



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	彎曲流・蛇行流の三次元数値解法と河床変動の数値解法の研究
Author(s)	森, 明巨
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	乙第3725号
Issue Date	1990-03-14
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/32651
Type	doctoral thesis
File Information	3725.pdf



彎曲流・蛇行流の三次元数値解法と

河床変動の数値解法の研究

平成元年10月27日

森 明 巨

目 次

序 論	1
弯曲・蛇行流の性質	1
弯曲流の数値解法	2
本研究の内容	2
本研究の経過	4
参考文献	6
主な記号など	9
第 1 章 弯曲流の非線形構造	1 2
1.1 強制渦型流速分布の発生条件 (A 効果)	1 2
1.2 流速分布の平坦化 (B 効果)	1 7
1.3 石狩川矢臼場弯曲の非線形構造	2 0
参考文献	2 2
第 2 章 一定曲率弯曲部の平衡横断河床形	2 4
2.1 流れのモデルと基礎方程式	2 4
2.2 流速分布	2 6
2.3 弯曲部の平衡河床形	2 7
2.4 石狩川への適用	2 8
2.5 考察	2 9
参考文献	3 0
第 3 章 山地河川蛇行流の構造	3 1
3.1 現地調査	3 2
3.2 射流蛇行流の線形理論	3 3
3.3 射流蛇行流の実験	3 5
3.4 二次元場における非線形効果	4 0
3.5 衝撃波と境界層の相互干渉 - S B I	4 4
3.5.1 R 点上流の水位	4 5
3.5.2 ラセン流の発達と運動量輸送	4 8
3.6 反射による衝撃波の変形	5 2
3.7 衝撃波減衰後の流速分布	5 3

3.8	結論	55
	参考文献	55
第4章	弯曲・蛇行流の三次元数値解法	57
4.1	弯曲・蛇行流解析の基礎方程式	57
4.1.1	座標系と計量テンソル	57
4.1.2	河川の流路形状と流れの特性	59
4.1.3	運動方程式の各項の評価	61
4.1.4	MK法の基礎方程式	62
4.2	河川流の三次元数値解法	65
4.2.1	計算法の概要	65
4.2.2	加速度項の差分	66
4.2.3	低水路中央部の計算法	67
4.2.4	側壁の計算法	67
4.2.5	高水敷の計算法	67
4.2.6	境界条件	68
4.2.7	渦動粘性係数	69
4.2.8	水位の計算法	69
4.3	石狩川へのモデルの適用	72
	参考文献	75
第5章	河床変動の計算法	76
5.1	点擾乱の伝播特性	77
5.2	一定幅水路における二次元擾乱の伝播	78
5.3.1	$F < 1$ の場合	80
5.3.2	$F > 1$ の場合	81
5.3	砂州の発達におよぼす重力および底面摩擦の影響	83
5.4	差分法	86
5.5	計算例	89
	参考文献	92
第6章	複断面流路の流れと河床形	94
6.1	複断面蛇行流路の河岸維持機構（シリーズ1）	95

6.2	複断面蛇行流路の平面形と河床変動（シリーズ2）	97
6.3	結論	103
	参考文献	103
第7章	考察と結論	104
7.1	三次元数値解析の必要性	104
7.2	数値計算法	105
7.3	二次元河床変動計算法	105
7.4	複断面蛇行流における高水敷効果	106
7.5	結論	106
Appendix 1	斜面上の流砂量の計算法	108
1.	saltation 粒子の移動特性	108
1.1	saltation 粒子の流れへの追従性	108
1.2	saltation の継続と河床との衝突による運動量損失	110
2.	斜面上の saltation 粒子の移動速度	113
3.	斜面上の流砂量	115
	参考文献	115
Appendix 2	（5-1.1）式の誘導	117
Appendix 3	（5-5）式の二次精度差分	118
Appendix 4	射流におけるS波とP波の判別	121
	あとがき	123

序論

本研究の目的は、弯曲および蛇行流の3次元数値解法の開発と河床変動計算法の開発である。河道弯曲部および蛇行部は河岸近傍の河床が洗掘されるため治水上の弱点となっている。これらの地点の流れは三次元性が強く、その性質が河床変形を強く支配している。このような流れを正確に計算するために数値解析が必要である。

弯曲・蛇行流の性質

Rozovskii¹⁾ は、弯曲流の特徴として 1) 水面の横断勾配の発生、2) ラセン流の発生、3) 1), 2) による流速分布の変形、4) 弯曲部の内、外岸における流れの剥離、5) 流れの構造の変化によるエネルギー損失の増加、を挙げている。これらは固定床の単弯曲流についてである。

実河川は、移動床であり、流路が蛇行したり断面形が複断面となっている。これらの要素により、6) 弯曲部外岸側の洗掘、内岸側への堆積、7) 蛇行流路における流れの偏倚と交互深掘れ、8) 複断面流路における低水路流と高水敷流の相互干渉効果、を加える必要がある。以上の各要素の解明が安全な流路設計の要点である。

1957年に Rozovskii は単弯曲流についてのそれまでの研究を集大成して、様々な角度から流れの3次元構造の特徴と計算法を紹介している。Rozovskii 以後の多くの研究がこれに出発点をおいている。村本ら^{2), 3)}、de Vriend⁴⁾ によって3) の非線形構造が調べられ、5) の抵抗特性が Chang⁵⁾ によって調べられている。Ippen and Drinkwater⁶⁾ により単弯曲および単弯曲の組合せた水路での剥離の状況と底面剪断力の分布が測定されている。

一様弯曲部の平衡河床形は Engelund⁷⁾ により砂粒に働く力の平衡式が導かれ、以後、池田ら⁸⁾、Falconら⁹⁾、Odgaard¹⁰⁾、筆者ら¹¹⁾ の研究がある。

蛇行流路については自然河川の蛇行流路中心線が sine-generated-curve で良く近似できることが Langbein and Leopold¹²⁾ によって見いだされた。Engelund⁷⁾ はこの点に着目して蛇行流の解析的手法を初めて提案し、蛇行流の流速の偏倚を調べる手がかりを与えた。以後、池田ら¹³⁾、長谷川¹⁴⁾、池内ら¹⁵⁾、玉井ら¹⁶⁾ によって理論の進展がなされた。

木下^{17),18)}は、洪水写真の解析と出水後の河岸状況を調べ、堤防と低水路の蛇行線形の位相関係により、低水路岸の安全度が大きく異なることを発見した。上野、宇民¹⁹⁾は、直線堤内を蛇行する河道内の微細な流況を観察し、低水路から高水敷へ乗り上げる地点に高速流が発生し、それが破堤につながることを示した。

弯曲流の数値解法

多くの解析的研究が蛇行流の構造や河床変形の性質に関して極めて有用な知見を我々に与えてくれた。しかし、複断面流も含む実河川流の精密な平面分布を求め、更に、河床変化予測を行うには数値解析が必要である。河川流の二次元数値解はいくつか報告されている。このうち、河床変動計算も行っているのは以下のものである。

Hancu and Dan²⁰⁾は Fractional-step法を用いて非定常計算を行っている。彼ら以外の研究は流れに擬似定常を仮定している。DHL²¹⁾は流れ関数を導入して渦度方程式を解いている。清水ら²²⁾はSIMPLE法により流れを計算している。Crotochino and Holz²³⁾や Alonso and Wang²⁴⁾は河口や海岸の複雑な地形を扱うために有限要素法を用いている。

三次元計算はk-εモデルモデルを用いて、Leshziner and Rodi²⁵⁾、Demuren²⁶⁾、池田ら²⁷⁾、池谷ら²⁸⁾によってなされている。これらは流れの計算のみで河床変動計算は行っていない。

この様な状況から河床変動計算を前提とした三次元数値解法の開発が必要であった。最近、清水ら²⁹⁾は、筆者らの数値モデルをより簡略化した三次元解法を用いて河床変動を計算行っている。

本研究の内容

第1章 弯曲流の非線形構造

弯曲流ではラセン流が発達する。このラセン流は主流速の平面分布を自由渦から強制渦に変えたり、主流速の深さ方向分布形を平坦化して二次流の強度を弱めたりする。第1章では、これらの非線形効果が顕現する条件を明らかにする。

第2章 一定曲率弯曲部の平衡河床形

第2章では、非線形作用が河床変形に与える機構を論じ、実例を示す。

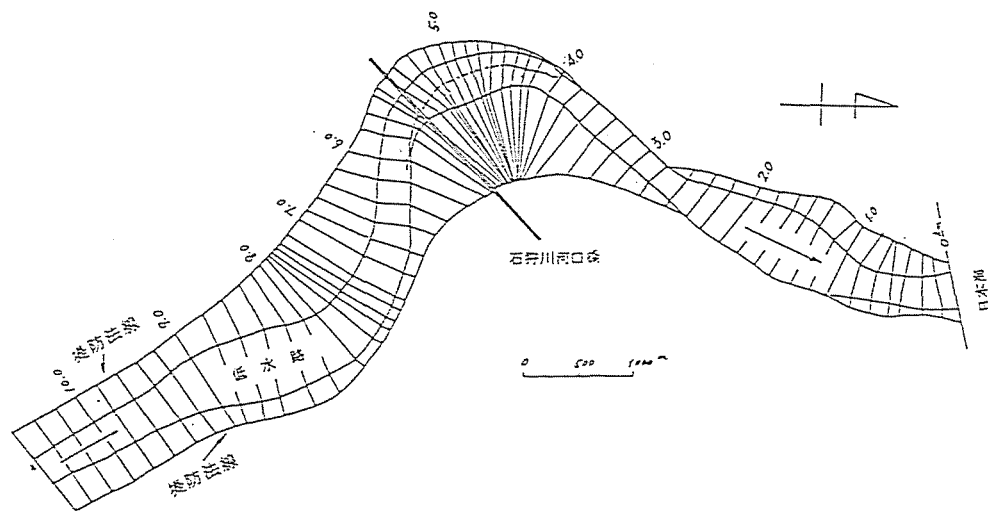


図 - 1 石狩川下流部平面図

第3章 山地河川蛇行流の構造

出水時の山地河川の流れは射流であることが多い。本章では、1) 蛇行流路で発生する衝撃波が速やかに減衰すること、2) 常流の蛇行流と同様に非線形作用が流速分布に大きな影響を与えること、を示す。

第4章 弯曲・蛇行流の三次元数値計算法

第1～3章において、弯曲・蛇行流は三次元性が強いこと、これに起因する非線形作用が河床形に大きな影響を与えることを示した。この様な流れ場の河床変動予測を実用的な精度で行うための三次元数値解法を開発する。三次元河川流の基礎方程式を導き、次いで計算法と計算例を示す。

第5章 河床変動の数値計算法

河床変動計算法を提案し、計算例によりその評価を行う。河床変動計算法は、代表的な河床形態である砂州の発生、非発生が正確に再現できる必要がある。このための差分法を工夫し、安定条件を検討する。

