 に推移

時刻 t_4 で状態 1 に推移

$\vec{N}(t) = (N_1(t), N_2(t), N_3(t))$ の見本関数は図 2. 18(a) となる。これに対応する (J, X) 過程は次のようになる。

$$(1, 0) (2, t_1) (2, t_2 - t_1) (3, t_3 - t_2) (1, t_4 - t_3) \dots$$

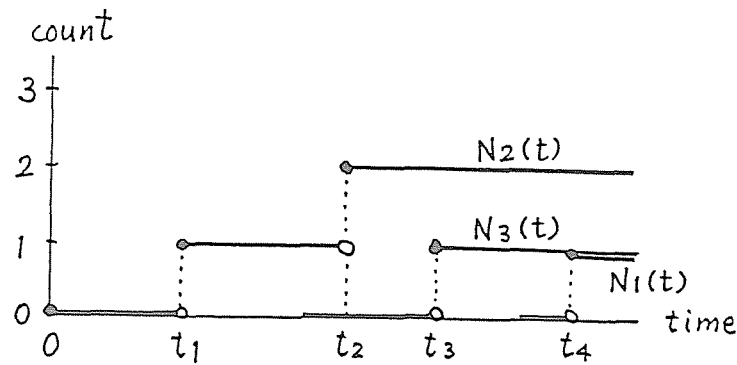
次に、 $\vec{N}'(t) = (N_1(t), N_3(t))$ を考えると見本関数は図 2. 18(b)、 (J', X') 過程は

$$(1, 0) (3, t_3) (1, t_4 - t_3) \dots$$

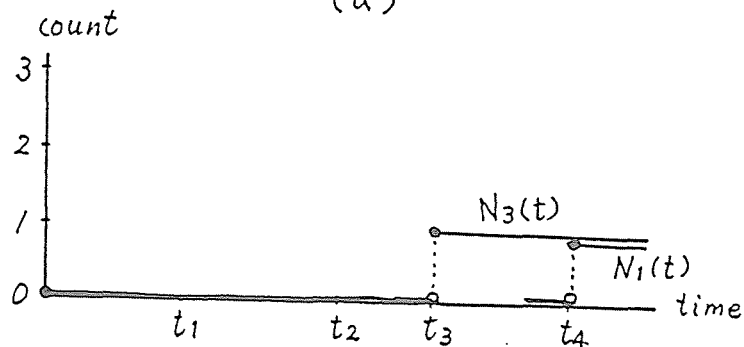
となる。

$$t_3 = t_1 + (t_2 - t_1) + (t_3 - t_2)$$

に注意。 (例終)



(a)



(b)

図 2. 18 (J, X) 過程と (J', X') 過程の実現値

上の例において平均訪問回数 $M_{13}(t)$ や初期通過時間分布 $G_{13}(t)$ を求めたいのなら、 $\vec{N}(t)$ を解析するかわりに $\vec{N}'(t)$ を解析してもよいのは明らかである。なぜなら定義によって

$$M_{13}(t) = E[N_3(t) \mid Z_0 = 1]$$

$$G_{13}(t) = E[N_3(t) > 0 \mid Z_0 = 1]$$

であり、両者とも $N_2(t)$ の情報を必要としないからである。しかし、 $P_{13}(t)$ は $N'(t)$ を用いて解析できない。なぜなら定義によって

$$P_{13}(t) = P[Z_3 = 3 \mid Z_0 = 1]$$

$$Z_t = J_{N(t)}$$

$$N(t) = N_1(t) + N_2(t) + N_3(t)$$

であるから、 $N_2(t)$ の情報が必要である。これらのことは容易に一般化でき、次のことがいえる。

・ $M_{ij}(t)$ 、 $G_{ij}(t)$ はノード i 、 j を残留ノードとして含むようにして構成した任意の残留グラフ（に対応するマルコフ再生過程 $\vec{N}'(t)$ ）における $M_{ij}(t)$ 、 $G_{ij}(t)$ に等しい。

・ $P_{ij}(t)$ については上記のことはいえない。

さて、ここで前述の方法で簡略化したシグナルフローグラフがいま述べたマルコフ再生過程 $\vec{N}'(t)$ に対応するものになっていることを確かめる。 $\vec{N}'(t)$ の状態空間を S 、セミマルコフ行列 Q の LS 変換を q とする。また、上に述べた方法で構成した (J', X') 過程に基づくマルコフ再生過程 $\vec{N}'(t)$ の状態空間を S' 、セミマルコフ行列 Q' の LS 変換を q' とする。 $q'(s)$ ($i, j \in S'$) は、もとのマルコフ再生過程において、状態 i に推移してきたという条件のもとで、時間 t 以内に状態 j に到達し、かつ、 j に到達するまでは途中で S' に属する状態を経由しない確率（の LS 変換）である。したがって、

$$(i, k_1, k_2, \dots, k_{c-1}, j)$$

$$k_1, k_2, \dots, k_{c-1} \in S - S', \quad c \in \{1, 2, \dots\}$$

の形をしたすべての状態列についてその確率を求め、総和をとれば次式となる。

$$q'_{ij}(s) = \sum_{c=1}^{\infty} \sum_{k_1, \dots, k_{c-1} \in S-S'} q_{ik_1}(s) q_{k_1k_2}(s) \dots q_{k_{c-1}j}(s)$$

これは、 S' に対応するノードを残留ノードとしたときの、ノード i からノード j までの残留ゲインに他ならない。したがって、残留グラフを用いた簡略化によって得られるシグナルフローグラフは $\vec{N}'(t)$ を表わしていることがいえた。

要約：マルコフ再生過程において $M_{ij}(t)$ 、 $G_{ij}(t)$ を求めるには、シグナルフローグラフの変形によって次のようにするのが便利である。(図2.19)

- ①マルコフ再生過程 $\vec{N}(t)$ に対応するシグナルフローグラフ G をつくる
- ② G を残留グラフの考え方によって簡略化し、 G' とする
- ③ G' は、状態空間が縮小された新たなマルコフ再生過程 $\vec{N}'(t)$ に対応している
- ④ $\vec{N}'(t)$ において $M_{ij}(t)$ 、 $G_{ij}(t)$ を求める。

ただし、多くの場合①③の対応は特に意識せずとも明らかであり、④の解析はシグナルフローグラフ G' の解析によることがほとんどであろう。この方法は、シグナルフローグラフを用いずに $\vec{N}'(t)$ を直接構成するよりもはるかに容易、かつ、機械的に行なえる。また、シグナルフローグラフの簡略化の確率過程論的な解釈は、 (m, A, Q) で定まる確率過程を、セミマルコフ過程 $\{Z_t\}$ ではなくマルコフ再生過程 $\{\vec{N}(t)\}$ としてとらえて初めて理解できることに注意されたい。

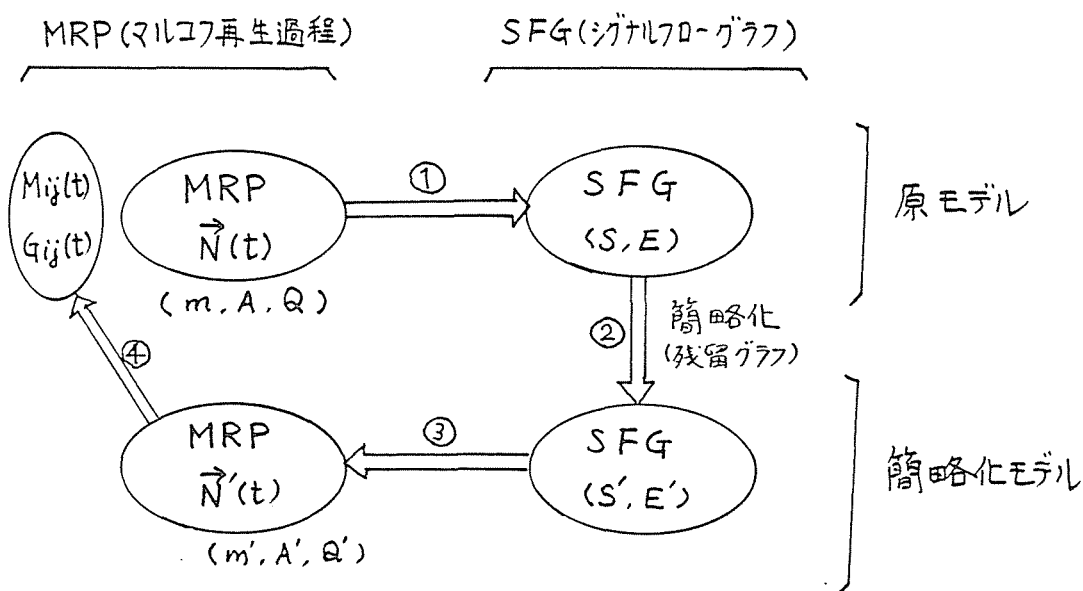


図2.19 $M_{ij}(t)$ と $G_{ij}(t)$ の解析手順

シグナルフローグラフを用いる解析手法の利点を挙げる。

- ・ $(I - q)^{-1}$ のような逆行列を、グラフという視覚的な表現の上での道やループの解析によって求めることができる。これは、特に q が疎 (sparse) な行列であるときに有利である。また、逆行列を数値的にではなく数式的に求めるときにも有利である。
- ・ 自分の着目したい状態の集合に焦点をしばって変形や簡略化が容易にできる。このように、単なる公式の適用でなく、シグナルフローグラフのトポロジカルな構造に着目して解析を進めることができるので、その過程でシステムの構造に対する理解が深まる。これはシステムの設計や解析の助けとなる。
- ・ 電気・電子工学の技術者にとってなじみやすい解析手法である。

2. 6 状態部分集合における再帰時間

本節では、マルコフ再生過程によるモデルが大規模になってきた場合の扱い方の一つを述べる。一般に、大きなシステムを人間が把握し、うまく扱えるようにするためには、そのシステムをできるだけ相互干渉の少ない幾つかのサブ・システム（またはモジュールともいう）に分解し、各サブシステムを機能単位と考えてそれらの相互関連を構造化してとらえるのがほぼ唯一の方法であるといえる。マルコフ再生過程による確率モデルの場合も全く同じことがいえる。状態数が多くなるとそのままでは人間にとって理解し難く、かつ、解析し難いものとなる。そのため、ふつうはコンピュータにより数値的に解析することになる。しかし、システムをより深く理解し、その後の設計に役立てるには、できる限り数値的ではなく解析的に研究を進めるのが望ましい。その一方法として、状態をクラス分けすることにより部分集合に分解して考えるのが自然であろう。本節では、この考えにそってマルコフ再生理論に状態部分集合を導入した場合の解析を考察する。特に、応用上重要な量として、状態部分集合における再帰時間の分布および平均値に関する表式を求める [33]。

状態 k から状態 j までの初期通過時間を確率変数 T_{kj} で表わす。状態部分集合 A ($\subseteq S$, S は状態空間) が与えられたとき、 T_{kj} ($j \in A$) の最小値 $T_{kA} = \min_{j \in A} (T_{kj})$ を状態 k から状態部分集合 A までの初期通過時間と定義する。すなわち、 T_{kA} は状態 k から出発して、 A に属するいずれかの状態に初めて到達するまでの時間を表わしている。以下では、 A に属するいずれかの状態への推移を単に A への推移と呼ぶ。 T_{kA} の分布は次式で定義される。

$$\begin{aligned}
 G_{kA}(t) &= P [T_{kA} \leq t] \\
 &= P \left[\sum_{j \in A} N_j(t) > 0 \mid Z_0 = k \right] \quad (2.63)
 \end{aligned}$$

時刻 t までに A に推移する事象は、最初の推移で A に推移する場合と、最初に時刻 τ ($< t$) で $j \notin A$ に推移し、その後 $G_{jA}(t - \tau)$ に従って A に推移する場合とに分けられるので次式が成り立つ。

$$G_{kA}(t) = \sum_{j \in A} Q_{kj}(t) + \sum_{j \in S-A} H_{jA}(t) * Q_{kj}(t) \quad (2.64)$$

$$g_{kA}(s) = \sum_{j \in A} q_{kj}(s) + \sum_{j \in S-A} h_{jA}(s) q_{kj}(s) \quad (2.65)$$

k から A までの平均初期通過時間を

$$\bar{\mu}_{kA} = [-d g_{kA}(s) / d s]_{s=0}$$

これを第 k 成分とする列ベクトルを $\bar{\mu}_A$ とする。再帰的マルコフ再生過程においては

$$g_{jA}(0) = G_{jA}(\infty) = 1$$

が成り立つから、(2.65) より次式を得る。

$$\bar{\mu}_A = (I - q(0) I_{S-A})^{-1} \eta \quad (2.66)$$

ただし、 η は平均滞在時間 η_i を成分とする列ベクトルである。

$$\begin{aligned}
 \eta_i &= [-d h_i(s) / d s]_{s=0} \\
 &= \sum_{j=1}^m [-d q_{ij}(s) / d s]_{s=0} \quad (2.67)
 \end{aligned}$$

いま、 A が与えられたとし、再帰的マルコフ再生過程

$$q(s) = (q_{ij}(s)) \quad ; i, j \in S$$

の状態空間に新たに吸収状態 a を加え、次のような吸収的マルコフ再生過程

$$\hat{q}(s) = (\hat{q}_{ij}(s)) \quad ; i, j \in S + \{a\}$$

を作る。ただし、

$$\hat{q}_{ij}(s) = q_{ij}(s) \quad ; i \in S, \quad j \in S - A$$

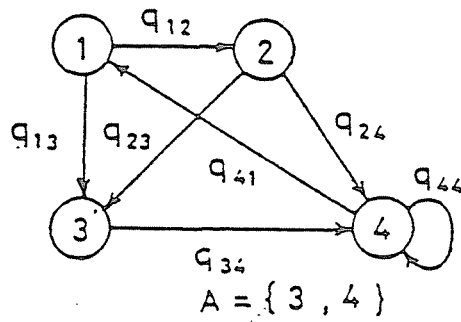
$$\hat{q}_{ia}(s) = \sum_{j \in A} q_{ij}(s) \quad ; i \in S$$

$$\hat{q}_{aa}(s) = \text{任意の分布関数の } L S \text{ 変換}$$

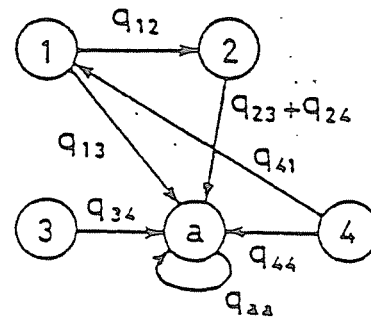
$$\hat{q}_{ij}(s) = 0 \quad ; \text{上記以外}$$

すなわち、シグナルフローグラフにおいて状態 $j \in A$ へ向かう枝をすべて a に向かうように付けかえる。このとき、明らかに、 $g_{kA}(s)$ は吸収的マルコフ再生過程に対応するシグナルフローグラフにおける k から a までのゲイン $r_{ka}(s)$ と等しい。

図 2.20 に、 $S = \{1, 2, 3, 4\}$ 、 $A = \{3, 4\}$ として吸収的マルコフ再生過程の生成例を示す。



(a) Recurrent M.R.P.



(b) Absorbing M.R.P.

図 2. 20 吸収的マルコフ再生過程の生成例

平衡時において、状態部分集合 A に推移してきたという条件のもとで、時間 t 以内に再び A に推移する確率を $G_{AA}(t)$ 、その LS 変換を $g_{AA}(s)$ とし、平衡時の A における再帰時間分布と呼ぶ。

初期状態が i のとき、微小時間 $(t - dt, t]$ 内に状態 j に推移する確率を $dL_{ij}(t)$ とする。また、 $L_{ij}(t)$ の LS 変換を $l_{ij}(s)$ とすると、

$$dL_{ij}(t) = dG_{ij}(t) + \int_0^t dL_{jj}(t - \tau) dG_{ij}(\tau)$$

$$l_{ij}(s) = g_{ij}(s) + g_{ij}(s) l_{jj}(s)$$

が成り立つ。これと、再生方程式 (2. 54)

$$m_{ij}(s) = g_{ij}(s) + g_{ij}(s) m_{jj}(s)$$

とから、 $l_{ij}(s) = m_{ij}(s)$ 。したがって

$$dL_{ij}(t) = dM_{ij}(t) \quad (2. 68)$$

初期状態が i のとき、時刻 t_0 で A に推移してきた条件のもとで、時刻 $t_0 + t$ までに再び A に推移する確率を $G_{AA}(i, t_0; t)$ とすると、

$$G_{AA}(i, t_0; t) = \sum_{k \in A} \left[\frac{dL_{ik}(t_0)}{\sum_{j \in A} dL_{ij}(t_0)} \right] G_{kA}(t)$$

ここで、(2. 68) と

$$m_{ij}(s) = g_{ij}(s) / [1 - g_{jj}(s)]$$

$$\mu_{jj} = [-dg_{jj}(s)/ds]_{s=0} = \pi_j / \pi_j$$

を用いると

$$\lim_{t \rightarrow \infty} dL_{ij} / dt = \lim_{s \rightarrow 0} sm_{ij}(s) = \pi_j / \pi \eta$$

したがって

$$\begin{aligned} G_{AA}(t) &= \lim_{t_0 \rightarrow \infty} G_{AA}(i, t_0; t) \\ &= \frac{\sum_{k \in A} \pi_k G_{kA}(t)}{\sum_{j \in A} \pi_j} \end{aligned} \quad (2.69)$$

$$g_{AA}(s) = \frac{\sum_{k \in A} \pi_k g_{kA}(s)}{\sum_{j \in A} \pi_j} \quad (2.70)$$

を得る。

これは次のように考えることもできる。いま、状態推移が発生した時点列に着目して状態の移り変わりを考察すれば、マルコフ再生過程に対応するマルコフ連鎖 $q(0)$ となる。したがって、平衡時に推移が発生した時点で状態が i である確率は、マルコフ連鎖 $q(0)$ の平衡確率 π_i である。このことから、マルコフ再生過程において、 A に推移してきたという条件のもとで、それが状態 k ($k \in A$) への推移である確率は、 $\pi_k / \sum_{j \in A} \pi_j$ となる。また、状態 k に推移してきたとき、その後、時間 t 以内に A に推移する確率は定義により $G_{kA}(t)$ である。したがって、この2つの式の積として (2.69) が得られる。 $G_{AA}(t)$ は $G_{kA}(t)$ ($k \in A$) に重み $\pi_k / \sum_{j \in A} \pi_j$ を乗じて加えたものになっている。重みがマルコフ再生過程の平衡確率ではなく、マルコフ連鎖の平衡確率に比例することに注意されたい。

A における平均再帰時間 μ_{AA} は次式で与えられる。

$$\mu_{AA} = \frac{\sum_{k \in A} \pi_k \mu_{kA}}{\sum_{j \in A} \pi_j} \quad (2.71)$$

一方、式 (2.66) の左から $\pi(I - q(0)I_{S-A})$ を乗じ、 $\pi q(0) = \pi$ 、および $I_{S-A} = I - I_A$ を用いると、

$$\pi I_A \mu_{AA} = \pi \eta \quad (2.72)$$

が得られ、この左辺を実際に計算すると上式は

$$\sum_{k \in A} \pi_k \mu_{kA} = \pi \eta \quad (2.73)$$

となる。したがって、式 (2.71) (2.73) より

$$\mu_{AA} = \frac{\pi \eta}{\sum_{j \in A} \pi_j} \quad (2.74)$$

が得られる。

これは、状態部分集合 A における再帰時間 μ_{AA} は、対応するマルコフ連鎖の極限確率 π と、各状態の平均滞在時間 η のみに依存していることを示している。 π と η は容易に求められるから、 μ_{AA} の計算も容易である。特に A が単元集合 $\{j\}$ のときには (2. 74) は (2. 51) と一致する。次章では、入駅に対応する状態の集合を A とし、この式を用いて、多バース駅における平均入駅時間間隔を求めている。

なお、(2. 74) は次のように考えて求めることができる。(2. 56)、(2. 51) より、状態 j への単位時間当たりの平均訪問回数は

$$\nu_j = \pi_j / \pi \eta$$

したがって、 A に含まれる状態への単位時間当たりの平均訪問回数 ν_A は、

$$\nu_A = \sum_{j \in A} \pi_j / \pi \eta$$

となる。 A における平均再帰時間 μ_{AA} を ν_A の逆数で定義すると (2. 74) が得られる。しかし、この定義は、 A における再帰時間分布から確率論的に得られる期待値ではない。前述のほうが確率論的にも意味が明らかであり、対応する分布なども求められるのでモデリング上の応用も広い。

2. 7 非再生点を含むマルコフ再生過程

マルコフ再生過程においては、状態 i に推移してきた時点で考えると、次に状態推移が発生するまでの時間 t の分布と、推移先の状態 j は $Q_{ij}(t)$ で決まる。すなわち、それ以後の確率的挙動は現時点での状態 i のみで決まる。そして、その後状態 j へ推移したとすれば、その時点以後の挙動は j のみに依存する。これを式で表現したものが式 (2. 20)、すなわち、

$$P[J_n=k, X_n \leq x \mid J_0, J_1, X_1, J_2, X_2, \dots, J_{n-1}, X_{n-1}] = Q_{J_{n-1}, k}(x) \quad (2. 75)$$

であった。この性質を満たす時点のことを再生点 (regeneration point) という。これまでみてきたすべての時点は再生点である。

しかし、このような枠組みの中ではシステムの状態変化をうまくモデル化できない場合も多い。そのため中川・尾崎らは、再生点でない時点、すなわち非再生点 (non-regeneration point) を含むようにマルコフ再生過程を拡張した [70]。この手法は主に信頼性理論 [71] の分野でよく用いられている。本論文では第3章において、この手法を用いて多バース駅のより詳細な解析を行なっている。以下では、このような非再生点を

含むマルコフ再生過程を [70] に基づいて、実例を用いて簡単に説明する。

ある状態に推移する時点が必ず再生点であるとき、その状態を再生状態という。それ以外の状態を非再生状態という。再生状態の集合を S^+ 、非再生状態の集合を S^* として状態空間 S を分割する。

$$\begin{aligned} S &= S^+ \cup S^* \\ (S^+ \cap S^* &= \phi) \end{aligned} \quad (2.76)$$

$i \in S^+$ のとき、 $Q_{ij}(t)$ をこれまでと同様に定義できる。すなわち、 $Q_{ij}(t)$ は状態が i に推移してきたとき、時間 t 以内に状態 j に推移する確率である（ただし、 $i \in S^+$ 、 $j \in S$ ）。 $i \in S^*$ のときには $Q_{ij}(t)$ は定義しない。なぜなら、 i は非再生状態なので、それ以後の状態推移は i のみでは定まらないからである。そこで、新しい mass function として $Q_{ij}^{(k_1, k_2, \dots, k_m)}(t)$ を導入する。これは状態が i ($i \in S^+$) に推移してきたとき、その後、時間 t 以内に状態 k_1 、 k_2 、 $\dots$ 、 k_m ($k_1, k_2, \dots, k_m \in S^*$) の順に推移し、最後に状態 j ($j \in S$) へ推移する確率である。すなわち、

$$\begin{aligned} P [J_{n+1}=k_1, J_{n+2}=k_2, \dots, J_{n+m}=k_m, J_{n+m+1}=k, X_{n+1}+X_{n+2}+\dots+X_{n+m+1} \leq x \mid \\ J_0, J_1, X_1, \dots, J_n, X_n] &= Q_{J_n, k}(x) \\ J_n \in S^+; k_1, k_2, \dots, k_m \in S^*; k \in S \end{aligned} \quad (2.77)$$

さらに、

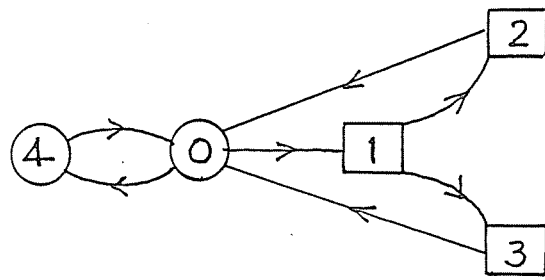
$$H_i(t) = \sum_{j \in S} Q_{ij}(t), \quad i \in S^+ \quad (2.78)$$

を定義しておく。これは、状態 i での滞在時間分布である。

以下では、信頼性モデルからの例題を用いて非再生点を含むマルコフ再生過程の扱い方を説明する。

簡単な部品交換のモデルを考えよう。あるユニットが時刻 0 から使用される。もし、このユニットが時間 T (T はある分布に従う確率変数) 以内に故障したら、直ちにスペア部品が注文される。スペア部品は時間 L (L は確率変数) だけ経過して配達され、再度ユニットが稼働する。一方、もしユニットが時刻 T までに故障しなければ、時刻 T においてスペア部品が注文される。そのスペア部品は時間 L 後に配達される。配達されたスペア部品はユニットが故障していればただちに使用され、そうでなければ保管される。

このシステムの状態 0 から 4 を次のように定義する。



○は再生状態
□は非再生状態を表す

図2. 21 非再生点を含むマルコフ再生過程の例題

状態0：ユニットは稼働中、スベア部品は配達されていない

状態1：ユニットは稼働中、スベア部品を注文している

状態2：ユニットは稼働中、スベア部品が保管されている

状態3：スベア部品注文中にユニット故障

状態4：ユニットがT以前に故障したためスベア部品注文中

システムの状態推移図は図2. 21のようになる。ここで、ユニットの故障時間分布を $F(t)$ とする。さらに、 $P[T \leq t] = A(t)$ ， $P[L \leq t] = B(t)$ とすると

$$Q_{01}(t) = P[T \leq t, \text{かつ} T \text{以内に故障しない}] \\ = \int_0^t [1 - F(u)] dA(u)$$

同様に

$$Q_{02}^{(1)}(t) = \int_0^t [1 - F(u)] d[A(u) * B(u)] \\ Q_{00}^{(1,2)}(t) = \int_0^t [A(u) * B(u)] dF(u) \\ Q_{03}^{(1)}(t) = \int_0^t [A(u) * [1 - B(u)]] dF(u) \\ Q_{00}^{(1,3)}(t) = \int_0^t \int_0^u [F(u) - F(v)] dA(v) dB(u-v) \\ Q_{04}(t) = \int_0^t [1 - A(u)] dF(u) \\ Q_{40}(t) = B(t)$$

また、滞在時間分布 $P_{ij}(t)$ のLS変換 $p_{ij}(s)$ は

$$\begin{aligned} P_{00}(t) &= P[\text{時刻 } t \text{ までに推移が発生しない}] \\ &\quad + P[\text{時刻 } u \text{ に状態 } 0 \text{ に再帰、その後時間 } t-u \text{ 後に状態 } 0 \text{ にいる}] \\ &= 1 - Q_{01}(t) - Q_{04}(t) + G_{00}(t) * P_{00}(t) \end{aligned}$$

より

$$p_{00}(s) = [1 - q_{01}(s) - q_{04}(s)] / [1 - g_{00}(s)]$$

同様に

$$\begin{aligned} p_{01}(s) &= [q_{01}(s) - q_{02}^{(1)}(s) - q_{03}^{(1)}(s)] / [1 - g_{00}(s)] \\ p_{02}(s) &= [q_{02}^{(1)}(s) - q_{00}^{(1,2)}(s)] / [1 - g_{00}(s)] \\ p_{03}(s) &= [q_{03}^{(1)}(s) - q_{00}^{(1,3)}(s)] / [1 - g_{00}(s)] \\ p_{04}(s) &= q_{04}(s) [1 - q_{40}(s)] / [1 - g_{00}(s)] \end{aligned}$$

ただし、

$$g_{00}(s) = q_{00}^{(1,2)}(s) + q_{00}^{(1,3)}(s) + q_{04}(s) q_{40}(s)$$

は、状態0における再帰時間分布である。

次章の後半においては、このような考え方に基づいて多バース駅の状態変化をモデル化し、解析する。

2.8 まとめ

本論文で用いている数理の基礎として以下の事項について説明した。

- ①マルコフ連鎖の定義と性質
- ②マルコフ再生過程の定義と性質
- ③マルコフ再生過程の状態部分集合における再帰時間
- ④非再生点を含むマルコフ再生過程

また、これらの取り扱いを容易にするシステム技法として

- ⑤シグナルフローグラフの定義と性質
- ⑥マルコフ再生過程とシグナルフローグラフの関連

について述べた。これらの多くはすでに種々の教科書で説明されている内容を要約して紹介したものである。しかし、③の全体および⑥の後半は著者自身の研究によるものであり、本研究で重要な位置を占めている。

第3章 多バース駅モデルの構成と解析

3.1 まえがき

個別軌道輸送システムにおいては、駅はオフラインに設置され、本線の走行車両の流れを妨げないようにしている。また、面的輸送を実現するため、比較的小規模な駅（たとえば、1バース駅）がネットワーク上に密に配置される。他の交通機関との接点など特に交通需要の大きい地点では、やや規模の大きい多バース駅が必要となる。駅の規模を適切に決定することはシステム全体の性能やコストに大きく影響を与える。たとえば、駅の規模が小さすぎると待ち時間が増加してサービスが低下し、交通需要を十分満たすことができなくなる。逆に駅の規模が大きすぎるとコスト高となってしまう、経営を圧迫してしまう。第1章で明らかにしたように、新交通システム導入の目的は、自動車に匹敵する良好なサービスを提供し、かつ、無人化・省力化などにより低コストのシステムを実現することであった。したがって、駅設計を誤ると新交通システム導入の意義を失うことにもつながってしまう。このことから駅のトラヒック解析の重要性がわかる。

これまで駅のトラヒック解析はシミュレーションによるものが多かった。しかし、シミュレーションは一般に乱数を用いる数値実験であるから、なかなか信頼度のよい結果が得られず、かつ、コスト高である。中田[27-29]らは、マルコフ再生理論を用いて1バース駅をモデル化し、解析することに成功した。しかし、このモデルをそのまま多バースに拡張することは困難である。本章の目的は、確率論的に解析可能で、かつ、実用性のある多バース駅モデルを構成し、多バース駅のトラヒック特性を明らかにすることである。この成果は、車両のトラヒック制御や多バース駅の適正な規模の決定のための基礎的データを提供する。

3.2節で多バース駅の論理モデルを構成した後、3.3節で確率的性質を付加し、マルコフ再生過程に基づく性能評価モデルとする。3.4節ではそれを解析することにより平均入駅時間間隔、出駅頻度、迂回率などのトラヒック特性を明らかにする。特に、ある意味で多バース駅は1バース駅と本質的に異なる特性を持つことが指摘される。またここでは、2.6節の解析技法（状態部分集合における再帰時間）により、物理的意味のはっきりした表式が得られ、多バース駅のトラヒック特性に対する理解が深められ

る。3.5節ではモデルの妥当性を検証するためにGPSによるシミュレーションを行なう。3.6節では非再生点を含むマルコフ再生過程を用いてモデルを詳細化し、出発待ち行列などさらに細かなデータを算出する。

3.2 多バース駅モデル

図3.1に駅部の概略を示す。本線から分岐した支線上の駅に n 個のバースが並列に設置されている。駅を出発した車両は支線を走行して再び本線に合流できるようになっている。本線上、分岐点の手前に車両制御のための基準点として「チェックポイント」(check point)と呼ばれる点がある。

駅には常に客がいると仮定し、到来車両として「入駅希望車」と「入駅非希望車」の2種類を考える。入駅非希望車は他駅を目的地とする車両で、単に本線を走行するのみである。入駅希望車は、当駅を目的地とする実車(客の乗っている車)または空車であり、チェックポイントを通過したとき駅に空バースがあれば入駅する。(便宜上、チェックポイント通過の時点で入駅したと考え、直ちにバースを1つ空でなくする。すなわち、バースを確保し、後続車両が使用しないようにする。)入駅希望車がチェックポイントを通過したとき駅に空バースがなければ、その車両は本線側を走行する(迂回方式)。この車両は、他の経路をまわって当駅に戻ってくるか、または、付近の他の駅に入駅することになる。しかし、本モデルではこれらの点には関知せず、いま考えている駅システム外に退去するものとして扱う。一般にこのような駅は市街に密に配置されるので、このような迂回がたまに発生しても重大な問題は生じない。また、駅の密度を高めて1つの駅当たりの負荷を軽減したり、バース数を多くして駅の処理能力を高めることにより、迂回の発生する確率を小さくできる。本章の目的はまさにこの解析にある。

入駅した入駅希望車はバースで客の「乗降」(loading/unloading)を行なう。乗降を終了した車両は「出発待ち」(waiting for departure)となる。

図3.1に示すように、バースの出口から側線に沿った部分、および本線上のチェックポイントの手前の部分に走行時間にして T に等しい車両検知区間を設け、それぞれ「出口区間」(exit section)および「チェック区間」(check section)と呼ぶ。この両区間のいずれにも車両が存在しないときに限り、出発待ち車両(群)のうち1台が「出駅」できる。出口区間に車両が存在しないことは、出駅車両の車頭時間間隔を必ず T 以上に保つための条件である。チェック区間に車両が存在しないことは、出駅車両が

合流部で本線上の走行車両と衝突しないで安全に合流できるための条件である。この条件が成り立つとき、図3. 1に示すように、出駅車両 V_3 が合流して V'_3 となったとき、車両 V_1 、 V_2 はそれぞれ V'_1 、 V'_2 となり、合流部で合流車両の前後に $T/2$ 以上の間隔が生じ、安全に流入できるよう設計されている[72]。出口区間とチェック区間の長さを走行時間にして等しくしているのは、後の解析の便宜をはかるためである。実システムでは一般に異なる長さであって差し支えない。しかし、両者の長さは実際それほど大きく異なることはないので、駅処理能力をおおまかに見積るというシステム計画段階での解析の目的のためにこれを等しくおいても、モデルの妥当性が失われることはない。Tを「出発可否判定時間」という。以上述べた車両挙動の概略は図3. 2にまとめられている。

出発待ち車両はチェック区間および出口区間に車両がないときに限り出発できると述べたが、実際には両区間を常に観測している必要はない。出発可能な時点は以下に述べるような規則で帰納的に決まる時点のみであって、これらの時点では①出発待ちがあり、かつ②出口区間に車両が存在しないことが明らかなので、チェック区間のみを観測して出発可否判定（以下、単に判定と記す）を行なうことができる。いま、これらの時点のうちの1つ（たとえばシステム稼働後初めて出発待ちを生じた時点）を t_0 とする。時刻 t_0 において判定（チェック区間のみの観測）が行なわれる。時刻 t_0 以降は次の規則に従う時点で判定が行なわれる。

T_x を図3. 1のように、次の到来車がチェックポイントを通過するまでの時間とする。

（1）時刻 t_0 で出発可（ $T_x \geq T$ ）と判定されたとき、出駅車両が出口区間を出る時点 $t_0 + T$ まで判定を行なわない。時刻 $t_0 + T$ において出発待ち車両がいれば直ちに判定を行ない、時刻 $t_0 + T$ において出発待ち車両がいなければ、その後出発待ちが生じ次第判定を行なう。

（2）時刻 t_0 で出発不可（ $T_x < T$ ）と判定されたときは、チェック区間内の先頭車がチェックポイントを通過する時点 $t_0 + T_x$ まで判定を行なわない。時刻 $t_0 + T_x$ において再度判定を行なう。

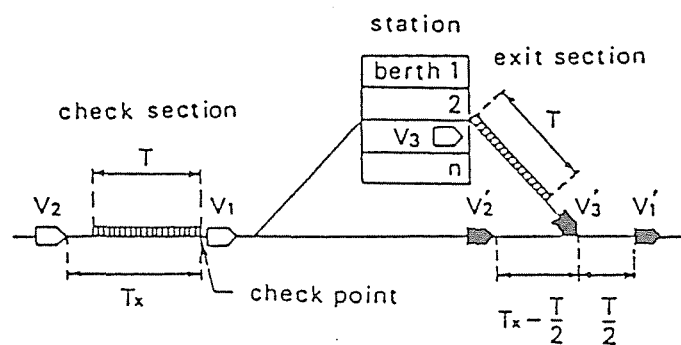


図 3. 1 多バース駅概略図

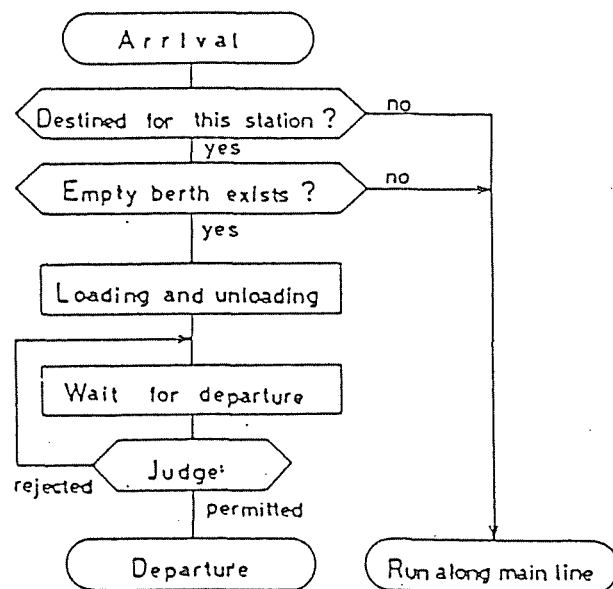


図 3. 2 車両挙動の概略

3.3 マルコフ再生過程による確率モデル

前節で述べた多バース駅モデルに対し、以下のような確率的な要因（または仮定）を付加する。

○本線への車両の到来はポアソン到来であり、その到来頻度を λ [台/秒]とする。したがって、ポアソン到来の性質から、車両の到来時間間隔は平均 $1/\lambda$ [秒]の指数分布となる。また、任意の時点において、到来車がチェックポイントを通過するまでの時間 T_X (図3.1)も平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う。

$$P [T_X \leq t] = 1 - \exp(-\lambda t)$$

$$P [t \leq T_X < t + dt] = \lambda \cdot \exp(-\lambda t) dt$$

○到来車両が入駅希望車である確率を β 、入駅非希望車である確率を $1 - \beta$ とする。したがって、各車種は到来頻度がそれぞれ $\beta\lambda$ 、 $(1 - \beta)\lambda$ のポアソン到来をする。

○駅での乗降時間は各バースとも独立で、空車か実車かによらず平均 $1/\mu$ [秒]の指数分布に従うものとする。

実システムを考えると、乗降時間が指数分布であるとの仮定は不自然である。したがって、文献[27]の1バース駅モデルでは乗降時間を一般分布としてモデル化している。しかし、多バース駅モデルの場合には、乗降時間を指数分布以外の分布にすると確率モデルがきわめて複雑となり、解析がほとんど不可能となってしまう。理論解析の良さは、実システムの複雑さのうち目的に応じた本質的な面を抽出してモデル化し、その単純なモデルを操作し、解析することにより、システムの本質的な特性を探求することにある。したがって、本モデルにおいても、乗降時間を指数分布以外のものとしてむやみにモデルを複雑化することは避ける。実際、後に3.5節で述べるように、この分布をより妥当と思われる正規分布とした場合についてシミュレーションを行なった結果によると、平均入駅時間間隔など後述するいずれの駅評価尺度も、指数分布として解析的に求めた結果と良く一致することが確かめられた。したがって、実用上、指数分布としてモデル化して差し支えない。

このように、本モデルは1バース駅モデルを単に拡張してできたモデルではない。1バース駅モデルに比べていくつかの点を簡略化して理論解析を可能にしている一方、1バース駅モデルにはない多バース駅特有のシステム挙動として次のような点を表現している。

- ・入駅希望車がたまたま短い時間間隔で複数台連続して到来しても、両車両とも入駅できる可能性がある。（多バースなので当然）
- ・出発待ちの車両は一般に複数台あり、出発可という判定によりこれらのうちの1台が出駅する。ここに待ち行列の問題が生じる。
- ・ T_X が十分大きいときは、出発待ちの車両が時間 T ごとに次々と出駅していく。

さて、本節の最初に述べた3つの仮定に基づいて、多バース駅モデルと等価な待ち行列を考える。図3.3のようになる。このモデルは車両をトランザクションとし、サービス施設として直列な4つのキュー（queue）を持つ。キューC内の車両はチェック区間通過中、キューY内の車両は乗降中、キューX内の車両は出発待ち、キューE内の車両は出口区間通過中であることに対応する。時刻 t においてキューX、Y内にいる車両の数をそれぞれ X_t （＝出発待ち車両数）、 Y_t （＝乗降車両数）とする。空バース数は、 $Z_t = n - X_t - Y_t$ で表わされる。

図で特に $T \rightarrow 0$ のときはキューY以外のキューは無視してもよく、このシステムは到来がパラメータ $\beta \lambda$ のポアソン過程で表わせるブロッキング・システム $M/M/n(n)$ に接近する。しかし、 $T \neq 0$ のときにはこの待ち行列モデルは非常に複雑なモデルである。複雑な要因としては次の点が挙げられる。

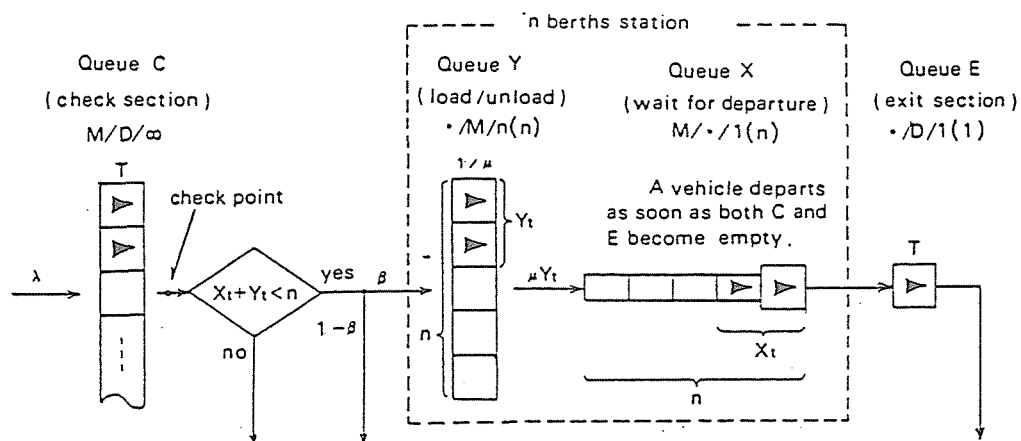


図3.3 等価な待ち行列モデル

- ・4つのキューが直列に並ぶ多段待ち行列系である。
- ・キューXのサービス時間が、キューCおよびキューEの状態（空か否か）に依存して決まる。
- ・キューXとキューY内の車両数の和はn以下という制約があり、この2つのキューは独立でない。

このような複雑な性質をもつ待ち行列の研究はこれまで全くない。以下では、この多バス駅モデルをマルコフ再生過程として定式化し、次節でこれを解析する。

<状態の定義>

時刻tにおける出発待ちの車両の数、乗降中の車両の数、空バスの数をそれぞれ確率変数 X_t 、 Y_t 、 Z_t で表わす。このとき、次の関係が成り立つ。

$$X_t, Y_t, Z_t \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (3.1)$$

$$X_t + Y_t + Z_t = n \quad (3.2)$$

ただし、nはバスの数である。

この確率変数の組 (X_t, Y_t, Z_t) をnバス駅の状態と考えると解析が困難になるので、ここでは埋め込まれた確率過程を用いて、再生点で初めて状態が推移すると考える。

nバス駅の状態を $(w; x, y, z)$ で表わす。ここで、 x, y, z は再生点において状態が推移してきた瞬間における X_t, Y_t, Z_t の値であり、以後 X_t, Y_t, Z_t が変化しても次の再生点までは変化しないと考える。また、 w はこの状態への推移が入駅（後述の事象 $E, F_{\downarrow}^1$ ）によるものであるときは1、そうでないときは0とする。したがって、以下の条件を満たすすべての組 $(w; x, y, z)$ が状態空間を形成する。

$$w \in \{0, 1\}, \quad x, y, z \in \{0, 1, \dots, n\} \quad (3.3)$$

$$x + y + z = n \quad (3.4)$$

$$y = 0 \quad \text{ならば} \quad w = 0 \quad (3.5)$$

$$(0; 0, n, 0) \in S \quad (3.6)$$

ここで式(3.6)の条件は、後に明らかとなるように、確率過程を既約で再帰的にするために必要である。また、式(3.5)の条件は、入駅によって状態が推移すれば必ず $y > 0$ となることから生ずる。 w は、 x, y, z が同じ値であっても入駅による推移か否かを区別するための情報で、 $0 < y < n$ ならば同じ x, y, z に対して $w = 0, 1$ の2状態が存在する。（ $y = 0$ ならば $w = 0$ 、 $y = n$ ならば $w = 1$ の組み合わせしかない。） $w = 0, 1$ の状態集合を各々 S_0, S_1 とすると、各集合に含まれる状態数は、

$$|S_0| = n(n+3)/2 \quad (3.7)$$

$$|S_1| = n(n+1)/2 \quad (3.8)$$

$$|S| = n(n+2) \quad (3.9)$$

となる。以後、ベクトルで表現された状態を $1, 2, \dots, |S|$ に対応させ、状態を単に i として表わし、その各成分を w_i, x_i, y_i, z_i と表わすこともある。

< 状態の推移 >

状態はある定められた時点を迎えてはじめて推移するが、この推移規則を図3.4に手続き的に示す。図において、 t は実時間であり、中央の大きな3つのブロックの実行中に連続的に増加している。この3つのブロックは状態が推移するまでの時間経過を表わしており、ここでのみ時間が消費される。ほかのブロックは分岐や変数の変化を表わしており、時間を消費しない。また、システムの起動時には駅には車両がなく、チェックポイントを通過した車両もないものとしている。この図の内容については、以下で説明する。

このような状態推移を考えると、状態が推移してきた時点においては、その後の推移はそれまでの経過にかかわらず、この時点での状態のみに依存する。すなわち、これらの時点はすべて再生点になっている。したがって、時刻 t_0 で状態が i に推移してきたとき、時刻 $t_0 + t$ までに直接 j に推移する確率を $Q_{ij}(t)$ と表わし、そのラプラス・スティルチェス変換（以後 LS 変換と略）を $q_{ij}(s)$ とする。以下の計算では、しばしば次の形の変換を用いる。

$$Q(t) = \int_0^t u(\tau - T) \exp(-a\tau) d\tau \quad \text{のとき、}$$

$$q(s) = \exp\{-(s+a)T\} / (s+a) \quad (3.10)$$

ただし、 $u(t)$ は単位ステップ関数である。

次に、図3.4を参照しながら $x=0$ および $x>0$ の状態からの推移規則を述べ、推移時間分布を求める。

< $x=0$ の状態からの推移 >

$x=0$ の状態への推移は2とおりのある。1つは、駅にいる車両がすべて乗降中だったときに入駅希望車が到来して入駅した場合、もう1つは、車両が出発可と判定されて出発した後、時間 T を経過したが出発待ちの車両がいなかった場合である。いずれの場合も、この状態に推移してきた後は、乗降中の y 台のうちの1台が乗降終了した時点、またはそれ以前に入駅があったときはその時点で状態が推移する。前者を事象 R (ready

による推移、後者を事象 E (entrance) による推移と呼ぶ。 $0 < y < n$ ($0 < z < n$) のとき、各々の推移時間分布は次のようになる。

$$Q_{(w; 0, y, z)(0; 1, y-1, z)}(t) = \int_0^t \mu y \cdot \exp(-\mu y \tau) \cdot \exp(-\beta \lambda \tau) d\tau \quad (3.11)$$

$$Q_{(w; 0, y, z)(1; 0, y+1, z-1)}(t) = \int_0^t \beta \lambda \cdot \exp(-\beta \lambda \tau) \cdot \exp(-\mu y \tau) d\tau \quad (3.12)$$

$y = 0$ のときは事象 R は起こらず、 $y = n$ のときは $z = 0$ なので事象 E が起こらない。このことを考慮すると、一般に $x = 0$ の状態からの推移時間分布は L S 変換形で次のように求められる。式の左端には対応する事象を示す。

$$R: \quad q_{(w; 0, y, z)(0; 1, y-1, z)}(s) = \begin{cases} \mu y / (s + \beta \lambda + \mu y), & 0 < y < n \\ \mu n / (s + \mu n), & y = n \end{cases} \quad (3.13)$$

$$(3.14)$$

$$E: \quad q_{(w; 0, y, z)(1; 0, y+1, z-1)}(s) = \beta \lambda / (s + \beta \lambda + \mu y), \quad y < n \quad (3.15)$$

< $x > 0$ の状態からの推移 >

$x > 0$ の状態への推移は 3 とおりある。第 1 は事象 R によるもの、すなわち、出発待ちの車両がないときに乗降中の車両が乗降終了してただちに判定を受ける場合である。第 2 は、出発可と判定された車両が出発して時間 T が経過し、出発待ちの車両が 1 台以上ある場合である。第 3 は出発不可と判定させた車両がチェックポイントを通過し、不可と判定されていた車両が再判定を受ける時点である。結局、3 つのどの場合においても、この状態へ推移してきた時点 t_0 で出発待ちの車両が存在し、そのうち 1 台が判定 ($T_x \geq T$ か否か) を受ける。この判定結果により、この状態からの推移のしかたが異なる。

出発可と判定された場合は、出発待ちの車両のうちの 1 台がただちに出駅し、この後、時間 T を経過した時点 $t_0 + T$ で状態が推移する。時刻 t_0 においては出発可と判定させた車両の車種を問うておらず、チェックポイントに到来するまでの時間 T_x には $T_x \geq T$ の条件のみが付いている。 T_x は平均 $1/\lambda$ の指数分布に従うので、上の条件の下

で $T_X - T$ も平均 $1/\lambda$ の指数分布に従う。すなわち、判定後 T だけ経過した時点ではこの車両の到来過程はもとのポアソン到来に戻る。この T の間、乗降終了車が ν 台あった場合を事象 S_ν (success) による推移と呼ぶ。この事象により、状態は、 $(w; x, y, z)$ から $(0; x + \nu - 1, y - \nu, z + 1)$ に推移する (ただし、 $x > 0, 0 \leq \nu \leq y$)。もし、 $x = 1$ かつ $\nu = 0$ ならば出発待ちの車両はなくなり、 $x = 0$ の状態となるが、そうでないときは推移した直後に出発待ちの車両が判定を受けることになる。

判定が出発不可だったときは、再判定の機会がきたとき、すなわち、不可と判定させた車両がチェックポイントを通過したとき (これは T 以内に起こる) に状態が推移する。このとき、空バースがない場合、または、空バースであっても到来車が入駅非希望車であるときは入駅が発生せず、状態は $(0; x + \nu, y - \nu, z)$ となる。これを各々事象 F_ν^0, F_ν^1 (failure) による推移と呼ぶ。空バースがあり、かつ、到来車が入駅希望車の場合はその車両は入駅し、状態は $(1; x + \nu, y - \nu + 1, z - 1)$ となる。これを事象 F_ν^1 による推移と呼ぶ。

各事象の生起による推移時間分布は以下のようになる。

$$S_\nu : Q(w; x, y, z)(0; x + \nu - 1, y - \nu, z + 1)(t) = E_{y, \nu}(t) \quad (3.16)$$

$$F_\nu^0 : Q(w; x, y, z)(0; x + \nu, y - \nu, z)(t) = \begin{cases} R_{y, \nu}(t), & z = 0 \\ (1 - \beta) R_{y, \nu}(t), & z > 0 \end{cases} \quad (3.17)$$

$$F_\nu^1 : Q(w; x, y, z)(1; x + \nu, y - \nu + 1, z - 1)(t) = \beta R_{y, \nu}(t), \quad z > 0 \quad (3.18)$$

$$F_\nu^1 : Q(w; x, y, z)(1; x + \nu, y - \nu + 1, z - 1)(t) = \beta R_{y, \nu}(t), \quad z > 0 \quad (3.19)$$

ただし、いずれも $x > 0, 0 \leq \nu \leq y$ である。また、

$$E_{y, \nu}(t) = u(t - T) e^{-\lambda T} \binom{y}{\nu} (1 - e^{-\mu T})^\nu e^{-\mu T(y - \nu)} \quad (3.20)$$

$$R_{y, \nu}(t) = \int_0^t \{1 - u(\tau - T)\} \lambda e^{-\lambda \tau} \cdot \binom{y}{\nu} (1 - e^{-\mu \tau})^\nu e^{-\mu \tau(y - \nu)} d\tau \quad (3.21)$$

である。

これらを LS 変換すれば次式を得る。

$$S_\nu : q(w; x, y, z)(0; x + \nu - 1, y - \nu, z + 1)(s) = \eta_{y, \nu}(s) \quad (3.22)$$

$$q(w; x, y, z)(0; x+\nu, y-\nu, z)(s)$$

$$F_{y,\nu} : \quad = \begin{cases} \rho_{y,\nu}(s), & z=0 \\ (1-\beta)\rho_{y,\nu}(s), & z>0 \end{cases} \quad (3.23)$$

$$F_y^0 : \quad (3.24)$$

$$F_y^1 : \quad q(w; x, y, z)(1; x+\nu, y-\nu+1, z-1)(s)$$

$$= \beta \rho_{y,\nu}(s), \quad z>0 \quad (3.25)$$

ただし、いずれも $x > 0$, $0 \leq \nu \leq y$ である。また、

$$\eta_{y,\nu}(s) = \binom{y}{\nu} (1 - e^{-\mu T})^\nu e^{-\{s+\lambda+\mu(y-\nu)\}T} \quad (3.26)$$

$$\rho_{y,\nu}(s) = \lambda \binom{y}{\nu} \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \binom{\nu}{k} \frac{1 - e^{-\{s+\lambda+\mu(y-\nu+k)\}T}}{s + \lambda + \mu(y-\nu+k)} \quad (3.27)$$

であり、 y によらず次の性質を持つ。

$$\sum_{\nu=0}^y \eta_{y,\nu}(s) = e^{-(s+\lambda)T} \quad (3.28)$$

$$\sum_{\nu=0}^y \rho_{y,\nu}(s) = \frac{\lambda \{1 - e^{-(s+\lambda)T}\}}{s + \lambda} \quad (3.29)$$

以上の分布においては

$$Q_{ij}(0) = 0, \quad \text{for } i, j \in S \quad (3.30)$$

$$\sum_{j \in S} Q_{ij}(\infty) = \sum_{j \in S} q_{ij}(0) = 1, \quad \text{for } i \in S \quad (3.31)$$

が成立し、このモデルがマルコフ再生過程として扱えることを示している。

図3.5に状態推移図を示す。この図から、各事象が生起することによる状態推移のフローが把握できる。ただし、図を見やすくするために状態 $(1; x, y, z)$ と状態 $(0; x, y, z)$ を同じノード (x, y, z) にしている。入駅（破線で示す）による推移のときは $w = 1$ 、それ以外の事象（実線で示す）によって推移してきたときは $w = 0$ と解釈する。

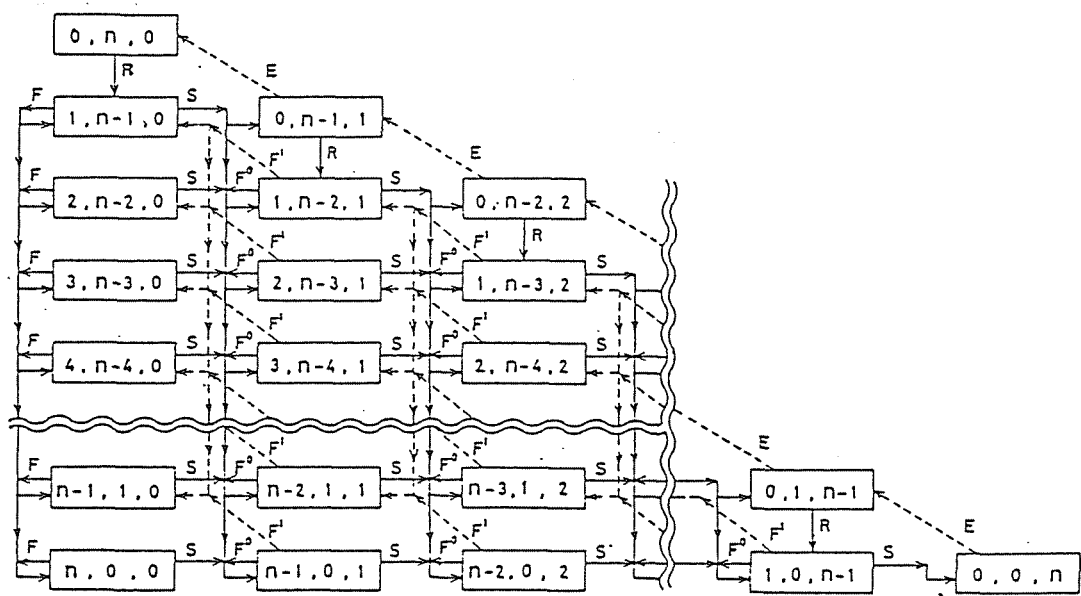


图 3. 5 状态推移图

3.4 解析

状態が i に推移してきたとき、時間 t 以内に次の推移をする確率、すなわち、状態 i における滞在時間分布を $H_i(t)$ 、その LS 変換を $h_i(s)$ とする。

$$H_i(t) = \sum_{k \in S} Q_{ik}(t) \quad (3.32)$$

$$h_i(s) = \sum_{k \in S} q_{ik}(s) \quad (3.33)$$

すでに求めた $q_{ij}(s)$ より実際に求めると、

$$h_{(w; x, y, z)}(s) = \begin{cases} \frac{\lambda + s \cdot e^{-(s+\lambda)T}}{s + \lambda} & ; x > 0 \end{cases} \quad (3.34)$$

$$= \begin{cases} \frac{\beta\lambda + \mu y}{s + \beta\lambda + \mu y} & ; x = 0, z > 0 \end{cases} \quad (3.35)$$

$$= \begin{cases} \frac{\mu n}{s + \mu n} & ; x = z = 0 \end{cases} \quad (3.36)$$

また、平均滞在時間 $\eta_i = [-d h_i(s) / d s]_{s=0}$ は、

$$\eta_{(w; x, y, z)} = \begin{cases} \{1 - \exp(-\lambda T)\} / \lambda & ; x > 0 \end{cases} \quad (3.37)$$

$$= \begin{cases} 1 / (\beta\lambda + \mu y) & ; x = 0, z > 0 \end{cases} \quad (3.38)$$

$$= \begin{cases} 1 / \mu n & ; x = z = 0 \end{cases} \quad (3.39)$$

となる。

このとき、第2章で述べたように、状態 j における平均再帰時間 μ_{jj} は次式により簡単に求められる。

$$\mu_{jj} = \pi \eta / \pi_j \quad (3.40)$$

ただし、 η は η_i を第 i 成分とする列ベクトル、また、 π はマルコフ連鎖 $q(0)$ の定常確率行ベクトルである。

μ_{jj} が求まれば、これに基づいて平均入駅時間間隔、出駅頻度、入駅率、利用率が以下のように求められる。

○平均入駅時間間隔 T_s

前章で示したように、状態 j への単位時間当りの平均訪問回数 ν_j は

$$\nu_j = 1 / \mu_{jj}$$

となる。これを、 $w = 1$ の状態について加え合わせる。

$$M_1 = \sum_{j \in S_1} \nu_j$$

これは、単位時間あたりに平均 M_1 回入駅が発生することを示しているので、平均入駅時間間隔 T_S は

$$T_S = 1 / M_1 \\ = \sum_{j \in S_1} \pi_j / \pi \eta \quad (\text{秒}) \quad (3.41)$$

となる。また、特定のバースに着目したとき、そのバースに入線してくる車両の平均時間間隔（平均入バース時間間隔）は、

$$T_B = n T_S \quad (\text{秒}) \quad (3.42)$$

となる。

○出駅頻度 D

定常状態では入駅頻度に等しく

$$D = 1 / T_S \quad (\text{台/秒}) \quad (3.43)$$

○入駅率 E

長い時間 t を考えると、この間に入駅希望車は $\beta \lambda t$ 台到来する。そのうち入駅車両は t / T_S 台である。後者の前者に対する比をとって、

$$E = 1 / \beta \lambda T_S \quad (3.44)$$

を得る。

○利用率 U

平均入バース時間間隔 T_B に対する乗降時間 $1 / \mu$ の比をとって、

$$U = 1 / \mu n T_S \quad (3.45)$$

と定義する。

<数値例>

平均入駅時間間隔、入駅率、出駅頻度および利用率の数値例を図 3.6～3.9 に示す。入駅希望車混入率 β は、入駅の需要が最大の状況を考えて 1.0 とし、出発可否判定時間および出駅車両の安全車頭時間間隔 T を 2 秒、平均乗降時間 $1 / \mu$ を 1.8 秒として、バース数 n および入駅希望車の平均到来時間間隔 $1 / \beta \lambda$ をパラメータとして変化させた。

平均入駅時間間隔 T_S は、 $n \rightarrow \infty$ とするか、または、 $n \geq 2$ のときは $1 / \beta \lambda \rightarrow \infty$ とすると漸近的に $T_S \rightarrow 1 / \beta \lambda$ となる。すなわち、到来した入駅希望車ほぼ確実に入駅できるようになる。しかし、 $n = 1$ のときは、 $1 / \beta \lambda$ には漸近せず、 $T_S \rightarrow 1 / \beta \lambda$

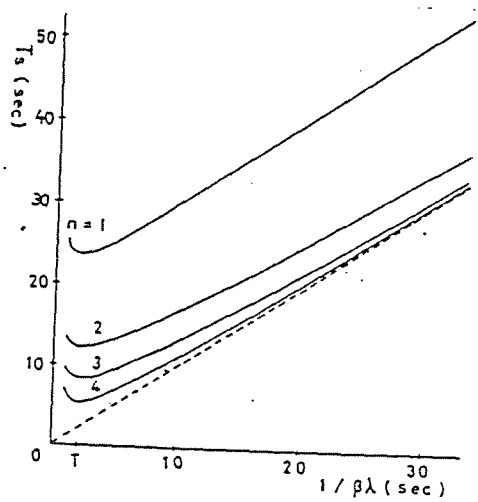


図 3. 6 平均入駅時間間隔

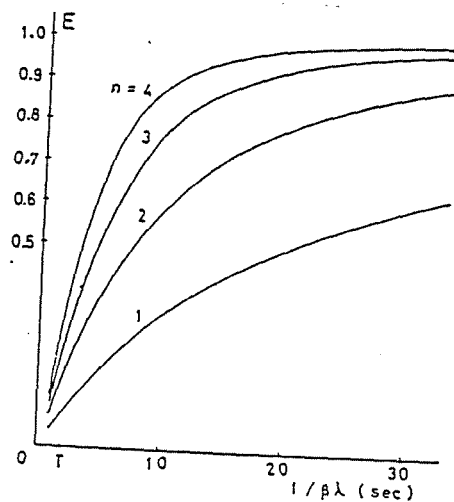


図 3. 7 入駅率

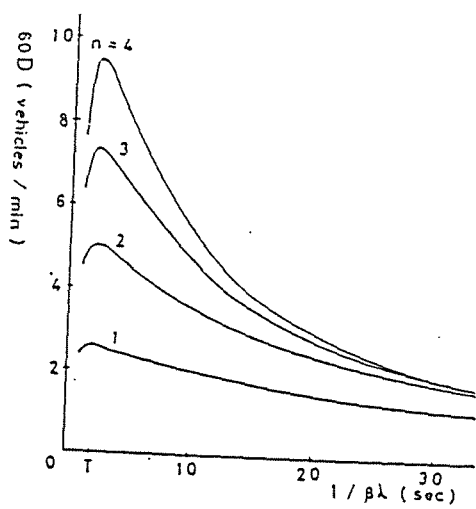


図 3. 8 出駅頻度

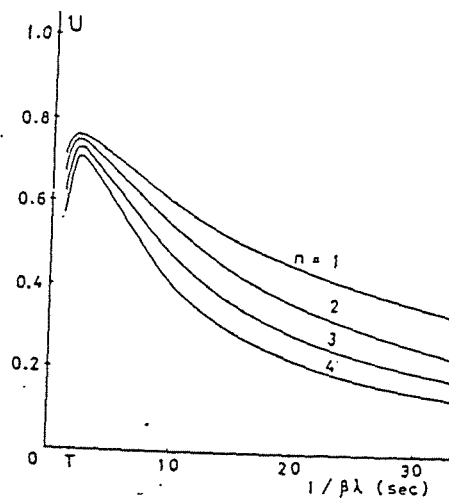


図 3. 9 利用率

$+T+1/\mu$ となる（文献〔72〕より導出）。このことは、1バース駅と多バース駅の間には、 $n=1$ および $n \geq 2$ であるという程度の差を超えた本質的な違いがあることを示唆している。

図3.10は図3.7および図3.8をもとに入駅率 E と出駅頻度 D との関係を示したものである。実線は n を固定して $\beta\lambda$ を変化させた曲線で、出駅頻度が上がると入駅率が急激に減少していくことがわかる。破線は $\beta\lambda$ を固定して n を変化させた点列を結んだもので、バースを増設することの効果を読み取れる。特に、入駅希望車の到来頻度 $\beta\lambda$ が小さいときは、バース増設によって出駅頻度よりむしろ入駅率が大きく改善され、 $\beta\lambda$ が大きいときは逆に、出駅頻度の方が大きく増加し処理能力が向上する。

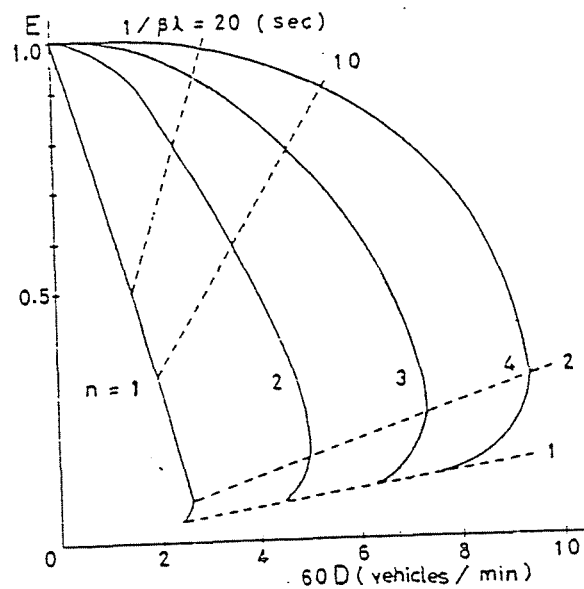


図3.10 入駅率－出駅頻度

<状態部分集合における再帰時間に基づく解析>

すでに述べたように、出駅頻度、入駅率、利用率はいずれも、平均入駅時間間隔が求まれば容易に求まる量である。したがって、平均入駅時間間隔 T_S は本モデルの解析の基礎となる重要な量である。さて、この平均入駅時間間隔は、図3.6からわかるように、1バースの場合と2バース以上の場合とで漸近特性が異なる。以下では、なぜそうなるのかをさらに深く議論するために、2.6節で述べた手法「状態部分集合での再帰時間を考慮したマルコフ再生理論」により、平均入駅時間間隔を解析する。この解析により、平均入駅時間間隔に対する表式が、物理的意味の明確な3つの項の和として得られ、1バース駅と多バース駅の本質的な相違が明らかとなる。

まず、各状態 $i \in S$ から状態集合 S_1 までの初期通過時間分布 $G_{iS_1}(t)$ のLS変換 $g_{iS_1}(s)$ を求める。 $G_{iS_1}(t)$ は、時刻0で状態 i に推移してきたとき、時刻 t までに入駅が発生する確率を表わしている。2.6節で述べた方法で、再帰的マルコフ再生過程を表現するシグナルフローグラフ(図3.5)から、吸収的マルコフ再生過程を表現するシグナルフローグラフを作ると図3.11となる。図では、吸収状態 a (入駅直後の状態) への弧を破線で示している。状態は、図の左方や上方に置かれている状態に推移することはない。また、 $w=1$ の状態に推移することはない。($w=1$ の状態は入駅を表わすので、 $w=1$ への推移は吸収状態 a への推移に置き換えられる。)

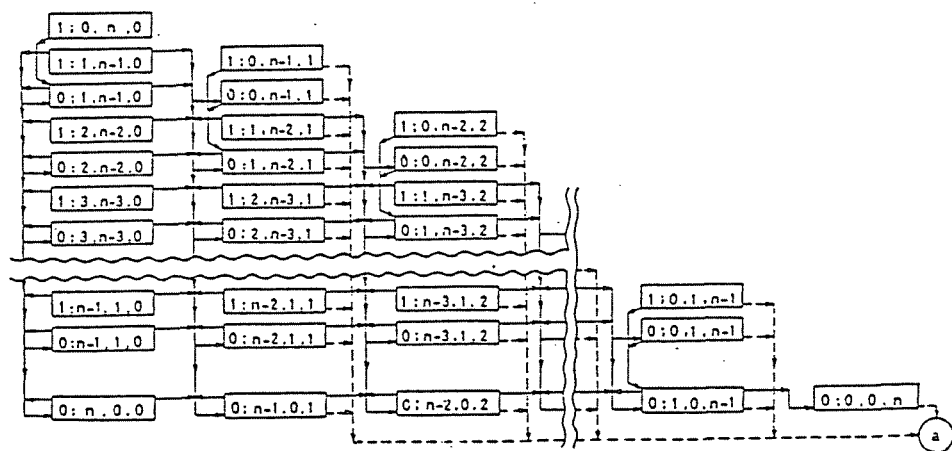


図3.11 吸収的シグナルフローグラフ

各トランスミッタンスは以下のように求まる。

$$\begin{aligned} \hat{q}_{(w;0,y,z)(0;1,y-1,z)}(s) \\ = q_{(w;0,y,z)(0;1,y-1,z)}(s) \quad ; y > 0 \end{aligned} \quad (3.46)$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_{(w;0,y,z)a}(s) \\ = q_{(w;0,y,z)(1;0,y+1,z-1)}(s) \quad ; y < n \end{aligned} \quad (3.47)$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_{(w;x,y,z)(0;x+\nu-1,y-\nu,z+1)}(s) \\ = q_{(w;x,y,z)(0;x+\nu-1,y-\nu,z+1)}(s) \quad ; x > 0, 0 \leq \nu \leq y \end{aligned} \quad (3.48)$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_{(w;x,y,z)(0;x+\nu,y-\nu,z)}(s) \\ = q_{(w;x,y,z)(0;x+\nu,y-\nu,z)}(s) \quad ; x > 0, 0 \leq \nu \leq y \end{aligned} \quad (3.49)$$

$$\begin{aligned} \hat{q}_{(w;x,y,z)a}(s) \\ = \sum_{\nu=0}^y q_{(w;x,y,z)(1;x+\nu,y-\nu+1,z-1)}(s) \\ = \frac{\beta \lambda \{1 - e^{-(s+\lambda)T}\}}{s + \lambda} \quad ; x > 0, z > 0 \end{aligned} \quad (3.50)$$

図のノード $(w; x, y, z)$ からノード a までのゲイン $\hat{g}_{(w;x,y,z)a}(s)$ が求める $g_{(w;x,y,z)S_1}(s)$ である。いま、方程式系

$$\hat{g}_{ia}(s) = \hat{q}_{ia}(s) + \sum_{j \neq a} \hat{q}_{ij}(s) \hat{g}_{ja}(s) \quad (3.51)$$

を用いて $\hat{g}_{ia}(s)$ を求めることを考える。この場合、グラフ上でノード i に接続しているノード j からのゲイン $\hat{g}_{ja}(s)$ がすべて求まれば $\hat{g}_{ia}(s)$ は容易に求まる。ところで図 3.11 は明らかに自己閉路以外のフィードバック閉路を持たない。したがって、吸収ノード a に近いノード i から順次、式 (3.51) を適用すれば、各ノードから a までのゲインはすべて求められる。その結果は次のような簡単な形となる。

$$\begin{aligned} g_{(w;x,y,z)S_1}(s) &= \hat{g}_{(w;x,y,z)a}(s) \\ &= \begin{cases} T_1(s) & ; z > 0 \\ T_1(s) T_2(s) & ; z = 0, x > 0 \\ T_1(s) T_2(s) T_3(s) & ; z = x = 0 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.52)$$

ただし、

$$\begin{aligned} T_i(s) \\ = \begin{cases} \beta \lambda / (s + \beta \lambda) & ; i = 1 \\ \frac{(s + \lambda) e^{-(s + \lambda)T}}{s + \lambda e^{-(s + \lambda)T}} & ; i = 2 \\ \mu n / (s + \mu n) & ; i = 3 \end{cases} \end{aligned} \quad (3.53)$$

式 (3.52) (3.53) からわかるように、 $z > 0$ の状態からのゲインは w, x, y, z に依存せず、また、 $z = 0$ かつ $x > 0$ の状態からのゲインは w, x, y に依存しない。したがって、式 (3.52) は、状態を上記カテゴリー別に圧縮し、図 3.11 のフローグラフを図 3.12 のように変形できることを示している。ただし、図において

$$\begin{aligned}\hat{q}_{BB}(s) &= \sum_{\nu=0}^y \hat{q}_{(w;x,y,0)(0;x+\nu,y-\nu,0)}(s) \\ &= \lambda [1 - \exp\{-(s+\lambda)T\}] / (s+\lambda)\end{aligned}\quad (3.54)$$

$$\begin{aligned}\hat{q}_{BC}(s) &= \sum_{\nu=0}^y \hat{q}_{(w;x,y,0)(0;x+\nu-1,y-\nu,1)}(s) \\ &= \exp[-(s+\lambda)T]\end{aligned}\quad (3.55)$$

$$\hat{q}_{BC}(s) / [1 - \hat{q}_{BB}(s)] = T_2(s) \quad (3.56)$$

ここで、変形された吸収的マルコフ再生過程について考察する。

図 3.12 の状態 C は空バースが存在する状態である。このとき、到来した入駅希望車は必ず入駅できる。したがって、入駅までの時間分布は w, x, y, z によらず、入駅希望車が到来するまでの時間分布 $T_1(s)$ 、すなわち、パラメータ $\beta\lambda$ の指数分布になる。

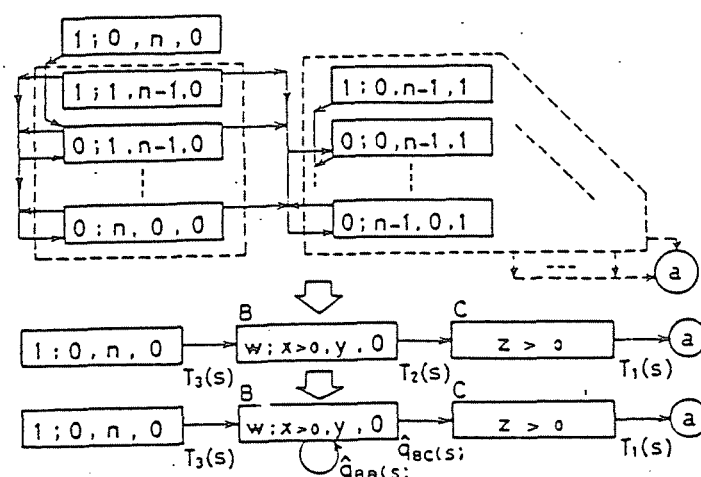


図 3.12 シグナルフローグラフの変形

状態Bは空バースがなく、出発待ちがある状態である。出発待ち車両が出発不可と判定されて再判定を受けるまでの時間分布が $\hat{q}_{BB}(s)$ 、可と判定されて出発可否判定時間Tが経過し、到来がポアソンのになるまでの時間分布が $\hat{q}_{BC}(s)$ で表わされている。

状態 $(1; 0, n, 0)$ は空バースがなく、n台とも乗降中の状態であり、入駅発生まで最も時間が長くなる状態である。n台のうちの1台が乗降を終了するまでの時間分布が $T_3(s)$ 、すなわち、パラメータ μn の指数分布となっている。

各状態から S までの平均初期通過時間は、式(3.52)(3.53)より次のようになる。

$$\begin{aligned} & \mu(w; x, y, z) S_1 \\ &= \begin{cases} \bar{T}_1 & ; z > 0 \\ \bar{T}_1 + \bar{T}_2 & ; z = 0, x > 0 \\ \bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \bar{T}_3 & ; z = x = 0 \end{cases} \quad (3.57) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} \bar{T}_i &= [-d T_i(s) / ds]_{s=0} \\ &= \begin{cases} 1 / \beta \lambda & ; i = 1 \\ [\exp(\lambda T) - 1] / \lambda & ; i = 2 \\ 1 / \mu n & ; i = 3 \end{cases} \quad (3.58) \end{aligned}$$

<平均入駅時間間隔の表式とその物理的意味>

式(2.70)で $A = S_1$ とし、式(3.52)を用いると、 S_1 における再帰時間分布、すなわち、入駅時間間隔分布が次式のように得られる。

$$\begin{aligned} g_{S_1 S_1}(s) &= \frac{(\sum_{k \in S_1^{(1)}} + \sum_{k \in S_1^{(2)}} + \sum_{k \in S_1^{(3)}}) \pi_k h_{k S_1}(s)}{\sum_{j \in S_1} \pi_j} \\ &= \alpha_1 T_1(s) + \alpha_2 T_1(s) T_2(s) + \alpha_3 T_1(s) T_2(s) T_3(s) \quad (3.59) \end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned} S_1^{(1)} &= \{(w; x, y, z) \mid w=1, z > 0\} \\ S_1^{(2)} &= \{(w; x, y, z) \mid w=1, z=0, x > 0\} \\ S_1^{(3)} &= \{(w; x, y, z) \mid w=1, z=x=0\} \\ S_1^{(1)} + S_1^{(2)} + S_1^{(3)} &= S_1 \end{aligned}$$

$$\alpha_i = \sum_{k \in S_i^{(i)}} \pi_k / \sum_{j \in S_1} \pi_j \quad ; i = 1, 2, 3$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 1$$

平均入駅時間間隔は次式となる。

$$T_S = \bar{g}_{S_1 S_1} = \alpha_1 \bar{T}_1 + \alpha_2 (\bar{T}_1 + \bar{T}_2) + \alpha_3 (\bar{T}_1 + \bar{T}_2 + \bar{T}_3)$$

$$= \bar{T}_1 + p_1 \bar{T}_2 + p_2 \bar{T}_3 \quad (3.60)$$

ただし、

$$p_1 = \alpha_2 + \alpha_3 = \sum_{k \in \{(w; x, y, z) | w=1, z=0\}} \pi_k / \sum_{j \in S_1} \pi_j$$

$$p_2 = \alpha_3 = \pi_{(1; 0, n, 0)} / \sum_{j \in S_1} \pi_j$$

図3.13に入駅から入駅までの時間経過を式(3.59)または(3.60)を模式化することによって示す。

式(3.60)の物理的意味を考察する。まず、平均入駅時間間隔は、入駅希望車の平均到来時間間隔 $T_S = 1 / \beta \lambda$ より小さくないという妥当な結果が第1項からわかる。さらにふくそう度に応じて第2項、第3項が加わる。

p_1 は車両が入駅したときに空バースがなくなる条件付き確率である。このとき、出発待ち車両の平均出発待ち時間と出発可否判定時間との和 $\bar{T}_2$ の間は、入駅希望車が到来しても入駅は発生しない。

p_2 は上記事象のうちでさらに出発待ち車両もない条件付き確率である。乗降中の n 台のうちの1台が乗降を終了して出発待ちとなるまでの平均時間 $\bar{T}_3 = 1 / \mu n$ の間は入駅が発生しない。

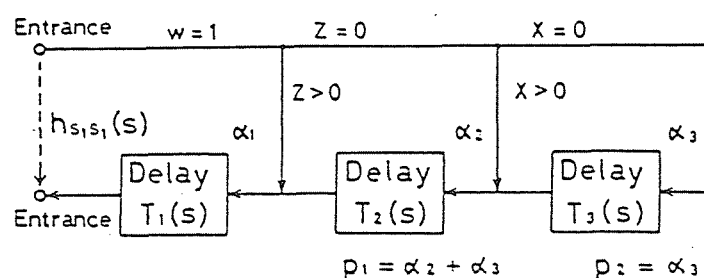


図3.13 入駅時間間隔の構成

本章ではすでに数値計算例から、 $1/\beta\lambda \rightarrow \infty$ のときの T_S の漸近的特性が、 $n \geq 2$ では $T_S \rightarrow 1/\beta\lambda$ であるが、 $n=1$ では $T_S \rightarrow 1/\beta\lambda + T + 1/\mu$ であることを指摘したが、その理由は明確にされてはいなかった。しかし、式(3.60)を得て、この理由は明確となった。 $n \geq 2$ のときは $p_1 \rightarrow 0$ 、 $p_2 \rightarrow 0$ であるが、 $n=1$ のときは $p_1 = p_2 = 1$ 、 $\bar{T}_2 \rightarrow T$ 、 $\bar{T}_3 = 1/\mu$ であるからである。すなわち、多バース駅では入駅希望車の到来頻度 $\beta\lambda$ が十分小さければ、入駅した時点で空バースがなくなる確率は0に近づき、その直後に到来する入駅希望車も必ず入駅できるようになってくる。しかし、1バース駅では、 $\beta\lambda$ をいくら小さくしても、入駅した時点で空バースは必ずなくなる。したがって、車両が出駅するまでの間に到来する入駅希望車は入駅できない。つまり、1バース駅は、入駅希望車到来時間間隔の平均 $1/\beta\lambda$ が大きくても、確率的変動により2台の入駅希望車が短い間隔で引き続いて到来する場合に都合が悪いといえる。これが1バース駅と多バース駅の本質的な相違であり、 T_S の漸近特性に表われている。CVSは従来、平均的な交通需要の考察をもとに、原則として駅は1バースを考えていたが、確率的変動を考慮した本論文の議論をふまえて多バースにすることも検討されるべきであろう。

<多バース駅と等価な1バース駅>

本モデルのパラメータは、 n 、 β 、 λ 、 μ 、 T の5個であるが、このうち n 、 μ 、 T が駅に関するもの、 β 、 λ が本線に関するものである。いま、平均乗降時間が $1/\mu$ 、出発可否判定時間および出発車両安全車頭間隔が T である n バース駅を $\langle n, \mu, T \rangle$ と表わすことにする。既にみたように、種々の駅評価尺度は T_S をもとに算出される。すなわち、

$$\text{入駅希望車の入駅率} = 1/\beta\lambda T_S$$

$$\text{出駅頻度} = 1/T_S$$

$$\text{バースの利用率} = 1/\mu n T_S$$

そこで、 β 、 λ が与えられたとき、 T_S の対応する各項（これは物理的意味が明確）が等しいという意味で等価な1バース駅 $\langle 1, \mu_e, T_e \rangle$ を求めると、

$$\frac{e^{\lambda T_e} - 1}{\lambda} = p_1 \cdot \frac{e^{\lambda T} - 1}{\lambda}, \quad \frac{1}{\mu_e} = p_2 \cdot \frac{1}{\mu n}$$

より次式を得る。

$$T_e = \log [1 + p_1 \cdot \{ \exp(\lambda T) - 1 \}] / \lambda \quad (3.61)$$

$$1/\mu_e = (p_2/n)(1/\mu) \quad (3.62)$$

<数値例>

図3.14～3.16に数値例を示す。パラメータは、 $\beta = 0.1$ ， $1/\mu = 18.0$ （秒）， $T = 2.0$ （秒）とし、 n および λ を変化させた。

図3.14は、平均入駅時間間隔 T_S と入駅希望車の平均到来時間間隔 $1/\beta\lambda$ の関係を、1バースおよび2バースの場合について描いたものである。図中の $\bar{T}_1$ ， p_1 ， $\bar{T}_2$ ， p_2 ， $\bar{T}_3$ はそれぞれ式(3.60)の第1，2，3項の計算結果であり、これらの和として T_S が実線で描かれている。図から、1バース駅と多バース駅の大きな差は第3項にあることがわかる。1バース駅では第3項は $1/\mu = 18$ （秒）で一定であるのに対し、2バース駅では最大でも5秒程度であり、 $1/\beta\lambda \rightarrow \infty$ のときは0に近づく。

図3.15および3.16は、それぞれ多バース駅と等価な1バース駅における等価乗降時間 $1/\mu_e$ および等価判定時間 T_e を示したものである。たとえば $1/\beta\lambda = 10$ （秒）のとき、バース数を1から2にすることは、1バース駅において乗降時間を18秒から4.5秒に、また、出発可否判定時間を2秒から1.7秒に短縮することと同様な効果があることになる。

駅の処理能力を高める手段としては、バース増設のほかに、システム・制御の面の技術開発による方法がある。たとえば、車両の制御技術の進歩により T を小さくできる。また、本論文では乗降時間として、車両がチェックポイントを通過してからバースに停止するまでの時間を含んでいるので、 $1/\mu$ も小さくできる余地がある。図3.15，3.16は、開発された技術によって短縮される時間をバース数（建設コスト）に換算するものともいえる。

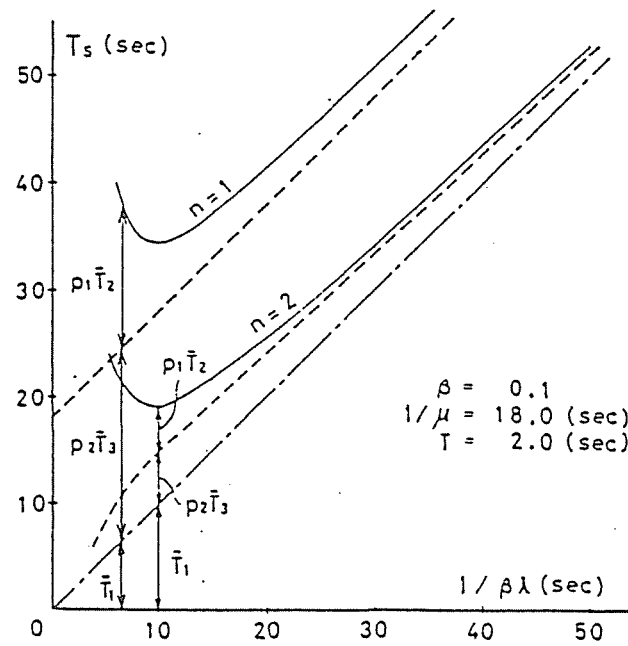


図 3. 1 4 平均入駅時間間隔

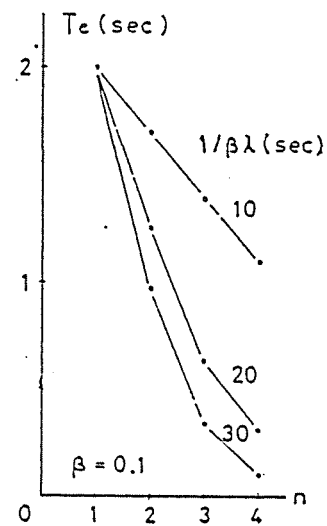
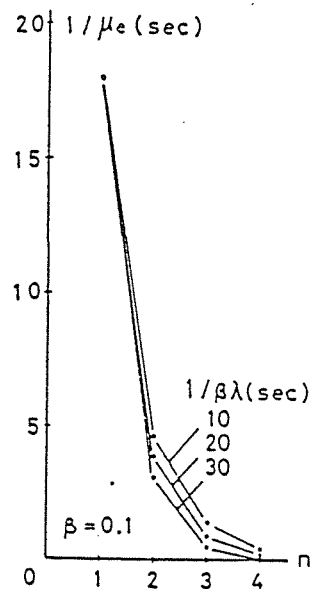


図 3. 1 5 等価乗降時間 図 3. 1 6 等価判定時間

3.5 GPSSによるシミュレーション

本節では多バス駅モデルのシミュレーションの概要とその結果について述べる。このシミュレーションの目的は2つある。1つは、前節までの理論に論理的な誤りがないかどうかをチェックするためである。もし、理論に誤りがなければ、シミュレーション結果は理論が予測した結果と一致するはずである。もう1つの目的は、前節までのモデルおよび理論の実用性を議論するためである。既に述べたように、本章の多バス駅モデルでは客の乗降時間分布は指数分布としており、実システムの実情とは合わない。したがって、このモデルに基づいた計算結果は実用上有益でない可能性がある。しかし、乗降時間分布を他の分布にすると、確率論的な理論解析は非常に困難になってしまう。そのため、乗降時間分布を他の分布とした場合については、シミュレーションに頼らざるを得ない。本節では、乗降時間分布を現実的な正規分布としてシミュレーションを行ない、その結果が乗降時間分布を指数分布として得た理論結果と一致することを示す。これにより、本モデルと理論が実用上有益であることを議論する。

シミュレーションは、代表的なシミュレーション言語であるGPSS (General Purpose Simulation System) を用いて行なった。GPSSは、システム内を動くもの(トランザクション)を中心とするシミュレーション言語である。トランザクションが発生し、種々のサービス施設(ファシリティ、ストレージ)の間を移動し、消滅していく過程を、ブロック・ステートメントで記述することにより、離散系の事象駆動型シミュレーションを簡単に実施することができる。GPSSの概要は文献[73, 74]等を参照されたい。