第6章 複断面蛇行流の構造と河床変化

わが国では複断面河道が多い。これらは、堤防、低水路ともに蛇行するのが殆どである。この様な流れは、1～3章で示した単断面弯曲・蛇行流における非線形性の他に高水敷流と低水路流の相互干渉効果が加わる。この効果が流れ、更に、河床変化に与える影響は大きい。第6章では、実河川と木下の実験例に本計算法を適用し、複断面蛇行流の河床変化機構を明らかにする。

本研究の経過

昭和50年8月北海道を襲った集中豪雨をきっかけに、石狩川の計画流量の改訂が計られ、 $12,000\text{m}^3/\text{sec}$ 程度の流量が考えられた（昭和56.8洪水により $18,000\text{m}^3/\text{sec}$ となった）。この流量に対して図-1に示した石狩川下流部にある矢臼場弯曲の維持が懸念された。北海道開発局は弯曲部の河床変動予測のために現地の1/50の大型模型を作ることにした。この実験では移動床相似に工夫が必要であった。移動床材料を現地の河床材料（平均粒径 0.3mm 程度）の1/50とすると 6μ 程度となるからである。本研究の出発点は、この模型実験を補完するための理論開発である。

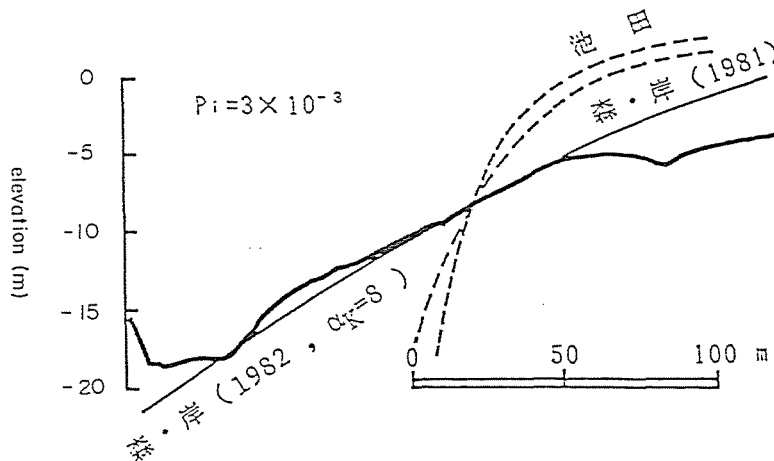


図-2 石狩川矢臼場弯曲の横断河床形

河道弯曲部の河床はラセン流の作用により横断勾配を持つ。その大きさは一定曲率弯曲部の平衡河床のものにおおよそ一致すると考えられている。図-2は、昭和56年8月の石狩川出水のピーク直後に測定された矢臼場弯曲の横断河床形を池田³⁾の理論と比較したものである。理論値は実測値に比べてはるかに大きな外岸洗掘を示している。池田ら以外の理論でも同様な結果が得られた。

これらの理論では掃流砂の運動形態に転動や滑動を想定している。しかし、河床剪断力が大きくなると saltation 運動が卓越してくる。筆者ら¹⁾⁾はこの点の改良を図り、かなり広範な水路実験の実測値が説明できる理論を得た。しかし、石狩川の昭和56年8月出水に対しては、池田理論より幾分実測値に近づくが、やはり計算値は実測値より大きな洗掘を示した（図-2：森、岸(1981)）。

この出水時には矢臼場弯曲の上流側にある石狩川河口橋を利用して2度の流跡

観測が行われた。測定時の流量は、 $Q = 5000$ および $7000\text{m}^3/\text{sec}$ であった。測定結果によれば $Q = 5000\text{m}^3/\text{sec}$ のときには彎曲流特有の二次流が認められた。しかし、 $Q = 7000\text{m}^3/\text{sec}$ のときには確認できなかった。流跡観測は昭和54年4月の融雪出水時にも行われている。このときの流量は $2000\text{m}^3/\text{sec}$ であり、二次流の発生が確認されている。これらの観測結果から第1、2章の研究が行われ大出水時には二次流が弱まり、それが河床形に影響を与えることがわかった。

非線形性を考慮して、実用的な精度で実河川の流れを解くために数値解法を選んだ。まず、二次元浅水流式の数値解と内部構造に関する解析解の組み合わせを考えた³²⁾。

図-3は二次元浅水流式による単彎曲流の計算例である。a図は非線形作用

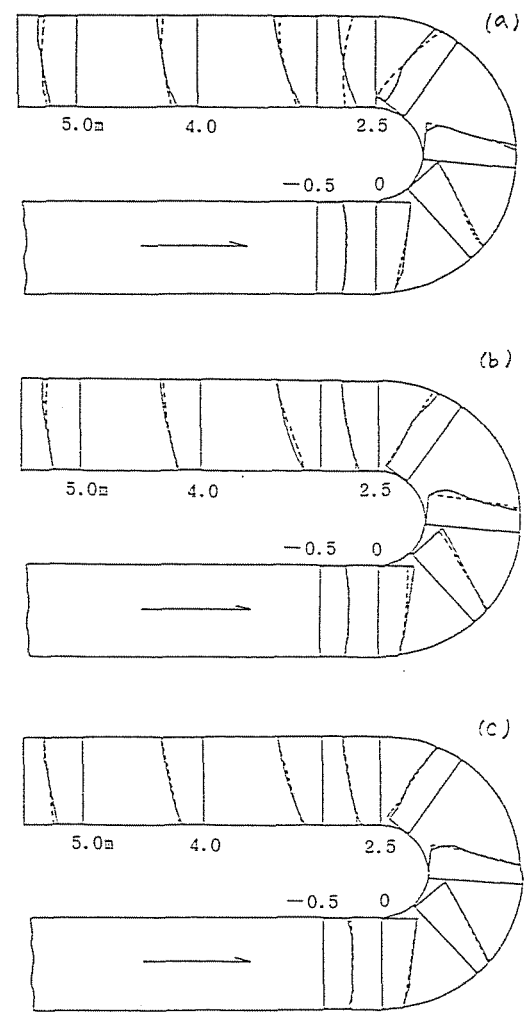


図-3 二次元数値解

を無視した場合、b図はこれを考慮した場合、c図は、非線形効果に加え、更に、流路の曲率変化に伴う二次流の発達遅れを考慮したものである。c図からこのような方法で流れを精度良く再現できることがわかる。

次に、河床変化の計算を行った。計算例は、Ohnishi, Jaime Kennedy³¹⁾による蛇行流路での移動床実験である。およそその河床形が再現されたが、彎曲部と彎曲部をつなぐ遷移部($\theta = 0$)での再現が不充分であった。実用的には、彎曲部の河床の洗掘形状だけでなく、遷移部の正確な再現も重要である。

河床の変形が流れの3次元構造を複雑にし、これに伴って非線形作用も複雑になる。このような流れの解析的手法による再現性不足が実測値と計算値の違いを大きくしたものと考えられた。

このため3次元数値解析法を開発することにした。図-4は開発初期の段階に

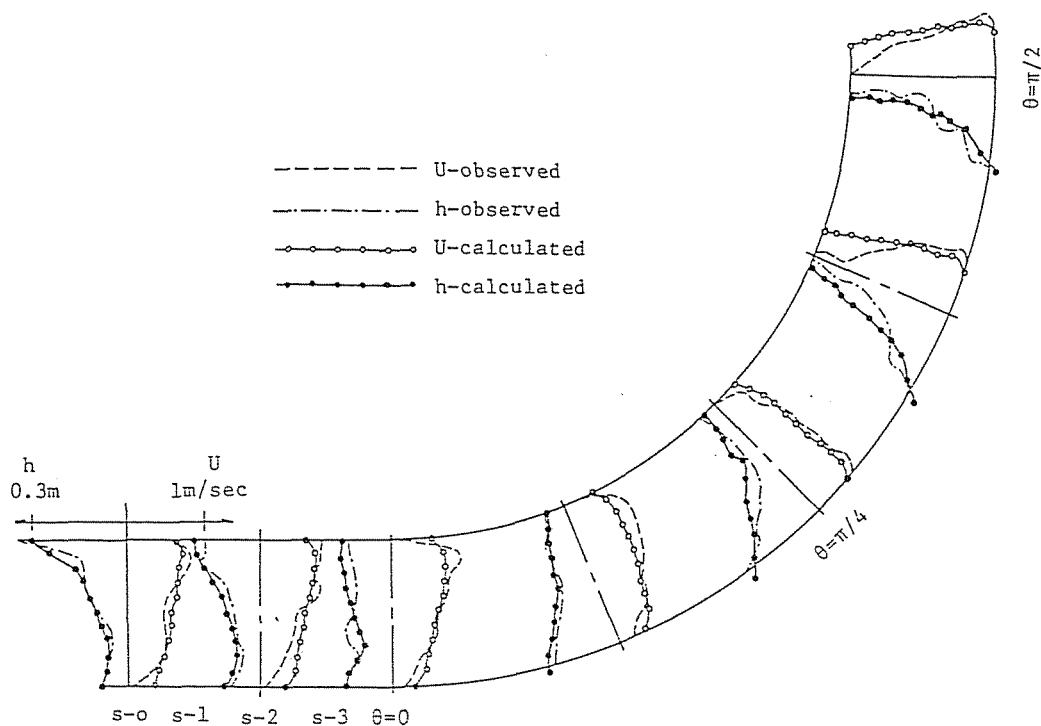


図 - 4 流れの三次元計算と河床変動計算

おけるOhnishi,Jaime Kennedy の実験の再現結果である³⁾²⁾。流れや河床形が良好に再現されている。この計算法は川幅一定の制約がある。実河川へ拡張するために一般座標を採用することにした。計算法は実用性を重視してできる限りの簡略化を行うことにした。この計算法を石狩川矢臼場弯曲のS 56.8洪水に適用して、高水敷流と低水路流の相互干渉が流れの構造を強く支配し、河床形状に大きな影響を与えることが明らかになった。

参考文献

- 1)Rozovskii,I.L.:Flow of Water in Bends of Open Channels,Israel Program for Scientific Translation,1961
- 2)村本、井上：開水路弯曲部の内部機構、京大防災研年報第8号、1965年
- 3)村本：開水路弯曲部の内部機構Ⅱ、京大防災研年報第9号、1966年
- 4)De Vriend,H.J.:Velocity distribution in curved rectangular channels, Jour.Fluid Mech.Vol.107,1981
- 5)Chang,H.H.:Energy expenditure in curved open channels,ASCE,Vol.107, No.7,1983
- 6)Ippen,T and Drinker,P.A:Boundary shear stress in curved trapezoidal channel,ASCE,vol.88,HY5,1962
- 7)Engelund,F.:Flow and bed topography in channel bend,ASCE,N0.11,1974

- 8)池田：移動床河川の弯曲部における二次流と動的横断平衡河床について、土木学会論文集、No.229号、1974
- 9)Falcon-Asconio,M. and Kennedy,J.F:Flow in alluvial-river curves, J.F.M,vol.133,1983
- 10)Odgaard,J.A:Flow and bed topography in alluvial channel bed,ASCE, vol.110,No.4,1984
- 11)森、岸：河道弯曲部河床形状に関するEngelund理論の改良、水理講演会論文集、第25回、1981年
- 12)Langbein,W.B. and Leopold,L.B.:River meander theory of minimum variance,USGS,Prof.Paper422-H,1965
- 13)池田、日野、吉川：河川の自由蛇行に関する理論的研究、土木学会論文集、No.255,1976年
- 14)長谷川：沖積蛇行の平面および河床形と流れに関する水理学的研究、学位論文、1984年
- 15)池内、玉井：蛇行水路における水深平均流場の遷移特性、土木学会論文集、No.334,1983年
- 16)玉井、池谷：蛇行河道内の三次元解析、水講演文集、27回、1983年
- 17)木下：航空写真による洪水流解析の現状と今後の課題、土木学会論文集、第345号/II-1、1984年
- 18)木下：洪水時の沖積作用調査と適正複断面河道に関する実験的研究、文部省科学研究費自然災害特別研究「沖積河川における洪水流の制御と治水安全度の向上に関する研究」（代表岸力）最終報告書、1988年、
- 19)上野、宇民：昭和58年7月豪雨による三隅川の河川構造物災害とその実験的検討、京大防災研年報第27号B-2、1986年
- 20)Hancu,S and Dan,P.:A two-dimensional mathematical model for the river bed deformation,Proc. of the Second International Symposium on River Sedimentation, Nanjing China,1983
- 21)Struiksma N:Prediction of 2-D bed topography in rivers,ASCE,Vol.111, NO.8,1985
- 22)清水、板倉：河川における二次元流れと河床変動の計算、北海道開発局土木

試験所報告第85号、1986年

- 23) Crotofino, A. and K.P. Holz: Numerical movable bed model for practical engineering, Apple. Math. Modelling, vol. 8, February, 1984
- 24) Alonso, C.V. and Wang, S.Y.: Simulation of local scour and fill in sand bed streams, Proc. 3rd Int. Conf. Finite elements in Water Resources, Mississippi, 1980
- 25) Leschziner, M.A. and Rodi, W.: Calculation of strongly curved open channel flow, ASCE, Vol. 105, No. 10, 1979
- 26) Demuren, A.O.: Three dimensional numerical computation of flow and pollutant dispersion in meandering channel, IAHR, XX Congress, Moscow, USSR, Vol. 3, 1983
- 27) 池田、田中、千代田: 空気蛇行流の乱流特性に関する研究、土木学会論文集、No. 351、1984年
- 28) 池谷、玉井: 砂州を有する蛇行河道内三次元流れ、土木学会水講演文集、29回、1985
- 29) 清水、板倉: 簡易な三次元モデルによる蛇行流と河床変動の数値解析、土木学会年次学術講演会、第43回、1988年
- 30) 森、岸: 河道弯曲部流れの数値解析、土木学会年次学術講演会、第37回、1988年
- 31) Ohnishi, Y., Jain, S.C. and Kennedy, J.F.: Effect of meandering in alluvial streams, ASCE, 1976
- 32) Kishi, T. and Mori, A.: Numerical method for flow and bed topography in the curved and meandering channels, Proc. of Third Asian Congress of Fluid Mechanics, Tokyo, Japan, 1986

主な記号など

煩雑さを避けるために、度々使われる記号などを一括してここに示す。

1) 座標系

本研究では図-1に示す(s_0, n)座標系が多用される。 s_0 は河道中心に沿った距離で下流方向を正にとる。 n は、右岸向きを正にとった距離。直交座標系である。この座標系は、図-1中に示す様に極座標(r, θ)で表すことができる。ただし、極座標の原点は s_0 とともに移動する。 s_0 と θ 、 n と r が対応する。 s_0 軸の曲率半径を r_a と書くと次の関係がある。

$$r = r_a + n$$

簡便さのために次式で定義される s_0 方向の微小距離 ds を導入する。

$$ds = r d\theta = r \frac{ds_0}{r_a}$$

通常のCartesian座標系(x, y, z)も用いられる。この場合、 x は主流方向、 y は右岸方向、 z は鉛直上方をそれぞれ正とする。左手系である。

t : 時間

2) 流速

U : 主流速で、 x , s_0 , θ 方向流速。

V : 横断方向流速で、 y , n , r 方向流速。

W : 鉛直上向き流速で、 z 方向流速である。

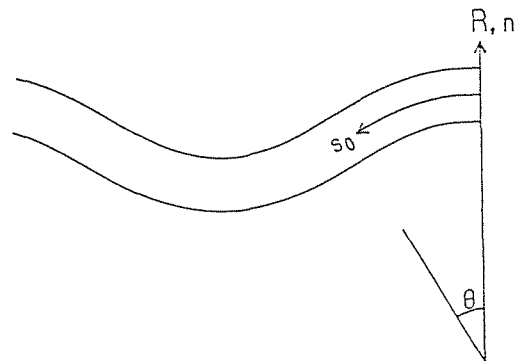


図-1 (s_0, n)座標系

3) レイノルズストレス

円筒座標系でのレイノルズストレスの各成分を渦動粘性係数 ν_t を用いて次式で表す。

$$\frac{\sigma_s}{\rho} = 2\nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{V}{r} \right), \quad \frac{\tau_{sr}}{\rho} = \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial r} - \frac{U}{r} + \frac{\partial V}{\partial s} \right)$$

$$\frac{\sigma_r}{\rho} = 2\nu_t \frac{\partial V}{\partial r}, \quad \frac{\tau_{rz}}{\rho} = \nu_t \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right)$$

$$\frac{\sigma_z}{\rho} = 2\nu_t \frac{\partial W}{\partial z}, \quad \frac{\tau_{zs}}{\rho} = \nu_t \left(\frac{\partial W}{\partial s} + \frac{\partial U}{\partial z} \right)$$

4) その他の共通記号

B: 川幅

H: 水位

$$P = \rho g z + p$$

Q: 流量

W_s : 砂粒の沈降速度

Z: 河床高

d: 河床材料の粒径

g: 重力の加速度

h: 水深

k: 波数 ($= 2\pi / \text{波長}$)

k_x, k_y : 波数の x, y 成分

p: 圧力強度

u_* : 摩擦速度

ρ : 水の密度

ρ_s : 砂の密度

s_d : 砂の水中比重 ($= \rho_s / \rho - 1$)

κ : カルマン常数 ($= 0.4$)

σ : 角周波数 ($= 2\pi / \text{周波数}$)

τ_b : 河床剪断力

τ_* : 無次元の河床剪断力 ($= \tau_b / \rho s_d g d$)

ν : 動粘性係数

ν_t : 渦動粘性係数

φ : 流速係数 ($= \bar{U} / u_*$)

5) 無次元量

$$\xi = (H - H_R) / h$$

$$\eta = (Z - Z_R) / h$$

$$u = (U - U_R) / U_R$$

$$v = V / U_R$$

ここに、 H_R, Z_R, U_R は基準となる水位、河床高、流速.

6) 添字など

上付き : 水深平均

下付き_a : 水路中央での値

下付き_b : 河床での値

下付きの x, y, z, n, s など: 断わらない限りこれらの座標(あるいは無次元座標)での偏微分

7) 式、図、参考文献などの番号

各章およびAppendix毎に独立した通し番号とする. 他章の式を引用する場合には、例えば、5章の(1)式は(5-1).

はじめに

開水路弯曲部では遠心力に起因してラセン流が発生する。ラセン流の強度が強まると、非線形項の作用による流速分布の変形が大きくなる。河川工学上重要な非線形効果は、強制渦型分布の発生と主流速および二次流の鉛直方向分布形の平坦化の2つである。ここでは便宜上、前者をA効果、後者をB効果と呼ぶ。これら2つの非線形効果は、横断方向と鉛直方向への運動量輸送が複合して生ずる。

これらの効果を最初に指摘したのは Rozovskii⁴⁾ と思われる。Rozovskii は、放物断面の弯曲水路で観察された強制渦型分布が非線形項の作用によることを指摘した。村本ら^{5), 6)} は、単弯曲水路で流速の3成分を測定し、弯曲流の発達過程の後半において上述の2つの効果が広範囲の水理条件で現れることを見いだした。De Vriend⁷⁾ は、層流の数値解を求めて弯曲流の非線形構造を分析した。De Vriendによれば、鉛直方向の運動量輸送により主流速が内岸で減少し、外岸で増大する。これが横断方向の運動量輸送を通じて全断面に及ぶ。最近の研究では、石川ら⁸⁾ のモデルも基本的にはこれと同じと考えられる。

以上の研究では主流と二次流の相互干渉の内部構造に関する基本的性質が調べられている。これに対して本研究は、これらの非線形効果が顕著に表れる条件を調べたものである。弯曲流の解析法を決める上にこの判定は重要である。

A効果を矩形断面水路で調べる。これは、流速の横断分布は水深分布にも依存するので、非線形作用による強制渦型化のみを取り出すためである。流路平面形は直線部に一樣弯曲部が接続した場合を考える。

B効果は三角断面水路で調べる。この非線形効果は河床が横断勾配を持つときに大きく、また、この場合が河川工学上重要だからである。流れは一定曲率流路の平衡流とする。

得られた結果を用いて、石狩川矢白場弯曲の非線形構造を明らかにする。

1.1 強制渦型流速分布の発生条件 (A効果)

(s , n) 座標系での流れの運動方程式および連続式を(1)~(4)式で与える。

$$\frac{\partial U^2}{\partial s} + \frac{\partial r U V}{r \partial n} + \frac{\partial U W}{\partial z} + \frac{V U}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial s} + \frac{\partial r \tau_{rs}}{\rho r \partial n} + \frac{\tau_{rs}}{\rho r} + \frac{\partial \sigma_s}{\rho \partial s} + \frac{\partial \tau_{sz}}{\rho \partial z} \quad (1)$$

$$\frac{\partial U V}{\partial s} + \frac{\partial r V^2}{r \partial n} + \frac{\partial V W}{\partial z} - \frac{U^2}{r} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial n} + \frac{\partial r \sigma_r}{\rho r \partial n} - \frac{\sigma_s}{\rho r} + \frac{\partial \tau_{rs}}{\rho \partial s} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\rho \partial z} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U W}{\partial s} + \frac{\partial r V W}{r \partial n} + \frac{\partial W^2}{\partial z} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + \frac{\partial r \tau_{rz}}{\rho r \partial n} + \frac{\partial \tau_{sz}}{\rho \partial s} + \frac{\partial \sigma_z}{\rho \partial z} \quad (3)$$

$$\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial r V}{r \partial n} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (4)$$