図3.17に本シミュレーションのプログラム・リストを示す。この例は、バス数を4、乗降時間を平均18秒、標準偏差2秒の正規分布としている。また、0.1秒をシミュレーション上の単位時間としている。

各エンティティについて説明する。

○ファシリティ (facility)

6個 (n バスのときは $n + 2$ 個) 用いる。

- ・ 1 ~ 4 : 番号1から4 ($= n$) までのファシリティは、各バスに対応している。
- ・ LINE : ファシリティLINEは、次にチェックポイントに到来する車両を1台待機さ

せておくためのものである。

- ・ JUDGE: 乗降終了した車が出発可否判定を受けるためのファシリティ。ただし、このファシリティに入ってもすぐ判定を受けられるとは限らない。

○ストレージ (storage)

2 個用いる。

- ・ STN: 容量 n のストレージで、駅に対応している。このストレージが full か否かにより入駅希望車の入駅が左右される。

- ・ JYOKO: 容量 n のストレージ。乗降中の車がこのストレージに入っている。平均乗降時間などの統計のために用いている。

○トランザクション (transaction)

2 種用いる。

- ・ ブロック 1 で発生されるもの: 車両に対応する。属性として、パラメータ 1 ~ 3 を使用している。

パラメータ 1 …前の車との車頭時間間隔を格納する。

パラメータ 2 …入駅希望車は 1、非入駅希望車は 0 を格納する。

パラメータ 3 …入駅するとき、使用するバースの番号 ($1 \sim n$) を格納する。

- ・ ブロック 3 5 で発生されるもの: 各バースに対応した n 個のトランザクションを用いる。これらはパラメータ 1 にそれぞれ 1, 2, ..., n が格納されており、ユーザ・チェーン 1 とあいまって、入駅車の使用バースを決定する。詳細はユーザ・チェーンを参照。

○ユーザ・チェーン (user chain)

番号 1 として 1 つ用いる。このチェーンには各バースの番号を表わすトランザクションが F I F O (first-in first-out) でつながれる。パラメータ 1 が i ($1 \leq i \leq n$) であるトランザクションがチェーンにつながれていれば、バース i が空であることを表わす。入駅希望車が入駅したとき、チェーンにつながれている空バースのうち最も古くにつながれたもの (先頭にあるもの)、すなわち、空バースになってからの経過時間の最も長いものを入駅すべきバースに選び、チェーンからはずす。逆に、バースが空になったときは、チェーンの末尾につながれる。

○格納値 (savevalue)

6 個用いる。

- ・ IAT: 格納値 IAT には、平均到来時間間隔 $1/\lambda$ が格納される。ただし、0.1 秒を 1 単位とする。
- ・ BETA: BETA には、入駅希望車混入率 β が千分率で格納される。たとえば、 $\beta = 0.5$ のモデルならば 500 が格納される。
IAT, BETA は、それぞれ番号 1、2 と同義である。格納される値は実行に先だって初期値として与えられる。
- ・ PSTIM: 到来車のチェックポイント通過予定時刻を格納する。この値は variable 3 で参照され、判定の際に用いられる。
- ・ SELECT: 2 種のトランザクション間の通信のために用いる。入駅バースを決定する部分で、ユーザ・チェーンからはずされたトランザクションは $X \neq \text{SELECT}$ にパラメータ 1 の値、すなわち使用するバースの番号を格納する。その後、同時刻の処理で、入駅車に対応するトランザクションがこの値をパラメータ 3 の値として受け取る。
- ・ LEAVE: 駅を出る車が、現在時刻をここに格納する。この時刻後 2 秒 (20 単位時間) 以上経過しなければ次の出発可否判定がなされない。
- ・ WORK: バースに対応するトランザクションのパラメータに値 1, 2, ..., n を格納する際のワークエリア。

○関数 (function)

2 つ用いる。

- ・ ERAND: 平均 1 の指数乱数。
- ・ NORM: 正規分布 $N(0, 1)$ に従う乱数。

○算術式 (variable)

整数算術式 3 つ、実数算術式 1 つを用いる。

- ・ 1: 現在時刻 + パラメータ 1 によって、チェックポイント通過予定時刻を算出する。
- ・ 2 (実数): 関数 NORM をもとにして、平均 180 (18 秒)、標準偏差 20 (2 秒) の正規乱数に変換する。
- ・ 3: 通過予定時刻 - 現在時刻、すなわち、到来車がチェックポイントを通過するまでの時間を算出する。

・4： 現在時刻－出駅時刻、すなわち、出駅してからの時間が20（2秒）よりどれだけ短いかを算出する。

○分布表（table）

NYUEK： 入駅時間間隔のヒストグラム作成のためのテーブル。モードはIA（inter-arrival）モード、すなわち、TABULATEブロック13に到来するトランザクションの到来間隔に関する統計である。最低区間の上限値は2秒、区間幅2秒、区間数50とする。

○ブロック命令（block）

ブロックは、トランザクションその他のエンティティの処理に関する命令であり、モデルの論理的な部分である。本モデルでは42個のブロックを用いている。以下、順次説明していくが、最も注意を要する部分は、出発可否判定の際の判定を受ける車両と到来車両との同時刻処理、および、バース選択の際の2種トランザクションの同時刻処理である。これらの処理は、トランザクションに優先順位（priority）を付すことによって解決される。本モデルでは優先順位として2，1，0を用いており、同時刻におけるトランザクションの処理はこの順に行なわれる。図3.18に本GPSモデルの概念図を示すので参照されたい。

BLOCK NUMBER	#LOC	OPERATION	A,B,C,D,E,F,G,H,I	COMMENTS
		SIMULATE		
		ERAND FUNCTION	RN1,C24	
			0,0/.1,.104/.2,.222/.3,.355/.4,.509/.5,.697/.6,.915/.7,1.2/ .75,1.387/.8,1.67/.84,1.83/.88,2.127/.9,2.37/.92,2.52/.94,2.81/.95,2. .96,3.2/.97,3.5/.98,3.9/.99,4.6/.995,5.3/.998,6.2/.999,7/.9997,8	
		NORM FUNCTION	RN2,C27	
			0.,-3.5/.0013,-3.0/.0035,-2.75/.0062,-2.5/.0122,-2.25/.0220,-2.0/ .0401,-1.75/.0668,-1.5/.1056,-1.25/.1587,-1.0/.2266,-.75/.3085,-. .4013,-.25/.5,0/.5987,.25/.6915,.5/.7734,.75/.8413,1/.8944,1.25/ .9332,1.5/.9599,1.75/.9772,2/.9878,2.25/.9938,2.5/.9965,2.75/ .9987,3.0/1,3.5	
		NYUEK TABLE	1A,20,20,50	
	1	VARIABLE	C1+P1	
	2	FVARIABLE	180+20*FN*NORM	
	3	VARIABLE	X*PSTIM-C1	
	4	VARIABLE	20-(C1-X*LEAVE)	
	STN	STORAGE	4 /M=4	
	JYOKU	STORAGE	4 /N=4	
	BERTH	EQU	1(4),F /N=4	
	IAT	EQU	1,X	
	BETA	EQU	2,X	
		* MOTION OF THE CAR *		
1		GENERATE	,,,1	/PRIORITY=1
2		SEIZE	LINE	
3	SET	ASSIGN	1,X*IAT,ERAND	
4		TEST G	P1,0,SET	
5		TEST L	RN3,X*BETA,NEXT	
6		ASSIGN	2,1	
7	NEXT	SAVEVALUE	PSTIM,V1	
8		ADVANCE	P1	RUNNING
9		RELEASE	LINE	
10	CHECK	TEST E	P2,1,TERM	
11		GATE SNF	STN,TERM	
12	ENTER	ENTER	STN	
13		TABULATE	NYUEK	
14		UNLINK	1,UNL,1	
15		PRIORITY	0,BUFFER	
16		ASSIGN	3,X*SELCI	
17		SEIZE	P3	
18		ENTER	JYOKU	
19	SAVE	SAVEVALUE	JYOKU,V2	
20		TEST G	X*JYOKU,0,SAVE	
21		ADVANCE	X*JYOKU	LOAD & UNLOAD
22		LEAVE	JYOKU	
23		SEIZE	JUDGE	JUDGE_WAIT
24		TEST G	V4,0,JUDGE	
25		ADVANCE	V4	JUDGE_WAIT
26	JUDGE	TEST L	V3,20,OUT	
27		ADVANCE	V3	HT_WAIT
28		TRANSFER	,JUDGE	
29	OUT	RELEASE	JUDGE	
30		RELEASE	P3	
31		LEAVE	STN	
32		SAVEVALUE	LEAVE,C1	

図3. 17 GPSSによるシミュレーションプログラム

BLOCK				
NUMBER	LOC	OPERATION	A,B,C,D,E,F,G,H,I	COMMENTS
33		TERMINATE	1	
34		TERM	TERMINATE	
		# CHOICE OF BERTH #		
35		GENERATE	,,4,2	/N=4,PRIORITY=2
36		SAVEVALUE	WORK+,1	
37		ASSIGN	1,X,YWORK	
38	LNK	LINK	1,FIFO	
39	UNL	SAVEVALUE	SELECT,P1	
40		GATE U	P1.	
41		GATE NU	P1	
42		TRANSFER	,LNK	
		# EXECUTION #		
		INITIAL	X1,10/X2,500	
		START	10,NP	
		RESET		
		START	1000	
		CLEAR		
		INITIAL	X1,13/X2,500	
		START	10,NP	
		RESET		
		START	1000	
		CLEAR		
		INITIAL	X1,15/X2,500	
		START	10,NP	
		RESET		
		START	1000	
		CLEAR		
		INITIAL	X1,20/X2,500	
		START	10,NP	
		RESET		
		START	1000	
		CLEAR		
		INITIAL	X1,25/X2,500	
		START	10,NP	
		RESET		
		START	1000	
		CLEAR		
		INITIAL	X1,30/X2,500	
		START	10,NP	
		RESET		
		START	1000	
		END		

図 3. 17 GPSSによるシミュレーションプログラム (続き)

[ブロック番号]

[説明]

- 1 : 優先順位 1 のトランザクション (車両) を発生する。次のブロック 2 が SEIZE ブロックであるため、ファシリティ LINE が不使用になりしだい、トランザクションをブロック 2 に補充する。
- 2 : ファシリティ LINE を使用開始。
- SET 3 : 平均 $1/\lambda$ の指数乱数をパラメータ P 1 にセットする。
- 4 : $P 1 \leq 0$ ならばブロック 3 に戻り、セットしなおす。
- 5 : 乱数 $R N 3$ ($0 \leq R N 3 \leq 999$) の値が $X \text{ 卒 } BETA$ より小さければ次ブロック、そうでなければ 7 へ進む。(P 2 の初期値は 0 である)
- 6 : $P 2 \leftarrow 1$ (入駅希望車)
- NEXT 7 : 通過予定時刻のセット。
- 8 : P 1 だけ時間消費。チェックポイント通過まで時間 P 1 だけかかる。
- 9 : LINE の使用を解除する。チェックポイントに到来したことを表わす。
- CHECK 10 : 入駅希望車でなければ 3 4 へ行き、消滅。
- 11 : 駅 (STN) が full ならば 3 4 へ (消滅)。
- ENTER 12 : 入駅した。
- 13 : 入駅時間間隔を記録する。
- 14 : バース選択のため、ユーザ・チェイン 1 からトランザクションを 1 個はずし、ブロック UNL (= 39) へ送る。
- 15 : 優先順位を 0 に落とす。BUFFER 指定のため、同時刻のトランザクション処理を、優先順位の高い順に再度行なう。そのときに $X \text{ 卒 } SELCT$ がセット (優先順位 2 の処理) され、次ブロックで参照 (優先順位 0 の処理) される。
- 16 : $P 3 \leftarrow$ 選択されたバースの番号
- 17 : 番号 P 3 のバースを使用開始。
- 18 : 乗降開始。
- SAVE 19 : $X \text{ 卒 } JYOKO \leftarrow$ 乗降時間 (正規分布)
- 20 : $X \text{ 卒 } JYOKO \leq 0$ なら 19 へ戻る。ブロック 9 からこのブロックまで同時刻で処理される。
- 21 : $X \text{ 卒 } JYOKO$ だけ時間消費。その後、他のトランザクションによって $X \text{ 卒 } JYOKO$ が書き換えられても影響はない。
- 22 : 乗降終了。

- 23：ファシリティJUDGE を使用開始。もし、使用中ならば、使用が解除されるまでブロック22で待つことになる。
- 24：出駅後2秒以上経過していればブロック26へ。
- 25：出駅後2秒経過するまで待つ。
- JUDGE 26：到来車がチェックポイントを通過するまでの時間が2秒以上なら出発可となり、ブロック29へ。
- 27：到来車がチェックポイントを通過するまで待つ。
- 28：ブロック26へ（再判定）。
- OUT 29：JUDGE を使用解除。
- 30：使用していたバースを解除。
- 31：出駅。
- 32：現在時刻をX≡LEAVE に格納する。
- 33：消滅。
- TERM 34：消滅。
- 35：優先順位2のトランザクションを4（=n）個発生させる。
- 36：X≡WORKの値を1だけ増やす。（初期値は0）
- 37：P1←X≡WORK。パラメータにバース番号を格納。
- LNK： 38：ユーザ・チェイン1につながる。（バース未使用）
- UNL： 39：ブロック14の命令によってはずされたトランザクションはこのブロックに入る。パラメータ1の値をX≡SELECT に格納する。
- 40：番号P1のバースが使用されたらこのブロックに入る。一般に、ユーザ・チェインからはずされたトランザクションは、このブロックにはすぐには入れずブロック39で一旦待つ。その後、同時刻の処理で、X≡SELECT を参照したトランザクションが、ブロック15から17（SEIZE）を通り（このとき、SCF（status change flag）が立つ）、ブロック21に入った後、スキャンが元に戻り、再びブロック39のトランザクションが処理の対象となる。このときこのトランザクションは本ブロックに入れることになる。結局、はずされたトランザクションはその時刻内に本ブロックまで進むことになる。
- 41：番号P1のファシリティが不使用（対応するバースが空）になれば、このブロックに入れる。それまではブロック40で待つ。
- 42：ブロック38へ行き、チェインにつながる。

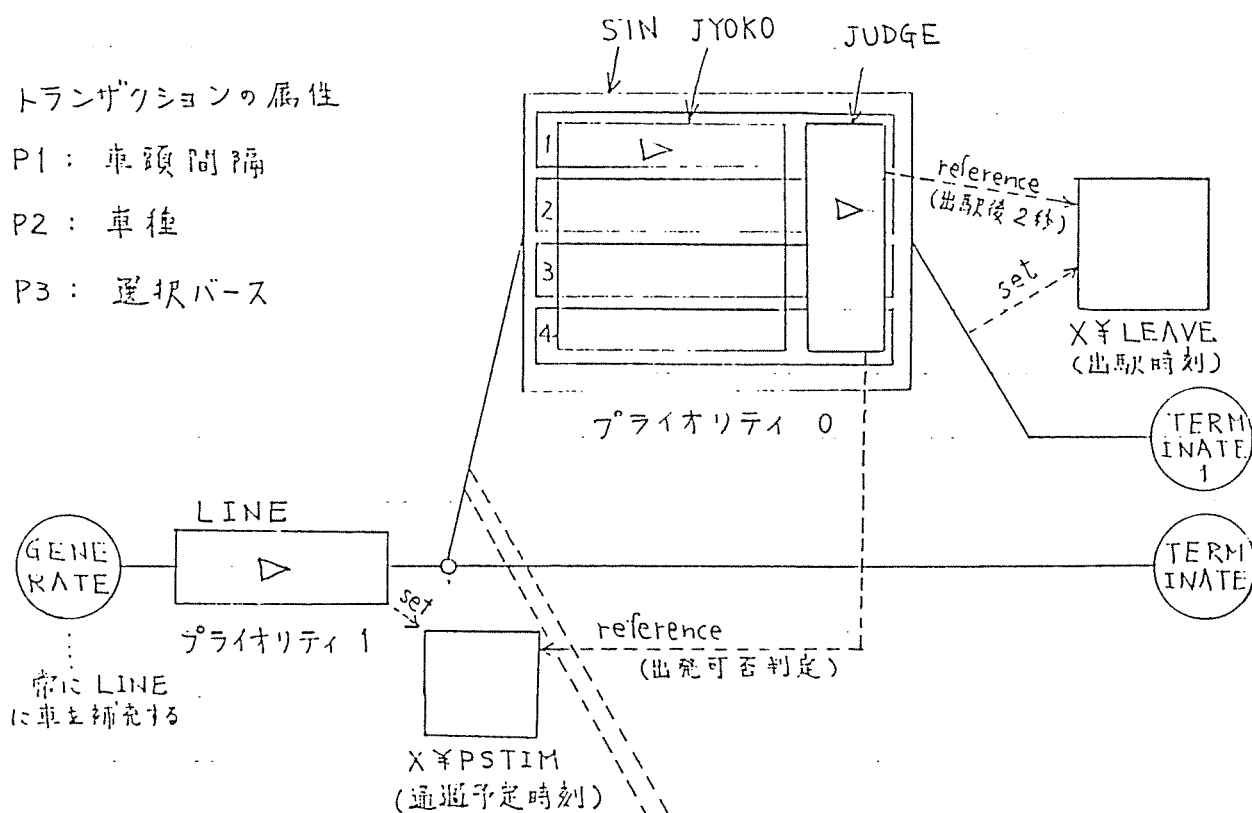
* MOTION OF CARS *

トランザクションの属性

P1: 車頭間隔

P2: 車種

P3: 選択バス



* SELECTION OF BERTH *

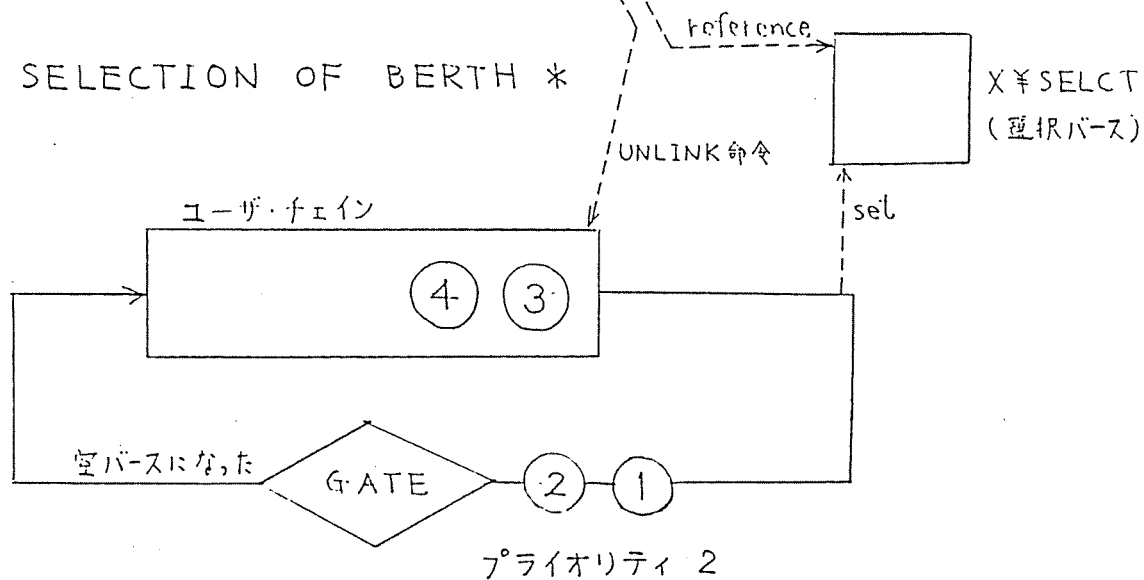


図 3. 18 多バス駅シミュレーションモデルの概念

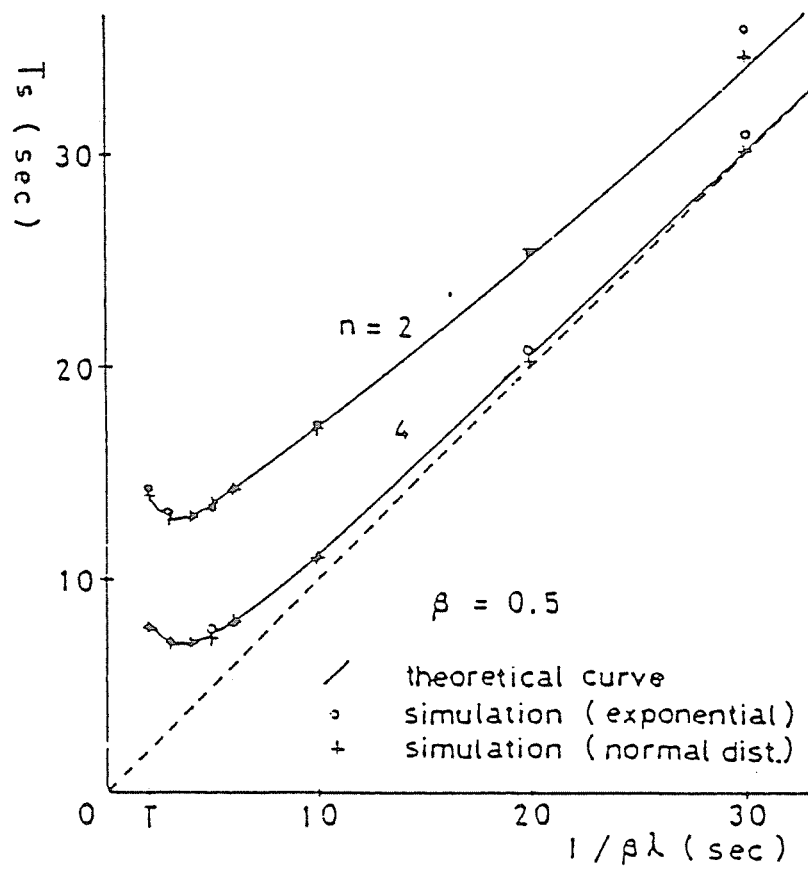


図3. 19 シミュレーション結果

以上でプログラムの説明を終える。実行する際には、INITIAL定義文により、 $1/\lambda$ 、 β を与え、まず、出駅車10台についてシミュレートする。ここで定常状態になったとみなし、出駅車両1000台についてシミュレートした。なお、 $1/\mu = 18$ （秒）、 $T = 2$ （秒）とした。

図3.19に、平均入駅時間間隔に対するシミュレーション結果を示す。図には、乗降時間分布を理論と同様に指数分布としたシミュレーション結果、および乗降時間分布を正規分布としたシミュレーション結果が、理論曲線とともに示されている。これらの結果は良く一致している。また、ここには記さないが、乗降時間分布を他の一般分布にしても同様のことがわかる。既に見たように、 $\beta\lambda$ 、 μn が等しいとき、平均入駅時間間隔が一致すれば、入駅率、出駅頻度、利用率も一致する。これらの結果から、駅に評価尺度として平均入駅時間間隔、入駅率、出駅頻度、利用率を考える限りは、乗降時間分布を指数分布とした本章の多バース駅モデルの解析結果は、乗降時間分布を一般分布とした結果と一致し、実用上有効であるといえる。

3.6 非再生点を含むマルコフ再生過程による出発待ち行列の解析

多バース駅モデルが通常の待ち行列モデルと大きく異なる点は、駅のバース（サービス窓口に対応）にいる車両（トランザクション）は、乗降（サービス）が終了しても直ちに出發（退去）できるとは限らない点にある。システムへの到来過程およびシステムからの退去過程に依存する判定条件により出發可とされてはじめて出發が可能となる。車両はそれまで出發待ちの状態にあり、ここに出發待ち行列が形成される。出發待ち行列の特性を明らかにすることは、多バース駅設計、ひいてはシステム全体の設計に有用な資料を提供するものであるが、前節までにおいては解析手法上の限界のため解析されていなかった。

本節では出發待ち行列を含む駅の状態推移を、非再生点を含み得るように拡張されたマルコフ再生理論（2.7節参照）により解析し、定常状態での出發待ち車両数と乗降車両数の同時分布を求め、さらに、種々の駅評価尺度を求める。

<状態の定義と推移>

確率過程を構成するにあたり、駅の状態を単に (X_t, Y_t) としては解析が困難に

なる。以下では X_t や Y_t が変化する時点（入駅、乗降終了、出駅）か、または、変化しなくても (X_t, Y_t) が再生する適当な時点（車両がチェック区間を退去、出駅車両が出口区間を退去）において状態が推移するように状態定義を与え、その状態推移を、非再生点を含み得るよう拡張されたマルコフ再生過程として定式化する。

状態空間 S を S_R と S_{NR} に分割して考える。

$S_R = \{i \mid \text{状態 } i \text{ に推移する時点が常に再生点である}\}$

$S_{NR} = \{i \mid \text{状態 } i \text{ に推移する時点が常に非再生点である}\}$

S_R 、 S_{NR} に含まれる状態をそれぞれ再生状態、非再生状態と呼ぶ。具体的にどのような時点が再生点、非再生点となるかは後に明らかとなる。

再生状態は (x, y) の形で表わす。 x, y はこの状態に推移してきた時点から次に状態推移が起こる時点までの X_t, Y_t （一定）の値である。

非再生状態は $(x_R, y_R; x, y)$ の形で表わす。 x, y はこの状態に推移してきた時点から次に状態推移が起こる時点までの X_t, Y_t （一定）の値である。 (x_R, y_R) は最も最近訪れた再生状態を表わす。

図3. 20 に状態の推移規則を手続き的に示す。図において t は実時間であり、中段の大きな3つのブロックの実行中にのみ連続的に変化している。他のブロックは分岐や変数の変化を表わしており、時間を消費しない。 $state$ という変数が現在の状態を表わしている。 X_t, Y_t が変化したり、再生点になったりする毎に $state$ が更新されている。便宜上、各推移に対応する事象に記号名を付け、 $state$ への代入を示す矢線の上に示している。 ν は出発可否判定後の乗降終了台数を表わすカウンタである。

事象 $\hat{S}_\nu, \hat{F}_\nu$ の各事象に対応する時点が非再生点であり、事象 $E, R, S_\nu, F_\nu^0, F_\nu^1$ の各事象に対応する時点が再生点であることを以下で説明する。

【ケース1】 時刻 t_0 で判定が行なわれ、出発可と判定された場合を考える。この時点でチェックポイント未通過車両のうちの先頭車 V_2 （図3. 1 参照）がチェックポイントを通過するまでの時間 T_x には $T_x \geq T$ の条件が付き、 T_x の分布はシフトされた指数分布

$$\begin{aligned} f(t; T) &= P[t \leq T_x < t + dt \mid T_x \geq T] / dt \\ &= u(t - T) \lambda \cdot \exp\{-\lambda(t - T)\} \end{aligned}$$

となる。ただし、 $u(\cdot)$ は単位ステップ関数である。その後 $\tau (< T)$ だけ経過した

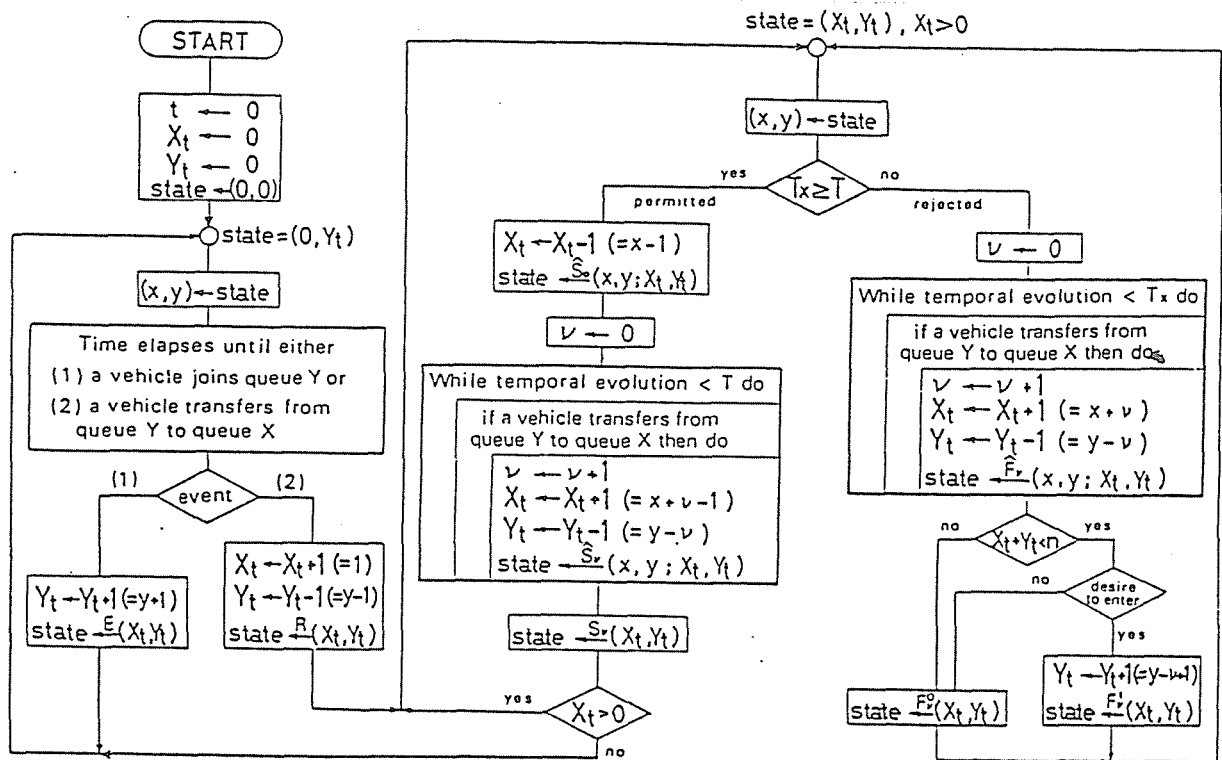


図 3. 20 状態の推移規則

時刻 $t_0 + \tau$ でキュー Y からキュー X へ車両が移動、すなわち、事象 $\hat{S}_\nu$ が起こったとする。この時刻 $t_0 + \tau$ では、時刻 t_0 のときに比べて V_2 がチェックポイントを通過するまでの時間 T_X の値は τ だけ減少しており、 $T_X \geq T - \tau$ の条件が付く。その分布はシフトされた指数分布 $f(t; T - \tau)$ となる。したがって、事象 $\hat{S}_\nu$ が生起した時点では、 T_X は経過時間 τ に依存する分布に従い、非再生点になっている。

つぎに、出発可の判定後 T だけ経過した時点、すなわち事象 S_ν の生起した時点 $t_0 + T$ を考える。この時点では T_X の条件は $T_X \geq 0$ となり、その分布は指数分布 $f(t; 0)$ に戻る。また、時刻 t_0 で出駅した車両 V_3 (図 3. 1 参照) はこの時点 $t_0 + T$ でキュー E を退去する。確率過程 (X_t, Y_t) はこれまでの履歴に依存しないようになり、再生する。したがって、事象 S に対応する時点は再生点である。

なお、時刻 t_0 ではキュー C 内に車両が存在せず、時刻 $t_0 + T$ までに車両がチェックポイントを通過することがない。また、時刻 $(t_0, t_0 + T)$ 間ではキュー E 内に入駅車があり、他の出発待ち車両は出駅できない。したがって、この間では入駅も出駅も発生し得ず、 (X_t, Y_t) の変化する要因としては乗降終了、すなわち事象 $\hat{S}_\nu$ ($\nu > 0$) のみとなっている。

【ケース 2】 時刻 t_0 で判定が行なわれ、出発不可と判定された場合を考えると、この時点で T には $T_X < T$ の条件が付き、 T_X の分布は区分された指数分布

$$g(t; T) = P[t \leq T_X < t + dt | T_X < T] / dt \\ = \{1 - u(t - T)\} \lambda \cdot \exp(-\lambda t) / \{1 - \exp(-\lambda T)\}$$

となる。その後 $\tau (< T_X)$ だけ経過した時刻 $t_0 + \tau$ でキュー Y からキュー X へ車両が移動、すなわち、事象 $\hat{F}_\nu$ が起こったとする。時刻 $t_0 + \tau$ では、時刻 t_0 のときに比べて T_X の値は τ だけ減少しており、 $T_X < T - \tau$ の条件が付く。その分布は区分された指数分布 $g(t; T - \tau)$ となる。したがって、事象 $\hat{F}_\nu$ が生起した時点では、 T_X は経過時間 τ に依存する分布に従い、非再生点となっている。

車両 V_2 がチェックポイントを通過した時点で事象 F_ν^0 または F_ν^1 が生起するが、この時点は再生点である。なぜなら次の到来車 V_2 が更新され、 T_X の分布が再生して指数分布 $g(t; \infty)$ となり、また、時刻 t_0 ではキュー E 内に車両が存在せず判定は出発不可だったので、事象 F_ν^0 , F_ν^1 が生起した時点ではキュー E 内には車両は存在しないからである。

なお、時刻 t_0 以降 V_2 がチェックポイントを通過するまでは明らかに入駅は発生せず、また、キュー C 内に車両がいるので出駅も発生しない。したがって、この間で

(X_t, Y_t) の変化する要因としては乗降終了、すなわち事象 $\hat{F}_j$ のみになっている。

【ケース3】 事象 E, R (それぞれ、出発待ちがないときの入駅および乗降終了) に対応する時点が再生点であるのは明らかであろう。

図3.21は、1つの再生状態 (x, y) から次の再生状態までの推移の系列に着目した状態推移図である。楕円は再生状態、矩形は非再生状態を表わし、*は x, y を表わす。 $x = y = 0$ の場合は図(a)から事象 R に対応する矢線を取り除き、 $x = 0, y = n$ の場合は図(a)から事象 E に対応する矢線を取り除けばよい。 $x > 0, x + y = n$ の場合は図(b)から事象 F_y^1 に対応する矢線を取り除けばよい。

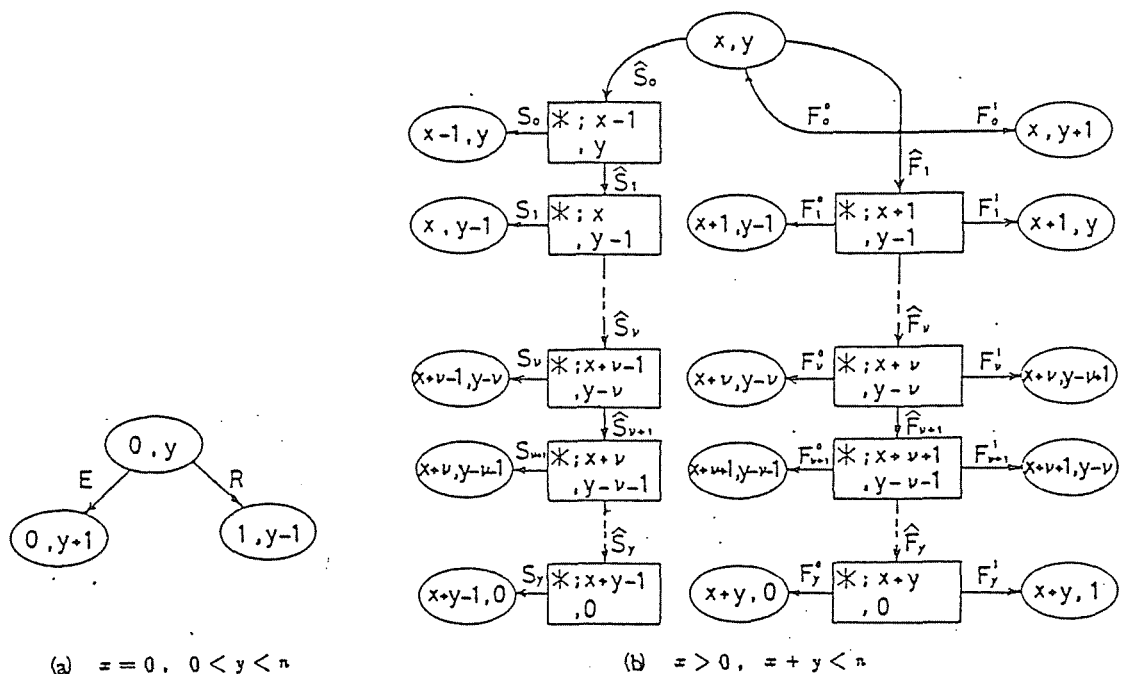


図3.21 状態推移図の一部

以上から状態空間は次のように表わされる。

$$S = S_R \cup S_{NR}$$

$$S_R = \{ (x, y) \mid x \geq 0, y \geq 0, x + y \leq n \}$$

$$S_{NR} = \{ (x, y; x + \nu - 1, y - \nu) \mid x > 0, y \geq 0, \\ x + y \leq n, 0 \leq \nu \leq y \} \\ \cup \{ (x, y; x + \nu, y - \nu) \mid x > 0, y > 0, \\ x + y \leq n, 1 \leq \nu \leq y \}$$

<推移確率分布>

2. 7節の記法によれば、時刻0で再生状態 $i \in S_R$ に推移してきたとき、時刻 t までは直接、状態 $j \in S$ に推移する確率は $Q_{ij}(t)$ 、また時刻 t までに非再生状態 $k_1, k_2, \dots, k_m \in S_{NR}$ を経由して状態 $j \in S$ に推移する確率は $Q_{ij}^{(k_1, k_2, \dots, k_m)}(t)$ と表わされる。しかし本モデルでは、 i および j が示されれば、これを結ぶ経路（直接または $k_1, k_2, \dots, k_m$ ）は一意に定まる。したがって、推移確率を単に $Q_{ij}(t)$ の形で記す。

推移確率は次式となる。式の左端には対応する事象を示す。

$$E: Q_{(0, y)(0, y+1)}(t) \\ = \int_0^t \beta \lambda e^{-\beta \lambda \tau} \cdot e^{-\mu y \tau} d\tau; \quad y < n \quad (3.63)$$

$$R: Q_{(0, y)(1, y-1)}(t) \\ = \begin{cases} \int_0^t \mu y e^{-\mu y \tau} \cdot e^{-\beta \lambda \tau} d\tau; & 0 < y < n \\ \int_0^t \mu n e^{-\mu n \tau} d\tau & ; y = n \end{cases} \quad (3.64)$$

$$S_\nu: Q_{(x, y)(x+\nu-1, y-\nu)}(t) \\ = E_{y, \nu}(t) \quad ; x > 0, 0 \leq \nu \leq y \quad (3.65)$$

$$F_\nu^0: Q_{(x, y)(x+\nu, y-\nu)}(t) \\ = \begin{cases} R_{y, \nu}(t) & ; x + y = n, x > 0, 0 \leq \nu \leq y \\ (1 - \beta) R_{y, \nu}(t) & ; x + y < n, x > 0, 0 \leq \nu \leq y \end{cases} \quad (3.66)$$

$$F_\nu^1: Q_{(x, y)(x+\nu, y-\nu+1)}(t) \\ = \beta R_{y, \nu}(t) \quad ; x + y < n, x > 0, 0 \leq \nu \leq y \quad (3.67)$$

$$\begin{aligned}\hat{S}_\nu &: Q_{(x,y)(x,y;x+\nu-1,y-\nu)}(t) \\ &= \begin{cases} u(t) e^{-\lambda T} & ; x > 0, \nu = 0 \\ \int_0^t \{1 - u(\tau - T)\} e^{-\lambda \tau} r_{y,\nu}(\tau) d\tau & ; x > 0, 1 \leq \nu \leq y \end{cases} \quad (3.68)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{F}_\nu &: Q_{(x,y)(x,y;x+\nu,y-\nu)}(t) \\ &= \int_0^t \{1 - u(\tau - T)\} (e^{-\lambda \tau} - e^{-\lambda T}) r_{y,\nu}(\tau) d\tau \\ &\quad ; x > 0, y > 0, 1 \leq \nu \leq y \quad (3.69)\end{aligned}$$

ただし、

$$E_{y,\nu}(t) = u(t - T) e^{-\lambda T} \Gamma_{y,\nu}(T) \quad (3.70)$$

$$R_{y,\nu}(t) = \{1 - u(\tau - T)\} \lambda e^{-\lambda \tau} \Gamma_{y,\nu}(\tau) d\tau \quad (3.71)$$

$$r_{y,\nu}(t) = (y - \nu + 1) \mu \Gamma_{y,\nu-1}(t) \quad ; 1 \leq \nu \leq y \quad (3.72)$$

$$\Gamma_{y,\nu}(t) = \binom{y}{\nu} (1 - e^{-\mu t})^\nu (e^{-\mu t})^{y-\nu} \quad ; 0 \leq \nu \leq y \quad (3.73)$$

$u(t)$ = 単位ステップ関数

$\Gamma_{y,\nu}(t)$ は時間 t の間に y 台中ちょうど ν 台がキュー Y からキュー X へ移る確率である。 $r_{y,\nu}(t) dt$ は、時刻 0 でキュー Y 内の車両が y 台であるとき、キュー Y からキュー X へのちょうど ν 台目の移動が時刻 $t \sim t + dt$ で行なわれる確率である。LS 変換形を以下に示す。

$$\begin{aligned}E &: q_{(0,y)(0,y+1)}(s) \\ &= \beta \lambda / (s + \beta \lambda + \mu y) \quad ; y < n \quad (3.74)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}R &: q_{(0,y)(1,y-1)}(s) \\ &= \begin{cases} \mu y / (s + \beta \lambda + \mu y) & ; 0 < y < n \\ \mu n / (s + \mu n) & ; y = n \end{cases} \quad (3.75)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}S_\nu &: q_{(x,y)(x+\nu-1,y-\nu)}(s) \\ &= \eta_{y,\nu}(s) \quad ; x > 0, 0 \leq \nu \leq y \quad (3.76)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_\nu^0 &: q_{(x,y)(x+\nu,y-\nu)}(s) \\ &= \begin{cases} \lambda \phi_{y,\nu}(s + \lambda) & ; x+y=n, x>0, 0 \leq \nu \leq y \\ (1 - \beta) \lambda \phi_{y,\nu}(s + \lambda) & ; x+y<n, x>0, 0 \leq \nu \leq y \end{cases} \quad (3.77)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}F_\nu^1 &: q_{(x,y)(x+\nu,y-\nu+1)}(s) \\ &= \beta \lambda \phi_{y,\nu}(s + \lambda) \quad ; x+y < n, x > 0, 0 \leq \nu \leq y \quad (3.78)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{S}_\nu &: q_{(x,y)(x,y;x+\nu-1,y-\nu)}(s) \\ &= \begin{cases} e^{-\lambda T} & ; x > 0, \nu = 0 \\ (y - \nu + 1) \mu e^{-\lambda T} \phi_{y,\nu-1}(s) & ; x > 0, 1 \leq \nu \leq y \end{cases} \quad (3.79)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\hat{F}_\nu &: q_{(x,y)(x,y;x+\nu,y-\nu)}(s) \\ &= (y - \nu + 1) \mu [\phi_{y,\nu-1}(s + \lambda) - e^{-\lambda T} \phi_{y,\nu-1}(s)] \\ &\quad ; x > 0, y > 0, 1 \leq \nu \leq y \quad (3.80)\end{aligned}$$

ただし、

$$\begin{aligned}\eta_{y,\nu}(s) &= L S [E_{y,\nu}(t)] \\ &= \exp[-(s + \lambda) T] \Gamma_{y,\nu}(T) \quad (3.81)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi_{y,\nu}(s) &= L S \left[\int_0^T \{1 - u(\tau - T)\} \Gamma_{y,\nu}(\tau) d\tau \right] \\ &= \binom{y}{\nu} \sum_{k=0}^{\nu} (-1)^k \binom{\nu}{k} \frac{1 - e^{-[s + \mu(y - \nu + k)]T}}{s + \mu(y - \nu + k)} \quad (3.82)\end{aligned}$$

状態空間が再生状態のみの集合 S_R で、推移確率が式 (3.63) ~ (3.67) または式 (3.74) ~ (3.78) で与えられる新たな確率過程を、埋め込まれたマルコフ再生過程という。また、埋め込まれたマルコフ再生過程の式 (3.63) ~ (3.67) で $t \rightarrow \infty$ または式 (3.74) ~ (3.78) で $s \rightarrow 0$ としたものを推移確率として構成されるマルコフ連鎖を、対応するマルコフ連鎖という。