(1)式を河床から水面まで積分し、 $h \ll r$ として微小項を無視すると(5)式が得られる。

$$\frac{\partial h \bar{U}^2}{\partial s} + \frac{\partial h X}{\partial n} = -g h \frac{\partial H}{\partial s} - \frac{\tau_b}{\rho} \quad (5)$$

(5)式左辺第2項がVによる横断方向の運動量輸送を表す。ここに、

$$X = \frac{1}{h} \int_0^h U (V - \bar{V}) dz \quad (6)$$

である。一定曲率弯曲部であるから水面形に次式を仮定する。

$$-\frac{\partial H}{\partial s} = I = I_0 \frac{r_0}{r} \quad (7)$$

(7)式を(5)式に代入して(5)式をnで偏微分する。水路中央に着目することにして、水路中央で $h = \text{const.}$ 、 $\bar{U}^2 = \text{const.}$ とする。また、矩形断面であるのでn方向の水深変化を無視すると(8)式が得られる。

$$\frac{dD_*}{ds_*} + f_r D_* = P_{r^2} \cdot G_1 - 1 \quad (8)$$

(8)式が流速の横断勾配の変化を表す微分方程式である。ここに、

$$D_* = \left[r \frac{\partial U^2 / \partial n}{U_*^2} \right]_{n=0}, \quad s_* = \frac{s_0}{h_0}, \quad f_r = \left(\frac{U_*}{U_0} \right)^2$$

$$P_{r^2} = - \left[\frac{\partial^2 \bar{X}}{\partial n^2} \frac{r h}{U_*^2} \right]_{n=0}. \quad (9)$$

である(G_1 、 $\bar{X}$ は後出(11)式)。(8)式を解くためにXを与える。

Kalkwijk and De Vriend⁹⁾や Rozovskiï は、局所水理条件に対する平衡弯曲流のU、Vを用いてXを計算している。Uに対数則、Vに(2)の近似式(10)の解を用いている。

$$-\frac{U^2}{r} = -g \frac{\partial H}{\partial n} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu \frac{\partial V}{\partial z} \right) \quad (10)$$

しかし、二次流の発達には流路曲率の変化に対して遅れがあるし、また、側壁付近では二次流に対する側壁の影響が無視できない。本研究ではこれらの効果を考慮して X を(11)式で表すことにする。

$$X = G_1(s^*) \cdot \bar{X}, \quad \bar{X} = G_2(n^*) X_a \quad (11)$$

X_a は充分発達した弯曲流の水路中央での X である。これは Kalkwijk and De Vriend と同様に与える。

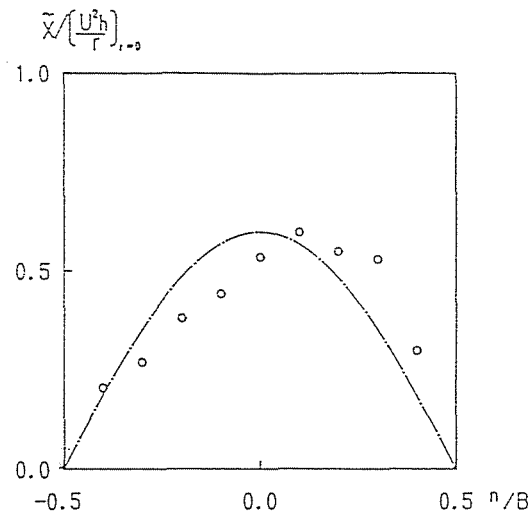


図 - 1 $\bar{X}$ の分布形

$$X_a = [k_{sn} h U^2 / r]_{n=a}$$

$$k_{sn} = \frac{1}{\kappa^2} \left(\frac{6}{1 - \beta/3} \right)^2 \left(\frac{\alpha}{45} - \frac{2}{315} \beta + \frac{\beta^2}{945} \right)$$

$$\alpha = \frac{\beta(2/3 - 0.6\beta + \beta^2/7)}{1 - \beta/3}, \quad \beta = \frac{3}{\kappa \varphi + 1} \quad (12)$$

ただし、主流速分布には二次式を用いる。

側壁付近では W の作用による上下層の混合が大きい。これにより鉛直方向流速分布の平坦化 (B 効果) が起こる。この非線形作用は側壁付近の X を減少させる。本研究では Kikkawa et al. ¹⁰⁾ の実験を参考にし、また、側壁では $X=0$ であることを考慮して G_2 を(13)式で与える。

$$G_2 = \cos(\pi n / B) \quad (13)$$

図 - 1 は Kikkawa et al. の実験値と(13)式の比較である。 $\bar{X}$ の横断分布は上

に凸で、この分布形するとき(8)式右辺第1項がA効果をもつ。

ラセン流の発達関数 G_1 の算定に Rozovskii の方法を応用する。Rozovskii は一定曲率の弯曲部におけるラセン流の強度の変化を(14)式で与えた。

$$U \frac{\partial q}{\partial s} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial q}{\partial z} \right) \quad (14)$$

ここに、 $q = V_* - V$ 、 V_* : ラセン流が充分発達したときの V 。

$q = q_s(s) \cdot f(z/h)$ と仮定して、これを(14)式に代入すると

$$\frac{\partial q_s / \partial s}{q_s} = \frac{\nu_t}{U h_s} \cdot \frac{f'}{f} = \text{const.} = -c \quad (15)$$

第1式を積分すると

$$q = q_s \exp(-cs) \quad (16)$$

弯曲部入口を s_* の原点にとり、ここで $V=0$ とおくと $q_s = V_*$ である。これから

$$G_1 = V / V_* = 1 - \exp(-cs) \quad (17)$$

c は(15)第2式から得られる。 V の分布形 f に(10)式の解を与える。 U には二次式を用いる。得られる f に対して(15)第2式は常数とはならないが、代表値として U に $\bar{U}$ 、 f'/f に $z=h$ での値を用いることにすると

$$c = \frac{\kappa}{6\varphi} \alpha \left(\frac{\alpha}{6} - \frac{\beta}{30} + \frac{\beta^2}{210} \right)^{-1} \quad (18)$$

(17)式を(8)式に代入して解くと

$$D_* = \frac{P_r^2 - 1}{f_r} - \frac{P_r^2}{f_r - c} \exp(-cs) + c_s \exp(-f_r s) \quad (19)$$

積分常数 c_s を次の境界条件で定める。

図-2は、180° 矩形弯曲部の上・下流に直線部が接続した水路で測定された外岸と内岸の水深差 δh である。図から $\theta \geq 12^\circ$ で $(g \delta h / U_m^2)(r_s/B) = 1.1$

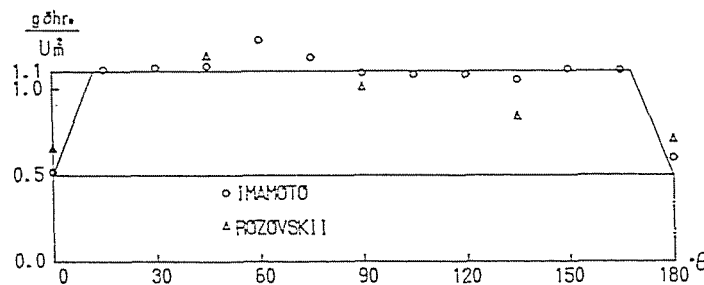


図-2 矩形断面一定曲率弯曲部の外・内岸の水深差

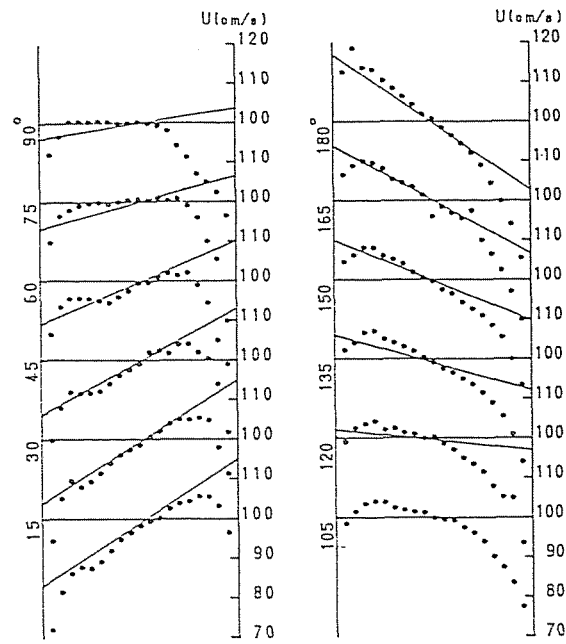


図 - 3 横断流速分布の実測値値と理論値の比較

表 - 1 自由渦から強制渦への移行点

Run-No	r_a	弯曲角	P_r	$D_* < 0$	$D_* > 0$	θ_c
1-1	25cm	90°	10.1	0 ~ 90°	90	163°
1-2	75	90°	10.0	0 ~ 60	90	70
2-1	75	180°	3.5	0 ~ 150	180	170
2-2	75	180°	4.7	0 ~ 150	180	195
2-3	150	180°	3.5	0 ~ 60	90 ~ 180	79
2-4	150	180°	4.0	0 ~ 30	60 ~ 180	116
3-1	150	90°	3.5	0 ~ 45	60 ~ 90	92
3-2	150	90°	3.5	0 ~ 45	60 ~ 90	61

とする。弯曲部入口から $\theta = 12^\circ$ の地点まで比エネルギーを一定とし、このときの左右岸の速度水頭差 $\delta(V^2) (= 2g\delta h)$ で $\theta = 12^\circ$ の $D_* = D_{*c}$ を与える ((20)式)。

$$D_{*c} = -(\delta V^2 / U_{ra}^2)(r_a/B) = -2.2/f_r \quad (20)$$

これから(21)式が得られる。

$$c_s = [D_{*s} - \frac{P_r^2 - 1}{f_r} + \frac{P_r^2}{f_r - c} \exp(-cs_{*s})] \exp(f_r s_{*s}) \quad (21)$$

ここに、 s_{*s} : $\theta = 12^\circ$ における s_* 。

(19)式において $s_* = \infty$ とおくと ($c > 0$, $f_r > 0$)

$$D_*(s_* = \infty) = (P_r^2 - 1) / f_r \quad (22)$$

上式は、 $Pr > 1$ が強制渦発生 の必要条件であることを示している。

図-3 は今本 ($Pr = 4.0$) ¹¹⁾ の実験値と(19)式の比較である。表-1 は、村本 ⁶⁾ の実験において $D_* > 0$ および $D_* < 0$ の範囲の実測値と θ_c の比較である。 θ_c は $D_* = 0$ となる弯曲角 θ の理論値。これらの実験値と理論値の比較から直線部に接続する一様弯曲部の主流速分布の型が(19)式でかなり精度よく推定できることがわかる。