< 極限確率 >

時刻 0 で状態 i であるとの条件の下で、時刻 t において状態が j である確率の $L S$ 変換を $p_{ij}(s)$ と表わす。この確率は、図 3.21 を参照し、時刻 t までに状態 i に再帰しない場合と、時刻 t までに状態 i に再帰した後 $p_{ij}(s)$ に従う場合に分けて考えると次式を得る。

$$\begin{aligned}p_{(0,y)(0,y)}(s) &= 1 - \delta(n - y) q_{(0,y)(0,y+1)}(s) \\ &\quad - \delta(y) q_{(0,y)(1,y-1)}(s) + g_{(0,y)(0,y)}(s) p_{(0,y)(0,y)}(s) \quad (3.83)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}p_{(x,y)(x,y)}(s) &= 1 - q_{(x,y)(x,y;x-1,y)}(s) \\ &\quad - \delta(y) q_{(x,y)(x,y;x+1,y-1)}(s) \\ &\quad - \lambda \phi_{y,0}(s + \lambda) + g_{(x,y)(x,y)}(s) p_{(x,y)(x,y)}(s) \\ &\quad ; x > 0 \quad (3.84)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& p_{(x,y)(x,y;x+\nu-1,y-\nu)}(s) \\
& = q_{(x,y)(x,y;x+\nu-1,y-\nu)}(s) \\
& \quad - \delta(y-\nu) q_{(x,y)(x,y;x+\nu,y-\nu-1)}(s) \\
& \quad - q_{(x,y)(x+\nu-1,y-\nu)}(s) \\
& \quad + g_{(x,y)(x,y)}(s) p_{(x,y)(x,y;x+\nu-1,y-\nu)}(s) \\
& \qquad \qquad \qquad ; x > 0, 0 \leq \nu \leq y \quad (3.85)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& p_{(x,y)(x,y;x+\nu,y-\nu)}(s) \\
& = q_{(x,y)(x,y;x+\nu,y-\nu)}(s) \\
& \quad - \delta(y-\nu) q_{(x,y)(x,y;x+\nu+1,y-\nu-1)}(s) \\
& \quad - \lambda \phi_{y,\nu}(s+\lambda) \\
& \quad + g_{(x,y)(x,y)}(s) p_{(x,y)(x,y;x+\nu,y-\nu)}(s) \\
& \qquad \qquad \qquad ; x > 0, y > 0, 1 \leq \nu \leq y \quad (3.86)
\end{aligned}$$

ただし、

$$\delta(k) = \begin{cases} 1 & ; k > 0 \\ 0 & ; k \leq 0 \end{cases} \quad (3.87)$$

$g_{ij}(s)$ は状態 i から状態 j までの初期通過時間分布の LS 変換である。特に $g_{ii}(s)$ ($i \in S_R$) は状態 i における再帰時間分布を表わし、埋め込まれたマルコフ再生過程から求め得る。

式 (3.83) ~ (3.86) から、 $p_{(x,y)(x,y)}(s)$ および $p_{(x_k,y_k)(x_k,y_k;x,y)}(s)$ の形をしたすべての確率に対する表式が直ちに求まる。初期状態が一般に (x_0, y_0) の場合は次式となる。

$$\begin{aligned}
& p_{(x_0,y_0)(x,y)}(s) \\
& = g_{(x_0,y_0)(x,y)}(s) p_{(x,y)(x,y)}(s) \\
& \qquad \qquad \qquad ; (x_0, y_0) \neq (x, y) \quad (3.88)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& p_{(x_0,y_0)(x_k,y_k;x,y)}(s) \\
& = g_{(x_0,y_0)(x_k,y_k)}(s) p_{(x_k,y_k)(x_k,y_k;x,y)}(s) \\
& \qquad \qquad \qquad ; (x_0, y_0) \neq (x_R, y_R) \quad (3.89)
\end{aligned}$$

次に定常状態を考える。 $g_{ij}(0) = 1$ であるから、式 (3.88) (3.89) より、極限確率 $p_{ij}(0)$ は i に無関係となる。定常状態 ($s \rightarrow 0$) で状態が $j \in S$ である確率を $p_j = p_{ij}(0)$ と表わす。式 (3.83) ~ (3.86) の両辺に対して演

算 $[-d/ds]_{s=0}$ を行ない、微分を具体的に計算すれば次式を得る。

$$P_{(0,y)} = \begin{cases} (1/\mu n) / \mu_{(0,n)(0,n)} & ; y = n \\ \{1/(\beta\lambda + \mu y)\} / \mu_{(0,y)(0,y)} & ; y < n \end{cases} \quad (3.90)$$

$$P_{(x,y)} = [y\mu \{\bar{\phi}_{y,0}(\lambda) - e^{-\lambda T} \bar{\phi}_{y,0}(0)\} + \lambda \bar{\phi}_{y,0}(\lambda)] / \mu_{(x,y)(x,y)} ; x > 0 \quad (3.91)$$

$$P_{(x,y;x+\nu-1,y-\nu)} = [-\delta(\nu)(y-\nu+1)\mu e^{-\lambda T} \bar{\phi}_{y,\nu-1}(0) + (y-\nu)\mu e^{-\lambda T} \bar{\phi}_{y,\nu}(0) + T\eta_{y,\nu}(0)] / \mu_{(x,y)(x,y)} ; x > 0, 0 \leq \nu \leq y \quad (3.92)$$

$$P_{(x,y;x+\nu,y-\nu)} = [- (y-\nu+1)\mu \{\bar{\phi}_{y,\nu-1}(\lambda) - e^{-\lambda T} \bar{\phi}_{y,\nu-1}(0)\} + (y-\nu)\mu \{\bar{\phi}_{y,\nu}(\lambda) - e^{-\lambda T} \bar{\phi}_{y,\nu}(0)\} - \lambda \bar{\phi}_{y,\nu}(\lambda)] / \mu_{(x,y)(x,y)} ; x > 0, y > 0, 1 \leq \nu \leq y \quad (3.93)$$

ただし、

$$\bar{\phi}_{y,\nu}(s) = -d\phi_{y,\nu}(s)/ds \quad (3.94)$$

$$\mu_{jj} = [-dg_{jj}(s)/ds]_{s=0} \quad (3.95)$$

平均再帰時間 μ_{jj} ($j \in S_R$) は、埋め込まれたマルコフ再生過程に対応するマルコフ連鎖の極限確率 π_i ($i \in S_R$) を用いて次式で算出できる。

$$\mu_{jj} = (\sum_{i \in S_R} \pi_i \gamma_i) / \pi_j \quad (3.96)$$

$$\eta_i = [- (d/ds) \sum_{(x',y') \in S_R} q_{(x,y)(x',y')}(s)]_{s=0} = \begin{cases} 1/\mu n & ; x = 0, y = n \\ 1/(\beta\lambda + \mu y) & ; x = 0, y < n \\ (1 - e^{-\lambda T})/\lambda & ; x > 0 \end{cases} \quad (3.97)$$

< 駅の評価パラメータ >

定常状態において出発待ち台数 $X_t = x$ 、乗降車両数 $Y_t = y$ である確率を $R(x, y)$ とする。これは式 (3.90) ~ (3.93) の結果を用いて次式で算出できる。

$$R(x, y) = p_{(x, y)} + \sum p_{(x_R, y_R; x, y)} \quad (3.98)$$

ただし、右辺第2項の和は $(x_R, y_R; x, y) \in S_{NR}$ であるようなすべての (x_R, y_R) についてとる。

(a) 各種平均数・平均時間

定常状態における平均出発待ち車両数 $\bar{X}$ ($= X_t$ の平均)、平均乗降車両数 $\bar{Y}$ ($= Y_t$ の平均)、平均空バース数 $\bar{Z}$ ($= [n - X_t - Y_t]$ の平均) は次式で求まる。

$$\bar{X} = \sum_{(x, y) \in S_R} x R(x, y) \quad (3.99)$$

$$\bar{Y} = \sum_{(x, y) \in S_R} y R(x, y) \quad (3.100)$$

$$\bar{Z} = n - \bar{X} - \bar{Y} \quad (3.101)$$

平均入駅時間間隔を T_S とする。1つのバースには平均して入駅車両 n 台に1台の割合で車両が入線してくるから、バースへの平均入線時間間隔は

$$T_B = n T_S \quad (3.102)$$

となる。

1つのバースでは平均 T_B の周期で、空→乗降中→出発待ち→空のサイクルを繰り返す。定常状態では平均して $\bar{X}$ バースが出発待ち、 $\bar{Y}$ バースが乗降中、 $\bar{Z}$ バースが空であるから、特定のバースが出発待ち、乗降中、空である確率は、それぞれ $\bar{X}/n$ 、 $\bar{Y}/n$ 、 $\bar{Z}/n$ である。一方、特定のバースが出発待ち、乗降中、空である確率は、それぞれ平均出発待ち時間 t_x 、平均乗降時間 t_y 、平均バース空き時間 t_z ($t_x + t_y + t_z = T_B$) の、周期 T_B に対する比とも考えられる。したがって、

$$\begin{aligned} (t_x, t_y, t_z) &= (\bar{X}/n, \bar{Y}/n, \bar{Z}/n) T_B \\ &= (\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}) T_S \end{aligned} \quad (3.103)$$

となる。ところで、平均乗降時間は $t_y = 1/\mu$ であるから式 (3.103) から次式を得る。

$$T_S = 1/\mu \bar{Y} \quad (3.104)$$

$$t_x = \bar{X}/\mu \bar{Y} \quad (3.105)$$

$$t_y = 1/\mu \quad (3.106)$$

$$t_z = \bar{Z}/\mu \bar{Y} \quad (3.107)$$

平均出発待ち時間 t_x は、図3.3においてキューX内の平均車両数を $\bar{X}$ 、キューXへの平均到来頻度を $\mu \bar{Y}$ としてリトルの公式を適用して得た結果と一致する。

(b) 入駅率、利用率、不利用率

入駅率（到来した入駅希望車のうち実際に入駅できた車両の割合）は次式となる。

$$E = (1 / T_S) / \beta \lambda = \mu \bar{Y} / \beta \lambda \quad (3.108)$$

バスの利用率は、乗降中のときのみバスが有効に利用されていると考え、次式となる。

$$\tilde{Y} = t_y / T_B = \bar{Y} / n \quad (3.109)$$

これに対応させて次式のXを不利用率と呼ぶ。

$$X = t_x / T_B = \bar{X} / n \quad (3.110)$$

(c) 入力負荷と出力負荷

これまで、モデルのパラメータは $n, \beta, \lambda, \mu, T$ の5個であった。しかし、これまでは単位時間のとり方は任意であったので、これを適当にとり、独立なパラメータを4個にできる。以下では平均乗降時間 $1 / \mu$ を単位時間と考え、独立なパラメータを $n, \beta, \rho, \lambda T$ とする。ただし、 $\rho = \beta \lambda / n \mu$ である。

ρ は駅の処理能力 $n \mu$ に対する入駅希望車到来頻度 $\beta \lambda$ の比である。 λT はチェック区間の長さ T と車両の平均到来時間間隔 $1 / \lambda$ の比であり、これが大きいと出発不可とされる確率 $1 - \exp(-\lambda T)$ が大きくなる。後の数値例で明らかになるように、図3.3のシステムにおいて ρ が増すと入力側のキューYの平均車両数 $\bar{Y}$ が増し、 λT が増すと出力側のキューXの平均車両数 $\bar{X}$ が増す。このことから ρ を入力負荷、 λT を出力負荷と呼ぶ。

(d) 駅評価尺度の整理

平均出発待ち車両数 $\bar{X}$ 、平均乗降車両数 $\bar{Y}$ を n で規格化し、

$$\tilde{X} = \bar{X} / n, \quad \tilde{Y} = \bar{Y} / n \quad (3.111)$$

とおく。これらはそれぞれ式(3.110)(3.109)の不利用率、利用率でもある。これを用いて駅の評価尺度の主なものを整理すると以下のようになる。

バスへの平均入線時間間隔

$$T_B = 1 / \tilde{Y} \quad (\times 1 / \mu) \quad (3.112)$$

平均出発待ち時間

$$t_x = \tilde{X} / \tilde{Y} \quad (\times 1 / \mu) \quad (3.113)$$

入駅率

$$E = \tilde{Y} / \rho \quad (3.114)$$

バス当たり出駅頻度 (台/時間・バス)

$$F = 1 / T_B = \tilde{Y} \quad (\times \mu) \quad (3.115)$$

式 (3.112) (3.113) (3.115) では単位時間が $1/\mu$ であることに注意されたい。E は単位時間の取り方に無関係である。

入駅率 ≤ 1 より $\tilde{Y} \leq \rho$ がわかる。特に負荷 ρ , λT が十分小さいときは入駅率 $E \approx 1$ となるので利用率 $\tilde{Y} \approx \rho$ である。

<数値例>

$n = 2$ 、 $\beta = 0.1$ とし、 ρ および λT を変化させたときの数値例を図 3.22 および図 3.23 に示す。

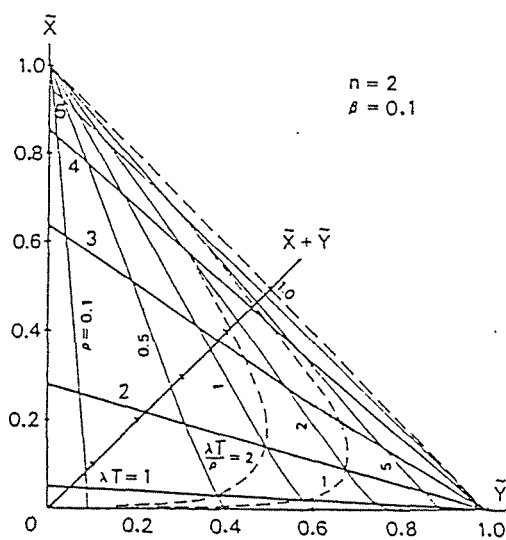


図 3.22 $(\tilde{Y}, \tilde{X})$ の軌跡

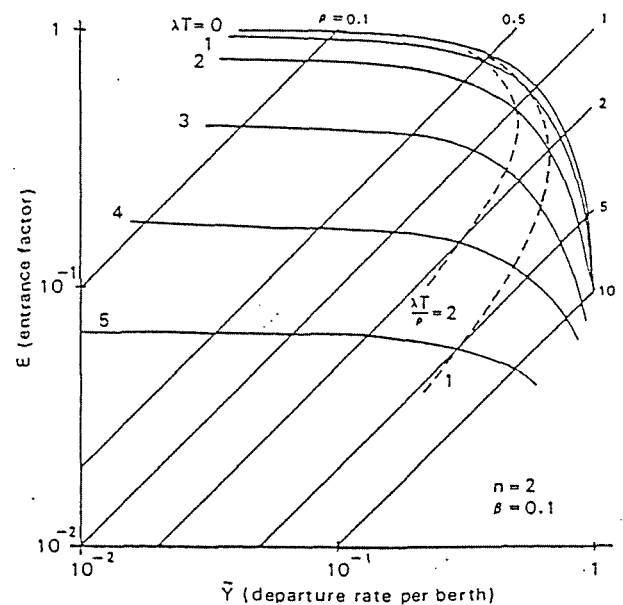


図 3.23 $(\tilde{Y}, E)$ の軌跡

図3.22は、 ρ を固定し λT を変化（ n, β, λ, μ を固定して T を変化）させた場合、および λT を固定し ρ を変化（ n, β, λ, T を固定して μ を変化）させた場合の (Y, X) の軌跡を実線で、また、 ρ および λT を同じ割合で共に変化（ n, β, μ, T を固定して λ を変化）させた場合の軌跡を破線で示したものである。この図から、与えられた ρ および λT に対して (Y, X) が定まるが、この点から $X + Y$ 軸へ垂線をおろせば $X + Y$ の値すなわち（定常状態で駅にいる平均車両数）/ n が読み取れる。さらに、この点 (Y, X) と原点とを結ぶ直線の傾き X/Y は平均出発待ち時間（ $\times 1/\mu$ ）を表わす。図3.23は図3.22と同様の方法で ρ と λT を変化させた場合の（バス当たり出駅頻度 Y 、入駅率 E ）の軌跡を示したものである。これらの図から、入力負荷と出力負荷の変化によって、駅の評価パラメータがどのように変わるか、また、どのようなトレードオフがあるかが容易に読み取れよう。

3.7 まとめ

本章では、まず多バース駅の論理モデルを構成し、さらにマルコフ再生過程に基づいて確率モデルを構成した。これを解析することにより、次のような成果を得た。

- ・平均入駅時間間隔、出駅頻度、入駅率、利用率の、車両到来頻度、バース数に対する変化を明らかにした。
- ・入駅率と出駅頻度の間のトレードオフを示し、バース増設の効果が高負荷時および低負荷時でどのように異なるかを明らかにした。
- ・平均入駅時間間隔に対する表式を陽に求め、その物理的意味と漸近特性から、多バース駅と1バース駅の本質的な差異を明らかにした。
- ・多バース駅と等価な処理能力を持つ1バース駅を考えることにより、バース増設の効果を1バース駅における乗降時間と出発可否判定時間の減少へ定量的に換算する表式を得た。
- ・出発待ち時間、入駅率、出駅頻度の特性を、入力負荷、出力負荷との関連で明らかにした。

本章において如何にシステム工学的な考え方が用いられているか注意されたい。論理モデルと確率モデルを区別してそれぞれを十分説明することに力点を置いた。それでも本モデルを理解するのはやや困難であつたろうと想像する。まして、論理的側面と確率的側面を融合する従来のモデリング法では、本モデルはほとんど理解しがたくなつたで

あろう。また、モデルを構成するにあたっては、モデリングの目的をふまえて、むやみに複雑なモデルにしなかった。たとえば、到来車種のうち入駅希望車をさらに分類して入駅希望実車（客が乗っている入駅希望車）と入駅希望空車に分け、それぞれの乗降時間分布を異なったものにしたほうがより精細なモデルにはなる。実際、1バース駅モデル[27]ではそうしている。しかし、多バースの場合にはこれはモデルを非常に複雑にする。本章のモデルは多バース駅の本質的な特徴をよくとらえており、この解析により、多バース駅の多くのトラヒック特性を明らかにすることができた。このモデルをさらに詳細化して結果の精度を上げることは、本研究の手法を用いれば単なる練習問題のようなものになってしまうであろう。また、開発途上にある個別軌道輸送システムにとって本研究以上の詳細なデータは現段階では必要ない。

本章ではモデルを説明するため多くの図を用いた。なかでも、図3.4、図3.20のように確率過程のアルゴリズム的な表現は本論文独自のものであり、離散系確率システムの非常に有効な表現方法である。また、(3.60)式の導出にあたっては、シグナルフローグラフが重要な洞察を与えたことにも注意されたい。

第4章 平面交差点の同期制御アルゴリズムとトラヒックの評価

4.1 まえがき

個別軌道輸送システムにおいて車両の円滑な流れを妨げる可能性のある要素は駅と交差点である。前章では駅をモデル化してトラヒック解析を行なった。本章と次章では交差点を対象として論じる。個別軌道輸送システムの交差点には通常の交差点のような信号はない。各車両はシステムの同期制御アルゴリズムにしたがって、一時も停止することなく交差点をスムーズに通過するのである。ノンストップであることは個別軌道輸送システムの大きな特徴の一つであり、停止・走行の繰り返しにより生ずる無駄なエネルギーや時間を極力減らし、円滑な運行を目指している。このように、交差点の同期制御は個別軌道輸送システム固有の技術であり、十分に研究する必要がある。また、個別軌道輸送システムは面的なネットワークを持ち、数多くの交差点が市街に密に配置されるため、交差点の性能はシステム全体の性能に大きな影響を与える。したがって、効率の良い同期制御アルゴリズムを考案し、その制御のもとで車両の流れが円滑であるか否かを定量的に解析するためのモデリングと評価は、個別軌道輸送システムの実用化にとって非常に重要である。

この種の解析に対しては、シミュレーションと確率論の2つのアプローチがある。シミュレーション [44- 47] は複雑なシステムの性能を様々な観点からとらえる手段を提供するが、多くの時間とコストを必要とする。確率論に基づく理論的アプローチは、短時間かつ低コストでシステムの性能を厳密に評価する方法を与える。Thangavelu [40] は通常の待ち行列理論 ($M/D/1$, $G/M/1$) を用いて、高速路同士が交差する立体交差点をモデル化し、解析した。浜松 [37- 39] らはマルコフ連鎖の手法を用いて、高速路と低速路が交差する立体交差点をモデル化し、解析した。しかし、これらの研究には幾分不満な点が残っている。それは、これらの研究における交差点モデルは、実際の同期制御アルゴリズムに正確に基づいたものではなく、通常の待ち行列モデルによる近似である点である。しかも、そのモデルの妥当性が十分に説明されていない。したがって、これらの研究の解析結果は、その正確さの面で再検討の余地があろう。また、本章の研究を動機付けた最も大きな点は、これらの研究はいずれも立体交差点を対象としていたことである。しかし、わが国で開発されたC V Sは平面交差点を採用している。

第1章で述べたように、C V Sネットワークは高速路ネットワークと低速路ネットワークの2レベルから成っている。高速路ネットワークはおよそ60 km/hの走行速度で都市間を結ぶ。低速路ネットワークはおよそ40 km/hの走行速度で都市内の面的輸送を提供する。たとえば、A市のP地点からB市のQ地点へ行く場合、車両はまず低速路を通過してPからA市内のインターチェンジまで行き、次に高速路を通過してA市からB市へ行き、最後に再び低速路を通過してQへ行く。C V Sネットワークには3種類の交差点が必要であることに注意されたい。すなわち、①2本の高速路が交差するもの、②1本の高速路と1本の低速路が交差するもの、③2本の低速路が交差するもの。①は高速路ネットワークで用いられる。②はネットワークの2レベル間のインターフェースを提供する。①②のタイプは通常、立体交差点である。③は低速路ネットワークで用いられ、通常は平面交差点であることが意図されている。しかし、これまで平面交差点の同期制御とトラヒック解析に関しては全く研究がなされていない。その理由として考えられるのは、諸外国において作られたシステムはいずれも立体交差であったからであろう。しかし、わが国のC V Sは平面交差を採用している。実際、わが国の土地の狭さを考えると、市街に大きな立体交差点を密に多数設けることは難しいであろう。

本章では平面交差点における同期制御アルゴリズムを考案し、確率論に基づいて理論的にトラヒック解析を行なう。このアルゴリズムは非常に簡潔でリアルタイム性に優れている。また、次の3つの制約 — 先着順サービス、乗換えセル数の上限、衝突回避 — のもとで遅れ時間を最小にしているという意味で最適なものである。トラヒック解析は完全にこの現実的なアルゴリズムに基づいている。車両のランダム到来が仮定され、このアルゴリズムに基づく交差点の状態変化が1次元乱歩として知られる簡単なマルコフ連鎖として定式化される。これを解析することにより、3つの性能評価尺度 — 遅れ時間、迂回率、スループット — に対する正確な表式が陽に得られる。

4.2 交差点の形態と車両の挙動

図4.1に平面交差点の概念図を示す。本線(main line)1と本線2が交点(cross point)Cで平面交差している。本線1から2、または本線2から1へ分岐合流するために、側線D1-M2およびD2-M1が設けられている。D1、D2を分岐点(diverge point)、M1、M2を合流点(merge point)という。

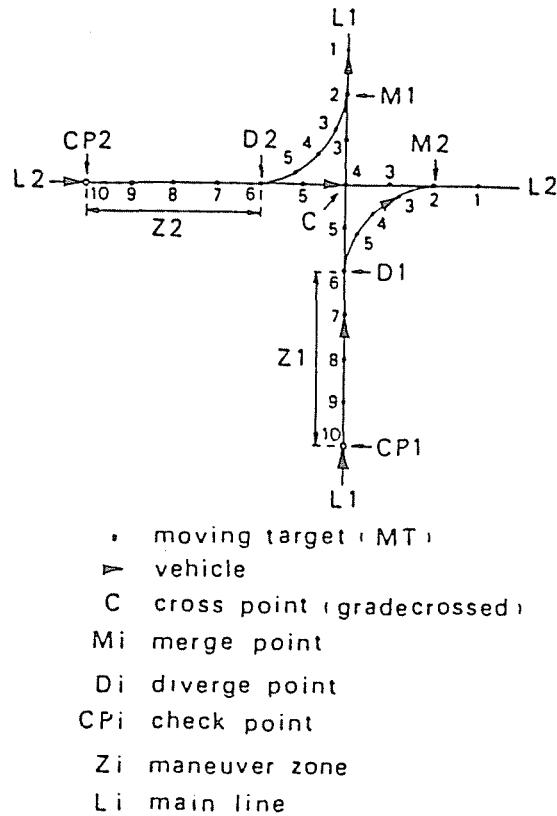


図4. 1 平面交差点の概念図

本線上、分岐点の手前にチェックポイント (check point) CP1, CP2が設けられている。CP1-D1間、CP2-D2間を乗換え区間 (maneuver zone) という。

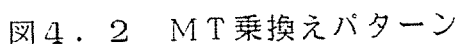
本線および側線上では、計算機により生成された仮想的なセルが移動しており、その前端をムービングターゲット (moving target、以下MTと略) という。隣接するMTの時間間隔は一定値 Δt である。時刻 $k\Delta t$ (k は整数) にCP1およびCP2を通過したMTの番号を k とし、このMTをMT# k と記す。図4. 1の場合は、CP1およびCP2上をMT#10が通過した時点なので、時刻 $10\Delta t$ での交差点の様子を表わしていることになる。番号の等しいMTは、交点および合流点M1、M2で同期する。

本線上のチェックポイントに到来する車は「直進希望車」と「分岐希望車」の2種とする。直進希望車は交差点をそのまま直進することを希望している車両である。(しかし、実際には、直進できず強制的に分岐させられることがある〔後述〕。) 分岐希望車は、分岐点で分岐し、他の本線へ合流することを希望している車両である。(実際に必

車両は、乗換え区間内を除いては、割り当てられているMTに正確に追従しながら走行するが、乗換え区間内では一般に「MT乗換え」を行なう。これを説明するための例として、図4.1のようにCP1, CP2共に車があり、しかも、少なくとも一方の車が直進希望車である場合を考える。このとき、両車両をこのまま進ませては交点または合流点で衝突が生じてしまう。このような状況を「MTの競合」が起きているという。MTの競合が発生したときは、車両が追従するMTを、乗換え区間内で変更させることにより競合を解消する。これがMT乗換えであり、次節でさらに詳しく述べる。

本論文では、上記のような競合が発生していないときでも、すみやかな運行を実現するためにMT乗換えを行なわせる。

MT #mを割り当てられたMT #k上の車両は、乗換え区間内で適当な速度パターンに従って加減速をし、分岐点に達するまでには割り当てられたMT #mへの乗換えを完了する。図4. 2の実線はMT #0からMT #1へ、破線はMT #3からMT #2へ乗換えるときの車両位置の経時変化を示している。



車両は、 $k < m$ のときには $(m - k)$ セルだけ後方のセルへ、 $k > m$ のときには $(k - m)$ セルだけ前方のセルへ乗換えることになる。図4. 2の実線は後方へ1セル、破線は前方へ1セルだけ乗換えるパターンを表わしているといえる。

乗換えセルの数には上限があり、本線1、2とも、前方へは最大 f セル、後方へは最大 b セルとする。すなわち、 m には

$$k - f \leq m \leq k + b$$

の制約がつく。 f 、 b は車両の加減速度、乗換え区間の長さ、走行速度の上下限などにより決まる（走行速度の下限は円滑な運行を行なうために必要である）。

さて、 m を具体的に決定するリアルタイム・アルゴリズムを述べる。本論文では、割り当ての戦略として、次の3つの制約

- ・最も最近CP1またはCP2を通過した車に割り当てたMTよりも後ろに割り当てる（先着順の制約）。
- ・前方へは最大 f セル、後方へは最大 b セルしか乗換えを許さない（乗換えセル数の制約）。
- ・交点や合流点で衝突を発生させない（衝突回避の制約）。

の範囲内で、車両を「できるだけ前方に」割り当ててることを考えている。

本方式をさらに詳しく述べる前に、以下で用いる変数 n 、 k 、 x を定義しておく。

n は、上述の制約を満たすMTのうち、最前方のMTの番号であり、次の到来車に割り当てるMTの第一候補である。より直観的にいえば、 n は、計算機が次の到来車に割り当てようとしているMTの番号である。ただし、後述のように、つぎの到来車が2台同時にやってきて競合が発生した時は、いずれか一方の車には第二候補であるMT# $(n + 1)$ を割り当てることがある。

k は次にチェックポイントを通過するMTの番号であり、 Δt 毎に1ずつ増加する。

x は $n - k$ の値を保持する変数であり、後に述べる確率過程の状態を表わす。もしMT# k 上の車にMT# n が割り当てられると、その車は乗換え区間内で x セルだけ後方にMTを乗り換えることにより、MT# n に乗換える。ただし、「 x セルだけ後方」は、 $x < 0$ のときには「 $-x$ セルだけ前方」と読みかえることとする。したがって、乗換えセル数の制約から

$$-f \leq x \leq b \tag{4.1}$$

でなければならない。

以上の記号をもとに、本論文で扱う割り当て方式を説明する。

本方式は、到来車両にできるだけ前方のMTを割り当てる考えに基づいている。初期状態は $k = 0$, $n = -f$, $x = -f$ とする。

時刻 $k \Delta t$ においてMT # k がチェックポイントを通過したとき、計算機はCP 1 およびCP 2 上の車種（直進希望車、分岐希望車、車両がない — それぞれ記号S, D, Oで表わす）の組み合わせにより、表4. 1のように制御する。（ただし、表中の確率については後述。）

Vehicles on CP1 CP2		Classification	Probability		Control
O	O	Relaxation	rr'	μ	If $-f < x \leq b$, $k \leftarrow k+1$, $n \leftarrow n$, $x \leftarrow x-1$. If $x = -f$, $k \leftarrow k+1$, $n \leftarrow n+1$, $x \leftarrow x$
S	O	Non-conflict	pr'	$1-\lambda-\mu$	Assign the vehicle(s) MT# n , and $k \leftarrow k+1$, $n \leftarrow n+1$, $x \leftarrow x$
D	O		qr'		
O	S		rp'		
O	D		rq'		
D	D	Conflict	qq'	λ	If $-f < x < b$, assign MT# n to one of the vehicles and MT# $(n+1)$ to the other. Then $k \leftarrow k+1$, $n \leftarrow n+2$, $x \leftarrow x+1$. If $x = b$ then assign MT# n to both vehicles and force them to diverge even if they are wishing to go straight. Then $k \leftarrow k+1$, $n \leftarrow n+1$, $x \leftarrow x$.
S	D		pq'		
D	S		qp'		
S	S		pp'		

S : wishing to go straight
 D : wishing to diverge
 O : no vehicle exists

表4. 1 セル割り当て方式

1) 本線 1、2 とも車両が存在しない場合（緩和;Relaxation）、車両の割り当ては行なわれない。したがって、MT # n は次の時刻 $(k + 1) \Delta t$ に到来する車両に割り当て可能であるから、n の値をそのままに保持し、

$$k \leftarrow k + 1, \quad x \leftarrow x - 1$$

とする。

ただし、 $x = -f$ のときには、上記の処理で更新された x の値は $-f - 1$ となり、式 (4. 1) を満たさない。したがって、 $x = -f$ のときには、乗換えセル数の制約から、次の時刻に到来する車両に MT # n を割り当てることを放棄し、MT # $(n + 1)$ 以降を割り当てることにする。すなわち、

$$k \leftarrow k + 1, \quad n \leftarrow n + 1$$

とし、 x の値を $-f$ のまま保持する。

2) 本線 1、2 のいずれか一方にのみ車両が存在、または、両方に分岐希望車が存在する場合（非競合;Non-conflict）、これらの車両（1 台または 2 台）に MT # n を割り当てる。そうしても衝突は生じないからである。そして、次の到来車のために、

$$k \leftarrow k + 1, \quad n \leftarrow n + 1$$

とする。 x の値は変わらない。

3) 本線 1、2 ともに車両が存在し、かつ、少なくとも一方が直進希望車の場合（競合;Conflict）、両車両に同じ番号の MT を割り当てては衝突が生ずる。したがって、一方の車両には MT # n を、他方の車両には MT # $(n + 1)$ を割り当てる。そして次の時刻に到来する車両には MT # $(n + 2)$ を割り当てることにする。すなわち、

$$k \leftarrow k + 1, \quad n \leftarrow n + 2, \quad x \leftarrow x + 1$$

としておく。なお、この場合、どちらの車両を優先して MT # n に割り当てるかは、本論文の議論では重要ではないので、その方式を特に示すことはしない。（専門的には、このアルゴリズムは、非決定的に記述されているという。）

さて、 $x = b$ のときには、上述の処理で更新された x の値は $b + 1$ となり、式 (4. 1) を満たさない。したがって、 $x = b$ のときには、両車両ともに MT # n を割り当て、直進希望車であっても強制的に分岐させる指令を出す。そして、

$$k \leftarrow k + 1, \quad n \leftarrow n + 1$$

とし、 x の値を b のまま保持する。

以上からわかるように、分岐希望車は望みどおり必ず分岐できるのに対し、直進希望車は交差点を必ず直進できるとは限らず、状況によっては強制的に分岐させられることがある。強制的に分岐させられた直進希望車は他のルートを経由して目的地へ向かうことになるが、ここでは詳しく述べない。

図4. 3のフローチャートは、このアルゴリズムをより实际的に記述したものである。ある車両にMT # nを割り当てることは、その車両にxセルだけ後方に乗換える指令を出すことと等しいことに注意されたい。また、このフローチャートからわかるように、変数nとkは実際には必要ない。変数はxのみである。この交差点は、-fからbまでの値をとる1つの状態変数xのみで制御することができるのである。換言すると、xを状態変数とするこのシステムは、状態空間を{-f, . . . , b}とし、表4. 1の9種類の到来パターンの系列を入力とするオートマトンを形成している。このオートマトンにおける状態xの推移は、

$$x \leftarrow x - 1, \quad x \leftarrow x, \quad x \leftarrow x + 1$$

の3通りしかない。

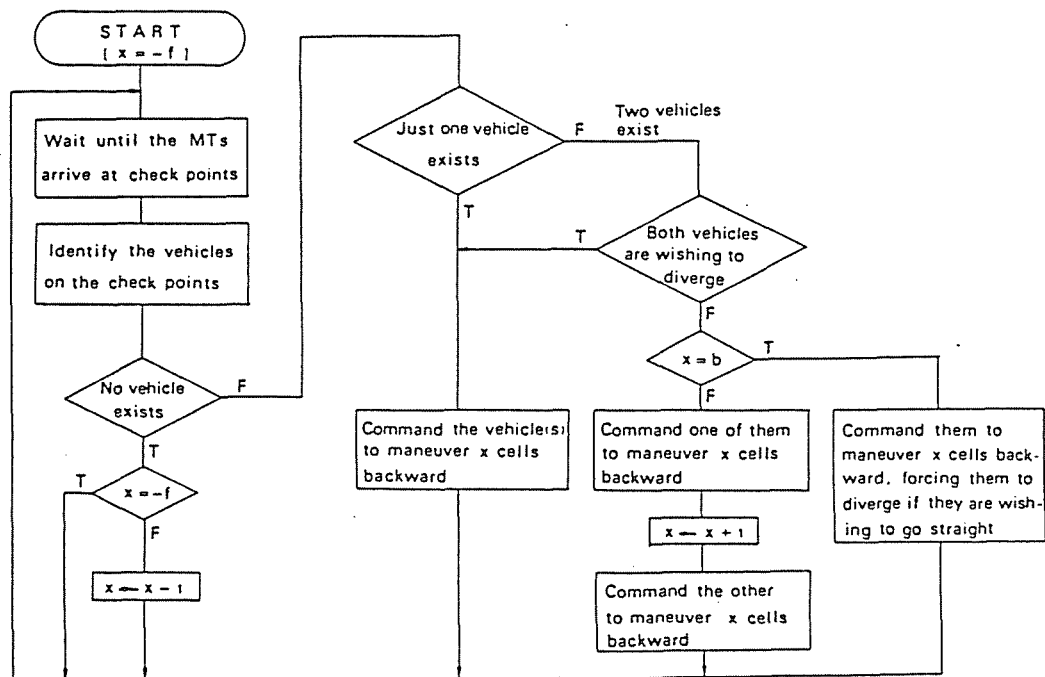


図4. 3 制御アルゴリズム

【制御の例】 以下では、例を用いて本アルゴリズムの動作を説明する。いま、 $f = 1$ 、 $b = 2$ とし、車両が図4.4の到来パターンに従ってチェックポイントに到来すると仮定する。初期状態（時刻 $0 \Delta t$ 直前の状態）は、 $k = 0$ 、 $n = x = -1$ である。

時刻 $0 \Delta t$ において、直進希望車 S と分岐希望車 D がそれぞれチェックポイント $CP1$ と $CP2$ に到来する。その結果、 S は $MT \# (-1)$ に、 D は $MT \# 0$ に割り当てられる。各変数の値は、時刻 $1 \Delta t$ 直前まで $k = n = 1$ 、 $x = 0$ となる（図4.5）。

input

MT No.	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
main line 1	S	D	D	S	S	O	S	O	O	O
main line 2	D	D	S	S	D	O	O	O	O	S

図4.4 到来車両の列

input

MT No.	0	1		
main line 1	S			
main line 2	D			

output

main line 1	S			
main line 2		D		
MT No.	-1	0	1	

n

図4.5 時刻 $1 \Delta t$ 直前の状況

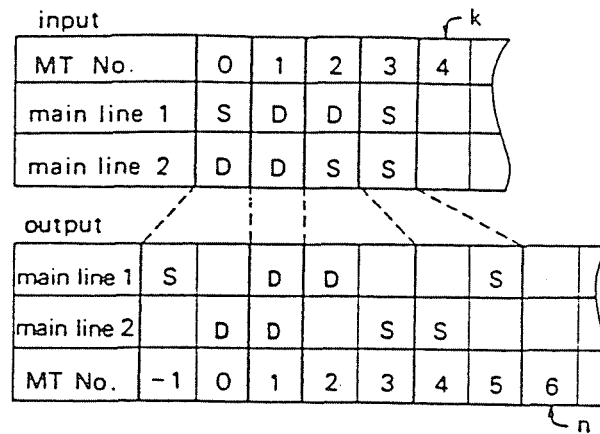


図 4. 6 時刻 $4\Delta t$ 直前の状況

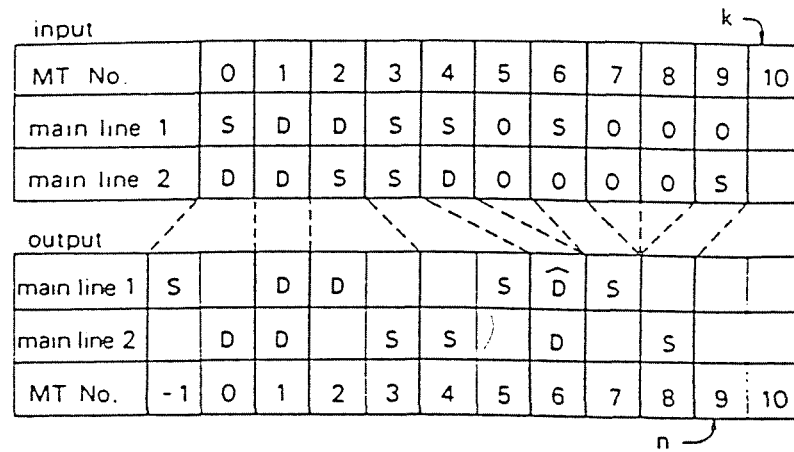


図 4. 7 時刻 $10\Delta t$ 直前の状況

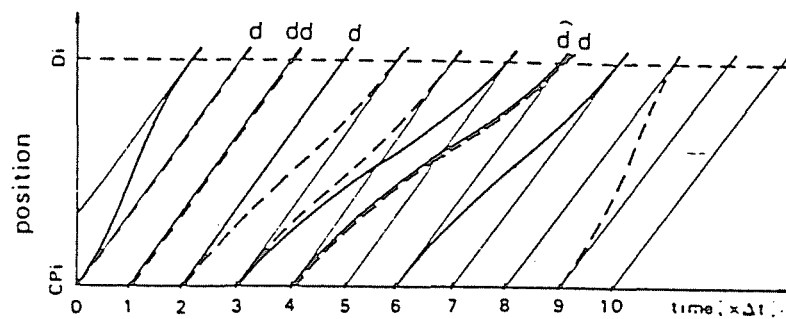


図 4. 8 車両位置の経時変化

時刻 $1 \Delta t$ には、2 台の分岐希望車が到来し、共に MT # 1 に割り当てられる。時刻 $2 \Delta t$ には、分岐希望車と直進希望車が各 1 台ずつ到来し、それぞれ MT # 2、MT # 3 に割り当てられる。時刻 $3 \Delta t$ では、2 台の直進希望車が MT # 4 と MT # 5 に割り当てられる。この時点で、 $k = 4$ 、 $n = 6$ 、 $x = 2$ となっている（図 4. 6）。

時刻 $4 \Delta t$ においては直進希望車 S と分岐希望車 D が到来するが、直進希望車は強制的に分岐させられ、その結果、両車両とも MT # 6 に割り当てられる。このようにして、時刻 $10 \Delta t$ においては、 $k = 10$ 、 $n = 9$ 、 $x = 1$ となり、図 4. 7 のような割り当てが行なわれる。（図において、D は、強制的に分岐させられた直進希望車を表わす。）

図 4. 8 は、車両位置の経時変化を示している。実線は本線 1、破線は本線 2 の車両の軌跡を示している。記号 d は分岐希望車、記号 d は強制的に分岐させられた直進希望車を示している。 [例終]

4. 4 議論

このように、本アルゴリズムは非常に単純であり、リアルタイム性に優れ、かつ、マイクロ・プロセッサやハードウェアにより低コストで実現できる。しかも、前述の 3 つの制約のもとで遅れを最小にしているという意味で、最適なアルゴリズムとなっている。以下では、乗換え区間の位置と迂回方式に関して、本モデルの妥当性を議論する。

高速路どうしが立体交差をするような大きな交差点の場合には、本論文のように分岐点の手前で乗換える方式の他に、分岐点通過後に乗換える方式がある。後者の場合には、先着順ではなく精細なスケジューリングを行なうことにより、トラヒック特性を向上させることが報告されている [44, 45]。しかし、本章で対象としている交差点は、平面交差によって低速路どうしが交差するもので、市街に密に配置される小さなものを想定している。したがって、分岐点－合流点間（D 1－M 2、D 2－M 1）および分岐点－交点間（D 1－C、D 2－C）の距離は短く、分岐点通過後の乗り換えは難しい。仮に乗り換えを行なうにしても、乗換えセル数の上限 f 、 b が小さく、乗換えの自由度（後述）が小さいので、それほど有効な結果には至らないであろう。以上から、分岐点の手前に乗り換え区間を設ける本方式が実用的であると考えらる。

さて、通常、立体交差点の場合の準同期制御では、直進希望車は必ず直進でき、強制的に分岐させられることはないが、分岐希望車は状況によっては強制的に直進させられる〔14, 37〕。本論文の平面交差モデルでは逆に、分岐希望車は必ず分岐できるが、直進希望車は強制的に分岐させられることがある。本論文のモデルのように、分岐を望む車は必ず分岐できるようにした場合の特徴を述べる。いま図4. 9の典型的なネットワークを考え、図の分岐点Dで、A方面へ直進を希望する車両が強制的に右折させられたとする。その後、この車両は分岐希望を繰り返せば、図の破線で示す経路にそって最短経路で点Dに戻ることが保証される。もちろん、再び点Dに戻らずに他の経路を選んで目的地に向かうこともできるが、最悪の場合でも、最低のコストで点Dに戻り、再び直進を希望することができる。この性質はまた、「車両が目的駅の近くまで来たにもかかわらず、駅（側線駅）に空バースがないため入駅できず本線側を通り過ぎた」という場合でも、再びその駅へ最短経路で戻ってくることを保証している。

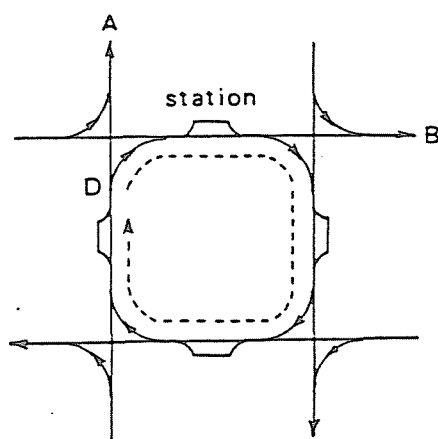


図4. 9 PRTネットワークの一部

4.5 マルコフ連鎖モデル

本節では、4.3節で構成した論理モデルに対して確率的要因を付加し、マルコフ連鎖モデルを構成する。確率的要因としては、次の2つを考える。

- ①本線1および2に到来する車両の到来頻度および車種
- ②競合が起きたときの優先権

①に関しては、本線1に到来するMT上に直進希望車がいる確率を p 、分岐希望車がいる確率を q 、車両がない確率を $r (= 1 - p - q)$ とする。本線2についても同様に p' 、 q' 、 r' を定義する。本線1と2の到来事象は互いに独立であり、また、過去の到来事象とも独立であるとする。

②は、前節のケース3)で競合が発生した場合に、どちらの車両をMT# n に割り当て、どちらの車両をMT# $(n+1)$ に割り当てるかに関するものである。実システムでは、何等かの方式でこれを適当に決める必要がある。しかし、本アルゴリズムでは、これをどのように決めても状態の推移には影響ない(いずれにせよ、 $k \leftarrow k+1$ 、 $n \leftarrow n+2$ 、 $x \leftarrow x+1$ となる)。本論文では、性能評価の便宜上、この方式を特に決めることはせず、どちらを優先するかは確率 $1/2$ ずつでランダムに決定することにしておく。なお、この仮定は、次節の遅れ時間の評価にのみ用いられ、他に影響を与えることはない。また、この仮定を多少変えても遅れ時間の評価の方法および評価値にそれほど大きな変化を与えることはない。

さて、①の仮定により、 Δt ごとの x の値の変化に着目すると、その時系列は確率過程を形成し、次のような推移確率 p_{ij} を持つ有限マルコフ連鎖となる(表4.1参照)。

$$p_{x, x-1} = \mu \quad ; -f < x \leq b \quad (4.2)$$

$$p_{x, x} = \begin{cases} 1 - \lambda & ; x = -f \\ 1 - \lambda - \mu & ; -f < x < b \\ 1 - \mu & ; x = b \end{cases} \quad (4.3)$$

$$p_{x, x+1} = \lambda \quad ; -f \leq x < b \quad (4.4)$$

ただし、

$$\lambda = p p' + p q' + q p' \quad (4.5)$$

$$\mu = r r' \quad (4.6)$$

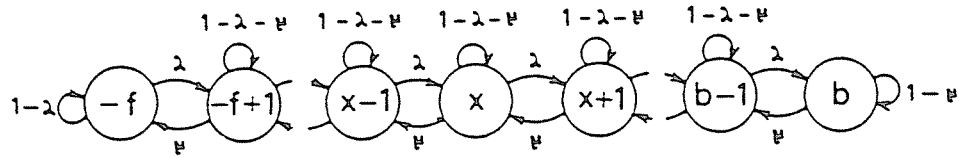


図4.10 状態推移図

このマルコフ連鎖は一次元乱歩の特別な場合であり、状態推移図は図4.10のようになる。

4.6 解析

本節では、前節で定義されたマルコフ連鎖の解析に基づいて、遅れ時間、迂回率、スループットという3つの性能評価尺度に対する表式を陽に求める。

[xの平衡分布と期待値]

平衡時に $x = i$ である確率を $\pi[i]$ とすると、図4.10より、次の平衡方程式を得る [56, 57]。

$$\begin{aligned} \pi[-f] &= \pi[-f](1-\lambda) + \pi[-f+1]\mu \\ \pi[i] &= \pi[i-1]\lambda + \pi[i](1-\lambda-\mu) + \pi[i+1]\mu \quad ; -f < i < b \\ \pi[b] &= \pi[b-1]\lambda + \pi[b](1-\mu) \\ \pi[-f] + \pi[-f+1] + \cdots + \pi[b] &= 1 \end{aligned} \tag{4.7}$$

これは容易に解け、次式を得る。

$$\pi[i] = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^{f+i}}{1-\rho^{L+1}} & , \rho \neq 1 \\ \frac{1}{L+1} & \end{cases} \quad ; -f \leq i \leq b \tag{4.8}$$

$$\text{ただし、} \quad \rho = \lambda / \mu \quad (4.9)$$

$$L = f + b \quad (4.10)$$

ρ は、待ち行列理論でいうトラヒック密度である。 L は乗り換えの自由度とでもいうべき量である。

x の期待値 $\bar{x}$ は次式となる。

$$\bar{x} = \begin{cases} \frac{\rho}{1-\rho} \cdot \frac{1-(L+1)\rho^L + L\rho^{L+1}}{1-\rho^{L+1}} - f & , \rho \neq 1 \\ \frac{L}{2} - f & , \rho = 1 \end{cases} \quad (4.11)$$

分布 $\{\pi[i]\}$ は幾何的であり、その形状は ρ と L で決まる。 f はこの分布を左にシフトする効果を持つ。

また、特に、後によく参照される量

$$\pi[b] = \begin{cases} \frac{(1-\rho)\rho^L}{1-\rho^{L+1}} & , \rho \neq 1 \\ \frac{1}{L+1} & , \rho = 1 \end{cases} \quad (4.12)$$

も ρ と L のみで決まる。

[遅れ時間の分布と期待値]

図4.2などからもわかるように、車両が後方へ δ セルだけ乗換える場合は、乗換えない場合に比べて、乗換え区間を通過する時間が $\delta \Delta t$ だけ長くなる。したがって、乗換えセル数 δ は、 Δt を単位時間としたときの遅れ時間を表わしているといえる。ただし、 $\delta < 0$ のときは前方へ $-\delta$ セルだけ乗換えることを表わし、 $-\delta$ は進み時間を表わす。

先に求めた $\{\pi[i]\}$ は x の分布であり、実際に乗換えるセル数とは必ずしも一致しない。 $x = i$ のときは、次の到来車は i セルだけ乗換えるか、または、競合が発生したときは $(i+1)$ セルだけ乗換えることがあるのを思い出していただきたい。以下では、 x の分布 $\{\pi[i]\}$ から、実際に乗換えるセル数 (= 遅れ時間) の分布を求める。

まず、本線1の直進希望車の遅れ時間 δ_g の分布を求める。遅れが i である場合は次の3通りである。すなわち、いま、本線1上のチェックポイントに直進希望車が到来したという条件のもとで

(a) $x = i$ であり、かつ、競合が発生しない場合。

(b) $x = i$ であり、かつ、競合が発生しているときで、当車両が本線 2 上の車両より優先された場合。

(c) $x = i - 1$ であり、かつ、競合が発生しているときで、本線 2 上の車両が当車両より優先された場合。

競合が発生した場合には、どちらを優先するかは確率 $1/2$ でランダムに決めることにしていたのを思いだされたい。遅れ時間 δ_S が i (Δt) である確率を $\sigma[i]$ とすると、これは次式で与えられる。

$$\sigma[i] = \frac{p' + q'}{2} \pi[i-1] + \left(\frac{p' + q'}{2} + r' \right) \pi[i]$$

ただし、以上の議論は $-f < i < b$ のときにのみ正しい。

$i = -f$ のときは、(c) のケースを除外する。

$i = b$ のときは、(a), (b) を除外し、次の

(d) $x = b$ の場合。(遅れは必ず b となる。)

を付け加える。

以上から、 $\sigma[i]$ の正しい式は次のようになる。ただし、 $(p' + q')/2 + r'$ を、これと等価な式、 $1 - (p' + q')/2$ で置き換えてある。

$$\sigma[i] = \begin{cases} (1 - (p' + q')/2) \pi[-f] & , i = -f \\ ((p' + q')/2) \pi[i-1] \\ \quad + (1 - (p' + q')/2) \pi[i] , & -f < i < b \\ ((p' + q')/2) \pi[b-1] + \pi[b] , & i = b \end{cases}$$

(4. 13)

本線 1 の直進希望車の平均遅れ時間 $\bar{\delta}_S$ は次式となる。

$$\bar{\delta}_S = \sum_{i=-f}^b i \sigma[i]$$

$$= \bar{x} + ((p' + q')/2) (1 - \pi[b]) \quad (4. 14)$$

同様にして、本線 1 の分岐希望車の遅れ時間 δ_D の分布 $\tau[i]$ とその期待値 $\bar{\delta}_D$ が求まる。

$\tau[i]$ = 式 (4. 13) の $(p' + q')$ を p' で置き換えた式

$$\bar{\delta}_D = \bar{x} + (p'/2) (1 - \pi[b])$$

本線 2 についても同様の諸量 $\sigma'[i]$ 、 $\bar{\delta}_S'$ 、 $\tau'[i]$ 、 $\bar{\delta}_D'$ が求まる。これらは、明らかに次の不等式を満たす。

$$x \leq \bar{\delta}_S, \bar{\delta}_D, \bar{\delta}_S', \bar{\delta}_D' \leq x + 0.5 \quad (4.15)$$

したがって、 $\bar{\delta}_S, \bar{\delta}_D, \bar{\delta}_S', \bar{\delta}_D'$ の間には大きな差はなく、個々を算出する必要性は小さい。これらを平均した次式の $\bar{\delta}$ を定義し、交差点での平均遅れ時間とする。

$$\begin{aligned} \bar{\delta} &= \frac{p \bar{\delta}_S + q \bar{\delta}_D + p' \bar{\delta}_S' + q' \bar{\delta}_D'}{p + q + p' + q'} \\ &= \bar{x} + \frac{\lambda (1 - \pi[b])}{p + q + p' + q'} \end{aligned} \quad (4.16)$$

[迂回率]

本線1における迂回率 ε を、平衡時に本線1に到来する直進希望車が強制的に分岐させられる確率と定義する。これは次式で求まる。

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \text{Pr} \{x = b, \text{ CP 2を車両が通過} \mid \text{CP 1を直進希望車が通過}\} \\ &= \pi[b] (p' + q') p / p \\ &= \pi[b] (p' + q') \end{aligned} \quad (4.17)$$

同様に本線2における迂回率 ε' を求める。

$$\varepsilon' = \pi[b] (p + q) \quad (4.18)$$

[スループット]

本線1のスループット θ を、平衡時に本線1に到来する車両のうち、迂回させられず、希望の方向に交差点を通過できる車両の Δt 時間当たりの数と定義する。また、本線2のスループットを θ' とする。

$$\theta = (1 - \varepsilon) p + q \quad (4.19)$$

$$\theta' = (1 - \varepsilon') p' + q' \quad (4.20)$$

[$b = \infty$] の場合

これまでは暗黙に $b < \infty$ として解析してきたが、ここでは特別な場合として $b = \infty$ の場合、すなわち後方への乗換えセル数に制限を設けない場合を概観する。

この場合、 x の平衡分布 $\{\pi[i]\}$ は必ず存在するとは限らない。平衡分布が存在するための条件は $\rho < 1$ すなわち $\lambda < \mu$ である[56, 57]。換言すれば、 x の期待値 $\bar{x}$ が有限であるためには

$$p + q + p' + q' - q q' < 1 \quad (4.21)$$

でなければならない。このとき、種々の量は $\pi[b] = 0$ に注意して次のように求まる。

$$\pi[i] = (1 - \rho) \rho^{f+i} \quad ; i \geq -f \quad (4.22)$$

$$\bar{x} = \rho / (1 - \rho) - f \quad (4.23)$$

$$\bar{\delta} = \bar{x} + \lambda / (p + q + p' + q') \quad (4.24)$$

$$\varepsilon = \varepsilon' = 0 \quad (4.25)$$

$$\theta = p + q, \quad \theta' = p' + q' \quad (4.26)$$

4.7 数値例

本線1、2におけるMT占有率をそれぞれ κ 、 κ' とする。

$$\kappa = p + q, \quad \kappa' = p' + q' \quad (4.27)$$

本線1、2それぞれの全到来車両に対する分岐希望車の混入率を β 、 β' とする。

$$\beta = q / (p + q), \quad \beta' = q' / (p' + q') \quad (4.28)$$

以下の数値例では、これまで得られた結果に

$$\begin{aligned} p &= (1 - \beta) \kappa, & q &= \beta \kappa, & r &= 1 - \kappa, \\ p' &= (1 - \beta') \kappa', & q' &= \beta' \kappa', & r' &= 1 - \kappa' \end{aligned} \quad (4.29)$$

を代入することにより、パラメータ p 、 q 、 r 、 p' 、 q' 、 r' のかわりに κ 、 β 、 κ' 、 β' を用いる。

図4.11および4.12は、乗換えの自由度 $L = 6$ ($f = 0$ 、 $b = 6$)、また、 $\beta = \beta' = 0.1$ とし、 κ と κ' を変化させたときの、最小スループット [= $\min(\theta, \theta')$] と最大迂回率 [= $\max(\varepsilon, \varepsilon')$] の関係を示している。図4.11では κ と κ' のうち一方を固定して他方を動かしたときの軌跡を示している。たとえば、 $\kappa = 0.3$ 、 $\kappa' = 0.5$ のときの最小スループットは0.3、最大迂回率は10 というように読む。図中の白丸は、 $\kappa = \kappa'$ の点である。 κ を固定して κ' を増加していくと、最大迂回率は単調に増加するが、最小スループットは、増加、一定、減少の順に変化する。

図4.12では、図4.11と同じデータに対し、 κ と κ' の和が一定、および差が一定の軌跡を示している。 κ と κ' の差が大きくないとき、最大迂回率は $\kappa + \kappa'$ でほぼ決まる。

図4.13は、 $L = 6$ ($f = 0$ 、 $b = 6$)、 $\beta = \beta' = 0.1$ とし、 κ と κ' を変化させたときの平均スループット [= $(\theta + \theta') / 2$] と平均迂回率 [= $(p\varepsilon + p'$

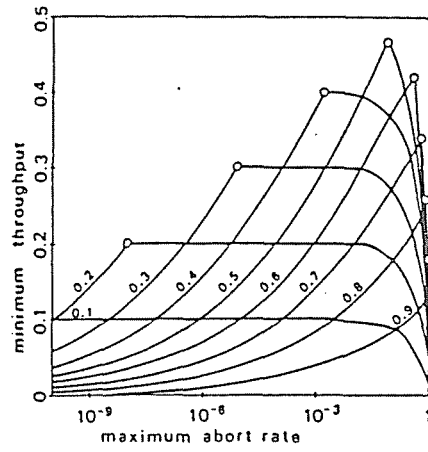


図 4. 1 1 最小スループット 対 最大迂回率 (1)

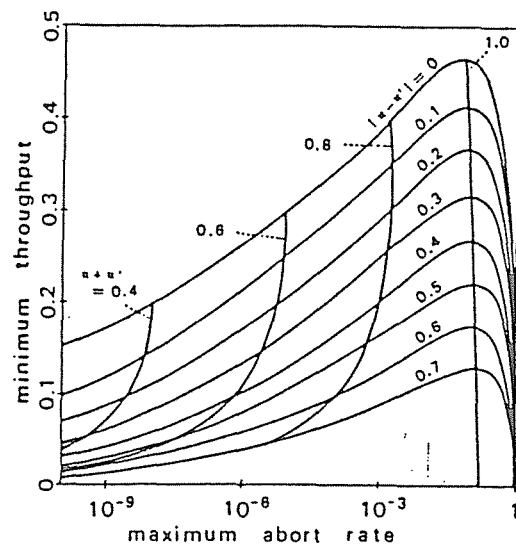


図 4. 1 2 最小スループット 対 最大迂回率 (2)

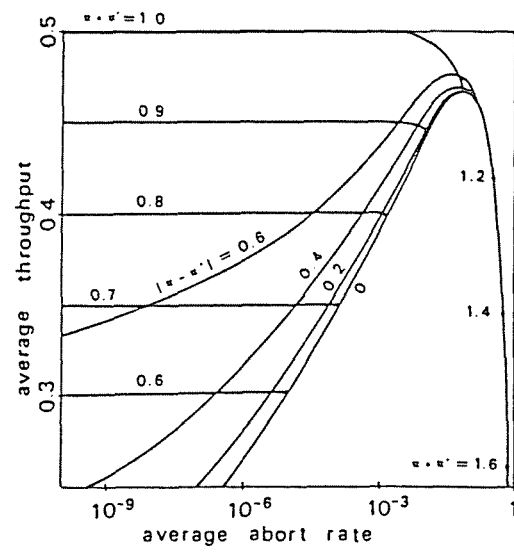


図4.13 平均スループット 対 平均迂回率

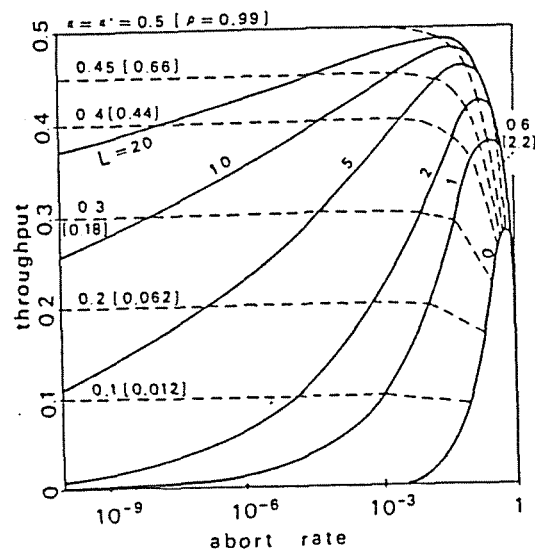


図4.14 スループット 対 迂回率

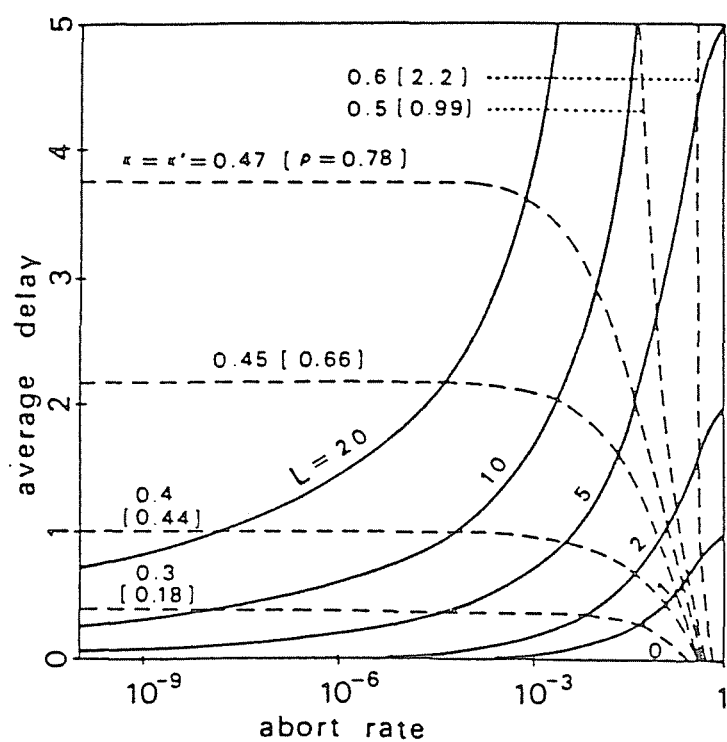


図4. 15 平均遅れ時間 対 迂回率

L	$\varepsilon \leq 1\%$		$\varepsilon \leq 0.1\%$	
	$\kappa(=\theta)$	$\bar{\delta}$	$\kappa(=\theta)$	$\bar{\delta}$
0	0.01	0	0.001	0
1	0.20	0.15	0.10	0.01
2	0.30	0.35	0.20	0.15
5	0.42	1.2	0.35	0.70
10	0.47	3.0	0.43	1.48

表4. 2 MT占有率の上限とそのときの遅れ時間

$\varepsilon') / (p + p')]$ の関係を、図 4. 12 と同様の方法で示している。 $\kappa + \kappa'$ がおよそ 1.2 以上になると、 $|\kappa - \kappa'|$ によらず、平均スループットと平均迂回率は一定になる。

図 4. 12 から、最小スループットを大きく、最大迂回率を小さくするには、 κ と κ' の差が小さいほうがよいことがわかる。しかし、図 4. 13 から、平均スループットを大きく、平均迂回率を小さくするには、逆に κ と κ' の差が大きいほうがよいことがわかる。

図 4. 14、図 4. 15 は、 $f = 0$ 、 $\beta = \beta' = 0.1$ 、 $\kappa = \kappa'$ とし、 κ および L を変化させたときの、スループット $\theta (= \theta')$ と迂回率 $\varepsilon (= \varepsilon')$ 、および平均遅れ時間 δ と迂回率 $\varepsilon (= \varepsilon')$ の関係を示している。 L が増加することにより、遅れ時間の増加という代償を支払って、迂回率が減少し、スループットが増加している。

表 4. 2 は、図 4. 15 に基づいて、 L を固定し、迂回率 ε の上限を 1% および 0.1% に定めたときの MT 占有率 κ の上限と、そのときの平均遅れ時間を示している（このとき、図 4. 14 より、スループット θ はほぼ κ に等しくなる）。たとえば、 $L = 5$ とすると、到来車両がおよそ 3 Δt に 1 台以内 ($\kappa \leq 0.35$) であれば、迂回率は 0.1% 以内となる。また、自由度 0 と 1 とでは、 κ の上限が大きく違うことが注目され、MT 乗換え方式の有効性がよく示されている。

4. 8 まとめ

平面交差点のモデルと同期制御アルゴリズムを考案し、理論的にトラヒックの評価を行なった。このモデルとアルゴリズムの注目すべき特徴は次の点にある。

- 1) 簡潔性： アルゴリズムは極めて簡潔であるため、リアルタイム性に優れ、かつ、マイクロ・プロセッサやハードウェアにより低コストで実現できる。
- 2) 最適性： 3つの制約 — 先着順サービス、乗換えセル数の上限、衝突回避 — のもとで遅れを最小化するという意味で、このアルゴリズムは最適なものになっている。
- 3) 解析性： 車両のランダム到来を仮定することにより、本モデルの挙動は単純なマルコフ連鎖として定式化でき、遅れ時間、迂回率、スループットに対する厳密な表式が陽に得られる。

本章の研究においてシステム工学的な考え方がどのように有効に用いられたかは既に第1章で述べた通りである。次章では本章で示した考え方や技法を立体交差点に適用し、これまでの研究にみられない新しい立体交差点モデルを構築し、理論的に解析する。

第5章 優先路と非優先路からなる立体交差点の 同期制御アルゴリズムとトラヒックの評価

5.1 まえがき

4.1節で述べたように、C V Sネットワークには3種類の交差点がある。本章ではそのうち高速路と低速路が交差する立体交差点を対象としてその同期制御方式をモデル化し、性能評価をする。この種の交差点は、高速路網と低速路網の2レベルのネットワークをつなぐ接点として重要な役割を持ち、ここでの遅れ時間や迂回率はシステム全体の性能に深く関与する。たとえば、この交差点での遅れ時間や迂回率があまり大きいようでは、2レベルのネットワークの容量や配置がうまく調和しないことになる。本章の研究はこの交差点における遅れ時間・迂回率と車両到来頻度との関係を明らかにしようというものである。

本章で扱う交差点は

①立体交差であること

②高速路と低速路が交差していること

の点で前章のもの（低速路同士が平面交差する）とは異なる。さらに、このような交差点は通常、次のような特徴を持っている点においても前章のものとは異なる。

③合流点においては高速路上の車両が低速路上の車両よりも優先される

④交差点の規模が比較的大きいため、乗換え区間を側線上に設けることができる

⑤高速路上に観測区間を設ける必要がある

特に③は同期制御アルゴリズムを設計する上で最も重要な戦略となる。前章の平面交差点は比較的小規模なもので、乗換え区間を本線上に設けていたが、本章の交差点は④の特徴を持つ。このため、直進希望車は遅れ時間なしで交差点を通過することができる（後述）。⑤は同期制御アルゴリズムを示していない現時点では必ずしも自明ではないが、5.3節で明らかとなる。平面交差点モデルでは交差する2路線上にそれぞれ1つずつの観測地点（チェックポイント）を置いて到来車両に関する情報を収集したが、本章の交差点では高速路上に観測区間、すなわち、複数の観測地点を設ける必要があるというのが⑤の意味である。

本章で用いる考え方や技法はほぼ前章のものと同様である。5.2節では交差点の形態および車両の基本的挙動を述べる。5.3節では同期制御アルゴリズムを示す。このアルゴリズムは前章のものよりやや複雑であるため、その正当性の数学的な証明がなされる。5.4節では立体交差点に関する従来の研究と本研究の比較をし、本研究の特徴を明らかにする。このモデルの性能評価を行なうため、5.5節では車両のランダム到来を仮定して確率モデルを構成する。5.6節ではこれを理論的に解析する。5.7節の数値例により、本章の交差点は前章の交差点に比べて全く異なる特性を持つことを示す。5.8節は本論文においてかなり特殊な内容である。第1章で述べたように、本論文では主に個別軌道輸送システムの論理的な制御モデルを論じてきた。しかし、本章のモデルの場合、果たしてこれを物理的に実現し得るかという疑問が生ずるかもしれない。たとえば、低速路上の車両が高速路に合流する場合には、与えられた時刻に与えられた速度・加速度で合流点を通過する必要がある。5.8節ではこれが物理的にも可能であることを示すために、最適レギュレータ理論に基づく制御系を構成し、車両のダイナミクスを微分方程式を用いてモデル化し、連続系シミュレーションを実施する。

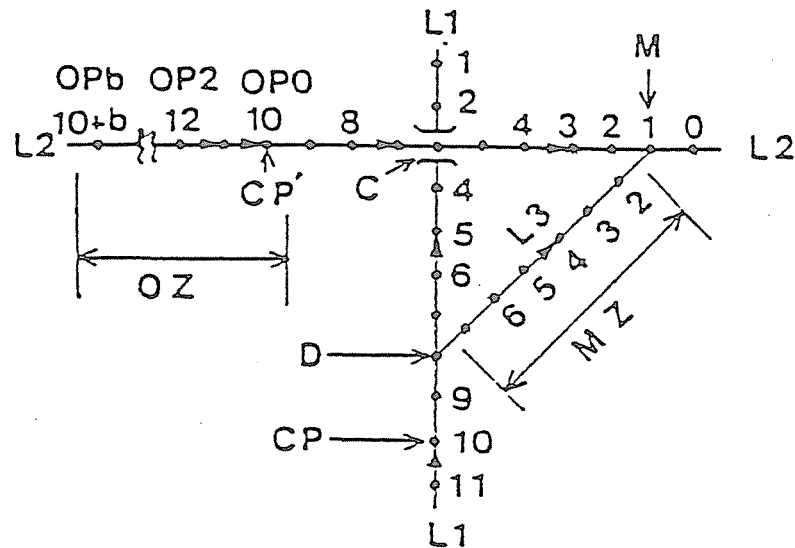
5.2 交差点の形態と車両挙動

図5.1に立体交差点の概念図を示す。「本線」L2と「副線」L1が交点Cで立体交差をしている。本線は優先路、副線は非優先路とする（「優先」の意味は後述する。たとえば、低速路と高速路間の立体交差では、高速路が優先路、低速路は非優先路となる）。副線から本線へ分岐・合流するために側線D-Mが設けられている。Dを分岐点、Mを合流点という。

副線上、分岐点の手前にチェックポイントCPが、本線上にCPと対応したCP'が設けられている。D-M間を乗換え区間という。

本線、副線および側線上では、計算機によって生成された仮想的なセルが多数動いており、その前端をムービング・ターゲット（以下MTと略す）という。隣接するMTの時間間隔は一定値 Δt である。時刻 $k\Delta t$ （ k は整数）にCPおよびCP'を通過したMTの番号を k とし、このMTをMT# k と記す。またMTの集合 $\{MT\#i, MT\#j, \dots\}$ をMT# $\{i, j, \dots\}$ のように表わす。図5.1は、時刻 $10\Delta t$ での交差点での様子を表わしていることになる。番号の等しいMTは、合流点Mで同期する。

本線上、CP'の手前に、時間にして Δt の間隔で $b+1$ 個の「観測地点」 $OP_0, OP_1, \dots, OP_b$ が設けられている。交差点の制御をつかさどる計算機は、必要に応



- moving target
- ▷ vehicle
- C cross point (gradeseparated)
- D diverge point
- M merge point
- CP } check point
- CP' }
- MZ maneuver zone
- OZ observation zone
- OPi observation point
- b+1 the number of observation points
- L1 sub line
- L2 main line
- L3 off line

図5.1 立体交差点の概念図

じてこれらの地点での車両の有無を観測できる。これらの観測地点の全体を含む区間を「観測区間」と呼ぶ。時刻 $k \Delta t$ においては観測地点 OP_i 上には $MT \# (k + i)$ がいる ($0 \leq i \leq b$)。

本線上の各 MT 上には車両がいるかいないかのいずれかである。副線上の各 MT 上には、「直進希望車」がいるか、「分岐希望車」がいるか、車がない（空 MT ）かのいずれかである。

車両は、乗換え区間内を除いては割り当てられている MT に正確に追従しながら走行する。したがって本線 CP' へ到来した車両は、このまま本線を走行して交差点を通過する。副線 CP へ到来した直進希望車も副線を直進して交差点を通過する。副線 CP へ到来した分岐希望車は、副線から側線へ分岐して、側線上の乗換え区間内で一般に「 MT 乗換え」を行なう。

例として、図 5. 1 のように両線ともに $MT \# 10$ 上に車両がおり、しかも副線 MT 上の車両が分岐希望車であった場合を考える。もし、このまま両車両を進ませると合流点で衝突が生じてしまう。このような状況を「 MT の競合」が起きているという。 MT の競合が発生したときには、副線 CP 上の車両が追従する MT を乗換え区間内で変更させることにより、競合を解消する（ MT 乗換え）。競合が発生しても、本線上の車両は MT 乗換えをせず、副線上の車両が減速して後方の MT に乗換える。その意味で本線が優先路となっている。

5. 3 MT 乗換えの同期制御方式

前節からわかるように、本線上の車両および副線上の直進希望車は MT 乗換えを行なうことはない。以下では、副線の分岐希望車の MT 乗換えの同期制御の詳細を述べる。

$MT \# k$ に追従して到来した分岐希望車は、時刻 $k \Delta t$ に CP を通過するが、そのとき、交差点の制御をつかさどる計算機から「 $MT \# m$ へ乗換えよ」との指令を受ける。このとき、この車両には $MT \# m$ が「割り当て」られたという。 m を具体的に決定するアルゴリズムは後述する。

$MT \# m$ を割り当てられた $MT \# k$ 上の分岐希望車は、分岐点までは $MT \# k$ に追従して走行するが、側線へ分岐後、乗換え区間内で適当な速度パターンに従って加減速をし、合流点に達するまでには割り当てられた $MT \# m$ への乗換えを完了する。図 5. 2

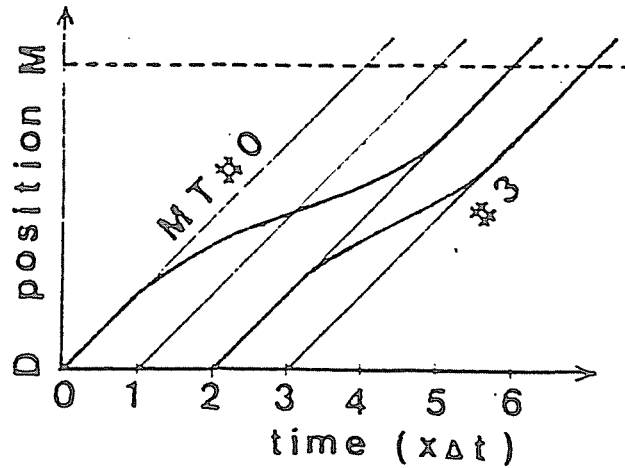


図5. 2 MT乗換えのパターン

は、MT #0からMT #2へ、およびMT #2からMT #3へ乗換える場合の車両位置の経時変化を示している。

MT #mを割り当てられた車両は $(m - k)$ セルだけ後方のセルへ乗換えることになる。乗換えセルの数には上限があり、現在追従するMT #kに対し、後方へ最大bセルとする。すなわち、mには

$$k \leq m \leq k + b \quad (5.1)$$

の制約がある。bは、図5. 1に示したbに等しい。

さて、mを具体的に決定するリアルタイム・アルゴリズムを述べる。時刻 $(k + 1)\Delta t$ においてMT #iが「処理済み」であるとは、次の①～③のいずれかが成り立っていることをいう $(i \leq k + b)$ 。

- ① $i \leq k$ (既にCPを通過済み)。
- ② 既に本線上のMT #iに車両が存在することが時刻 $k\Delta t$ 以前に観測されている
(本線車両に割り当て済み)。
- ③ 時刻 $k\Delta t$ 以前に既に副線MT #iに分岐希望車が割り当てられている
(副線車両に割り当て済み)。

例えば、図5. 1では時刻 $10\Delta t$ においてMT #i $(i \leq 9)$ は処理済みである

(ケース①)。また、時刻 $10\Delta t$ において、本線上MT#10およびMT#11上に車両が存在することが観測され、本線MT#12上には車両が存在しないことが観測された結果、副線CP (MT#10) 上の分岐希望車にMT#12が割り当てられたとする。このとき、次の時刻 $11\Delta t$ においては、MT# i ($i \leq 12$) は処理済みとなる(ケース①～③)。処理済みのMTに車両を割り当てることはできない。処理済みでないMTは「未処理」であるという。

次に、以下で用いる変数 k , n , x を定義する。

k はCPおよびCP'へ到来するMTの番号で、 Δt 毎に1ずつ増加する。

n は、時刻 $k\Delta t$ において未処理のMTの番号のうちの最小値である。後に、任意の時刻 $k\Delta t$ において

$$k \leq n \leq k + b$$

であり、MT# i ($i \leq n - 1$) はすべて処理済み、MT# j ($j \geq n$) はすべて未処理であることが確かめられる。

x は $n - k$ を保持する変数で、後に述べる確率過程の状態を表わす。後に、

$$0 \leq x \leq b$$

であることが確かめられる。

本章では、割り当ての戦略として次の5つの条件

1. 本線上の車両は副線上の車両よりも優先され、乗換えをせずに交差点を通過する。
2. 副線上の直進希望車は乗換えをせずに直進する。
3. 分岐希望車は前方への乗換えをせず、後方へは最大 b セルしか乗換えを許されない。
4. 合流点で衝突を発生させない。
5. 処理済みのセルに車両を割り当てることはできない。

(5. は3.、4. とほぼ同じことを言い換えたもの)

を制約として、

6. 後方への乗換えセル数を最小にする。
7. 観測地点の観測の回数を最小にする。

を満たすような割り当てを考える。

条件3は、分岐希望車に割り当てられるMTは集合

$$MT \# \{k, k+1, \dots, k+b\}$$

から選ばなければならないことを表わしている。

しかし、本アルゴリズムは後に明らかになるように時刻 $k \Delta t$ においては

$$k \leq n \leq k+b \quad (0 \leq x = n - k \leq b) \quad (5.2)$$

となっており、

$$MT \# i \quad (i \leq n-1)$$

はいずれも処理済みで、

$$MT \# j \quad (j \geq n)$$

はいずれも未処理であるように構成されている。

したがって条件3, 5より、分岐希望車に割り当て可能なMTの集合は

$$H[n] = MT \# \{n, n+1, \dots, k+b\} \neq \emptyset \quad (5.3)$$

となる。本アルゴリズムは条件4, 6より、この集合に含まれる本線上のMTを順次観測してゆき、合流点で衝突が発生しないMT（本線上の空MT）を選び、分岐希望車に割り当てる。しかし、 $H[n]$ 中にそのようなMTが存在しない場合は、この分岐希望車を強制的に直進車とし、乗換えなしで（ $MT \# k$ に追従させたまま）交差点を通過させる。このとき、この車両は「迂回」させられたという。

以上の考えに基づいた同期制御アルゴリズムを図5.3に流れ図の形で示す。以下、このアルゴリズムを詳細に説明する。制御が流れ図のどの枝を通過した時点でも次の不変関係（invariants）

$$(A) \quad 0 \leq x = n - k \leq b$$

$$(B) \quad \text{時刻 } k \Delta t \text{ において、} MT \# i \quad (i \leq n-1) \text{ は処理済み、}$$

$$MT \# j \quad (j \geq n) \text{ は未処理}$$

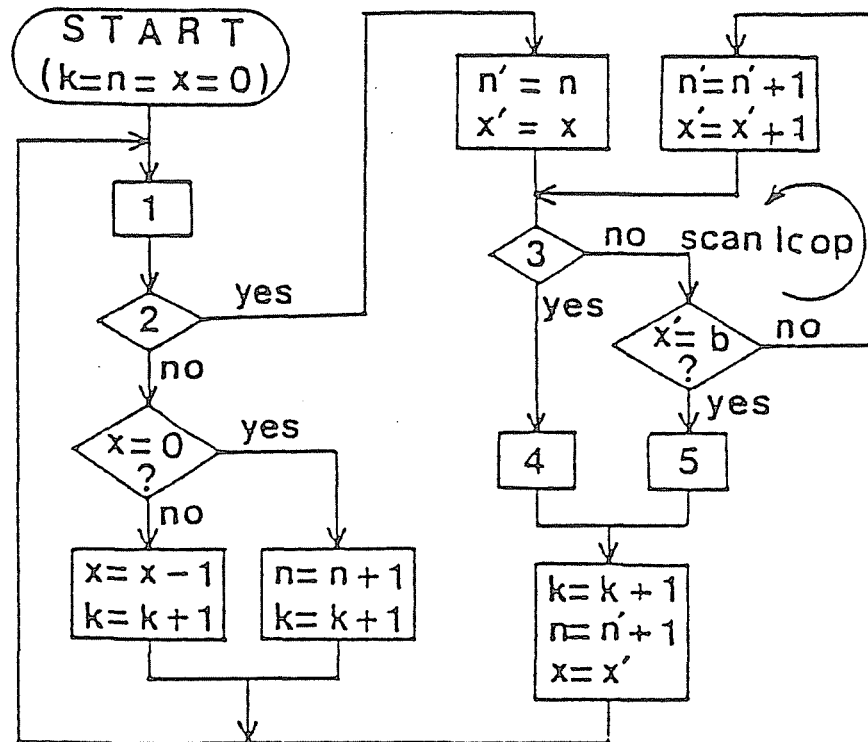
が成り立っていることが明らかとなる。

初期状態は $k = n = x = 0$ とする。これは上の不変関係を満たす。

時刻 $k \Delta t$ において $MT \# k$ がチェックポイントを通過したとき、計算機は副線CP上の車種（車両がいらない、直進希望車、分岐希望車）により、以下のように制御する。

(1) 車両がいらない場合、車両の割り当ても観測区間内の観測も行なわれない。

もし $n = k$ ($x = 0$) なら、 $MT \# n$ は次の時刻 $(k+1) \Delta t$ においては処理済み



- 1 Wait until a MT arrives at CP
- 2 A vehicle wishing to diverge exists at CP (MT#k) ?
- 3 The MT#n' on the main line is unoccupied ?
- 4 Assign MT#n' to the vehicle
- 5 Assign MT#k to the vehicle and force it to go straight

図5.3 同期制御アルゴリズム

(ケース①：通過済み)となる。時刻 $(k+1)\Delta t$ においては、未処理MTの最小番号は $n+1$ となる。したがって

$k \leftarrow k+1, n \leftarrow n+1$ とする (x の値は変わらない)。

$n \geq k+1$ ($x \geq 1$) の場合には、時刻 $(k+1)\Delta t$ においてMT # n は未処理のままである。次の時刻 $(k+1)\Delta t$ において到来する分岐希望車には、依然としてMT # n 以降のMTを割り当て可能である。したがって n の値をそのまま保持し、

$k \leftarrow k+1, x \leftarrow x-1$ とする。

(2) 直進希望車が存在する場合、この車両はMT # k に追従したまま交差点を通過できるので、車両と計算機との交信は特に行なわない。そのため、車両の割り当て、観測を必要としないので、(1)と同様の処理を行なう。

(3) 分岐希望車が存在する場合、計算機は、流れ図中のscan loop で本線上の

$H[n] = \text{MT} \# \{n, \dots, k+b\}$ ($= OP_x, \dots, OP_b$)

を n より順次観測していく。すなわち、 $x' = n' - k$ の関係を常に保ちながら、 n' を n より1ずつ増加させ、MT # n' を順次観測する (x' は x より1ずつ増加する)。この繰り返しは、本線MT # n' 上に空MTを見つける(ケース3a)か、または $n' = k+b$ ($x' = b$) まで観測しても空MTが見つからないとき(ケース3b)まで続く。

ケース3aの場合はCP上の分岐希望車にMT # n' を割り当てる。ケース3bの場合は、この分岐希望車をMT # k に追従させたまま強制的に直進車とする(迂回)。ケース3a、3bいずれの場合も、次の時刻 $(k+1)\Delta t$ においては、MT # $\{n, n+1, \dots, n'\}$ は処理済み(ケース②③)となる。したがって

$k \leftarrow k+1, n \leftarrow n'+1, x \leftarrow x'$

とする ($x' = n' - k = (n'+1) - (k+1)$ に注意)。

以上から、(1)、(2)、(3)いずれの場合も、不変関係(A)、(B)が時刻 $k\Delta t$ で成り立てば、時刻 $(k+1)\Delta t$ でも成り立つことがわかる。初期状態は明らかに(A)、(B)が成り立つから、数学的帰納法により、(A)、(B)は任意の時刻で成り立つ。よって、本アルゴリズムは条件1~6を満たすことも容易に確かめられる。また、本線上の車両および空MTはいずれも高々1度だけしか観測されない。(観測は判断ボックス3においてなされる(MT # n' の観測)が、その後必ず n' の値が

少なくとも1ずつ増加し、以後減少することがない。) どのようなアルゴリズムも、これらを、いずれも少なくとも1回は観測する必要があるから、本アルゴリズムの観測回数は最小であることがいえる(条件7)。

本アルゴリズムでは、直進希望車は望み通り直進できるのに対し、分岐希望車は必ずしも本線へ合流できるとは限らず、状況によっては強制的に直進させられることがある。強制的に直進させられた分岐希望車は、他の経路を迂回して目的地へ向かうことになる。

図5. 4に $b = 2$ としたときの制御の例を示す。(a) はチェックポイントへ到来するMT上の車両列で、(b) は制御後のMT上の車両の様子である。便宜上車両には番号をふる。副線を走行してきた直進希望車にはダッシュ(′)をふり、分岐希望車は丸で囲って区別する。0は空MTである。(b) では、迂回させられた分岐希望車は四角で囲ってある。

(a) on arrival								
No. of MT	0	1	2	3	4	5	6	7
main line MT	1	0	2	0	3	4	5	0
sub line MT	①	②	3′	4′	⑤	⑥	0	7′

(b) after control								
No. of MT	0	1	2	3	4	5	6	7
main line MT	1	①	2	②	3	4	5	⑥
sub line MT	0	0	3′	4′	⑤	0	0	7′

図5. 4 同期制御の例

5. 4 従来の研究との比較

立体交差点のモデルとその評価については既にいくつか発表されているが、ここでは、評価方法としてシミュレーションではなく理論を用いている他の研究と本章の研究を比較する。

(A) Thangaveluらのモデル [40]

文献 [40] では、路線 L 1 を走行してきた車両が路線 L 2 へ合流する場合を想定している (図 5. 5)。この交差点は、高速路どうしが立体交差するかなり大きなものである。二路線を結ぶ側線はかなり長く、この中に乗換え区間が分岐側と合流側に一つずつある。乗換え区間内で車両がセルを乗換えることにより、合流部でのセルの競合を解消する。解析方法としては、通常の待ち行列理論を用いて、分岐側の乗換え区間を $M/D/1$ 、合流側の乗換え区間を $G/M/1$ と近似して解析している。

(B) 浜松らのモデル [37- 39]

浜松らは図 5. 6 に示す二種のモデルを考案している。副線 L 1 を走行してきた分岐希望車が、それと立体交差している本線 L 2 へ合流する場合を想定している。競合が発生した場合には、本線上の車両を優先し、副線上の車両に MT 乗換えを行なわせる。この点では、本章のモデルと同様である。しかし、車両の制御方法 (分岐の可否判断、実際の乗換えをする位置) のモデル化が本章のものと違う。

ここでは、MT 乗換え (図 5. 7 の破線) は Δt 時間の停止 (図 5. 7 の実線) と等価であると考えることにより CP の前に待ち行列が発生すると考え、これを待ち行列理論により解析している。モデル I は分岐点前に CP があり、モデル I' は合流点前の側線上に CP を設けている。両モデルとも待ち行列の長さに制限を加え、この制限を超えるときには強制的に車両を直進 (迂回) させている。モデル I では待ち行列中の先頭車 (CP 上の車両) が、モデル I' では待ち行列中の末尾に加わろうとしている (分岐点上の) 車両が直進させられる。