1.2 流速分布の平坦化 (B 効果)

移動床の弯曲部はラセン流の作用により外岸側に深掘れをもった三角断面となるのが普通である。この断面形における流速分布は外岸側の水深が大きいこに加えて前述の A 効果により強制渦型分布となることが多い。

流速分布が強制渦型である場合、弯曲部特有のラセン流は主流速分布に対して水面付近では減速、河床付近では加速の方向に作用する。従って、主流速の深さ方向の分布を平坦化させる。三角断面におけるラセン流は上昇流を伴い、これによる上、下層の混合が流速分布の平坦化を更に進める。この結果、遠心力分布が一様化し、 V - 成分の絶対値が小さくなる。

本章では三角断面に対する B 効果の強さを表すパラメーター Pi を導入し、数値解法を利用して B 効果が強く現れる限界値 Pic を定める。

三角断面における B 効果は、主として、横断方向の水深変化による強制渦型分布とラセン流の V 成分との相互作用によって生ずる。この作用の大きさは $|\partial V U / \partial r|$ である。これと剪断力項の比

$$Pi = \left| \frac{\partial V U}{\partial r} / \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial z} \right) \right| \quad (23)$$

で B 効果の強さを表す。(23)式右辺の各量の大きさを見積る。

V の大きさを河床のスリップ速度で与えると

$$O[V] \sim V_b \sim \frac{h}{r} U_b \sim \frac{h}{r} u_*$$

$$O\left[\frac{U}{r}\right] \sim \frac{U}{h} \frac{\partial h}{\partial r}$$

$$O\left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial z} \right)\right] \sim \frac{u_*^2}{h}$$

以上から

$$P_i = \frac{h}{r} \frac{\partial h}{\partial r} \varphi \quad (24)$$

を線形・非線形の判断パラメーターに用いる。

三角断面での実験例が少ないため、数値解を利用して P_i を決める。乱流モデルには適合性の吟味が比較的広範な問題に対して行われている $k - \varepsilon$ モデルを採用する。基礎方程式は (1) ~ (4) 式と、これに k 、 ε の輸送方程式 (25)、(26) である。

$$V \frac{\partial k}{\partial n} + W \frac{\partial k}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{u_t}{\sigma_k} r \frac{\partial k}{\partial n} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial z} \right) + G_t - \varepsilon \quad (25)$$

$$V \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} + W \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} = - \frac{\partial}{\partial n} \left(\frac{u_t}{\sigma_\varepsilon} r \frac{\partial \varepsilon}{\partial n} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{u_t}{\sigma_\varepsilon} \frac{\partial \varepsilon}{\partial z} \right) + \frac{\varepsilon}{k} (C_1 G_t - C_2 \varepsilon) \quad (26)$$

ここに、 $k = \frac{1}{2} (u^2 + v^2 + w^2)$, u , v , w : 乱れ速度の3成分、

$$\frac{G_t}{u_t} = 2 \left[\left(\frac{\partial V}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \left(\frac{V}{r} \right)^2 \right] + \left(\frac{\partial V}{\partial z} + \frac{\partial W}{\partial r} \right)^2 + \left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{U}{r} \right) \right]^2$$

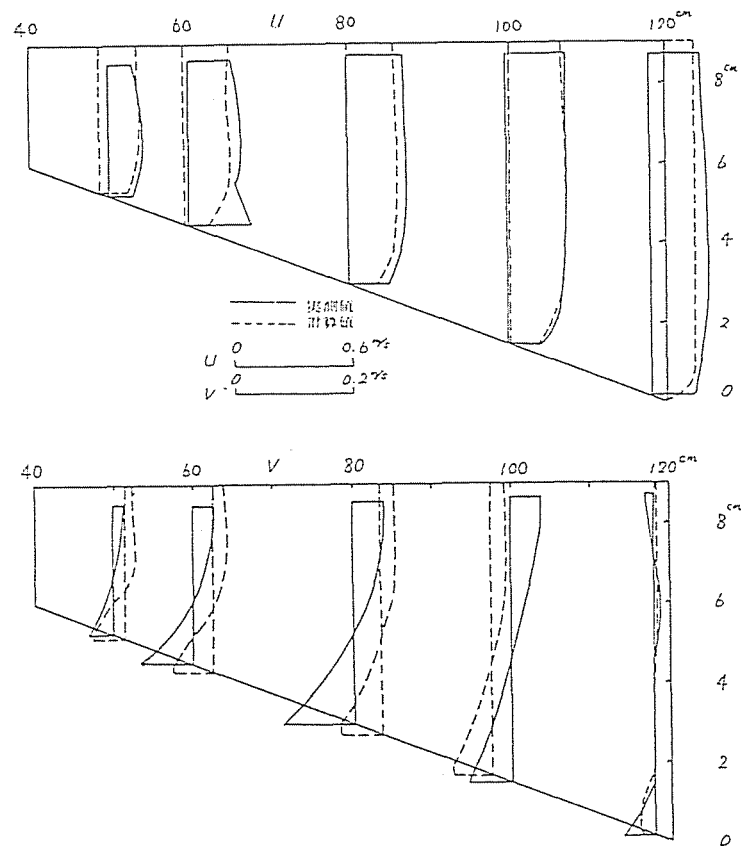


図 - 4 Rozovskii の実験の再現

上式において、 C_1 、 C_2 などの値は流れの構造により異なる。Leshziner等¹²⁾は、弯曲部三次元の数値解析において、 $C_1 = 1.43$ 、 $C_2 = 1.92$ 、 $C_\mu = 0.09$ 、 $\sigma_k = 1.0$ 、 $\sigma_\varepsilon = 1.3$ を用いて良好な結果を得ているので本研究でもこれらの値を用いる。

k 、 ε の境界条件は、河床および側壁で、

$$\varepsilon_b = \frac{u_*^3}{\kappa y_b} = \frac{C_D^{3/2}}{\kappa y_b} U_b^3$$

$$u_{\tau b} = \kappa y_b u_* = \kappa y_b C_D^{1/2} U_b, \quad k_b = (\varepsilon_b u_{\tau b} / C_\mu)^{1/2}.$$

水面は、上下が対称な管路の対称面とする。

図-4はRozovskiiによる河床横断勾配を持った180°弯曲水路での実験値と数値解との比較である。実測値は弯曲流が充分発達したと思われる弯曲角 $\approx 140^\circ$ 地点のものである。（注：計算点と測定点の n 座標が異なるため両者の縦軸の位置が少しずれている。）全体的に分布形がよく再現されている。この実験は滑面水路で行われている。筆者の興味は粗面にあるので改めて粗面流の計算を行う。

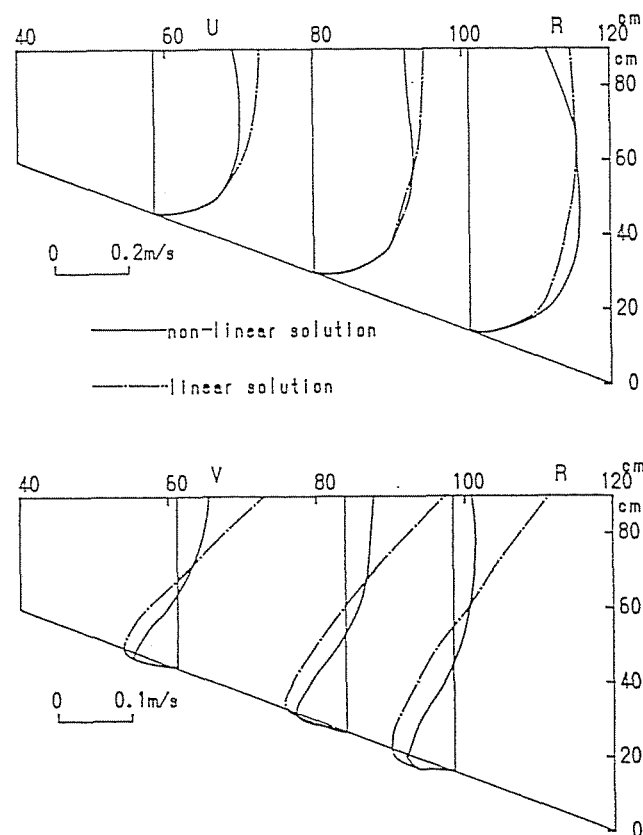


図-5 B効果

図-5中の実線が得られた流速分布である。一点鎖線は非線形効果をみるために次の様な手順で計算したものである。まず、 $V = W = 0$ とおいて U 、 k 、 ε を求める。次いで、これらの U 、 k 、 ε を固定して、 V 、 W を求める。この様にして得られた U は線形解である。 V については、 z 方向の加速度項は非線形ではあるが本研究が着目している U との相互干渉はない。

図からわかるように非線形解には流速の平坦化作用が明瞭に認められる。 U は最大流速点が河床付近になっている。非線形効果の度合はどの地点も同程度である。 P_i を計算すると位置によらず

$$P_i = \text{const.} \approx 0.05$$

であった。これは次節で示す様に $P_{ic} = 0.02$ より大きい。

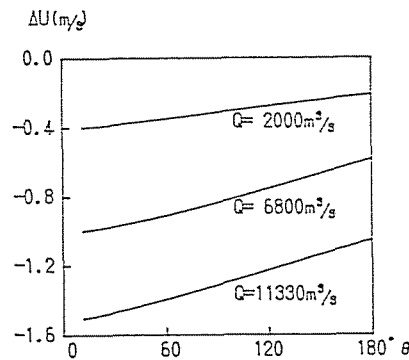


図-7 石狩川矢白場弯曲のA効果

1.3 石狩川矢白場弯曲の非線形構造

(19)式を石狩川矢白場弯曲の融雪出水、S50.8出水、S56.8出水に適用してA効果を調べる。それぞれの P_i 値は、1.48、2.23、1.49で強制渦発生の必要条件是満たしている。図-7は(19)式による左右岸流速差の計算値である。図によれば、この弯曲部は矩形断面に置き換えると 180° 以下の弯曲角では強制渦には移行しない。序論の図-1からわかる様に矢白場弯曲の弯曲角は約 180° であることから、運動量の横断輸送効果はそれほど大きくはないものと判定される。

次に、 $k-\varepsilon$ モデルによる流れの計算を石狩川矢白場弯曲に適用してB効果を調べる。S56.8およびS50.8出水時の断面形を図-7の太い実線で近似し、三角断面内の流量をそれぞれ 8000 、 $1500 \text{ m}^3/\text{sec}$ とする。図-8は $Q = 8000 \text{ m}^3/\text{sec}$ のときの数値解である。実線および点線の意味は図-5と同じである。図中の矢印を