(C) 本章のモデル

本章では非優先路からそれと立体交差する優先路へ分岐合流するモデルを提案した。このモデルの交差点の形状は (B) の二種のモデルと似ている。しかし、本モデルでは、分岐車両の MT 乗換えは側線上で行なうので、モデル I と異なり、直進希望車が MT 乗換えをする必要がなく、迅速に交差点を通過できる点が優れている。また、MT の割り当てや迂回の判断は分岐点通過以前に行なうので、モデル I' と異なり、車両が側線上

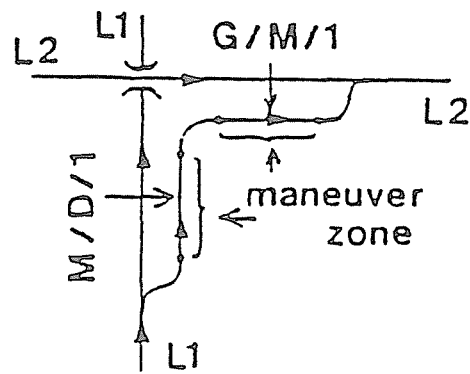


図 5. 5 Thangaveluらのモデル

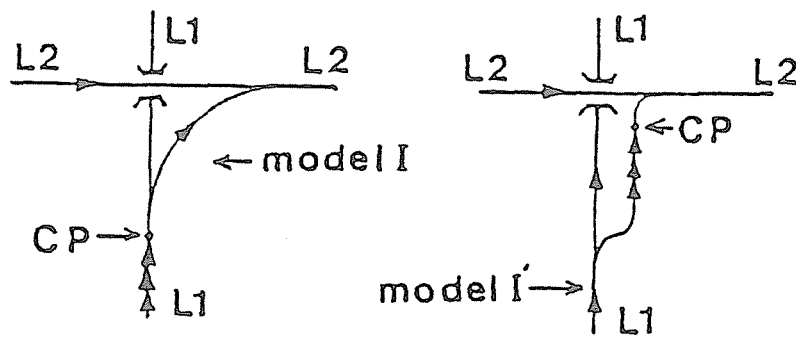


図 5. 6 浜松らのモデル

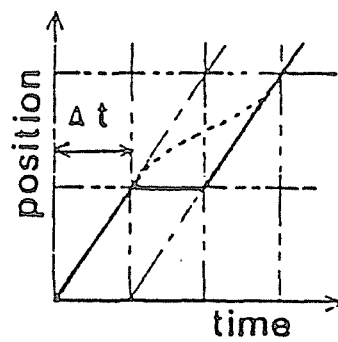


図 5. 7 MT乗換えの例

で長時間停止して待つということではなく、無駄な待ち時間を生じない。このように本モデルでは、本線上に（CP' という 1 点ではなく）観測区間を設けて、より多くの情報を取り入れることにより、効率的な車両制御を実現している。また、次節以下に述べるように、解析的にも、種々の評価尺度を陽に求めることができる。

5. 5 マルコフ連鎖モデル

これまでに述べた同期制御アルゴリズムの性能評価を行なうために、車両のランダム到来を仮定して確率モデル（マルコフ連鎖モデル）を構成する。

本線上の未観測のMTに車両がいる確率を α 、車両がいない確率を $1 - \alpha$ とする。副線CPへ到来するMT上に直進希望車がいる確率を p 、分岐希望車がいる確率を q 、車両がいない確率を $r (= 1 - p - q)$ とする。これらの到来事象はいずれも独立であるとする。また、状態変数は 5. 3 節で定義した x とする。

そうすると、5. 3 節で述べたアルゴリズムにおいてケース（1）または（2）が生起する確率は $p + r$ となる。この場合、変数 x の値は 1 だけ減少する（ただし、 $x > 0$ のとき）。また、ケース（3 a）が生起する確率は、

$$\begin{aligned} q \alpha^{n'-n} (1 - \alpha) \\ = q \alpha^{x'-x} (1 - \alpha), \quad x \leq x' \leq b \end{aligned} \quad (5. 4)$$

ケース（3 b）が生起する確率は

$$\begin{aligned} q \alpha^{(k+b)-(n-1)} \\ = q \alpha^{b-x+1} \end{aligned} \quad (5. 5)$$

となる。

以上の考察から x の時系列は、次のような推移確率 $p_{i,j}$ を持つ有限マルコフ連鎖となる。

$$p_{x,x-1} = p + r \quad ; \quad 0 < x \leq b \quad (5. 6)$$

$$p_{0,0} = a_0 + p + r \quad (5. 7)$$

$$p_{x,x'} = a_{x'-x} \quad ; \quad 0 \leq x \leq x' < b, \quad (x, x') \neq (0,0) \quad (5. 8)$$

$$p_{x,b} = c_{b-x} \quad ; \quad 0 \leq x \leq b \quad (5. 9)$$

ただし、

$$a_j = q \alpha^j (1 - \alpha) \quad (5. 10)$$

$$c_j = q \alpha^j \quad (5. 11)$$

なお、確率 $a_{x'-x}$ はケース (3 a) (ただし、 $x \leq x' < b$) が起こる確率である。
 確率 c_{b-x} はケース (3 a) で $x' = b$ の場合とケース (3 b) の和事象が起こる確率、
 すなわち

$$c_{b-x} = q \alpha^{b-x} (1 - \alpha) + q \alpha^{b-x+1} = q \alpha^{b-x} \quad (5.12)$$

である。

5.6 解析

[x の平衡分布と期待値]

平衡時に $x = i$ である確率を π_i とすると次の平衡方程式を得る。

$$\pi_0 = (a_0 + p + r) \pi_0 + (p + r) \pi_1 \quad (5.13)$$

$$\pi_i = (p + r) \pi_{i+1} + \sum_{j=0}^i a_{i-j} \pi_j ; 0 < i < b \quad (5.14)$$

$$\pi_b = \sum_{j=0}^b c_{b-j} \pi_j \quad (5.15)$$

$$\sum_{i=0}^b \pi_i = 1 \quad (5.16)$$

式 (5.13) ~ (5.16) を漸化的に順次解いてゆくと、

$$\pi_1 = \{q \alpha / (1 - q)\} \pi_0$$

$$\pi_2 = \{q \alpha^2 / (1 - q)^2\} \pi_0$$

...

$$\pi_i = \{q \alpha^i / (1 - q)^i\} \pi_0$$

$$= q \beta^i \pi_0 ; i = 1, 2, \dots, b \quad (5.17)$$

となる。ただし

$$\beta = \alpha / (1 - q) \quad (5.18)$$

とおく (しかし、以下の式 (5.21) の導出では右辺のまま用いたほうがよい)。式 (5.16) を用いて、

$$\pi_0 = \begin{cases} \frac{1 - \beta}{1 - \beta + q \beta (1 - \beta b)} & , \beta \neq 1 \\ \frac{1}{1 + q \beta} & , \beta = 1 \quad (q + \alpha = 1) \end{cases} \quad (5.19)$$

となる (式 (5.17) の i の範囲は 0 を含まないことに注意)。

x の期待値 $\bar{x}$ は次式となる。

$$\bar{x} = \begin{cases} \frac{\alpha\beta}{1-\beta} \left\{ \frac{1-\beta^b}{1-\beta} - b\beta^b \right\} \pi_0 & , \beta \neq 1 \\ \frac{\alpha b(b+1)}{2} \pi_0 & , \beta = 1 \end{cases} \quad (5.20)$$

[迂回率]

迂回率 e を「平衡時にチェックポイントへ到来する分岐希望車が強制的に直進させられる確率」と定義する。状態が $x = i$ ($n = k + i$) のとき迂回させられる場合は、本線上の MT 井 $\{k + i, \dots, k + b\}$ の $b - i + 1$ 個の MT 上にすべて車両が存在する場合である。したがって

$$\begin{aligned} e &= \sum_{i=0}^b \alpha^{b-i+1} \pi_i \\ &= \alpha \beta^b \pi_0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

[遅れ時間の分布と期待値]

分岐車両が後方へ d セルだけ乗換える場合は、乗換えない場合に比べて乗換え区間を通過する時間が $d \Delta t$ だけ長くなる。従って、乗換えセル数 d は Δt を単位時間としたときの遅れ時間を表わしているといえる。以下では x の分布 $\{\pi_i\}$ から、分岐を許された分岐希望車が実際に乗換えるセル数（遅れ時間）の分布を求める。

遅れが i であるというのは、MT 井 k に追従してきた分岐希望車が分岐を許されたという条件の下で、MT 井 $(k + i)$ に割り当てられることである。

状態が $x = j$ ($0 \leq j \leq i$) すなわち $n = k + j$ のとき、分岐希望車が到来したとする。このとき、分岐が許され、かつ、遅れが i になる場合は、本線上 MT 井 $\{k + j, \dots, k + i - 1\}$ 上の $(i - j)$ 個の MT 上に車両が存在し、MT 井 $(k + i)$ が空である場合である。この事象が生起する確率は、

$$\alpha^{i-j} (1 - \alpha)$$

となる。また、このとき分岐が許される確率は

$$1 - \alpha^{b-j+1}$$

である。したがって、状態が j のとき（分岐が許されたという条件の下で）、遅れが i になる確率は

$$\frac{\alpha^{i-j}(1-\alpha)}{1-\alpha^{b-j+1}} \quad (5.22)$$

となる。したがって、遅れ時間 d が i (Δt) である確率は次式となる。

$$w_i = \sum_{j=0}^i \pi_j \frac{\alpha^{i-j}(1-\alpha)}{1-\alpha^{b-j+1}} \quad (5.23)$$

平均遅れ時間は次式となる。

$$\bar{d} = \sum_{i=0}^b i w_i \quad (5.24)$$

[$b = \infty$ の場合]

これまでは暗黙に $b < \infty$ として解析してきたが、ここでは特別な場合として $b = \infty$ の場合、すなわち後方への乗換えセル数に制限を設けない場合を概観する。

この場合、 x の平衡分布 $\{\pi_i\}$ は必ず存在するとは限らない。平衡分布が存在するためには、式 (5.16) の左辺 (無限級数) が収束しなければならない。すなわち式 (5.17) より

$$\beta < 1 \quad (q + \alpha < 1) \quad (5.25)$$

でなければならない。 $\beta \geq 1$ のときには、 x の期待値は無限大となる。 $\beta < 1$ のとき、種々の量は $\pi_0 = 0$ に注意して求めると、より簡単な式として求まる。

5.7 数値例

本モデルのパラメータは、本線の車両到来確率 α 、副線への直進希望車の到来確率 p 、副線への分岐希望車の到来確率 q 、および乗換えセル数の上限 b である。

図 5.8、5.9 は、迂回率 e 、平均遅れ時間 d についての数値計算例である。 $b = 6$ 、 $\alpha = 0.5$ としたときに、横軸に p 、縦軸に q をとって、 e 、 d が一定となるような等高線を描いたものである (実線)。第 4 章の平面交差点と本章の立体交差点では、役割が全く異なるので一概には比較できないが、参考のために平面交差点でも同様の条件を設定して計算した。すなわち、本線 2 の分岐希望車の到来確率を 0、本線 2 の直進希望車の到来確率を 0.5、前方へは乗換えず後方への乗換えセル数を 6 とした場合の、本線 1 の迂回率、および分岐を許された分岐希望車の遅れ時間を等高線の形で描いた (破線)。

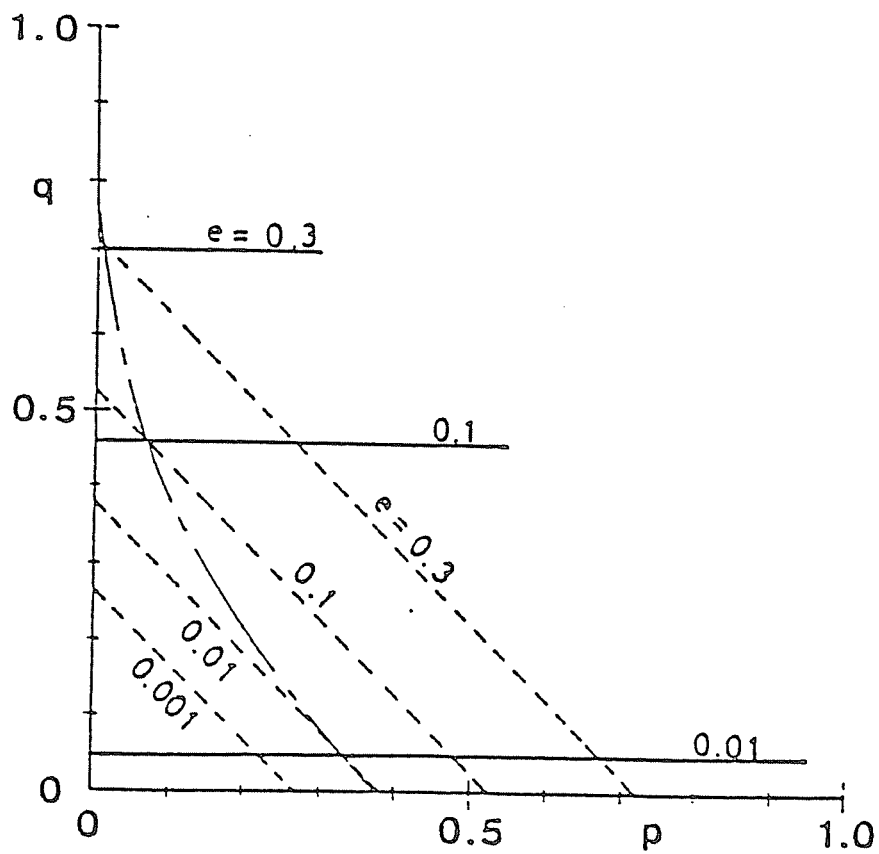


図 5. 8 迂回率

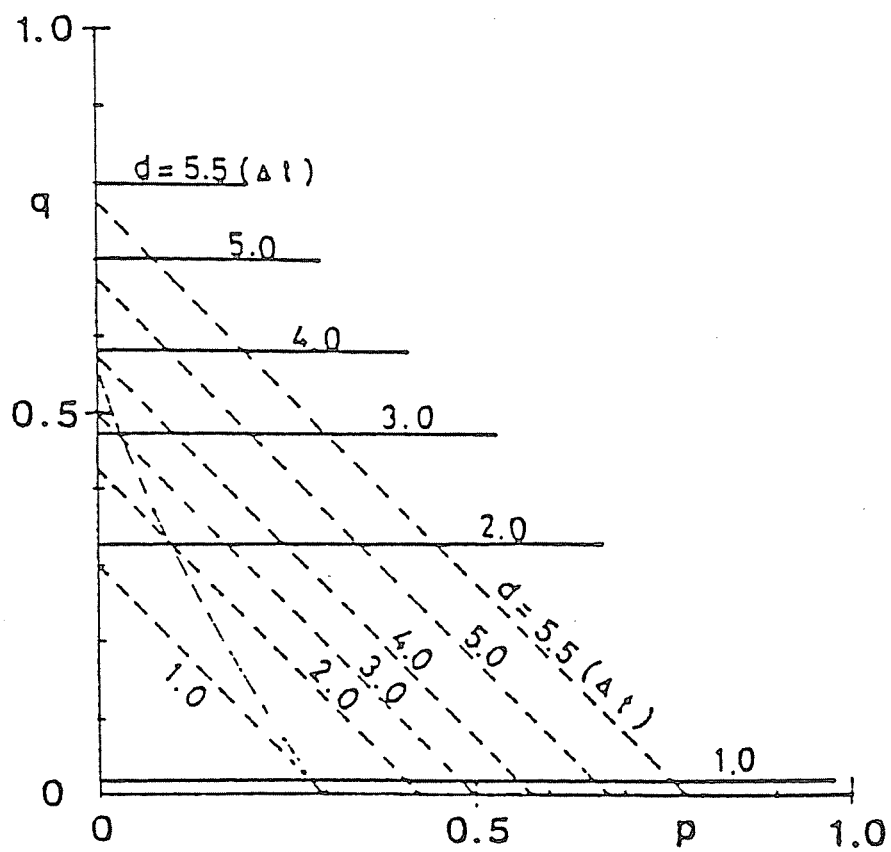


図 5. 9 平均遅れ時間

図からわかるように、 p 、 q がある程度小さく、一点鎖線より原点側の領域にあるときは平面交差が良く、そうでないときは立体交差の方が特性が良い。また、図、および式(5.17)～(5.25)からも明らかなように、立体交差点モデルは p に依存せず、平面交差点モデルでは、 p の増加と共に e 、 d が増加している。

平面交差点モデルでは交差する2路線に優先度の差はないが、立体交差点モデルでは、副線上の分岐希望車は本線上の車両に対して非優先的に扱われている。したがって、トラヒックがそれほど大きくないときには立体交差点の長所が十分活かされず、副線上の車両については平面交差点が有利である。しかし、本線上の車両について考えると、立体交差点モデルでは、これらの車両は迂回することはなく、遅れ時間も0なので、トラヒックが大きいときでも立体交差点が有利となる。トラヒックが大きいときには、立体交差であること、側線上でMT乗換えを行なうこと、直進希望車の到来確率が増加しても特性が悪化しないことなどの立体交差点モデルの長所が活かされ、副線上の車両についてみても、平面交差点モデルよりも遅れ時間や迂回率が小さくなっており、立体交差点モデルの有効性が発揮されている。

5.8 車両ダイナミクスのシミュレーション

本章ではこれまで、低速路から高速路への合流のための方式を、セル割り当てという論理的なレベルで論じてきた。本節では車両のダイナミクスを連続系シミュレーションによって模擬することにより、これを物理的レベルで論じる。

図5.10に、シミュレーションの対象とした交差点の概略を示す。ここでは、我が国のCVSを参考にして次のようにパラメータの値を設定した。

本線（高速路）および副線（低速路）上の隣接MTの時間間隔	1 秒
本線上のMTの走行速度	15 m/s （約60 km/h）
副線上のMTの走行速度	10 m/s （約40 km/h）
本線上のセル長	15 m
副線上のセル長	10 m
側線（分岐点～合流点間）長	100 m

チェックポイントは、副線上分岐点の1セル分だけ上流の位置にとる。観測区間は、本線上合流点の8～11セルだけ上流の区間とする。チェックポイントでセル乗換え指令を受けた車両は分岐点で加減速を開始する。分岐点に到達した時点で、乗り換えるべき対象のMTは図の7～10の4つのMTとなる。これらのMTと合流点との距離はそ

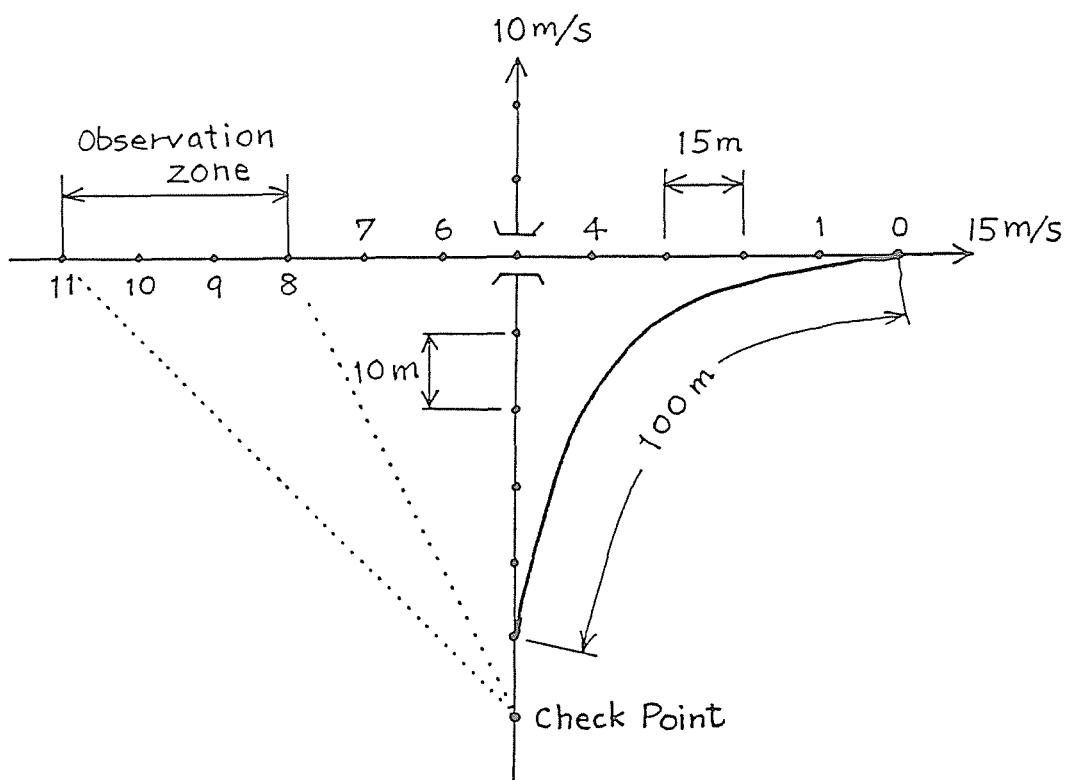


図5.10 シミュレーションを行なった立体交差点

れぞれ $15k$ ($k=7, 8, 9, 10$) m、すなわち、105, 120, 135, 150 mである。

合流を物理的レベルで論じるには、

①合流点を、与えられた時刻に通過すること

②合流点を、与えられた速度と加速度で通過すること

の他に、

③車両性能（最大加速度、最高速度）

④乗り心地（最大加速度）

⑤安全性（車間距離）

などの要因を考慮に入れる必要がある。ここで①から⑤のそれぞれについて簡単に説明する。いま、分岐点を通過中の車両が、番号8のMTに乗り換える場合を考える。このMTは8秒後に（120 m走行し）合流点に達する。したがって、分岐点上の車両もちょうど8秒後に（100 m走行し）合流点に達しなければならない。また、本線上のMTの速度は 15 m/s である。したがって、分岐点上の車両（現在は速度 10 m/s ）も合流点に達した時点でちょうど 15 m/s の速度とならなければならない。つまり、初期状態における位置誤差20 mと速度誤差 5 m/s を8秒後に0にし、かつ加速度も0にする必要がある。これら2つの条件が①と②である。③については、最高速度 20 m/s （約 80 km/s ）、常用最大加減速度 2.5 m/s^2 （約 $0.25 g$ ）とする。この能力を超えるような制御は不可能である。④の乗り心地を一般に論ずるには種々の点を考えなければならないが、ここでは、最大加減速度 2.5 m/s^2 という条件のみを考える。これを超えるような加減速度は乗り心地を損なう。

⑤の車間距離は、先行車の尾部と後続車の頭部間の距離として定義される。本モデルでは車両の長さを3 mとする。したがって、車間距離は車頭間隔（space headway；先行車の頭部と後続車の頭部間の距離）から3 mを減じたものとなる。安全性に対しては次の3つの考え方がある。

（1）先行車が減速度無限大で停止（brick wall stop）した場合でも追突しないように車間距離を保つ。

（2）先行車の速度および最大加減速度を考えた上で追突が起こらないように車間距離を保つ。

（3）ある安全速度以下での追突を許す。

現在までに実用化されているものはすべて（1）の安全基準に基づいているため、本

モデルでも (1) を採用する。したがって、車間距離 d は次の不等式を満たさなければならない。

$$d > v^2 / 2 \alpha \quad (5.26)$$

ただし、 v は車両の走行速度、 α は緊急制動減速度である。簡単のためにブレーキの応答遅れや停止距離余裕などは無視している。本モデルでは $\alpha = 20 \text{ [m/s}^2\text{]}$ (約 $2g$) としている。速度 v と安全車間距離 $d_{\min} = v^2 / 2 \alpha$ の関係を表 5.1 にまとめておく。

表 5.1 速度と安全車間距離

速度 [m/s]	安全車間距離 [m]
2	0.1
5	0.7
10	2.5
12	3.6
15	5.7

本モデルでは、最適レギュレータ理論に基づいて車両制御を行なっている。いま、時刻 t における車両の位置、速度、加速度をそれぞれ $x_1(t)$ 、 $x_2(t)$ 、 $x_3(t)$ とすると、

$$x_2(t) = \dot{x}_1(t) \quad (5.27)$$

$$x_3(t) = \dot{x}_2(t) = (1/m) \{ f(t) - g[x_2(t)] \} \quad (5.28)$$

ただし、

m : 車両の重量

$f(t)$: ドライバーまたはコントローラが与える力

$g[x_2(t)]$: 非線形摩擦力

となる。ここで、 $g[x_2(t)]$ を V_d (理想速度、すなわち本線 MT の速度) でテイラー展開し、最初の 2 項で近似する。

$$\begin{aligned} g[x_2(t)] &= g(V_d) + \left. \frac{dg}{dx_2} \right|_{V_d} (x_2 - V_d) \\ &= g(V_d) + m a (x_2 - V_d) \end{aligned} \quad (5.29)$$

ただし、

$$a = \frac{1}{m} \cdot \left. \frac{dg}{dx_2} \right|_{V_d}$$

以上から次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{f} \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

ここで、理想位置（乗り換えるべき本線MTの位置）を $x_4(t)$ とすれば

$$\dot{x}_4(t) = V_d, \quad \ddot{x}_4(t) = 0$$

である。制御すべき副線上の車両と、乗り換えるべき本線MTとの位置誤差、速度誤差、加速度誤差をそれぞれ $z_1(t)$ 、 $z_2(t)$ 、 $z_3(t)$ とすると、

$$z_1(t) = x_1(t) - x_4(t)$$

$$z_2(t) = x_2(t) - V_d$$

$$z_3(t) = x_3(t) - 0$$

より次式を得る。

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1/m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{f} \end{bmatrix} \quad (5.31)$$

本モデルでは、最適レギュレータの理論に基づいて、2次評価関数

$$J[\dot{f}(t)] = (1/2) \int_0^\infty [q_1 z_1^2(t) + q_2 z_2^2(t) + q_3 z_3^2(t) + r \dot{f}^2(t)] dt \quad (5.32)$$

を最小にするような入力 $f(t)$ を与える。ただし、 q_1 、 q_2 、 q_3 、 r は適当な重みを表わす。 $u = \dot{f}/m$ とおくと、上の2つの式は次式となる。

$$\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \end{bmatrix} \quad (5.33)$$

$$J[u(t)] = (1/2) \int_0^\infty [Q_1 z_1^2(t) + Q_2 z_2^2(t) + Q_3 z_3^2(t) + u^2(t)] dt \quad (5.34)$$

ただし、

$$Q_1 = q_1 / r m^2, \quad Q_2 = q_2 / r m^2, \quad Q_3 = q_3 / r m^2$$

(5.33) (5.34) が以下のシミュレーションで用いるシステム方程式および 2 次形式評価関数である。

一般に、線形微分方程式

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t), \quad x(0) = x_0 \quad (5.35)$$

で表わされる可制御なシステムにおいて、評価関数

$$J = \int_0^{\infty} [x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t)] dt \quad (5.36)$$

を最小にする制御入力 $u(t)$ を求めるのが最適レギュレータ問題 (optimal state regulator problem) [75] である。この解 $u_0(t)$ は次式で与えられることが知られている。

$$u_0(t) = -R^{-1} B^T K x(t) \quad (5.37)$$

ここで、行列 K は次の Riccati 代数方程式の解である。

$$KA + A^T K - KBR^{-1}B^TK + Q = 0 \quad (5.38)$$

Ricatti 代数方程式の数値解法としては、Kleinman 法のように直接的に解く方法や、1 入力標準形に変換しての解法が知られている。この結果に基づく制御系は図 5. 11 のように構成される。

以上の理論によると、本モデルに対する最適制御入力は

$$u(t) = -[k_{13}z_1(t) + k_{23}z_2(t) + k_{33}z_3(t)] \quad (5.39)$$

の形で求まる。

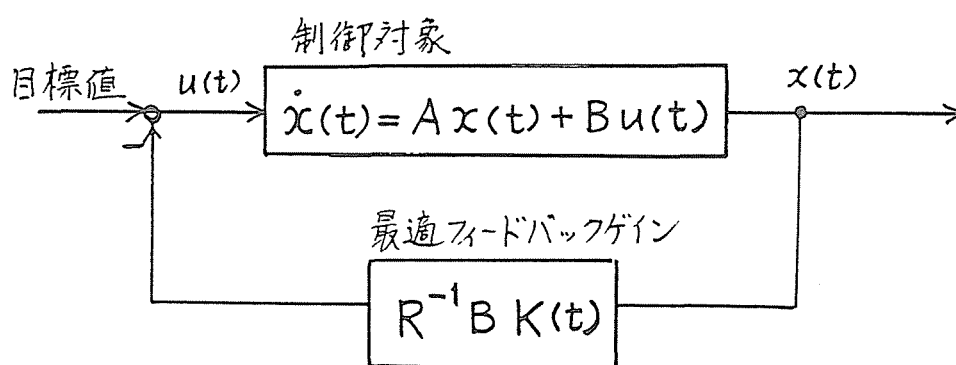


図 5. 11 最適レギュレータ制御システムの構成

本研究で行なったシミュレーションの手順を示す。車両がチェックポイントを通過したとき、どのMTに乗り換えるよう指示を受けたかにより4つのケースがある。観測区間内の最下流（図5.10の8の点）のMTに乗り換えるケースをAと名前を付け、以下、上流に乗り換えるケースを順にB, C, Dとする。実際の乗換えは分岐点から開始されるので、位置誤差の初期値はそれぞれ5m、20m、35m、50mとなる。また、速度誤差の初期値はいずれも -5 m/s 、加速度誤差の初期値は0である。それぞれのケース毎に次の手順を繰り返す。

1. 評価関数のパラメータ Q_1 、 Q_2 、 Q_3 を適当に決める。
2. Ricatti 方程式を解き、 k_{13} 、 k_{23} 、 k_{33} を求める。
3. 最適制御入力（5.39）を与えた時の位置誤差、速度誤差、加速度誤差の時間変化を、（5.33）を数値的に解くことにより求める。
4. 3. で得られた車両挙動が①～④の制約を満たしているかどうか調べる。

この手順を、満足のいく解を得るまで繰り返して得た結果が表5.2および図5.12～図5.15である。いずれも①～④の制約を満たしている。ケースC、Dでは速度を 10 m/s から一旦 $8\sim6\text{ m/s}$ に減速した後 15 m/s まで加速している点が興味深い。こうしなければ①②の条件を満たすことができないからである。

表5.2 シミュレーション結果

ケース	各誤差の初期値			制御パラメータ						結果
	$z_1(0)$	$z_2(0)$	$z_3(0)$	Q_1	Q_2	Q_3	k_{13}	k_{23}	k_{33}	
A	5	-5	0	0.15	0.5	0.3	0.3873	1.358	1.722	図5.12
B	20	-5	0	0.025	0.1	0.2	0.1581	0.7087	1.257	図5.13
C	35	-5	0	0.045	0.17	0.25	0.2121	0.8780	1.401	図5.14
D	50	-5	0	0.045	0.2	0.35	0.2121	0.9080	1.457	図5.15

図5.12 位置誤差・速度誤差・加速度誤差の時間変化 (ケースA)

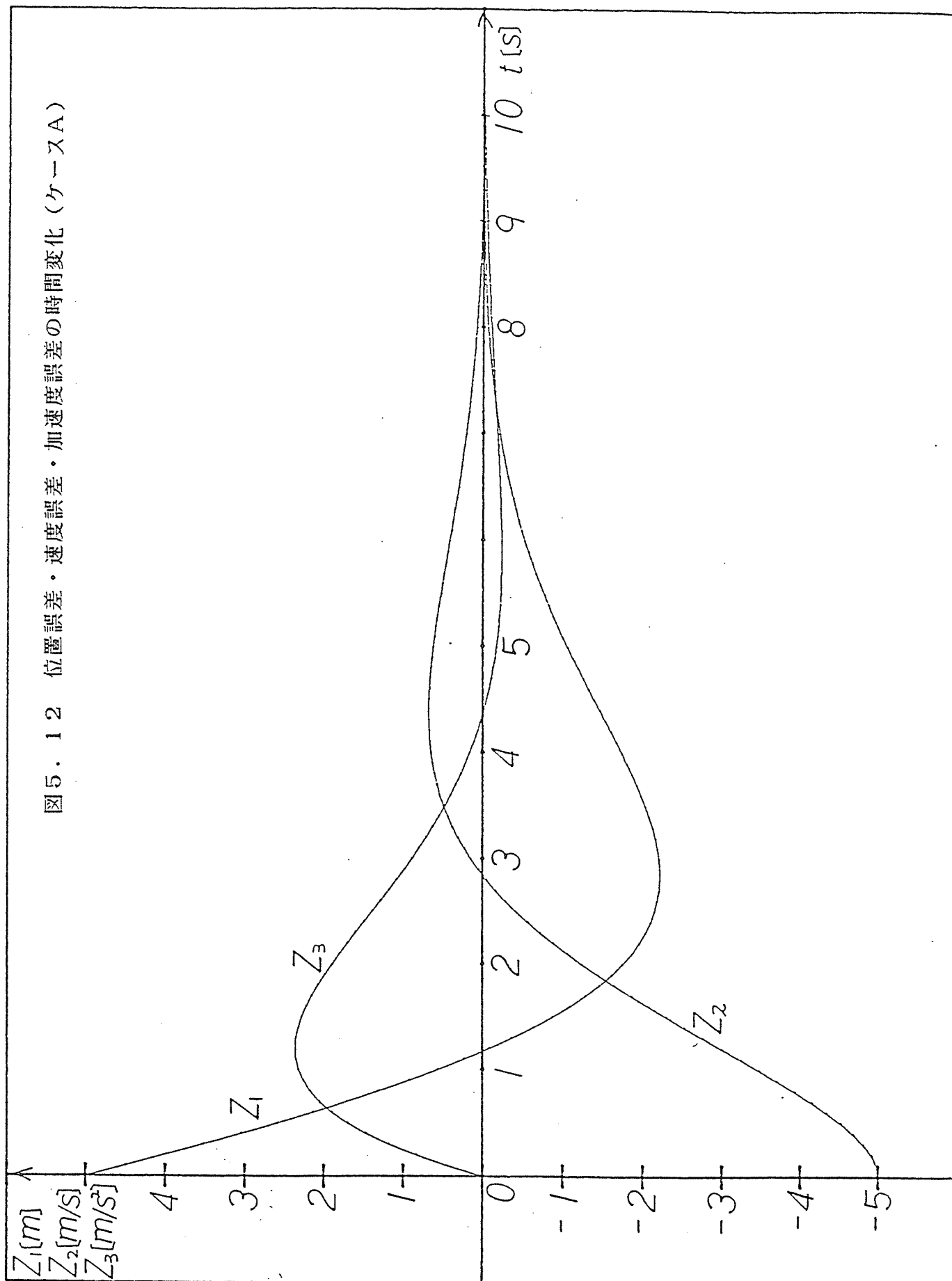


図5. 13 位置誤差・速度誤差・加速度誤差の時間変化 (ケースB)

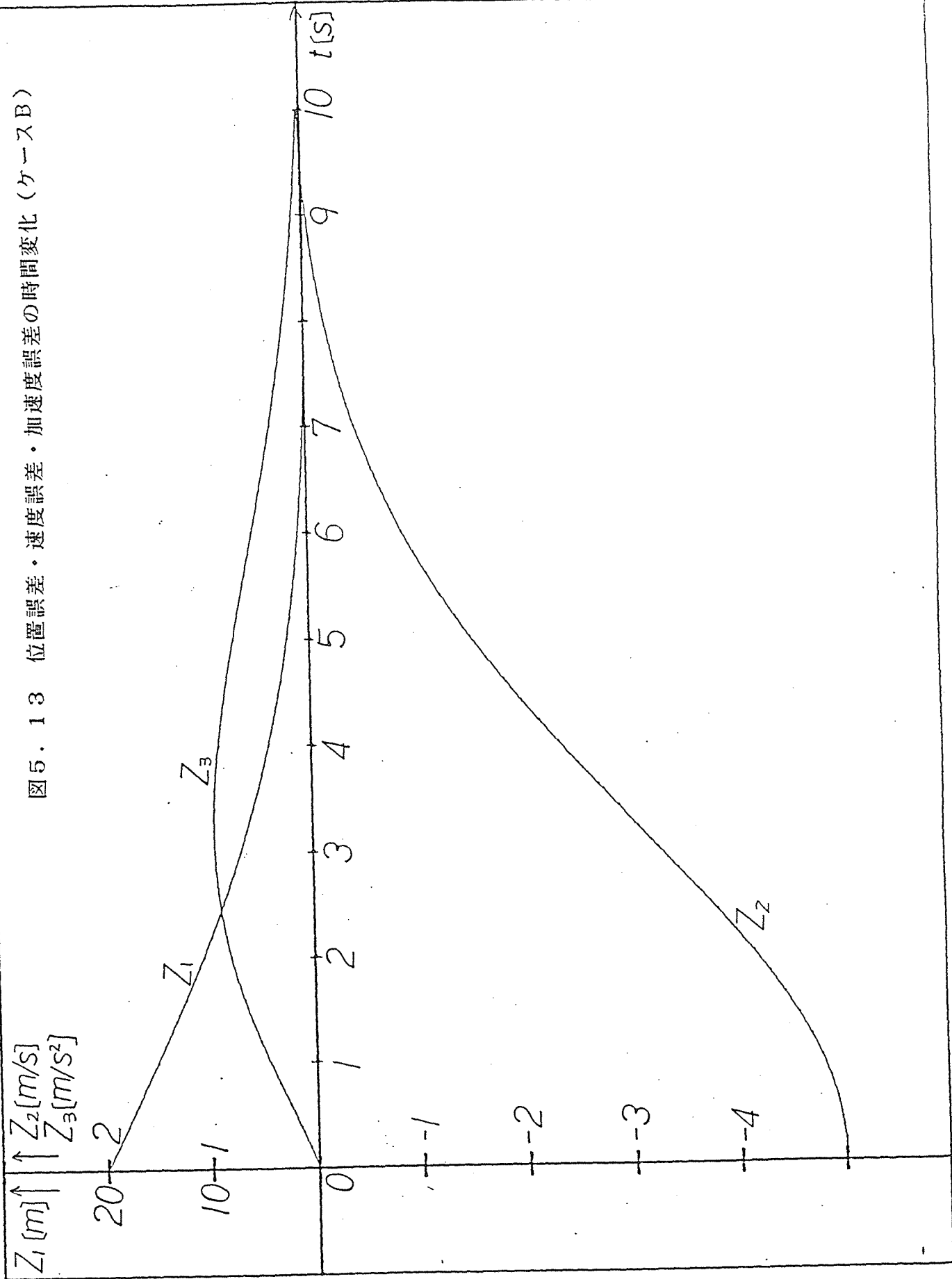
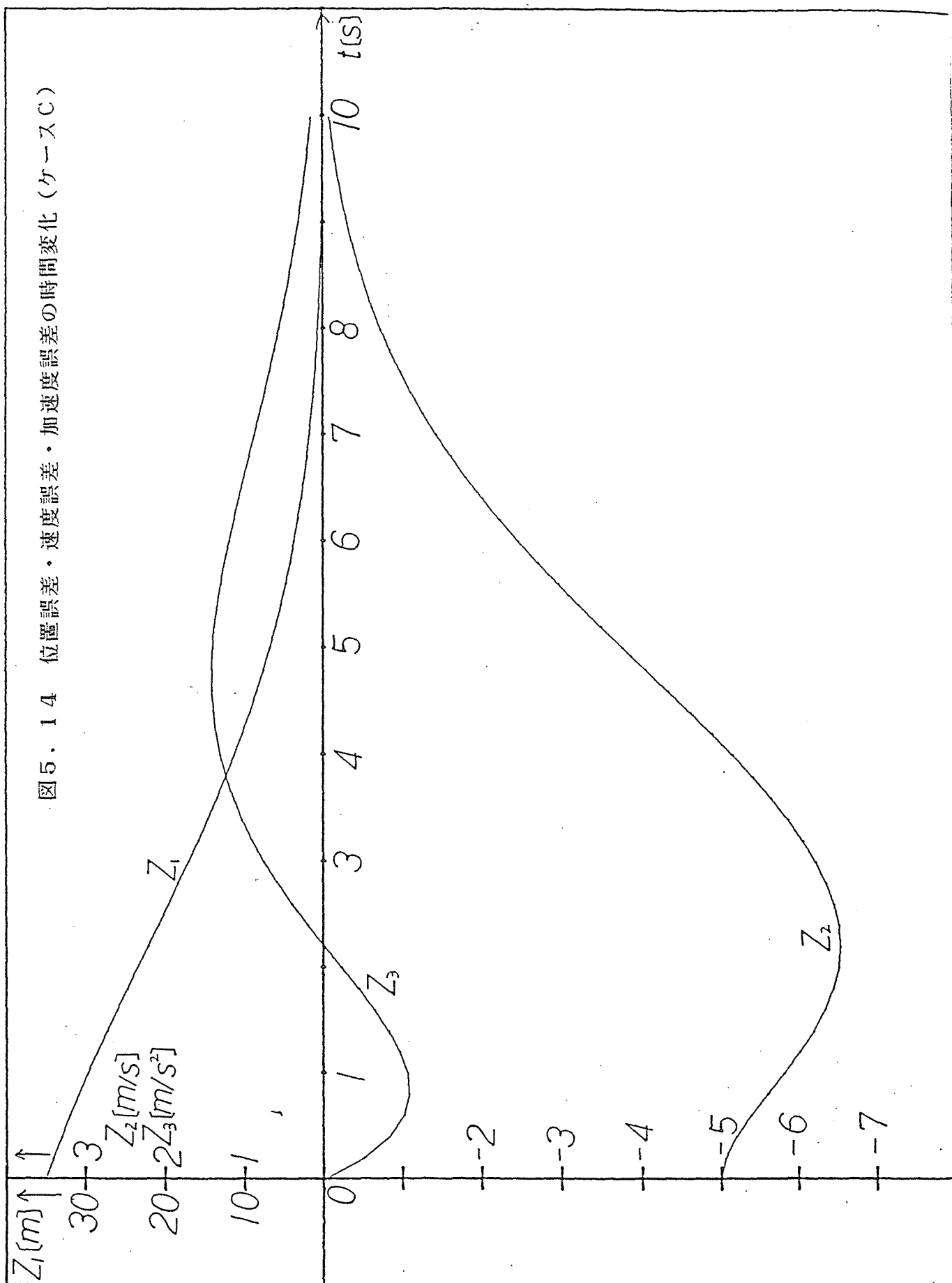


図5.14 位置誤差・速度誤差・加速度誤差の時間変化 (ケースC)



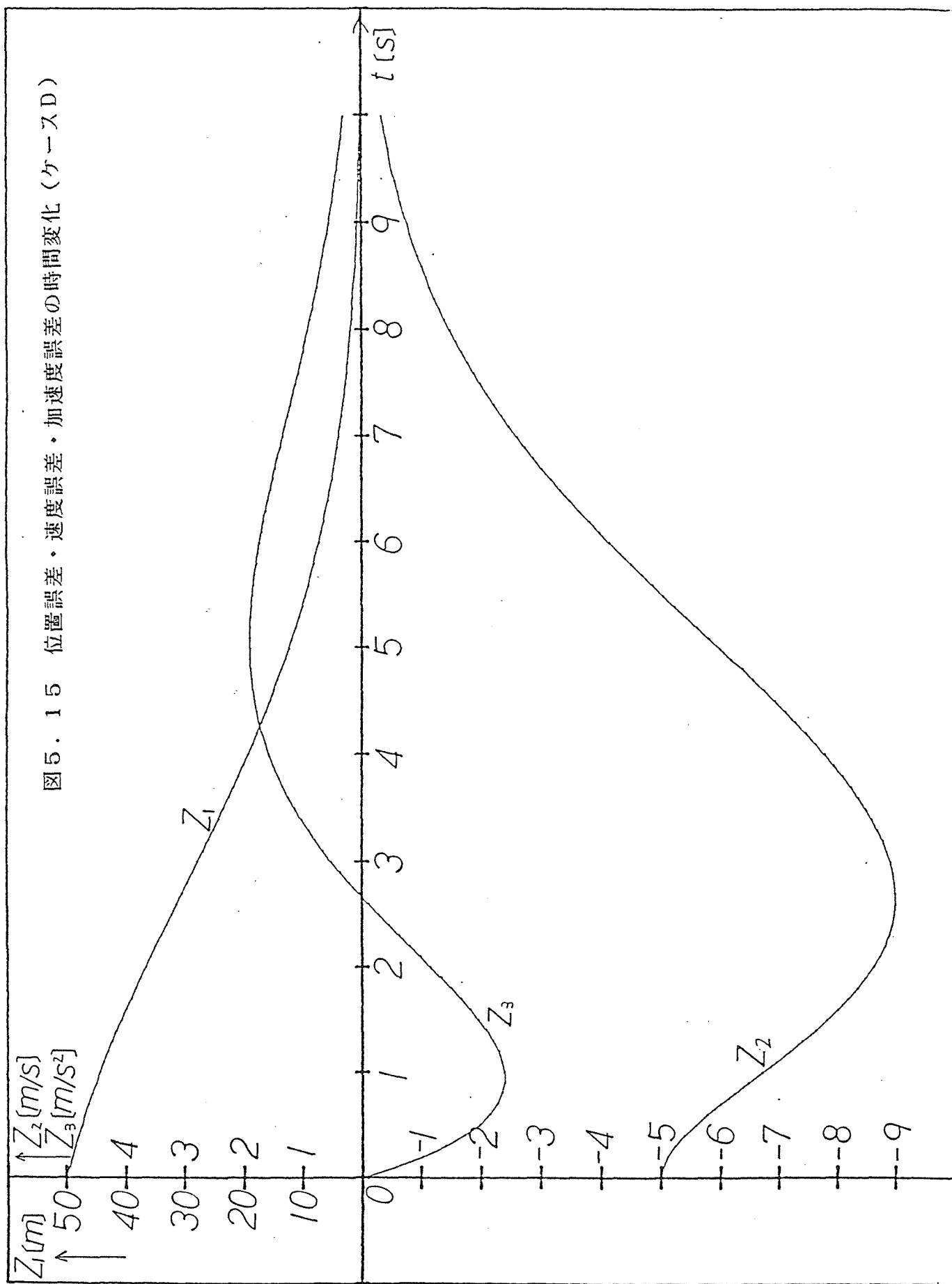


図5. 15 位置誤差・速度誤差・加速度誤差の時間変化 (ケースD)

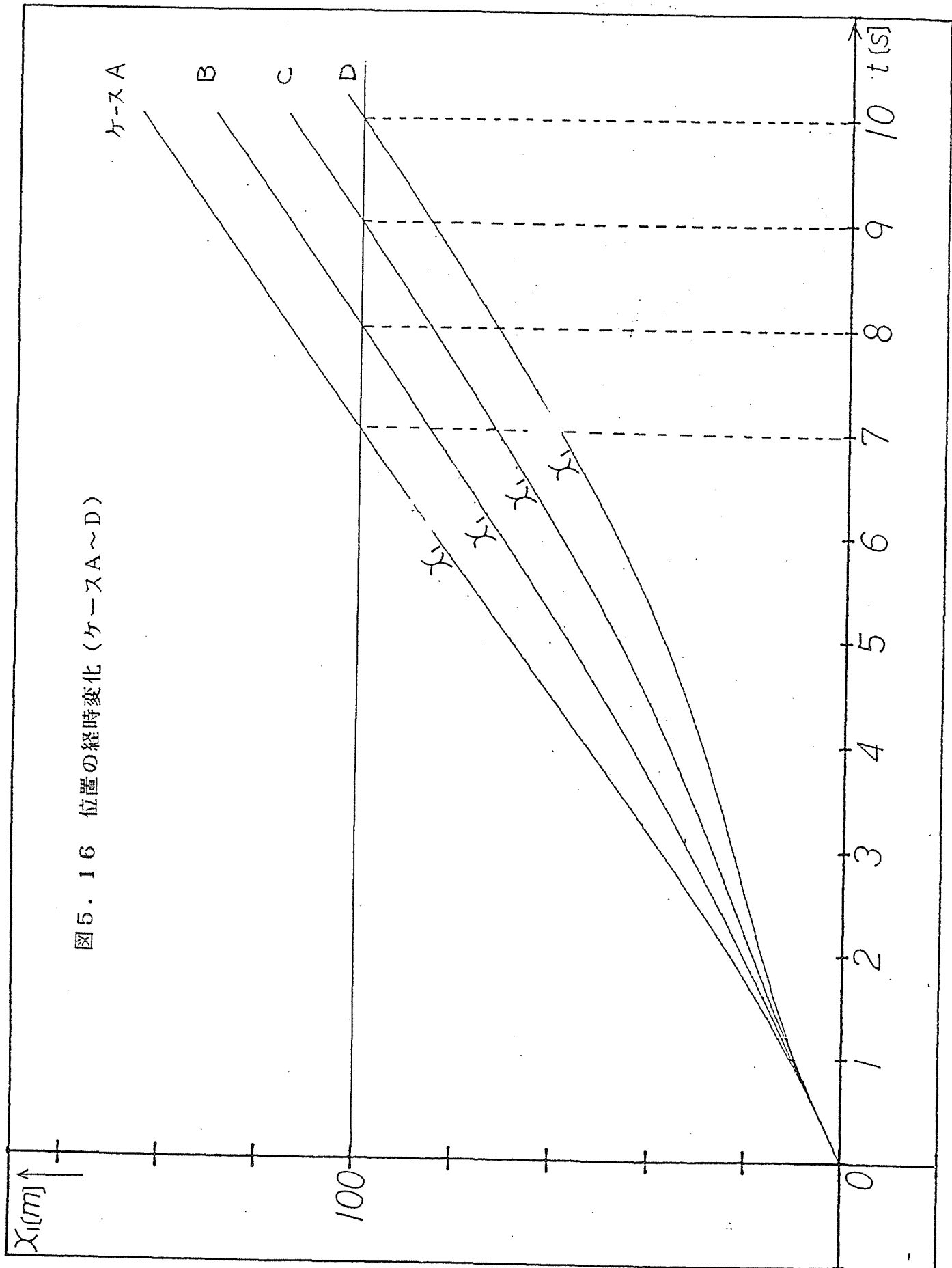
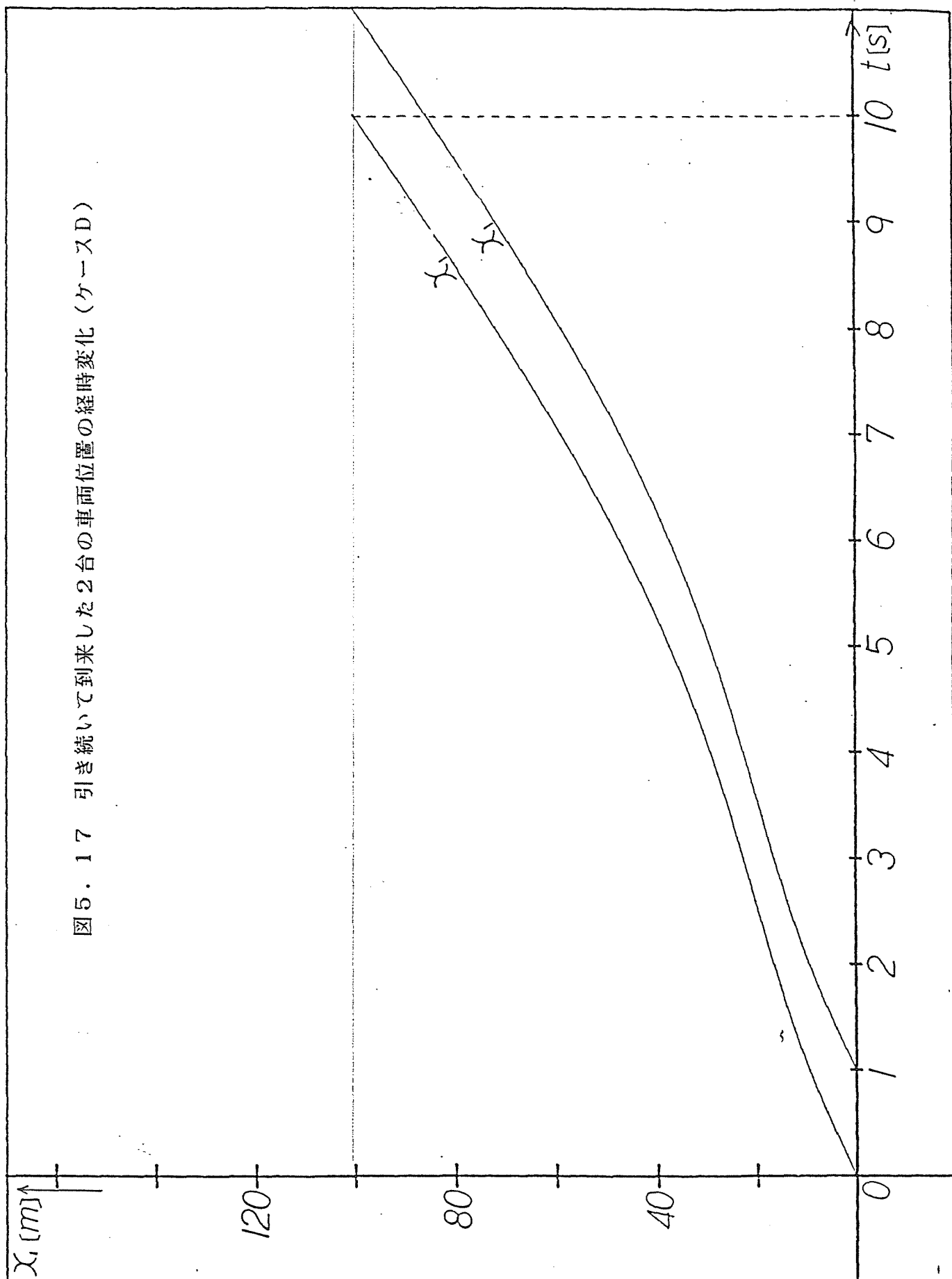


図5. 16 位置の経時変化 (ケースA~D)

図5.17 引き続いて到来した2台の車両位置の経時変化（ケースD）



各ケースについての位置対時刻の関係を図5. 16に示す。各ケースはいずれも指定された時間（それぞれ7, 8, 9, 10秒間）でちょうど100m走行し、しかも、最終的な速度は15 m/sになっている。

次に、⑤の条件すなわち車間距離について調べた。種々のケースを調べた結果、いずれも車間距離が十分保たれていることが確かめられた。ここでは、車間距離が最も短くなった場合を図5. 17に示す。これは、引き続いて到来した2台の車両がいずれもケースDの乗換えを行なった場合である。時刻3付近で車頭間隔が約6m、すなわち車間距離が3mとなるが、このときの速度は図5. 15により約6 m/sという低速度であり、十分安全である。

さて、これまでの例では乗り換えるべきセルがケースA～Dの4通りであるが、これを5通りにできるであろうか。すなわち、ケースAよりもさらに下流のセルまたはケースDよりもさらに上流のセルへの乗換えが可能であろうか。これについても同様のシミュレーションを行なった結果、それは不可能であることがわかった[76]。いずれも加速度が制限を超えてしまい、条件③を満たせなくなってしまう。

5. 9 まとめ

高速路と低速路が交差する立体交差点における同期制御アルゴリズムを考案した。車両のランダム到来を仮定し、この交差点の状態変化をマルコフ連鎖として定式化した。これを解析することにより平均遅れ時間と迂回率に対する表式を陽に得た。

本章のモデルは従来の立体交差点に比べて次のような望ましい特徴を持っている。

- ・MT乗換えの判定は分岐点の通過以前に行ない、実際の乗換えは分岐点の通過後に行なっている。したがって、分岐希望車のMT乗換えが後続の直進希望車に影響を与えることがなく、直進希望車は常に遅れ時間なしで交差点を通過できる。また、分岐希望車が側線上で長時間待つことがない。
- ・確率モデルは、この現実的な制御アルゴリズムに忠実に基づいて構成されている。したがって、モデルの妥当性が明らかで、信頼できる精度を得ている。

また本章では、車両の物理レベルの制御について、基本的な点を考察した。最適レギュレータ理論に基づいて制御系を構成し、連続系シミュレーションを行なった。この結果、本章の論理モデルは物理的にも種々の制約条件を満たし、実際的なものであること

が実証された。

第6章 ネットワークの専用シミュレータ

6.1 まえがき

本論文ではこれまで主に確率論的なアプローチにより駅と交差点をモデル化し、トラヒック特性を解析してきた。これらのモデルはシステムの本質的な面をとらえ、他の詳細は簡略化することにより構成されたものである。したがって、解析が容易で、システムの基本的なふるまいが把握できた。しかし、このような理論的方法にも限界がある。たとえば、これらのモデルをもっと詳細化しようとする大きな困難に直面してしまう。このような場合に有効なシステム技法がコンピュータ・シミュレーションである。実際、第3章と第5章において我々はある目的のためにシミュレーションを行なった。本章は全体がシミュレーションの議論である。

本章が対象とするものは個別軌道輸送システムのネットワークである。これは確率論的な扱いが困難であり、シミュレーションに頼らざるをえない。シミュレーションを実施するにはそのためのコンピュータ・プログラムを作成する必要がある。しかし、一般にシミュレーション・プログラムは大規模なものになりがちである。プログラムの本質的な部分はそれほど大きくなくても、入力データの作成・処理、統計データの収集・整理・解析、プログラムのテスト・デバッグのためのルーチンなど、周辺に多数の支援プログラムが必要となる。そのため、通常はこのようなプログラムを毎回作るようなことはせず、シミュレーション・プログラム（シミュレータ）を一つ作っておき、必要最小限のデータ入力で種々のシミュレーションが実施できるようにしておく。どのような機能を持つシミュレータをどのように構成するかは非常に重要な問題であり、対象とするシステムやシミュレーションの目的に応じて適切に決める必要がある。これを誤り、非常に複雑なシミュレータにってしまうと、効率低下のためシミュレーションが円滑に実施できなくなる（シミュレーションは多数のケースについて多数の実行（run）を必要とすることに注意）。また、低機能のシミュレータにってしまうとシステム設計に必要な精度の良いデータが得られなくなってしまう。

都市型軌道交通システムのシミュレータとしては幾つかのメーカーが所内用に作成しているものがある[77, 78]が、これらは鉄道や地下鉄のようにダイヤに基づいてスケジ

ユーロ運行される比較的簡単な形状のネットワークを詳細に模擬することを指向している。しかし、本研究の対象とする個別軌道輸送システムはデマンド運転によるもので、ネットワーク形状も一般には面的で密である。

本章の目的は、個別軌道輸送システムのネットワークにおけるトラヒックをマクロ的に解析するための特殊目的シミュレータの設計と実現に関して、ある基本的アイディアを実験的に試み、その有効性を確かめることである。このシミュレータは現在はまだ完全なものではないが、その基本となる考え方や特徴、実現方法は、本章で述べるように十分実用的で有望なものである。本節の残りの部分でシミュレーション一般に関する概説をした後、6.2～6.3節で本シミュレータの概要と特徴を述べる。6.4～6.10節ではシミュレータの仕様の詳細を述べる。6.11～6.14節では、このシミュレータを実現するためのソフトウェア構成とアルゴリズムを述べる。

<シミュレーションの定義・目的・分類>

シミュレーションは1940年代の終わりの頃のフォン・ノイマンとユーラムの仕事にその起源を見いだすことができる。当時この2人は、原子力関係の防護問題を解くにあたり、実験的に解を求めるには高価につきすぎるし、また解析的取り扱いが複雑になりすぎるので、“モンテカルロ分析”という名前を付けて、ある数学的手法を応用している。モンテカルロ分析は非確率的な数学問題に対して、その数学的諸関係を満足するモーメントまたは確率分布を持った確率過程をシミュレートすることによって、これを解く方法である。

1950年代のはじめに、高速コンピュータが登場するにおよんで、シミュレーションはまた別の意義を持つようになった。それは、コンピュータの上で（興味の対象となるシステムを記述する）数学モデルについて実験をすることが可能となったからである。それ以来シミュレーションは重要なシステム技法として用いられてきた。

シミュレーションの定義は次のものが一般的である [79]。

システムまたは有機体のシミュレーションとは、そのシステムまたは有機体を代表するモデル、またはシミュレータのオペレーションのことをいう。このモデルは、実在物の上で実行しようとするか不可能であるとか、あまりにも高くつきすぎるとか、現実的でなくなってしまうようなオペレーションがうまく行なえるように作られたも

のである。モデルのオペレーションが調査され、その結果から、実際のシステムまたはそのサブシステムの行動に関する諸性質の推測を行なうことができる。

この定義からも科学的方法におけるシミュレーションの意義がわかるが、ここで、今日の科学的哲学の創始者といえるフランシス・ベーコンの言葉を引用しよう。ベーコンによれば、科学的方法は次の4つの段階から成り立っている。

1. システムの観測
2. システムの観測を説明するための仮説（たとえば数学モデル）の定式化
3. 仮説に基づき、数学的または論理的演繹によるシステムの行動に関する予測。
たとえば、数学モデルの解を求めることによる。
4. 仮説または数学モデルの妥当性をテストするための実験の実施。

しかし多くの問題やシステムに対して、この4つの段階を踏むことが困難な場合がある。第1に、現実の世界に発生する変化の中には、ある種の過程を観測することが不可能であるとか極度に費用を要する場合がある。第2に、観測されるシステムが非常に複雑であるため、これを数学の方程式を用いて記述し、解析解を求めて予測の役に立てることができないという場合がある。第3に、システムの中には、システムを記述する数学モデルは作れるが、モデルの解を簡単に解析的に求めることができないため、システムの未来の行動に関して予測ができない場合がある。第4に、システムを記述する数学モデルの妥当性を確認する実験を行なうことが不可能であったり費用がかかりすぎる場合がある。このような場合に、この手順中の困難な段階へシミュレーションを適用することができる[80]。第1の例をあげれば、アメリカまたはソ連の最初の有人軌道飛行が行なわれるまでは、米航空宇宙局（NASA）はこのような飛行が人間におよぼす影響についての実際のデータは1つも持っていなかった。つまり、このような飛行を経験した人間が1人もいなかったからである。また、人間のテストパイロットを使って実験するという方法は、人命尊重の立場から取り上げられなかった。しかし、NASAはこれにかわる方法をうまく利用して成功した。宇宙飛行が人間テストパイロットにおよぼす影響をコンピュータを用いてシミュレーションしたのである。

コンピュータ・シミュレーションのためのモデル[25]は連続系モデルと離散系モデルに大別される。連続系モデルはシステムの状態の変化を等時間間隔で追っていくもので、ふつう、システムを微分方程式や差分方程式で記述する。離散系モデルでは、不規

則な時間間隔で生ずる事象 (event) により状態 (state) が変化すると考える。事象と事象の間では状態は変化しない。離散系モデルは一般に数式で記述することは困難であるため、シミュレーション言語や図式などを用いてモデル化される。本章のシミュレータは連続系モデルをシミュレートするものであるが、そのモデルは数式で記述されるのではなくシミュレーション言語で記述されるという点で特異なものである。この特徴は、ユーザとのインターフェースに優れたシミュレータを構成するために生じた。次節以降で順を追ってその内容を説明していこう。

6. 2 制御方式のモデル化

個別軌道輸送システムの制御方式には車両追従制御方式と点追従制御方式の2方式がある。車両追従制御方式では、各車両は先行車の走行状態に応じて速度制御が行なわれる。点追従制御方式では、計算機内において仮想の移動セルを軌道上に走行させ、デマンド発生時に空いているセルを割り当てる。日本や米国では点追従制御が採用されているため、本シミュレータでも点追従制御を仮定している。

点追従制御にはさらに同期制御と準同期制御の2方式がある。同期制御方式では、各車両が駅を出発する際に、目的地に至る経路中のすべての合流点の使用がこの車両のために予約される。現在では、準同期制御方式が主流であり、本シミュレータもこの方式を仮定している。この方式は、合流点の手前で必要に応じてセルの乗換えを行なわせる方法である。

図6. 1 (a) にセルの乗換えの状況を示す。合流部での衝突を避けるため、セル8および9に割り当てられていた車両が各々セル9および10に乗り換えている。この2車両の位置の経時変化は図6. 1 (b) の実線AD, EHのようになる。しかし、本シミュレータの目的は車両のダイナミクスの模擬ではなく、ネットワークのトラヒック解析にある。したがって、セルの時間間隔を単位時間にとりシミュレーション時刻の最小単位とし、制御は折れ線ABCDおよびEFGHのように行なうものと考えてよい。すなわち、セル8およびセル9上の車両は合流点の手前で単位時間だけ停止すると考える。

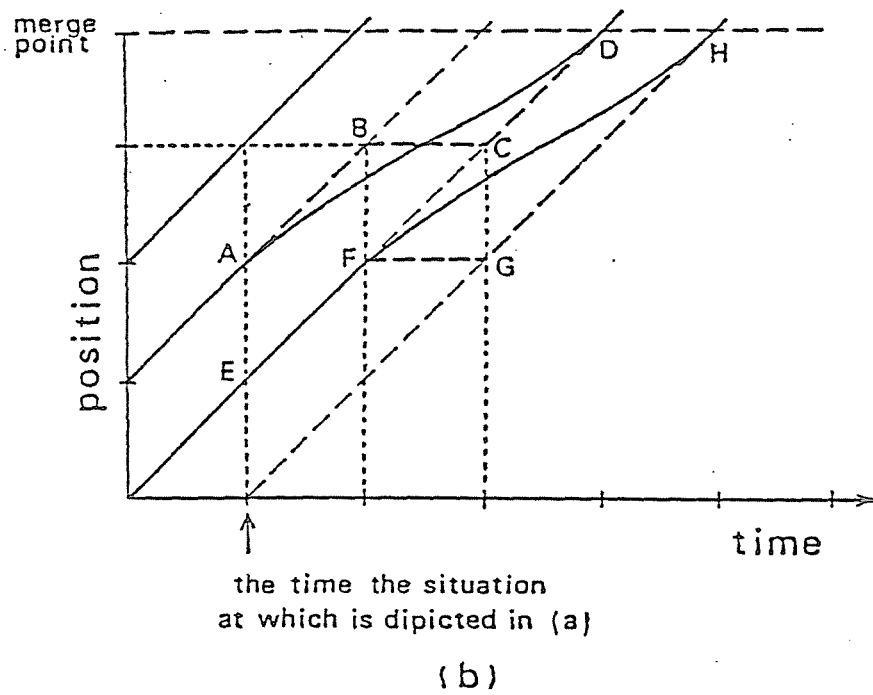
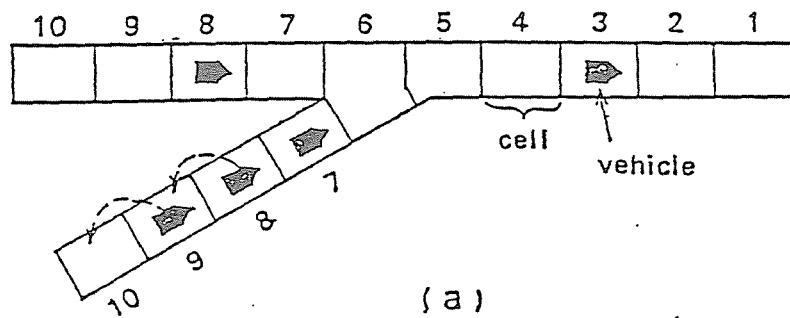


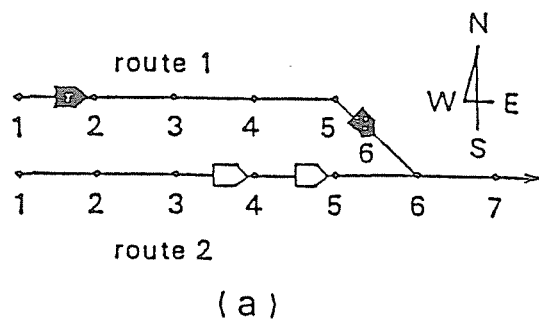
図6.1 セル乗換え

6.3 シミュレータの概観

本シミュレータではタートル・グラフィックス [81] 的な基本命令（” 1 だけ進め”、” 右へ 45 度向きを変えよ” 等）を組み合わせた運行プログラムにより車両挙動を記述する。ただし、通常のタートル・グラフィックスと異なり、タートルはただ 1 個ではなく複数個ある。これらタートルの各々が車両に対応している。一つの運行プログラムをシミュレータに入力すると、各タートルは独自にこのプログラムを解釈・実行し始める。（タートルをコンピュータの CPU に対応させると、1 つのプログラムが複数の CPU により並列に実行されることに対応する。プログラムのどの部分を実行しているかは、タートル毎に異なる。）このことにより車両の走行が模擬される。

プログラムの命令列中にはシミュレーションを行なうために不可欠な論理的な命令の他に、タートルのグラフィック表示（地図の表示）を行なうための命令が混在している。このため、シミュレーションの進行と同時に、各タートル（車両）がディスプレイ上（ネットワーク上）を移動していく様子が表示される。

簡単な例として、図 6.2 (a) の合流部のみのシミュレーションを考える。この場合、利用者は図 6.2 (b) のプログラムを作成すればよい。ただし、図の左端には便宜上、行番号を付してある。各行の意味はおおよそ次の通りである。セミコロンで始まる行は注釈である。



```

1 ; ROUTE 1
2   GENERATE 1,20
3   ORIGIN   10,20,E
4   COLOR    RED
5   NEXT
6 ;
7   ADVANCE  4
8 ;

```

```

9   TURN      SE
10  ADVANCE   1
11 ;
12  MERGE     2,6
13  MOVE
14  TURN      E
15  NEXT
16 ;
17  JUMP      JP1
18 ; ROUTE 2
19  GENERATE  2,50
20  ORIGIN    10,10,E
21  COLOR     BLUE
22  NEXT
23 ;
24  ADVANCE   5
25 JP1 ADVANCE 1
26  TERMINATE

```

(b)

図 6 . 2 合流部のシミュレーション例

- [行 2] ルート 1 の始点に 20 % の確率で車両を発生せよ。(以後の行 3 - 17 は、ここで発生した車両に対する命令である。)
- [行 3 - 5] 車両をディスプレイ上の座標 (10, 20) 上に東 (E) 向きに赤色で表示せよ。(行 2 - 5 で単位時間中の車両の一動作を表わしている。)
- [行 7] 4 (単位距離) だけ進め。(1 単位時間毎に 1 ずつ進む。したがって、4 単位時間経過する。)
- [行 9、10] 向きを南東に変え、1 進め。
- [行 12 - 15] ルート 2 内の地点 6 に合流せよ。(表示的には、1 進み、向きを東にする。)
- [行 17] 制御をラベル JP1 の命令に移せ。
- [行 19 - 22] ルート 2 の始点に 50 % の確率で車両を発生し、座標 (10, 10) 上に東向きに青色で表示せよ。
- [行 24] 5 進め。
- [行 25] 1 進め。
- [行 26] 消滅せよ。

このプログラムをシミュレータに入力し、二、三の指示を与えるとシミュレーションが開始される。まずプログラムの解析に基づいてディスプレイ上に図6.2(a)のような路線が表示される。その後、プログラムの指令に従って車両が次々と発生し、ディスプレイ上を移動し、消滅する。シミュレーションが終了すると、遅延時間などの標準統計出力が得られる。

このように、本シミュレータは次の特徴を持つ。

(1) 車両は単位時間毎に1単位距離ずつ離散的に前進する。このようなモデルの簡略化は、本研究で扱う個別軌道輸送システムが点追従制御である点と、本シミュレータの目的がネットワークのマクロなトラヒック解析にある点から正当化される。

(2) 本シミュレータに入力するものはGPS風の構文を持つ言語形式のプログラムであり、各車両に対応するタートルがこのプログラムを実行することにより走行が模擬される。このプログラムは対象とするネットワーク形状と明らかな1対1の対応をしている。プログラム中の制御の分岐・合流はすべてネットワーク中の路線の分岐・合流と1対1に対応する。したがって、システム設計者は、ネットワーク条件を容易に記述でき、迅速にシミュレーションを実施できる。

(3) 本シミュレータではシミュレーションの進行とともに、車両挙動がディスプレイ上に視覚的に表示される。これはプログラムのテストやデバッグに非常に有効である。シミュレータの内部状態のトレースを長々とプリンタに印字するというテスト・デバッグ方法はほとんど必要ない。また、シミュレーションの統計出力を解析してシステムのボトルネックを発見し、その原因や対策を考えるというような場面においても、このディスプレイ表示が役立つ。ディスプレイ上の車両挙動を眺めることにより、システム全体のふるまいが直観的に把握できるからである。統計出力は定量的な裏付けに用いればよい。もちろん、ディスプレイ表示にはCPU時間のオーバーヘッドが伴うので、単に統計出力のみ必要なときはディスプレイ表示をoffとすれば効率良くシミュレーションを行なえる。

6.4 車両の位置・移動

本シミュレータでは車両の位置を論理位置と表示位置の2つに区分して表現している。

論理位置は (r, p) の形で表わされる。 $r (= 1, 2, \dots, n)$ をルート番号、 $p (= 1, 2, \dots, L_r)$ をルート内位置と呼ぶ。ネットワークは複数のルートから

なっている。ルートは $1, 2, \dots, L_r$ と番号付けられた L_r 個の点の順序集合である。 L_r をルート r の長さ、 $(r, 1)$ をルート r の始点、 (r, L_r) をルート r の終点という。

〔注〕ネットワークのどの部分を一つのルートと考えるかは利用者の自由である。また、ルートの長さは各ルート毎に異なってもよい。利用者は自分の考えたネットワーク配置に基づいて運行プログラムを記述することにより、間接的にルートの始点、終点、長さをシミュレータに知らせることになる。

車両挙動の制約として、任意の時刻において、どの車両も異なる論理位置にいることが必要である。シミュレータはこの制約が満たされていることを確認しながら車両を動かす。もし車両を進ませることにより衝突が生ずるならば、ルート間の優先度に基づいて一方の車両を停止させる（セル乗換え）。車両 i の論理位置を変数を用いて (R_i, P_i) と表わす。

表示位置は個々の車両のグラフィック表示にのみ必要な情報で、シミュレーションの論理的な進行に影響を与えることはない。表示位置は (x, y, d, c) の形で表わす。 x, y はディスプレイ上の座標値、 d は車両の向き（八方位、すなわち N, E, NE など）、 c は車両の色を表わす。たとえば $(100, 50, NE, red)$ は、座標 $(100, 50)$ 上に北東向きに赤く表示されることを表わす。車両 i の表示位置を表わす変数として (X_i, Y_i, D_i, C_i) を用いる。

前述の2種類の位置に対応し、車両の移動も論理移動と表示移動がある。

論理位置 (R_i, P_i) を更新することを論理移動という。これにより、時刻 t に (r, p) にいる車両の、時刻 $t+1$ での論理位置は次の4つに区分される。

- (a) (r, p) : 停止（駅での停車、またはセル乗換えに対応する待ち）
- (b) $(r, p+1)$: 同一ルート上を進行
- (c) $(r', 1)$: 他ルート始点への分岐。 (r, p) を分岐点と呼ぶ。
- (d) (r', p') : 他ルートへの合流。 (r', p') を合流点と呼ぶ。

車両の表示位置を更新することを表示移動という。表示移動には次のものがある。

- (a) x, y, d, c の全部または一部の値を直接与えて変更するもの。
- (b) 現在位置から x 方向へ1単位移動。 $(X_i \leftarrow X_i + \Delta x)$ 。

他の7方向についても同様。

(c) 現在の方向 (D i 方向) へ 1 単位前進。

(d) 右 (左) へ 4 5 度向きを変える。

6. 5 車両の運行

本シミュレータでは、ネットワーク上の各車両がそれぞれプロセッサを持っていると考え、与えられたプログラムを各々独自に実行することにより車両群の運行が模擬されると考える。利用者が記述する図 6. 2 (b) のようなプログラムを運行プログラムという。運行プログラムはユニットの列である。ユニットは、単位時間中の車両挙動を記述したもので、基本命令の列として表現される。特にユニットの終わりを表わすために、補助命令 N E X T が用いられる。本シミュレータでは時刻は 1 ずつ増加するが、この各時刻毎に車両はユニットを 1 つずつ実行し、それにより車両の走行が模擬される。車両の単位時間中の挙動は多様であるが、ユニットを基本命令に分解して記述することにより、小さな命令体系で多様な車両挙動を正確に記述することが可能である。

基本命令はわずか 1 8 種類であり、次の 4 つに分類される。

(1) 論理移動命令：論理位置を設定・更新する命令

(2) 表示移動命令：表示位置を設定・更新する命令

(3) ゲート：ある条件が成立するまで車両を停止させる、あるいは条件によって制御の流れを変えるための命令。分岐点や駅部の諸条件のチェックを模擬する。

(4) 補助命令：上記 3 種以外の命令。

本シミュレータでは、基本命令のうち、よく使用される組み合わせの命令列をそれと等価な 1 命令として用意している。これを複合命令という。一般に複合命令はユニットの 1 つ以上の列と等価である。

表 6. 1 に命令系とそのおよその意味を示す。具体的な使用法は徐々に明らかにする。ここでは、最も基本的な使用法として、車両を 1 だけ前進させるユニット

R U N

M O V E

N E X T

を説明する。いま、ある車両の論理位置が (r, p)、表示位置が (x, y, E, c) であるとする。この車両が論理移動命令 R U N を実行すると論理位置は (r, p + 1) となる。(ただし、位置 (r, p + 1) に他の車両が存在するときは R U N の実行は延

表6. 1 命令系一覧

分類	命令とオペランド	意 味 の 概 要
論理移動命令	GENERATE r, n TERMINATE RUN ROUTE r MERGE r, p	確率 $n\%$ で車を1台発生し、 $R_i \leftarrow r, P_i \leftarrow 1$ とする。 (ルート r の始点に発生。) 目的駅も決定する。 この命令を実行した車を消滅させる。 $P_i \leftarrow P_i + 1$ (現在のルート上を1だけ進む) $R_i \leftarrow r, P_i \leftarrow 1$ (ルート r の始点に分岐) $R_i \leftarrow r, P_i \leftarrow p$ (論理位置 (r, p) に合流)
表示移動命令	ORIGIN x, y, d COLOR c MOVE d TURN d	$X_i \leftarrow x, Y_i \leftarrow y, D_i \leftarrow d$ とする $C_i \leftarrow c$ とする。 $c = DS$ の時は $C_i \leftarrow$ 目的駅に応じた色 d 方向(d を省略すると D_i 方向)へ表示が1単位だけ移動するように X_i, Y_i を更新 d が八方位のいずれかのとき: $D_i \leftarrow d$ $d = RIGHT$ (または $LEFT$) のとき: 向きが45度だけ右 (または左) へ回転するように D_i を更新
ゲ ン ト	CHECK r, p, n BRANCH a ENTER k, a DEPART k, r, p UNLOAD a, b LOAD a, b	分岐希望車の場合: 論理位置 (r, p) に車がいなければ何もせず次の命令へ進む。車がいる場合は停止(セル乗り換え)し、現時刻の処理を終え、次の時刻で再度本命令から実行を始める。 n は、停止回数(乗り換えセル数)の上限である。停止回数が n になっても先へ進めないときは、この車は分岐を放棄し、非分岐希望車となり、次の命令へ進む。 非分岐希望車の場合: 何もせず次の命令へ進む。 分岐希望車の場合: アドレス a にジャンプする 非分岐希望車の場合: 何もせず次の命令へ進む。 当車両が駅 k を目的とする実車または空車であり、かつ、駅 k に車が存在せず、駅の使用も予約されていないければ、駅の使用を予約し、アドレス a へジャンプする。(入駅) これ以外の場合は何もせず次の命令へ進む。 駅 k を出発できるか否かを論理位置 (r, p) の状態によって判定する。 (r, p) に他駅を目的地とする車がいなければ出発でき、次の命令へ進む。そうでないときは現時刻での処理を終え、次の時刻で再度本命令を実行する。 実車の場合: $[a-b, a+b]$ 区間での一様乱数によって定まる時間だけ停車。(客の降車) 空車の場合: 何もせず次の命令へ進む $[a-b, a+b]$ 区間での一様乱数によって定まる時間だけ停車。(客の乗車。) その後、目的駅を決定する。
補助命令	NEXT JUMP a DESIRE i	現時刻での処理を終える。ユニットの終わり。 アドレス a にジャンプする。 次の分岐点(番号 i)で分岐を希望するか否かを決める。(分岐希望車か非分岐希望車かを属性付ける)
複 合 命 令	ADVANCE n, d CURVE d	(RUN:MOVE d :NEXT) の n 回繰り返しと等価な命令。すなわち、同一ルート上を n だけ直進する。表示は d 方向に n だけ移動する。 $(d$ を省略すると現在の方向へ移動) (RUN:TURN d :MOVE:TURN d :NEXT) と等価。ただし、 d は $RIGHT$ または $LEFT$ 。すなわち、論理的には同一ルート上を1進む。車両は斜め前方の位置に、現在の向きと直角の方向を向いて表示される。

期される（後述）。）次に表示移動命令MOVEが実行され、表示位置が（ $x + \Delta x$, y , E, c）となる。（車両の向きが東なのでxの値が1単位増加。）次に補助命令NEXTを実行すると、この車両の現時刻での処理が終了し、更新された表示位置に車両が表示される。上記の命令列は、単一の複合命令

```
ADVANCE    1
```

と等価である。

以上からわかるように、本シミュレータでは時刻が1ずつ増加するので連続系シミュレータといえる。ふつう連続系モデルは微分方程式や差分方程式で記述されるが、本システムでは専用のシミュレーション言語を用いるのが特徴である。

6.6 車両の発生と消滅

車両を発生、直進、消滅させるプログラムを示す。

```
GENERATE    3, 20
ORIGIN      100, 10, N
COLOR       GREEN
NEXT
ADVANCE     10
TERMINATE
```

GENERATE命令により、ルート3の地点に確率20%で車両が発生する。ORIGINおよびCOLORにより、その車両の表示位置は（100, 10, N, GREEN）となる。NEXTによりこの車両の現時刻での処理が終了し、車両が表示される。

ADVANCEにより、現在のルート（ルート3）上を10だけ進む。表示的には車両の現在の向き、すなわち、ディスプレイの上方（北）へ向かって進む。

TERMINATEにより車両は消滅する。

以上のプログラムにより、車両が次々と発生し、前進し、消滅していく。

GENERATE命令はまた、発生した車両が空車か実車（客の乗車している車両）

か、さらに、実車ならば目的駅はどこかを、利用者が予め定義した目的駅決定表のデータに従って確率的に決定する。

GENERATE命令は、利用者が予め定めた台数の車両がネットワーク上を走行しているときには車両を発生しない。したがって、プログラム中にTERMINATE命令を1つも置かなければ、いずれは、ネットワーク中の車両台数は一定となり、閉ネットワークを実現できる。

6.7 交差点・駅

交差点での分岐・合流の例として図6.3(a)の立体交差点を考える。図6.3(b)のプログラムにより、ルート1(本線)からルート3(ランプ)へ分岐し、ルート2(本線)へ合流する過程を説明する。

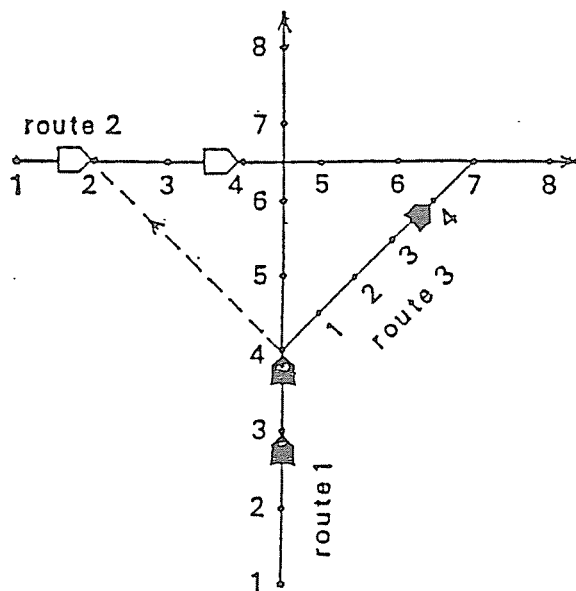
セミコロンで始まる行は注釈行である。行2-5で車両が発生し、その車両は行7を実行して分岐点(1, 4)に到達する。ここで、この車両は行9を実行する。DESIRE命令は分岐点で分岐を希望するか否かを分岐確率表 $B = (B_{ij})$ に基づいて決定する命令である。ここで B_{ij} は分岐点*i*で目的駅*j*の車が分岐を希望する確率を表わす。(目的駅のない空車であっても、便宜上、番号0という目的駅を持つと考える。)

非分岐希望車は行10、11では実質的には何も行なわず行12に達する。一方、分岐希望車が行10のCHECK命令を実行した場合には、論理位置としてオペランドに記された点(2, 2)に車両がいるか否かが調べられる。

①車両がいる場合、このまま分岐して進んでは合流点で衝突が生じてしまう。したがって、この分岐希望車の現時刻での処理は終了させられ、この車両は分岐点で停止(セル乗換え)して待つ。この車両は次の時刻に再び行10のCHECK命令から実行を再開する。指定された回数(4回)停止してもまだ先へ進まないときは分岐希望を放棄し、直進希望に変える。この車両は行11では何も行なわず、行12へ進む。これを交差点における迂回という。

②点(2, 2)に車両がいない場合には次の命令BRANCHへ進み、ラベルRT3と記された行27へ制御が移る。

行27-30ではルート3の始点への分岐が行なわれる。行32により車両はルート3の終点に達する。行34-37でルート2上の点(2, 7)への合流が行なわれる。行39により、次の時刻ではまずラベルMP27と記された行23へ制御が移る。



(a)

```

1 ;ROUTE 1
2   GENERATE 1,20
3   ORIGIN 100,10,N
4   COLOR YELLOW
5   NEXT
6 ;
7   ADVANCE 3
8 ;

```

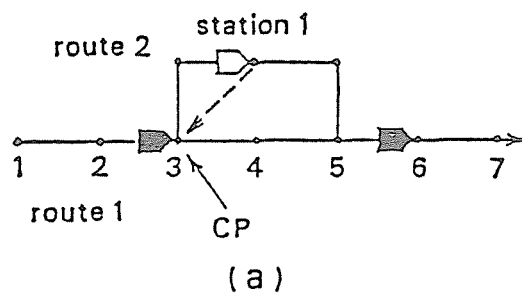
```

9   DESIRE 1
10  CHECK 2,2,4
11  BRANCH RT3
12  ADVANCE 4
13 ;
14  TERMINATE
15 ;
16 ;ROUTE 2
17  GENERATE 2,40
18  ORIGIN 65,55,E
19  COLOR WHITE
20  NEXT
21 ;
22  ADVANCE 6
23 MP27 ADVANCE 1
24  TERMINATE
25 ;
26 ;ROUTE 3
27 RT3 ROUTE 3
28  TURN RIGHT
29  MOVE
30  NEXT
31 ;
32  ADVANCE 3
33 ;
34  MERGE 2,7
35  MOVE
36  TURN RIGHT
37  NEXT
38 ;
39  JUMP MP27

```

(b)

図 6. 3 交差点の例



```

1 ; ROUTE 1
2   GENERATE 1,10
3   ORIGIN   50,50,E
4   COLOR    DS
5   NEXT
6 ;
7   ADVANCE  2
8 ;
9   ENTER    1,RT2
10  ADVANCE  2
11 ;
12 MP15 ADVANCE 2
13  TERMINATE

```

```

14 ;
15 ; STATION 1
16 RT2 ROUTE 2
17 MOVE N
18 NEXT
19 ;
20 ADVANCE 1
21 ;
22 COLOR WHITE
23 UNLOAD 5,2
24 ;
25 LOAD 5,2
26 ;
27 COLOR DS
28 DEPART 1,1,3
29 ADVANCE 1
30 ;
31 MERGE 1,5
32 MOVE S
33 NEXT
34 ;
35 JUMP MP15
(b)