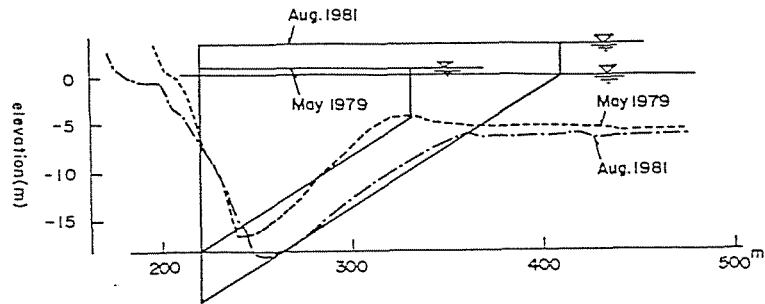


図 - 7 石狩川矢臼場弯曲の横断面モデル

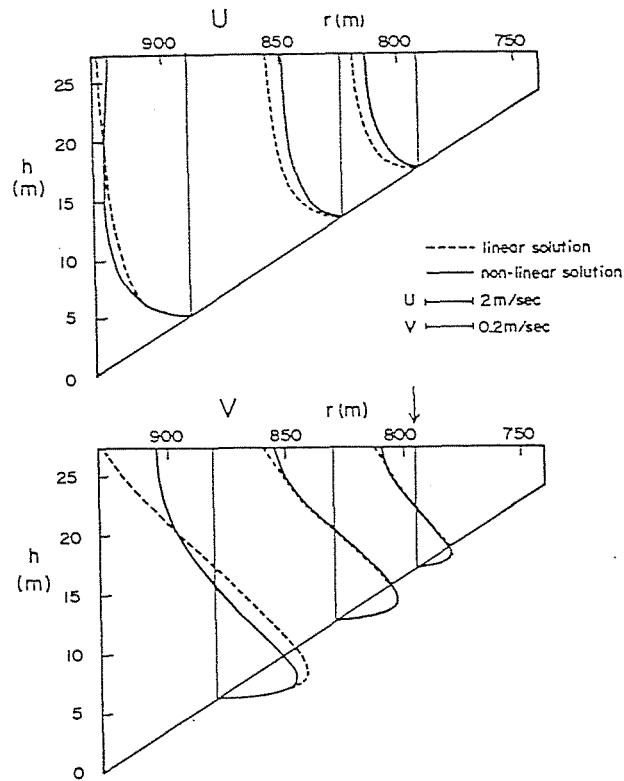


図 - 8 石狩川矢臼場弯曲 ($Q = 8000 \text{ m}^3/\text{s}$)

付した地点では非線形効果が認められるがそれほど大きくない。この地点の P_i を P_{ic} とすると

$$P_{ic} = 0.02$$

である。矢印の地点より外岸に向かって P_i は増大している。 $r = 88 \text{ m}$ 付近では $P_i \approx 0.05$ 非線形効果は図 - 5 の例と同じと判定される。 $S 54.5$ 出水では図 - 9 に示す様に外岸付近でわずかに非線形効果が認められる。 $P_i = 0.006 \sim 0.02$ で外岸付近で P_{ic} となっている。

以上から石狩川矢臼場弯曲の非線形構造は、A 効果はそれほど大きなものとは

ならないと考えられる。一方、B効果は流量とともに大きくなり、融雪の $Q = 2000\text{m}^3/\text{sec}$ 程度では無視できるが、S 50.8やS 56.8などの大きな洪水では無視できないものと判定される。

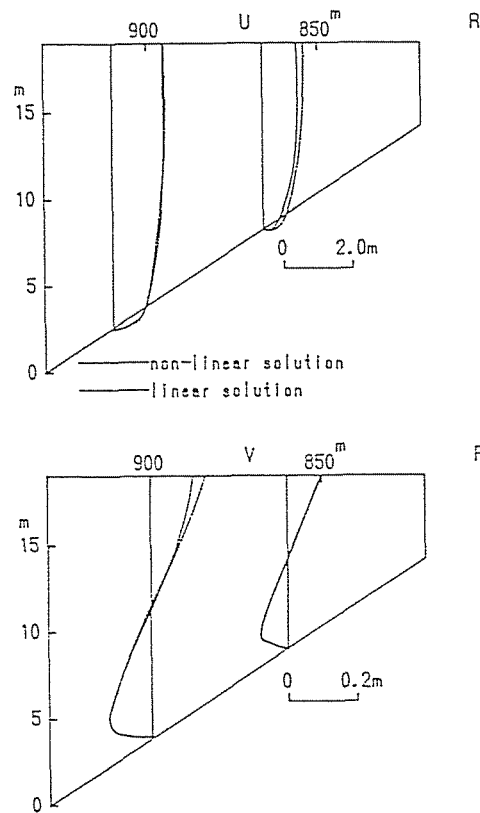


図 - 9 石狩川矢白場弯曲 ($Q = 1500\text{m}^3/\text{S}$)

参考文献

- 1) 森、岸：河道弯曲部における二次流の構造、水理講演会論文集、第27回、1983年
- 2) 森、岸：河道弯曲部の流れに与える二次流の効果、土木学会年次学術講演会、第38回、1983年
- 3) 森、岸：横断勾配を有する一様弯曲部の流れの構造、水理講演会論文集、第287回、1984年
- 4) Rozovskii, I.L.: Flow of Water in Bends of Open Channels, Israel Program for Scientific Translation, 1961
- 5) 村本、井上：開水路弯曲部の内部機構、京大防災研年報第8号、1965年
- 6) 村本：開水路弯曲部の内部機構Ⅱ、京大防災研年報第9号、1966年

- 7)De Vriend,H.J:Velocity distribution in curved rectangular channels,
Jour.Fluid Mech.Vol.107,1981
- 8)石川、金：弯曲部の二次流に関する基礎的研究、土木学会論文集、第375号/
II-6、1986年
- 9)Kalkwijk,J.P. and De Vriend:Computation of the flow in shallow river
bends,J.Hydr.Res,vol.18,No.4,1980
- 10)Kikkawa,H,Ikeda,S,Ohkawa,H and Kawamura Y:Secondary flow in a bend of
turbulent stream,Proc.of JSCE,No.219,nov.1973
- 11)今本、石垣：複断面弯曲水路流れの水理特性について(1)、京都大学防災研究
所年報、第25号B、1982年
- 12)Leschziner,M.A and Rodi,W.:Calculation of strongly curved open
channel flow,ASCE,Vol.105,No.10,1979

はじめに

一定曲率弯曲部の河床形は流砂が河岸に沿って平行に移動するとき平衡状態にあると考える。従って、平衡横断形を求める問題は、1. 移動粒子に作用する力の横断方向成分の平衡式を導く、2. 二次流の構造を求める、の2つに分けられる。

第1の問題について Engelund³⁾ や池田ら⁴⁾ は、砂粒に働く流下方向の力を流体力と摩擦力で平衡させ、この関係を用いて横断方向の平衡式を導いている。同理論は摩擦係数に一定値を与えていることから、砂粒の運動形態が滑動および転動が主体となる剪断力の小さい流れに適用できるものと考えられる。これに対して筆者ら²⁾ は剪断力が大きく、saltation が主体となる場合の平衡式を導いた。

2. の問題については、従来、二次流と主流の相互干渉を無視した線形理論が用いられてきた。筆者らも線形理論を用い、1. に関する改良のみでかなり広い範囲の河床形が説明できることを示した。

しかし、序論に示した様に石狩川の昭和56.8の大出水に対しては、計算値の洗掘深が過大となり実測値がうまく説明できなかった。第1章での考察から、この原因として非線形効果（B効果）を無視したことが考えられた。本章では非線形作用による流れの構造の変化が河床形に与える効果を調べる。

2.1 流れのモデルと基礎方程式

第1章で明らかにした三角断面弯曲流の非線形効果を次の様にモデル化する。

基礎方程式を次式で与える。s および n 方向の運動方程式(1)、(2)式、流れの連続式(3)、渦動粘性係数(4)である。

$$\frac{\partial r}{r} \frac{\partial U}{\partial r} V = g I_s + \nu_t \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}, \quad I_s = -\frac{\partial H}{\partial s} \quad (1)$$

$$-\frac{U^2}{r} = -g I_n + \nu_t \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}, \quad I_n = \frac{\partial H}{\partial n} \quad (2)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial r} V + \frac{\partial W}{\partial z} = 0 \quad (3)$$

$$\nu_t = (\kappa u_* + \alpha \kappa W_m) h / 6 \quad (4)$$

(1)式左辺が横断方向への運動量輸送を表す。W成分による上下方向の運動量輸送は(4)に含ませる。(4)式中の W_m はWの代表流速で $V=0$ となる地点 $z=h_c$ のWとする。

非線形の流れを精密に解くのは簡単ではない。本章の目的は非線形作用が河床形に与えるおおよその効果を調べることである。以下1)~3)を仮定して近似解を求める。

1) 河床の横断勾配 $I_z(=-\partial Z/\partial n) \ll 1$ であることから流れに相似性を仮定する。

$$U = U_s(q)\phi(\xi), \quad V = V_s(q)f(\xi) \quad (5)$$

ここに、 q : n に関する無次元量、 $\xi = 1 - z/h$, U_s, V_s : 水面でのU, V。

2) 線形解析によれば、二次流と主流の強度の比は、 h/r に比例するので

$$q = h r_e / (r h_e) \quad (6)$$

とする。

3) (1)式 of 非線形項を次式で近似する。

$$\phi f = 1 - 2\xi \quad (7)$$

1), 2) を用いて、 W_m を以下の様に与える。連続式(3)を $z=0$ から h_e まで積分し、 $W|_{z=0} = -V|_{z=0} \cdot I_z$ の関係を用いると、

$$W_m = -\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \int_0^{h_e} r V dz \quad (8)$$

(5) 式を(8)式に代入し、後出の(14)式 of 関係を用いると、

$$\frac{W_m}{|V_m|} = (1+\nu_z) \frac{dh}{dr} + (1-\nu_z) \frac{h}{r} \quad (9)$$

ここに、 V_m は、 $z=0 \sim h_c$ 間の平均流速であり次式で与えられる。

$$V_m = -V_s \int_{1-h_e/h}^1 f(\xi) d\xi \quad (10)$$

一定曲率弯曲部の平衡河床形は

$$\frac{h}{h_e} = \left[\frac{r}{r_e} \right]^n, \quad \frac{r dh}{h dr} = M \quad (11)$$

で近似でき、 M は5~10の値である。また、 ν_z は1程度の値である。従って、(9)式右辺の第2項は第1項に比べて小さく無視することができる。 $|V_m| \div$

$V_s/2$ として (8) 式を (3) 式に代入し、 $\alpha_k(\nu_2+1)/2$ を新たに α_k とおくと ν_1 は (12) 式で与えられる.

$$\nu_1 = \left[\kappa u_* + \alpha_k V_s \frac{dh}{dr} \right] \frac{h}{6} \quad (12)$$

2.2 流速分布

U_s , V_s , ν_1 , I_s を h , I_θ , および $r = r_0$ での摩擦速度 u_{*0} で無次元化したものを 1) の仮定から q のみに依存するものとして以下の様におく.

$$U_{s*} = \frac{U_s}{u_{*0}} = U_{s*0} q^{\nu_1}, \quad U_{s*0} = \frac{U_{s0}}{u_{*0}} \quad (13)$$

$$V_{s*} = \frac{V_s}{u_{*0}} = V_{s*0} q^{\nu_2}, \quad V_{s*0} = \frac{V_{s0}}{u_{*0}} \quad (14)$$

$$\nu_* = \frac{\nu_1}{u_{*0} h} = \nu_{*0} q^{\nu_3}, \quad \nu_{*0} = \left[\kappa + \alpha_k \left(\frac{V_s}{u_*} \cdot \frac{dh}{dr} \right) \right]_{r=r_0} / 6 \quad (15)$$

$$I_{H*} = \frac{I_{Hh}}{I_s h_0} = I_{H*0} q^{\nu_4}, \quad I_{H*0} = \frac{I_{H0}}{I_s} \quad (16)$$

これらと (5) 式を (1)、(2) 式に代入すると (17)、(18) 式が得られる.

$$\phi' = -\beta_1 + 3\beta_2 \phi(\xi) f(\xi) \quad (17)$$

$$f' = A(\alpha - \phi^2) \quad (18)$$

ここに、

$$\beta_1 = \frac{q}{\nu_* U_{s*}} \quad (19)$$

$$\beta_2 = \frac{(\nu_1 + \nu_2)}{3} \frac{V_{s*}}{\nu_*} \frac{dh}{dr} \quad (20)$$

$$A = \frac{U_{s*}^2}{\nu_* V_{s*}} q \frac{h_0}{r_0} \quad (21)$$

$$\alpha = \frac{I_{H*}}{U_{s*}^2 q} \frac{r_0}{h_0} \quad (22)$$

(7) 式を (17) 式に代入すると (23) 式が得られる.

$$\phi' = -2\beta - 6\beta_2 \xi \quad (23)$$

$$\text{ここに、} \quad 2\beta = \beta_1 - 3\beta_2 \quad (24)$$

(23) 式を ξ で積分し、境界条件 $\phi(0)=1, \phi'(0)=0$ を用いると (25) 式が得られる.

$$\phi = 1 - \beta \xi^2 - \beta_2 \xi^3 \quad (25)$$

(25) 式を (18) 式代入して $f(0)=1, f'(0)=0$ の境界条件の基に解くと (26) 式が得られる.

$$f = A \left[\frac{(\alpha-1)}{2} + \frac{\beta}{6} + \frac{\beta_2}{10} - \frac{\beta^2}{30} - \frac{\beta \beta_2}{21} - \frac{\beta_2^2}{56} \right] + 1 \quad (26)$$

河床で流向と剪断力の方向が一致する条件

$$\frac{f(1)}{\phi(1)} = \left[\frac{f'(\xi)}{\phi'(\xi)} \right]_{\xi=1} \quad (27)$$

から (28) 式が得られる.

$$A \left[\frac{\alpha-1}{2} + \frac{\beta}{30} + \frac{\beta_2}{60} - \frac{\beta^2}{210} - \frac{\beta \beta_2}{168} - \frac{\beta_2^2}{504} \right] + 1 = 0 \quad (28)$$

2.3 弯曲部の平衡河床形

筆者ら²⁾は流れと河床形の関係を次式で与えた.

$$\frac{dh}{dr} = m \frac{|f(1)|}{\phi(1)} \frac{V_{s*}}{U_{s*}}, \quad m \doteq 2.0 \tau_{*0}^{0.6} \quad (29)$$

上式右辺が 1, 2 節で導いた諸式により与えられる.

これらの諸式における未知量の数と方程式の数の関係を整理すると、未知量は $U_{s*0}, V_{s*0}, \nu_{*0}, I_{H*0}, \nu_1, \nu_2, \nu_3, \nu_4, \beta, \beta_1, \beta_2, A, \alpha, \alpha_K, dh/dr, h_0/r_0, \tau_{*0}$ の 17 個である. 方程式は (15)、(19)、(20)、(21)、(22)、(24)、(27)、(28)、(29) の 9 本. これに $\beta_1, \beta_2, A, \alpha$ が常数であることから 4 本の条件式が加わり、合計 13 本である.

不足している 4 つの条件を以下の様に与える. h_0/r_0 と τ_{*0} を水理条件、 α_K をパラメーターとして与える. 残りの 1 つは抵抗則に関するもので

$$\varphi_0 = \bar{U}_0 / U_{*0} \quad (30)$$

を与える. ϕ を $\xi = 0 \sim 1$ で積分すると

$$\phi = \int_0^1 \phi d\xi = \frac{\bar{U}}{U_{s*}} = \frac{\bar{U}_0}{U_{s*0}} = 1 - \frac{\beta}{3} - \frac{\beta_2}{4} \quad (31)$$

(30) 式を用いて (31) 式から $\bar{U}_0$ を消去すると (32) 式が得られる.

$$\frac{\varphi_0}{U_{s*0}} = 1 - \frac{\beta}{3} - \frac{\beta_2}{4} \quad (32)$$

以上から $\phi_0, \tau_{*0}, h_0/r_0, \alpha_K$ が与えられると河床横断形が定まる。これは陽な形では求まらないが、 $\nu_1 \sim \nu_4$ についてはただちに求まり、 $\nu_1=1/6$ 、 $\nu_2=1/2$ 、 $\nu_3=5/6$ 、 $\nu_4=4/3$ である。これらの数値を用いると(29)式は

$$\frac{r_0 d h}{h_0 d r} = N q^{1/3}, \quad N = m \frac{r_0 |f(1)| V_{s-a}}{h_0 \phi(1) U_{s-a}} \quad (33)$$

となる。(33)式を解くと(34)式が得られる。

$$\frac{h}{h_0} = [1 + N \{ (\frac{r}{r_0})^{2/3} - 1 \}]^{3/2} \quad (34)$$

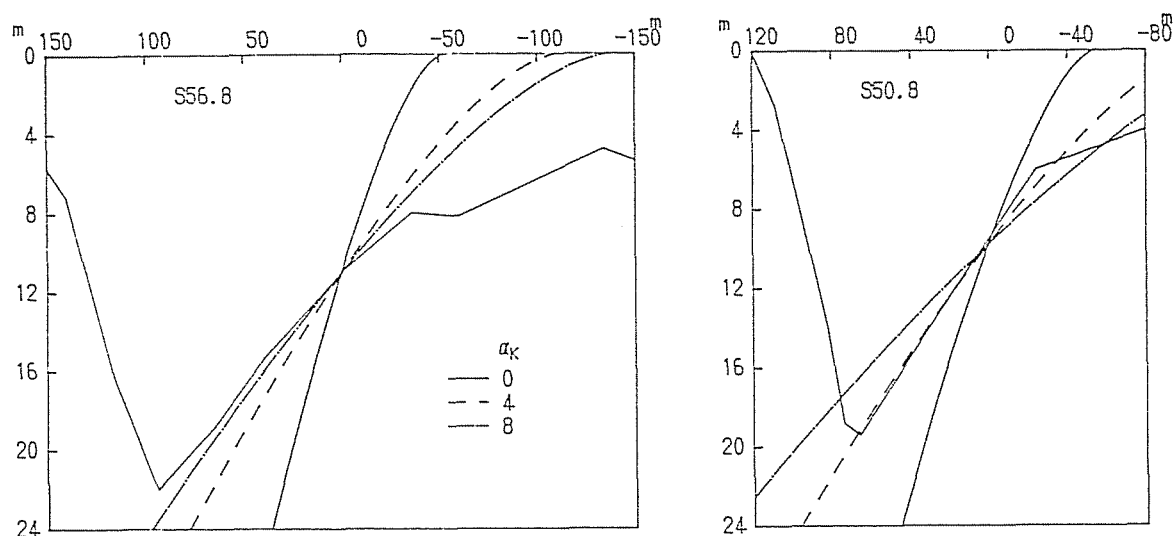


図 - 1 河床横断形の比較

2.4 石狩川への適用

前述の石狩川洪水時の主な水理量を表-1に示す。

S 56.8およびS 50.8出水に対する計算値が図-1に示されている。S 56.8の $\alpha_K = 0$ の計算値を見ると、線形理論によるものに比べてかなり実測値に近くなっているのがわかる。 α_K に値を与えると8とすると実測値と良く一致した。S 50.8の場合には $\alpha_K = 4$ とすると計算値と実測値は良く一致した。

表 - 1

	流量 m^3/s	川幅 m	水深 m	流速 m/s	I_s	τ_*	τ_{*}'	ϕ_0
50.8	6,800	200	9.75	3.3	1/3,000	7.5	2.43	18.6
56.8	1,330	300	11.0	3.4	1/2,400	10.7	2.74	16.2

2.5 考察

本理論から河床横断形について重要な推定が得られる。従来、河床形は(11)式で近似され、河床形を表すパラメーターとして M が選ばれている。実河川での調査によると M の値は例えば雨龍川では 2～8 で、 M の実測値には上限があるように思われる。本章で扱った石狩川矢白場弯曲では $M \approx 10$ である。そこで本理論で M の上限について考える。

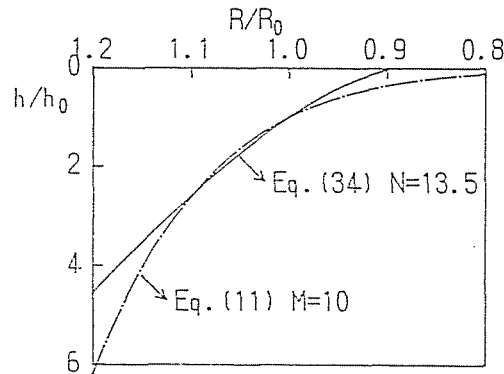


図-2 (11)式と(34)式の対応

本研究で得られた河床形(34)式と従来の(11)式を再記すると

$$\frac{h}{h_a} = \left[\frac{r}{r_a} \right]^n, \quad \frac{r}{h} \frac{dh}{dr} = M \quad (11)$$

$$\frac{h}{h_a} = \left[1 + N \left\{ \left(\frac{r}{r_a} \right)^{2/3} - 1 \right\} \right]^{3/2} \quad (34)$$

本理論と比較するために(11)式と(35)式による h/h_a の計算値が $r/r_a = 1.1$ において等しくなる M と N を対応させる。すなわち、

$$(1.1)^n = \left[1 + N \left\{ 1.1^{2/3} - 1 \right\} \right]^{3/2} \quad (35)$$

図-2 は対応する河床形の計算例である。

この様にして計算される M と水理量の関係を調べる。図-3 は、 $h_a/r_a = 0.01$, $\varphi = 20$, $\alpha_k = 0$ のときの、 M と τ_* の関係である。点線は線形解によるもので非線形解に比べてかなり大きい。