```

図 6. 4 駅部の例

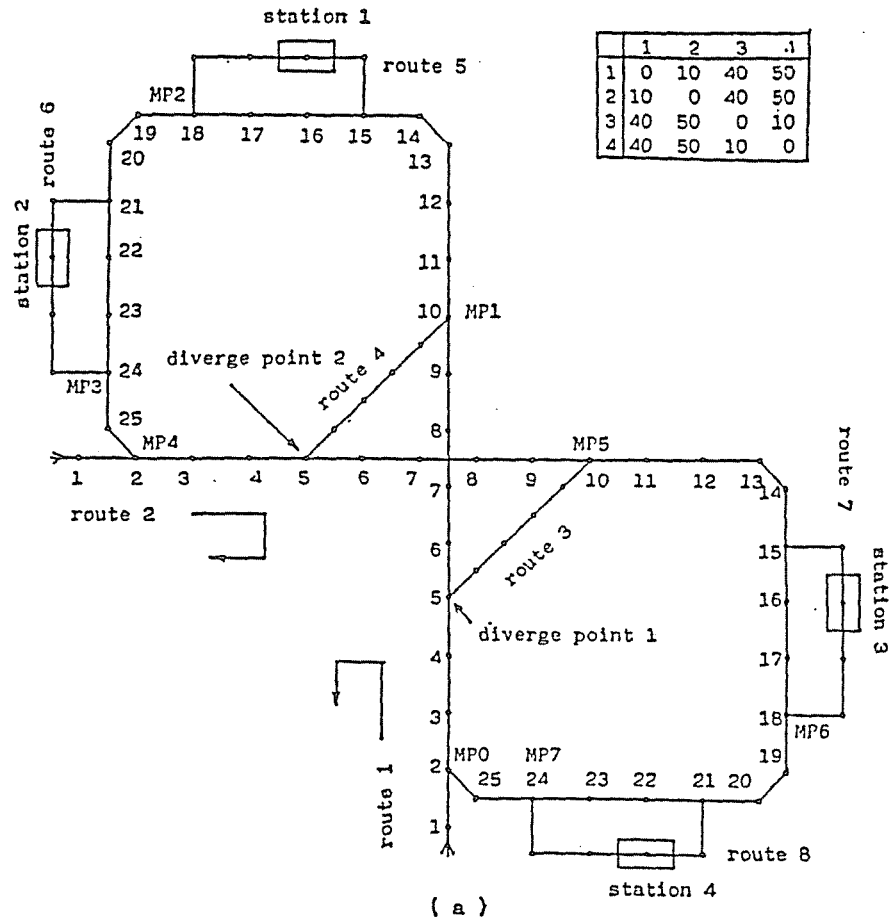
駅部の例を図6.4(a)に示す。1バースの乗降駅が本線から分岐した側線上に設けられている。本シミュレータの現在の版では、十分交通需要が大きい場合を想定し、駅では常に客が待っていると考えている。駅の状態は”使用中”か”使用可”のいずれかである。”使用中”とは、物理的には分岐点－駅間に車両が存在するか、または駅に車両が存在して客が乗降中であることをいう。”使用可”とは、駅に車両が存在して出発の準備が完了しているか、または駅に車両が存在しないことをいう。分岐点に到来した車両のうち、空車および入駅希望車は、駅が”使用可”ならば側線へ分岐するとともに駅の状態を”使用中”に変える。(駅に出発準備完了車がいる場合は、このとき同時に駅を出発する。)駅で乗降を終了した車両は出発準備完了となり、駅の状態を”使用可”とする。この車両は、合流点で本線の走行車両と衝突しないとき、すなわち、図のCP(チェックポイント)に他駅を目的とする車両がないときに出駅できる。(CP上に入駅希望車がいるときは、その車両の分岐と同時に出駅することになる。合流部で衝突が生じないのは明らか。)入駅希望車がCPに到来したとき、駅が使用中ならば、この車両は側線へ分岐できず、本線上を走行する。これを駅部における迂回という。この車両は適当な経路を迂回して再び当CPへ戻ってくる。入駅希望車が入駅できず迂回してしまうのは不合理に思われるかもしれない。しかし、PRTは面的輸送性を実現するためにネットワーク内に密に多くの駅を配置する考え方が基本である。この場合、1つの駅当たりの入駅希望車到来頻度はあまり高くないので、1バース駅でも迂回が起こる確率は小さい。また必要に応じて多バースにすることにより、迂回が起こる確率をさらに小さくすることができる。

プログラム例を図6.4(b)に示す。プログラムの意味は上記の説明と表6.1を参照すれば明らかであろう。

6.8 統計出力

シミュレーション終了後、標準出力として以下の統計結果が出力される。

- ・各駅間のトリップ時間の平均値、最小値、最大値
- ・各駅間のトリップ時間の平均値、最小値、最大値
- ・各分岐点における到来車両数、迂回率



```

; --- ROUTE 1 ---
      GENERATE 1,10
      ORIGIN   90,25,N
      COLOR    DS
      NEXT
      ADVANCE  1
MP0    ADVANCE  3
      DESIRE   1
      BRANCH   RT3
      ADVANCE  5
MP1    ADVANCE  3
      CURVE    LEFT
      ADVANCE  1
      ENTER    1,RT5
      ADVANCE  3
MP2    ADVANCE  1
      CURVE    LEFT
      ADVANCE  1
      ENTER    2,RT6
      ADVANCE  3
MP3    ADVANCE  1
      MERGE    2,2
      MOVE     SE
      TURN     E
      NEXT
      JUMP     MP4

; --- ROUTE 3 ---
RT3    ROUTE   3
      TURN     RIGHT
      MOVE
      NEXT
      ADVANCE  3
      MERGE    2,10
      MOVE
      TURN     RIGHT
      NEXT
      JUMP     MP5

; --- ROUTE 5 ---
RT5    ROUTE   5
      MOVE     N
      NEXT
      ADVANCE  1
      UNLOAD   3,1
      COLOR    WHITE
      LOAD     3,1
      DEPART   1,1,15
      COLOR    DS
      ADVANCE  2
      MERGE    1,18
      MOVE     S
      NEXT
      JUMP     MP2

```

(b)

図 6. 5 簡単なネットワークの例

6.9 ネットワークの例

これまで述べた命令を組み合わせるにより、PRTネットワークに対する運行プログラムを構成できる。ここでは簡単な例として4つの駅と1つの交差点からなる図6.5(a)のネットワークを考える。図の右上の表の*i*行*j*列目の数値は、駅*i*を出発した車両の目的駅が駅*j*である確率を百分率で表わしたものである。運行プログラムの一部（ルート1, 3, 5に対応する部分）を図6.5(b)に示す。このプログラムにはTERMINATE命令がないので、6.5で述べたように、十分時間が経過するとネットワーク中の車両数は一定となる。

図6.6に統計で得られた結果を示す。車両数をパラメータとしたときの駅1および駅2における迂回率（入駅希望車が入駅できずに迂回した割合）と出駅頻度（単位時間当たりの出駅台数）の関係が図示されている。

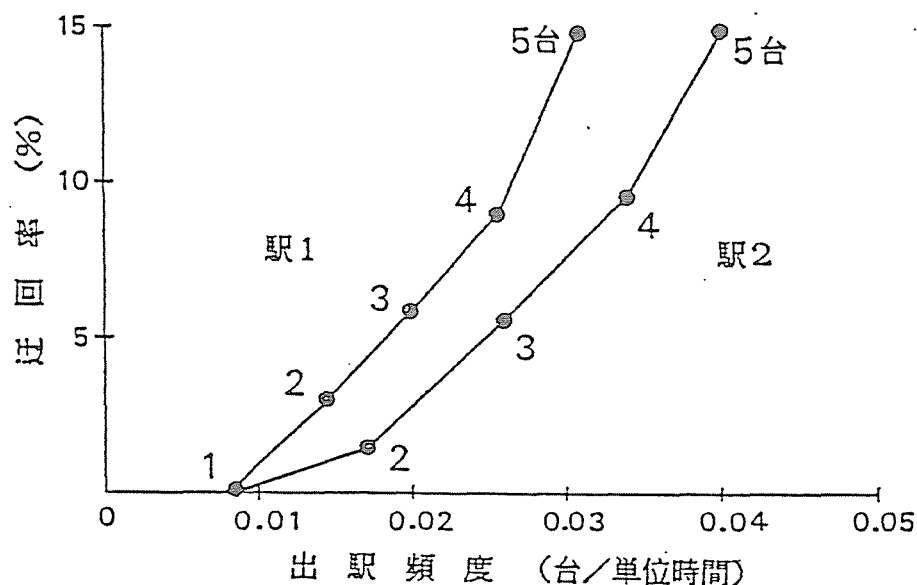


図6.6 迂回率と出駅頻度の関係

6. 10 議論

シミュレータの現在の版は、まえがきで述べたような特徴を実証するため実験的に開発したものであり、モデルの仮定等が実システムに比べて単純化されている点がある。ここでは、これらの点を以下の（a），（b）に分けて議論する。

（a）シミュレータの目的（ふくそう解析）から考えて、この程度の仮定で十分であると考えられるもの

- ・車両の動きが離散的で、特にセル乗換えを車両の一時停止で表現している点：この妥当性については既に2. 1で述べた。

- ・空車回送や分岐希望の有無を確率の問題としてとらえている点：実際の制御システムはこれらを確率的には扱わず、確定的な方式で車両を配分する。しかし、本シミュレータは、システムの計画段階において、トラヒック・フローを巨視的にみて、統計的な結果を得ることを目的としているため、車両群を目的地別の多種フローと考え、確率的な扱いをしている。実際、例えば、待ち行列網モデル（例：計算機のOS内でのタスクの流れ）では、ある待ち行列を退去したトランザクションが次にどの待ち行列へ進むかは確率的に決まるとして扱っている。（実システムはそうではないが。） このように、目的がふくそう解析のように巨視的なものの場合、便宜上、流れを確率的に扱うことが多く、本シミュレータもこの考えにそっている。しかし、実際の制御方式を忠実に模擬する本格的なシミュレータも極めて意義あるものであり、今後の検討課題と考えている。

- ・ルート別発生確率を固定している点：多くのふくそう問題では、トランザクションの到着率を固定し、定常状態でのシステムの性能を評価している。通常の目的にはこれで十分なことが多い。必要ならば発生確率が時間とともに変化するようシミュレータを拡張することは容易である。

（b）このままではやや妥当性を欠くが、本シミュレータの枠組みを大きく変えずに、より实际的にすることができるもの

- ・多バース駅：本論文では1バース駅を扱っているが、これを多バースに拡張することは容易である。

- ・駅への客の到来と、それによって生じるデマンドのモデル化：客が到来し、デマンドが生じた時点で、このデマンドを処理すべき車両を探索する手続きを組み込めばよい。その車両は当駅へ向かう実車か、目的駅のない空車かのいずれかである。後者の場合に

は、その空車の目的駅を当駅に変更する。

- ・入駅・出駅のルール：上記の2項の変更を考慮して変更可能である。

- ・停車時間：本シミュレータでは、駅での車両の停車時間は利用者の指定した区間内での一様分布に従うとしている。これを一般分布にするのは容易である。

- ・合流制御方式：本シミュレータでは合流の際の制御を、ルート間の固定的な優先順位によって行なっている。この仮定は、高速路と低速路の合流部のように優先関係が明らかかな場合には成り立つが、一般には車両のフロー等を考慮した制御方式が必要である。たとえば、本論文の第4章で述べたような制御方式がその1つである。このような方式を本シミュレータに取り入れる必要がある。

6. 1.1 ソフトウェア構成

前節までは本シミュレータの仕様を述べてきた。本節以降では、このシミュレータの実現方法についての概略を述べる。

シミュレータのソフトウェア構成を図6. 7に示す。シミュレータは、トランスレータ、イニシャライザ、スキャナ、実行ルーチン、グラフィックハンドラ、レポートルーチンの6つの部分からなっている。

トランスレータは利用者が記述した運行プログラムを内部形式に変換する。

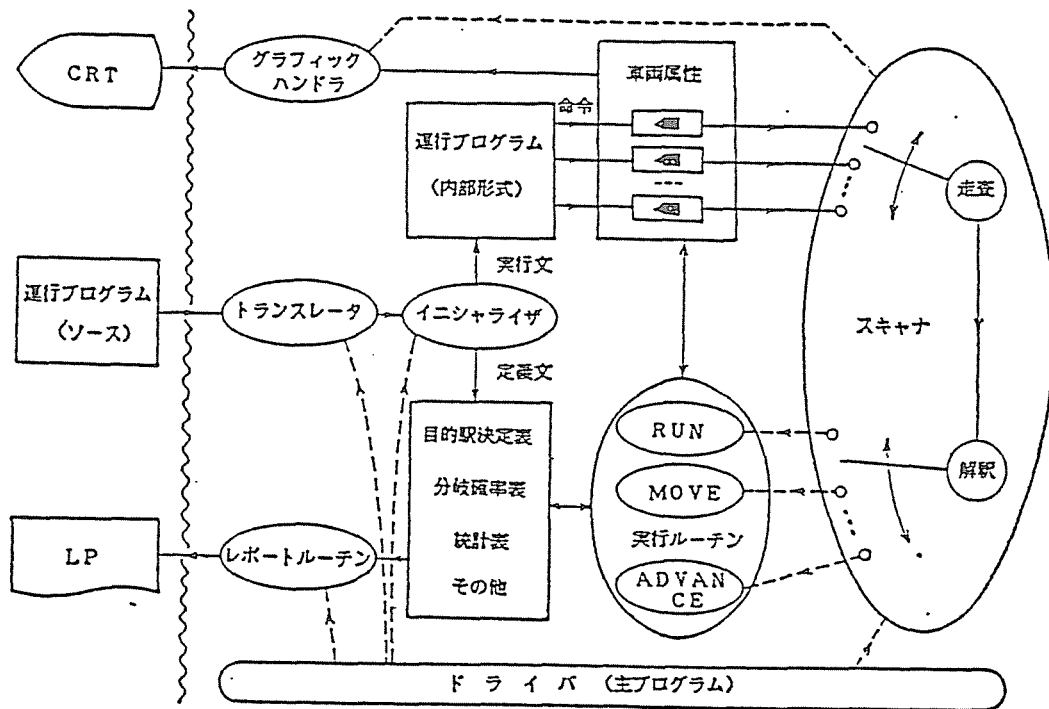
イニシャライザは内部形式プログラムを読み、各種の表や内部データを初期化する。

スキャナと実行ルーチンはシミュレータの中核である。本シミュレータでは、概念としては各車両が個々に（全体としては並列に）命令を実行することによってシミュレーションが進行する。しかし、このシミュレーションを1台の計算機で行なうには、この並列的な処理を論理的に等価な直列的な処理で行なう必要がある。これを行なうのがスキャナであり、6. 1.3節で詳述する。

実行ルーチンは各実行命令（RUN, MOVE, ADVANCEなど）と1対1に対応するルーチンである。スキャナから制御を渡された実行ルーチンは、適切な処理を行ない、車両属性やその他の情報を更新する（6. 1.4で詳述）。

グラフィックハンドラは、1台の車両が命令の実行を終了する毎に、その車両をディスプレイ表示する。

レポートルーチンは、シミュレーション終了後、各種の統計表に基づいて統計結果を出力する。



楕円はプログラム、矩形はデータを表わす。矢線は制御の流れ（破線）及びデータの流れ（実線）を表わす。波線の右側全体がシミュレータを形成している。

図 6. 7 シミュレータのソフトウェア構成

6. 1 2 車両属性

各車両は車両番号 i で識別され、次のような属性を持っている。

- ・アドレスカウンタ A_i
- ・論理位置・表示位置 $R_i, P_i; X_i, Y_i, D_i, C_i$
- ・出発駅 O_i , 出発時刻 T_i 、目的駅 S_i
- ・分岐要求フラグ B_i
- ・作業用カウンタ N_i
- ・後続車番号 L_i

アドレスカウンタ A_i は車両 i が次に実行すべき命令のアドレスを保持する。

論理位置・表示位置については 6. 4 節で述べた。

出発駅 O_i , 出発時刻 T_i , 目的駅 S_i には車両 i が駅を出発した時点で、それぞれ、駅の番号、時刻、目的駅番号がセットされる。

分岐要求フラグ B_i は 6. 7 節で述べたような交差点において、DESI RE 命令、CHECK 命令、および BRANCH 命令で使用される。 $B_i = 1$ なら分岐希望車、 $B_i = 0$ なら非分岐希望車を表わす。

作業用カウンタ N_i は ADVANCE 命令において (RUN, MOVE, NEXT) に相当する処理の繰り返し回数の制御に用いられる。

本シミュレータでは、各ルート毎に先頭車両から末尾車両まで順にスキャンを行なう。そのため、各ルート上の先頭から末尾までの車両を線形リストでつないでいる。 L_i はこのリストのリンク部である。

6. 1 3 スキャナ

本来は並列に運行されている車両を直列にスキャンし、並列処理と論理的に同等の効果を生じさせるのがスキャナである。

スキャナは、

(1) まだスキャンされていない車両を 1 台選び出し、この車両のディスプレイ表示を消す。そして、

(2) この車両のアドレスカウンタの指す命令を取り出し、解釈して、対応する実行ルーチンへ制御を渡す。実行ルーチンは、この車両のアドレスカウンタや位置などの車両属

性やその他の情報を更新し、ステイタス・フラグ (STF) に `cont`, `fin`, `delay` のいずれかをセットしてスキャナに返す。

(3) スキャナは、 $STF = cont$ のときには、この車両の処理を続行するためステップ (2) に制御を戻す。 $STF = fin$ のときにはこの車両の現在時刻での処理は終了である。この車両にスキャン済みの印を付け、この車両をディスプレイに表示し、別の車両の処理を行なうためステップ (1) に制御を戻す。 $STF = delay$ のときには、この車両の処理を中断し、ステップ (1) に制御を戻す。これはスキャンの順序を制御するための手段である。

こうしてすべての車両がスキャン済みとなったとき、現在時刻における処理はすべて終了したことになる。時刻を 1 だけ進めて、次の時刻の処理に移る。

6. 1 4 命令実行ルーチン

命令実行ルーチンは各命令に対応して 1 つずつ容易されているサブルーチン群であり、各車両から共通に利用される。スキャナから、処理すべき車両番号とともに制御を渡されると、その車両の車両属性やその他の情報を適当に参照・更新し、STF に `cont`, `fin`, `delay` のいずれかの値を返す。

例として、合流のための論理移動命令 MERGE を考える。

(a) MERGE は、合流に成功したときには、アドレスカウンタを 1 だけ進め、 $STF = cont$ を返すので、現在処理中の車両はユニットの処理を続行するために次の命令を取り出す。(おそらく次に表示移動命令が実行される。)

(b) 合流点にすでにスキャン済みの車両がいるときには、現在時刻中に合流することができないので、アドレスカウンタの値を変えず、 $STF = fin$ を返す。現在処理中の車両はスキャン済みとされ、次の時刻に再度 MERGE を実行することになる。

(c) 合流点に未スキャンの車両がいるときには $STF = delay$ を返す。合流点上の車両がいずれスキャンされて移動し、合流する可能性があるためである。現在処理中の車両は処理が中断され、現在時刻内に再度 MERGE を実行することになる。

6. 15 まとめ

個別軌道輸送システムのトラヒック設計を行なうための専用シミュレータの概要を述べた。本シミュレータには次のような特徴がある。

- 1) 個別軌道輸送システムの制御方式（点追従制御）やシミュレータの目的（マクロなトラヒック解析）を考慮して、モデルが極めて簡潔になっている。したがって、シミュレータの実現が容易であり、かつ、効率よいシミュレーションを実施できる。
- 2) 車両挙動やネットワーク形状を記述するためにGPS的な構文を持つ専用シミュレーション言語を用いる。これを用いて種々のモデルを容易に記述できる。
- 3) ネットワーク形状と車両の動きがカラー・グラフィック・ディスプレイ上にリアルタイムに表示される。これはモデル（プログラム）のテストやデバッグを容易にする。また、システム設計の際、システムの挙動を直観的に把握するのに有効である。

本章の研究の目的は、上記の特徴を持つシミュレータの構成に関する基本的アイディアを実験的に確立することであった。したがって、本シミュレータはこのままではやや実用性に欠ける。6. 10節で議論したような機能拡張やその他の種々のルーチンを組み込む必要がある。しかし、これらの仕事にはほとんど難しい点はなく、本シミュレータを十分実用的なものにできる見通しがある。

本シミュレータは最初、8ビット・パーソナル・コンピュータ（主記憶64KB）上でFORTRAN言語により実現された。（約2000行のプログラム。車両1台、1単位時間当たりの実行時間は、グラフィック表示時は0.1秒、非表示時は1ミリ秒のオーダー。）現在は32ビット・パーソナル・コンピュータ（主記憶1MB）上に移植し、さらにその機能を拡張中である。

本シミュレータを設計するにあたって第1章で述べたシステム工学的な考え方が中心となって用いられている。上記の1)で述べたように、本シミュレータの簡明さは目的を十分明らかにしたために得られたものであり、またその目的のもとで妥当性が保証されるものである。分割と統合の考え方も随所で用いられている。たとえば、車両の位

置や動作を論理的なものと表示的なものに分け、命令体系をコンパクトで理解しやすいものとした。また図 6. 7 のソフトウェア構成はシミュレータの機能を十分検討した上で得られたモジュール分解であり、ソフトウェアの保守性・拡張性を高める本質的な要因となっている。また、本章の構成もシミュレータの仕様 (specification ; 6. 4 ~ 6. 10 節) と実現 (implementation ; 6. 11 ~ 6. 14 節) に明確に分解されている。いうまでもなく、仕様とはそのシステムが何をするものか (what) の記述であり、実現とはそのシステムをいかにつくるか (how) の記述である。この両者はほぼ独立の概念であるが、しばしば両者を混在させた議論が見られる。本章ではこれを明確に区別し、シミュレータの全体に対する見通しを良くした。

システムを表現するための図表や言語を必要に応じて適切に考案することもシステム工学においては重要である。本章で設計したシミュレーション言語 (表 6. 1) はその例である。この言語によりネットワーク配置と車両挙動を簡潔にかつ正確に記述できる。しかもそれをシミュレータへの入力とすることにより、簡単な誤りのチェックがなされ、その後ただちにシミュレーションが開始される。

第7章 結 論

7. 1 トラヒック評価のためのシステム技法と個別軌道輸送システムへの適用

本論文の冒頭において著者は、J I Sオペレーションズ・リサーチ用語によるシステムの定義を引用した。

システム（system）とは、多数の構成要素が有機的な秩序を保ち、同一目的に向かって行動するものである。

この定義中の「目的」という語がシステム工学において、また本研究においていかに重要な位置を占めているかは本文中で強調して述べたとおりである。第1章では新交通システム導入に至る歴史的経緯を交通システムの目的の変遷との関連で述べた。また、個別軌道輸送システムのもつ多くの特徴を個別軌道輸送システムの目的木に基づいて位置付けた。第3章の多バース駅モデル、第4章・第5章の交差点モデル、第6章のネットワークモデルは、いずれも解析の目的を明らかにしてはじめて得られた簡潔性を有している。これらのモデルは、各々の目的のもとでその妥当性が明らかにされた。目的の重要性はさらに広い。1. 5節で述べたように、目的指向の思考法は与えられた（解き難い）問題の枠から飛び出すためのメタ的方法を与え、問題解決の際の発想法としても有効である。目的指向の重要性は明らかであると同時に、当然のことで強調する程のことではないと受け取られるかもしれない。しかし、頭の中で思うことと実践とは違う。目的指向とは、目的を強く意識的に明確化（構造化、文書化）することであり、通常このようなアプローチが常になされているとは限らない。

本文中で強調した第2の考え方は「分解と統合」であった。これも本研究を遂行する上での基本的考えであった。特に強調したいのは、システムのモデルを論理モデルと確率モデルとに分けて考えたことである。まずシステムの論理的側面を十分に吟味し、理解しやすく、かつシステムの本質を表現している妥当（valid）な論理モデルを構築した。その後、システムの論理的ふるまいに影響を与える確率的要因を仮定して確率モデルとした。最後に論理モデルと確率モデルを統合してシステムモデル（性能評価モデル）とした。この方法は単にモデルの記述を理解しやすくするのに役だっただけではない。

確率的要因は考慮せず、システムの論理的側面のみ集中してモデリングの努力をすることは、システムの本質をとらえた自然なモデル化をするのに役だった（人間は一度に多くのことに集中できない）。この自然なモデルが結局、良い確率モデル、良い性能評価モデルに結びついた。多バース駅モデル、交差点モデルはこうしてできあがった。これまでのトラヒック解析は、システムの確率論的定式化に重点が置かれていて、このようなシステムのアプローチはまれであった。これまでの多くの研究はそれほど複雑なシステムを扱っていなかった（ただし、数学的には複雑だったが、．．）のでそれで問題が生じなかったのかもしれない。しかし、本論文のシステムは従来にはない論理的複雑性をもっていた。その複雑性は1．4節で列挙したとおりである。この複雑性を人間が扱うには何らかの方法論が必要である。本論文で用いた手法はその方法論を確立するための糸口となると考える。

第3の考え方は、図表や適切な言語によるシステムの記述であった。現段階ではどのようなシステムの記述にも適した表現法は存在しないといえる。そのため、対象としている個々のシステム固有の特徴・用語・概念などを考慮して適切な表現方法を考えることが重要である。その過程においてシステムへの認識が深まり、その後のシステム設計や解析の際にこの経験が役立つ。（その意味でこの過程は一種の学習過程である。）また、こうしてできた表現法は、システム設計に係わる他のメンバーとのコミュニケーションを迅速かつ正確にする。一般に、言語は思考の伝達手段であるばかりでなく、思考の道具でもある。したがって、上のようにして開発した表現方法は、そのシステムを考えるための道具ともなる。本研究でもシステムを表現するためのいろいろな方法を模索した。多バース駅モデルでは、確率過程をアルゴリズムックに表現する図式を考案した。平面交差点モデルでは、アルゴリズムをフローチャートで描く前に表駆動で表現した。ネットワークモデルではネットワーク配置や車両挙動を記述するための簡易シミュレーション言語を開発した。

1．5節でこれらのシステム工学的考え方の重要性を述べた直後の1．6節「本論文の目的と構成」の記述方法はこれらの3つの考え方のデモンストレーションにもなっていることに気付かれたであろうか？ ここでは、本論文の目的と構成を、対象と技法の2つに分解・統合し、図表を用いて明快に説明したつもりである。

本論文の目的は対象と技法の二つの側面から成っていた。技法に関しては上で述べたが、その成果を要約すると、システムのトラヒック解析に関して、モデルの研究ではなくモデリングの研究の基礎を確立するための絶好の実例を提供し、今後の方向を定めたことである。本論文の中では上記の3つの考え方をその場に応じて試行錯誤的に用いるにとどまったが、今後の課題として、これをより系統だてて一つの方法論の確立を目指したい。現代では、システムが複雑化するにつれシステムのモデル化がますます難しくなっている。各研究分野・各産業分野がそれぞれ個別に適切なモデルを追及するのに対し、システム工学の使命の一つはそれらを統括するモデリングのためのシステム技法を追及することにあるからである。

本論文では上の考え方を、個別軌道輸送システムのトラヒック評価問題に適用した。以下で、得られた諸成果を要約しよう。

第3章の多バース駅モデルを解析することにより以下の点を明らかにした。

- (1) 4つの性能評価尺度（平均入駅時間間隔、出駅頻度、入駅率、利用率）と、車両到来頻度およびバース数との関係を明らかにした。
- (2) 入駅率と出駅頻度の間のトレードオフを示し、高負荷時および低負荷時におけるバース増設の効果を明らかにした。
- (3) 平均入駅時間間隔に対する表式を陽に求め、その物理的意味と漸近特性から、多バース駅の特性と1バース駅の特性の本質的な差異を明らかにした。
- (4) 多バース駅と等価な処理能力をもつ1バース駅を考えることにより、バース増設の効果を1バース駅における乗降時間と出発可否判定時間の減少へ定量的に換算する表式を得た。
- (5) 出発待ち時間、入駅率、出駅頻度の特性を、入力負荷、出力負荷との関連で明らかにした。

第4章では優先度のない低速路が交差する平面交差点をモデル化した。第5章では優先度の差がある高速路と低速路が交差する立体交差点をモデル化した。これらを解析することにより次の成果を得た。

- (1) 同期制御のための簡潔でかつ効率の良いアルゴリズムを考案した。

- (2) 遅れ時間、迂回率、スループットと、車両到来頻度およびセル乗換えの自由度との関係を明らかにした。
- (3) 両交差点のトラヒック特性の特徴と差異を明らかにした。
- (4) シミュレーションにより、本モデルが物理的にも実現可能であることを確認した。

第6章では、ネットワークに関して、駅や交差点とは違ったアプローチをとった。ネットワーク配置にはさまざまなものがあるため、ネットワークのトラヒック特性を包括的に特徴付けるのはなかなか難しい。実用的には、実現の候補となるいくつかの配置が与えられた際に、多くのシミュレーションにより計画・設計に必要なデータを収集できるようにしておくことのほうが重要であろう。そのため、本論文では（ネットワークのマクロなトラヒック解析を行なうための）シミュレータに関して議論し、これを実際に使ってデータをとることに重点を置かなかった。このシミュレータは次のような特徴を持っている。

- (1) モデルが簡潔なため、シミュレータの実現が容易で、かつ効率良いシミュレーションを実施できる。
- (2) 専用シミュレーション言語により容易にプログラムを組むことができる。
- (3) ネットワーク形状や車両の動きがディスプレイ上に表示されるので、テストやデバッグが容易であり、また、システムの挙動を把握するのに有効である。

これらの成果が実際のシステムの導入において、いつどのように用いられるかは1.4節で述べたとおりである。すなわち、システム工学の手順でいうプロジェクト計画（具体計画）およびシステム設計（具体設計）のフェーズの、評価のステップにおいて、処理能力や効果／費用の定量的評価に基づいて代替案を比較する際に本論文のモデルや解析結果が十分に活用されるであろう。

7. 2 結 言

本論文を結ぶにあたって、加地 [82] によるシステムの定義およびそれに関するコメントを引用したい。

システム (system) とは要素の集合であって、その要素間または要素の持つ性質の間に相互関係が存在するものである。

相互関係としては因果的な関係、論理的な関係、ランダムな関係といったものが考えられる。どのような要素の集まりについても、なんらかの相互関係は必ず存在するが、何を相互関係とみなすかは問題によって異なるし、またその問題にとって本質的に重要な意味を持つ相互関係を考慮し、そうでないものは無視することが不必要な複雑さの導入を避けるために大切なことである。何を残し、何を捨てるかはその問題に対処する人の考えによって決定されなければならない。

(下線は著者(栗原)による)

本研究の姿勢がここに要約されている。何度も強調したように、本研究では「システム」の構造を「論理的な関係」(論理モデル)と「ランダムな関係」(確率モデル)に分けてとらえ、それを統合した点に一つの特徴がある。また、「問題にとって本質的に重要な意味を持つ相互関係を考慮し、そうでないものは無視する」ことにより、簡潔で理解しやすく、かつ解析可能なモデルを構築し得た。「何を残し、何を捨てるか」は著者によって決定されたが、それは著者の単なる思いつきや好みによるものではない。モデル化の目的を十分に考慮し、その目的のもとで何が「本質的に重要な意味を持つ」かを判断した上でなされた決定である。そしてそのモデルの妥当性を検証するため、必要に応じてシミュレーションが実施された。要約すると、本論文は、個別軌道輸送システムにおけるトラヒックの性能評価モデルを構築する際にいかに「不必要な複雑さの導入を避け」必要な複雑さをコントロールしたか、そしていかにシステム工学の基本概念を用いたかの系統的な記述であったといえる。

謝 辞

北海道大学工学部加地郁夫教授には、著者が学生であった頃から待ち行列理論やシミュレーションなど本論文の基礎となったシステム理論やシステム技法を御指導いただき、さらに、本研究を遂行するにあたっては、個別軌道輸送システムのモデリングや解析に関して高所にたった見地から詳細な議論と御教示をいただくとともに終始励ましていただいた。ここに深く感謝の意を表します。北海道大学工学部田川達三郎教授、長谷川淳教授、五十嵐日出夫教授、河口至南教授には、本研究に対してそれぞれの御専門の見地から適切な御助言をいただいた。各先生方に深謝いたします。

北海道大学工学部大内東助教授、室蘭工業大学工学部山口忠助教授には I S M に関する有益な御助言をいただいた。感謝いたします。

玉川大学工学部中田勝啓教授、米山忠璋助教授、浜松芳夫講師には、本研究に関して多くの御討論をいただいたほか、本論文及び関連論文の執筆にあたっては原稿内容の詳細に関して適切なコメントをいただいた。マルコフ再生理論を用いた多バース駅モデルの解析に関する研究は、1 バース駅に関する中田教授の業績の上に成り立つものである。また、交差点における車両制御とトラヒック解析に関する研究は浜松講師の業績からアイデアを得ている。各先生方に感謝いたします。

広島大学工学部尾崎俊治助教授、日本大学生産工学部菅澤喜男専任講師には、マルコフ再生過程とシグナルフローグラフおよびその応用に関して、多くの貴重な文献と御討論をいただいた。感謝いたします。

佐藤公成氏（当時、北海道大学大学院生。現在、N T T 勤務）には、第5章の立体交差点のモデリングと解析および第6章のシミュレータの開発に関して多大の御協力をいただいた。井上和美氏（同上。現在、三菱電機勤務）には、第5章の車両ダイナミクス of シミュレーションの御協力をいただいた。感謝いたします。

多バース駅に関する数値計算は、北海道大学大学院工学研究科情報工学専攻の計算機システム ECLIPSE を使用させていただいた。GPS S によるシミュレーションは北海道大学大型計算機センターを使用させていただいた。その他については、北海道大学工学部電気工学科系統工学講座の設備を使用させていただいた。本論文は、管理工学研究所が開発した日本語ワードプロセッサ「松」を用いて執筆した。

参 考 文 献

- [1] J I S 8121 オペレーションズ・リサーチ用語(1967)
- [2] 森地茂：“交通需要と計画目標”，土木工学体系25 交通（I），
pp.11-102，彰国社(1982)
- [3] 天野光三：“交通計画におけるシステムズアプローチの可能性と限界”，
システムと制御，vol.21,no.3,pp.143-149(1977)
- [4] 井口，山下：新交通システム，朝倉書店(1985)
- [5] 井口雅一：“実現した新交通システムー中量軌道輸送システムー”，
電気学会雑誌，vol.102,no.1,pp.6-9(1982)
- [6] 運輸省：昭和58年度版 運輸白書(1984)
- [7] U.S.Congress,OTA：“Automated guideway transit”(1975)
- [8] DOT,UMTA：“Request for proposal”,Rep.No.DOT-UT-60055(1976)
- [9] 荒屋真二：“新交通システムと自動運転制御”，電子通信学会誌，
vol.64,no.1,pp.43-49(1981)
- [10] K.M.Wade：“The Manhattan project: a cost oriented control system for a
large personal rapid transit network”,IBM Tech. Report TR 00.2432(1973)
- [11] R.K.Boyd, et al.：“How to run an automated transportation system”，
IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics, vol.SMC-2,no.3,
pp.331-341(1972)
- [12] A.L.Kornhauser, et al.：“A quantitative analysis of synchronous vs.
quasi-synchronous network operations of automated transit systems”，
Transportation Research, vol.9,pp.241-248(1975)
- [13] A.V.Munson, et al.：“Quasi-synchronous control of high-capacity PRT
networks”,Personal Rapid Transit, pp.325-350(1972)
- [14] F.Rubin：“Routing algorithms for urban rapid transit”，
Transportation Research, vol.9,pp.215-223(1975)
- [15] 機械振興協会：“C V S技術レポート”（1977）
- [16] 石井，井口，越：“C V Sー都市交通の革命児”，サイエンス，
vol.4,no.8(1974)

- [17] 石井威望：“C V S (Computer-controlled Vehicle System)”，
電子通信学会誌，vol.56,no.12(1973)
- [18] 石井，井口，越：“わが国における個別軌道輸送機関（C V S）の開発計画について”，日本機械学会誌，vol.75,no.640(1972)
- [19] J.N.Warfield:Societal Systems - Planning,Policy and Complexity,
Wiley(1976)
- [20] 田村：“構造モデリングー理論とアルゴリズムを中心にしてー”，
計測と制御，vol.18,no.2(1979)
- [21] 栗原，大内，加地：“I S Mにおける推移的具象化の一般化”，
電気学会論文誌C，vol.104,no.1,pp.1-8(1984)
- [22] ホール：“システム工学方法論”，共立出版(1969)
- [23] 三浦，浜岡：現代システム工学概論，オーム社(1977)
- [24] 藤木，雁部：通信トラヒック理論，丸善(1980)
- [25] 中西俊夫：シミュレーションの発想ー新しい問題解決法ー，講談社(1983)
- [26] M.K.Molloy: On the integration of delay and throughput measures in
distributed processing models, Ph.D. dissertation,
Univ. of California(1981)
- [27] 小原，中田：“C V S 駅部モデルへのマルコフ再生理論の適用”，
電子通信学会論文誌A，vol.61,no.9(1978)
- [28] 中田，加地，土肥：“マルコフ再生理論によるC V S 駅部モデルの車両挙動の解析”，電子通信学会論文誌A，vol.62,no.10(1979)
- [29] 中田，加地，土肥：“マルコフ再生理論によるC V S 駅部モデルの客オーバーフローの解析”，電子通信学会論文誌A，VOL.63,N0.10(1980)
- [30] 米山，中田，栗原，加地：“離散時間系で扱ったC V S 駅部モデルの入駅時間分布の解析”，電子通信学会論文誌A，vol.67,no.3(1984)
- [31] 中村，栗原，加地，米山：“マルコフ連鎖モデルによる個別軌道輸送システム2バース駅の解析”，電子通信学会論文誌A，vol.67,no.12(1984)
- [32] 栗原，中田，加地：“C V S 多バース駅モデルのマルコフ再生理論による解析”，
電子通信学会論文誌A，vol.65,no.9(1981)
- [33] 栗原，中田，加地：“状態部分集合での再帰時間を考慮したマルコフ再生理論によるC V S 多バース駅モデルの解析”，電子通信学会論文誌A，
vol.65,no.7(1982)

- [34] 栗原, 中田, 加地: "個別軌道輸送システム多バース駅における出発待ち行列の解析", 電子通信学会論文誌A, vol.66,no.4(1983)
- [35] H.Richard,et.al.: "Development of a methodology for station analysis of a personal rapid transit system", Pittsburgh Conf. Modeling Simulation, 8th(1977)
- [36] A.J.Korsak,et.al.: "Station simulation studies for personalized rapid transit urban development", Proc. Summer Computer Simulation Conf.(1976)
- [37] 浜松, 中田, 加地, 土肥: "個別軌道輸送システム十字路付近のモデル化とその解析", 電子通信学会論文誌A, vol.64,no.10(1981)
- [38] 浜松, 栗原, 中田, 加地: "個別軌道輸送システム合流部における車両待ち時間の解析", 電子通信学会論文誌A, vol.65,no.11(1982)
- [39] 浜松, 栗原, 中田, 加地: "直進車を考慮したPRT十字路モデルの車両挙動の解析", 電子通信学会論文誌A, vol.66,no.8(1983)
- [40] K.Thangavelu et al.: "Design analysis of stations and intersections of high-capacity personal rapid transit network", Transportation Research Record, no.522(1974)
- [41] 佐藤, 栗原, 加地, 浜松: "個別軌道輸送システムにおける立体交差同期制御方式とそのトラヒック解析", 電子通信学会論文誌A, vol.67,no.9(1984)
- [42] 栗原, 加地, 浜松, 中田: "個別軌道輸送システム平面交差点のトラヒック解析", 電子通信学会論文誌A, vol.66,no.9(1983)
- [43] M.Kurihara, I.Kaji et al.: "Control algorithm and theoretical analysis of a grade-crossed intersection in a Computer-controlled Vehicle System", IEEE Trans. on System, Man, and Cybernetics, vol.15, no.3(1985)
- [44] F.J.Mcginley: "An intersection control strategy for a short-headway P.R.T. network", Transportation Planning and Technology, vol.3(1975)
- [45] F.J.Mcginley: "A survey of quasi-synchronous P.R.T. interchange control algorithm", Transportation Planning and Technology, vol.3(1975)
- [46] F.J.Mcginley: "A quantitative analysis of quasi-synchronous PRT flow characteristics", Int.Conf. Advanced Transit Urban Revitalization(1979)
- [47] T.Dooley et al.: "Computer models for AGT system operation studies", IEEE Trans. on Vehicular Technology, vol.28, no.1(1979)

- [48] 栗原, 加地, 浜松, 中田, 米山: "個別軌道システムのネットワークシミュレータ", シミュレーション, vol.4,no.1(1985)
- [49] D.F.Wilkie:"A moving cell control scheme for automated transit systems", Transportation Science,vol.4(1970)
- [50] W.L.Garrard:"Design of optimal feedback systems for longitudinal control of automated transit vehicles",Transportation Research,vol.7(1973)
- [51] Y.Shirai et al.:"Teito rapid transit authority's automatic train operation",Proc.IEEE,vol.56(1968)
- [52] T.Ishii et al.:"The control system of CVS using the two-target tracking scheme",Proc. Int. Conf. personal Rapid Transit(1977)
- [53] T.Ishii et al.:"Computer-controlled minicar system in Expo '70: an experiment in a new personal urban transportation system",IEEE Trans. on Vehicular Technology, vol.21(1972)
- [54] R.Macdonald:"Practical solutions for the financing and construction of P.R.T. systems",Int.Conf.Personal Rapid transit(1977)
- [55] S.C.Iverson:"A scenario-specific methodology for the evaluation of personal rapid transit alternatives and network designs", Int.Conf.Personal Rapid transit(1977)
- [56] S. カーリン, 確率過程講義, 産業図書(1974)
- [57] 羽鳥, 森, 有限マルコフ連鎖, 培風館(1982)
- [58] F.S.Roberts, Discrete Mathematical Models, Prentice Hall(1976)
- [59] J.G.Kemeny, et al., Finite Markov Chains, Springer-Verlag(1960)
- [60] 北川, マルコフ過程, 共立出版(1968)
- [61] E.Cinlar, Introduction to Stochastic Processes, Prentice-Hall(1975)
- [62] R.Pyke:"Markov renewal processes: definitions and preliminary properties", Annals of Mathematical Statistics, vol.32, pp.1231-1242(1961)
- [63] R.Pyke:"Markov renewal processes with finitely many states", Annals of Mathematical Statistics, vol.32, pp.1243-1259(1961)
- [64] S.J.Mason:"Feedback Theory - some properties of signal flow graphs", Proc. of I.R.E., vol.41, pp.1144-1156(1953)
- [65] Y.Chow et al., Linear signal-flow graphs and applications, Wiley(1962)

- [66] S.J.Mason: "Feedback Theory - further properties of signal flow graphs",
Proc. of I.R.E., vol.44, pp.920-926(1956)
- [67] 三根, 尾崎: "シグナルフローグラフによるシステム信頼度の解析", 制御工学,
vol.14, no.3(1970)
- [68] 三根, 尾崎: "修理可能な並列冗長システムの信頼性について", 制御工学,
vol.12, no.5(1968)
- [69] S.Osaki, "System reliability analysis by Markov renewal processes",
J.Operations Research Society of Japan, vol.12, no.4(1970)
- [70] T.Nakagawa, et al.: "Markov renewal processes with some non-regeneration
points and their applications to reliability theory",
Microelectronics and Reliability, vol.15, pp.633-636(1976)
- [71] 菅沢, 加地, 栗原: "異種の故障時間分布から成る2ユニット待機冗長システム
の予防保全と信頼度解析", 電子通信学会論文誌A, vol.66, no.2(1983)
- [72] 森脇, 中田, 小原: "C V Sにおける交通密度と駅部における車両運行の問題点"
, 電気学会論文誌C, vol.97, no.8(1977)
- [73] 栗原正仁: "GPS入門以前", 北海道大学大型計算機センターニュース,
vol.14, no.4(1982)
- [74] 日本電気情報処理教育部: シミュレーションプログラミング入門,
日本能率協会(1969)
- [75] 伊藤正美, システム制御理論, 昭晃堂(1978)
- [76] 井上和美, 個別軌道輸送システム車両のセル追従制御方式の研究,
北海道大学工学部工学研究科修士論文(1984)
- [77] 宮本ほか: "軌道輸送システム用計画設計サポートシステムTRANSPLAN",
日立評論, vol.60, no.10(1978)
- [78] 荒屋ほか: "軌道交通システムシミュレータACTS", 三菱電機技報,
vol.53, no.11(1979)
- [79] Shubik, Martin: "Simulation of the industry and the firm",
American Economic Review, no.5(1960)
- [80] T.H.ネイラー, コンピュータシミュレーション, 培風館(1971)
- [81] ワット, Logo: タートル・グラフィックスへの招待, マグロウヒル(1983)
- [82] 加地郁夫, システム工学, 朝倉書店(1973)