図-3 によれば、 M は τ_* と共に増加する。しかし、1つの弯曲部に着目すると必ずしもそうはならない。 h の変化に伴って h/r や φ も変化するからである。例えば、 $\varphi = 20$, $\alpha_k = 0$, $\tau_* = 0.5$ で、河床形が図-3 中の ○印の位置にあ

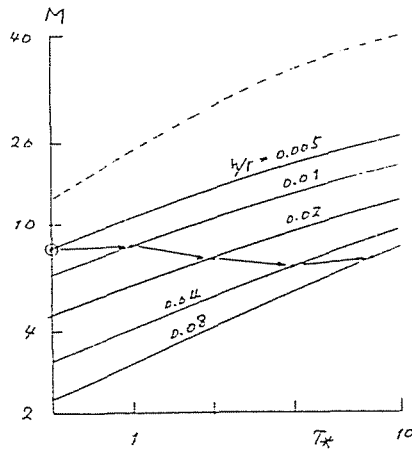


図 - 3 水理量と M の関係

ったものとする。この状態から流量が増加し φ , α_k が変化しないものとする、 M は図中の $\rightarrow$ に沿って変化することになり、 M は増加しない。この例から 1 つの弯曲部には M の上限値があることが推定される。石狩川矢臼場弯曲ではこれが 10 程度である。

参考文献

- 1) 森、岸：河道弯曲部の河床形に関する研究、水理講演会論文集、第 26 回、1981 年
- 2) 森、岸：河道弯曲部河床形状に関する Engelund 理論の改良、水理講演会論文集、第 25 回、1981 年
- 3) F. Engelund: Flow and bed topography in channel bend, ASCE, NO. 11, 1974
- 4) 池田：移動床河川の弯曲部における二次流と動的横断平衡河床について、土木学会論文集、No. 229 号、1974

第3章 山地河川蛇行流の構造¹⁾⁻⁶⁾

はじめに

山腹や斜面の崩壊などで山地河川に流入した土砂は、様々な形態を取りながら下流側に運搬される。この様な土砂供給源としての山地河川における土砂動態の解明は河川工学における重要課題の1つである。

筆者らは、薄別川（豊平川水系）支川の白水川に調査区間を設けて現地調査を行った（S 60.7/31～8/2）。調査後に集中豪雨（S 60.9.1）がありかなりの土砂移動があった。再調査を行い、多くの資料を得ることができた。

本研究は、これらのうち山地河川蛇行部の流速偏倚と流路変動に関するものである。調査結果から蛇行部において内岸側が洗掘され、外岸側に堆積する傾向が見いだされた。このときの流れの構造を明らかにするのが本章の目的である。

出水時の流れは射流と考えられたので、衝撃波の効果を調べる必要があった。Lenou⁷⁾は直線流路に一定曲率の弯曲部が接続する場合の射流の二次元線形解を求め、芦田ら⁸⁾はこの解が実験結果を良く説明することを示した。

そこで、筆者らは新たに直線流路に蛇行流路が接続する場合の解を求めた。また、Lenou が用いた基礎式には底面摩擦が含まれていないが、筆者らは基礎式にこれを加えた。この解の衝撃波は流下とともに減衰する。実験結果と比較すると理論値は実測値のおおよそを説明するが、実測値の衝撃波は理論値より早く減衰し、速やかに周期成分に一致することがわかった。

本研究では、3.4～3.5節で衝撃波の減衰機構を調べ、3.7節で周期成分に着目して横断流速分布と流路変動の関係を調べる。

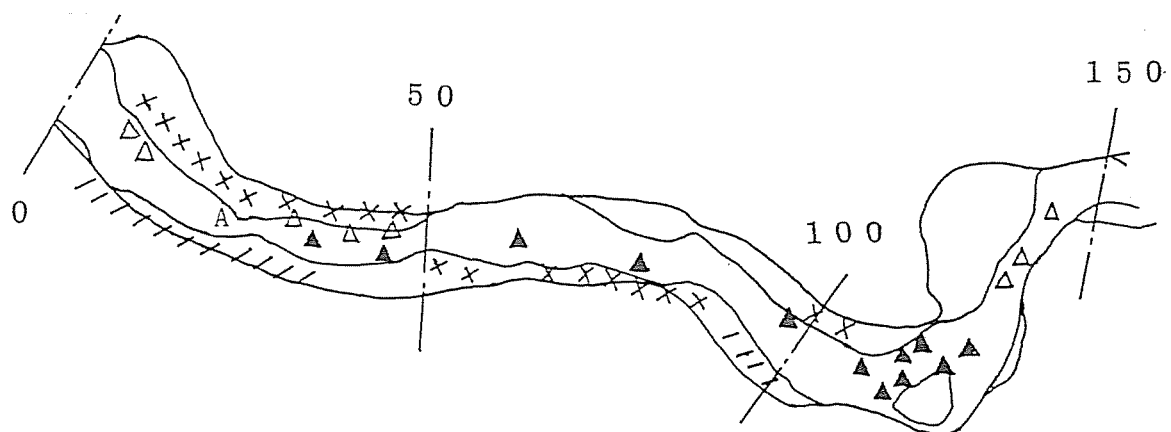


図 - 1 xxx: 河岸侵食、Δ: 河床礫侵食、///: 河岸堆積、▲: 河床礫堆積。

3.1 現地調査

調査区間は400mで平均河床勾配は 1/23 である。図-1は調査区間のうち本研究が対象とする下流部の流路平面図である。流路の平面的変化の判定は出水前後に撮影された写真の比較によって行った。流路に沿って4m毎に左右岸および上流側を写真撮影した。これにより河岸構成礫および水面に突出した礫の移動や堆積が判定できた。写真-1はその1例である。

図-1中に得られた礫の移動および堆積状況を示した。図から、流路の蛇行部において内岸側が洗掘され、外岸側に堆積する傾向が認められる。この傾向は、調査区間の他の蛇行部でも認められた。本研究では、この傾向が著しい下流部100mを対象とする。

出水中に8回の流量観測を行った。これ以前の小出水における流量観測結果と併せて水位-流量曲線を作り、ピーク流量を $43\text{m}^3/\text{sec}$ とした。



写真1. e: 洗掘された礫、d: 堆積した礫

3.2 射流蛇行流の二次元線形理論

二次元浅水流式は、 (s, n) 座標系を用いて書くと(1)~(3)式.

$$U \frac{\partial U}{\partial s} + V \frac{\partial U}{\partial n} + \frac{UV}{r} = -g \frac{\partial H}{\partial s} - \frac{\tau_s}{\rho h} \quad (1)$$

$$U \frac{\partial V}{\partial s} + V \frac{\partial V}{\partial n} - \frac{U^2}{r} = -g \frac{\partial H}{\partial n} - \frac{\tau_n}{\rho h} \quad (2)$$

$$\frac{\partial U h}{\partial s} + \frac{\partial r V h}{r \partial n} = 0 \quad (3)$$

ここに、 τ_s 、 τ_n : s および n 方向の河床剪断力である. 流路の平面形は sine-generated-curve である. s_0 軸の最大曲率半径を R と書くと

$$R/r_0 = \cos(k s_0)$$

ここで、

$$U = U_m(1+u), \quad V = U_m v, \quad h = h_m(1+\xi) \quad (4)$$

とおく. 添字 m は流路全体の平均値を表す.

(4)式を(1)~(3)式に代入し、 $|u|, |v|, |\xi| \ll 1$ として、これらの二次以上の項を無視すると線形式(5)~(7)が得られる.

$$F^2 u_s + \xi_s = -\gamma (n e^{i m s} + 2u - \xi) \quad (5)$$

$$F^2 v_s - F^2 e^{i m s} + \xi_n = -\gamma v \quad (6)$$

$$u_s + \xi_s + v_n = 0 \quad (7)$$

ここに、 $\gamma = R/h_m \cdot I_0$ 、 I_0 : 水路中央の河床勾配. 添字 s, n は、 $s_* = s_0/R$, $n_* = n/R$ による偏微分を表す. 実数部を解とする. 上式において $I_0 \rightarrow 0$ とおくと Lenou の基礎式に一致する.

$s_* = 0$ で $v = u = \xi = 0$ の境界条件で(5)~(7)式をラプラス変換すると

$$\alpha F^2 \hat{u} = -\alpha \hat{\xi} - \gamma \left(\frac{n}{\alpha - i m} + 2\hat{u} - \hat{\xi} \right) \quad (8)$$

$$\alpha F^2 \hat{v} - \frac{F^2}{\alpha - i m} = -\hat{\xi}_n - \gamma \hat{v} \quad (9)$$

$$\alpha \hat{u} + \alpha \hat{\xi} + \hat{v}_n = 0 \quad (10)$$

ここで、 $\hat{}$ は Laplace 変換を表す.

(8)~(10)式から $\hat{u}$, $\hat{v}$ を消去すると

$$\hat{\xi}_{nn} - c^2 \hat{\xi} + \beta n_* = 0 \quad (11)$$

ここに、

$$c^2 = \frac{\alpha(\alpha F^2 + \gamma) \{ \alpha(F^2 - 1) + 3\gamma \}}{\alpha F^2 + 2\gamma} \quad (12)$$

$$\beta = \frac{\alpha \gamma (\alpha F^2 + \gamma)}{(\alpha F^2 + 2\gamma)(\alpha - i m)} \quad (13)$$

(11)式の一般解は、

$$\hat{\xi} = A_1 \exp(cn_*) + A_2 \exp(-cn_*) + \frac{\beta}{c} n_* \quad (14)$$

(14)式を(9)式に代入して $n_* = \pm n_B$ ($n_B = B/(2R)$) で $\phi = 0$ の境界条件で A_1 、 A_2 を定めると、

$$\hat{\xi} = \left[\frac{F^2}{\alpha - i m} - \frac{\beta}{c^2} \right] - \frac{\sin(cn_*)}{c \cosh(cn_B)} + \frac{\beta}{c^2} n_* \quad (15)$$

これを逆変換すると

$$\begin{aligned} \xi = & \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{2 \sin \lambda}{(-1)^j (2j-1) \pi} \frac{2}{\sqrt{K_j}} \right. \\ & \cdot \sum_{l=1}^3 \exp(\alpha s_*) \frac{1}{\alpha - i m} \left(F^2 - \frac{\gamma}{\alpha(F^2 - 1) + 3\gamma} \right) \frac{1}{Y} \Big]_{\alpha = \alpha_{jl}} \\ & + e^{i m s} \left[\frac{\gamma}{\alpha(F^2 - 1) + 3\gamma} \left(n_* - \frac{\sinh(cn)}{c \cosh(cn_B)} \right) + F^2 \frac{\sinh(cn_*)}{c \cosh(cn_B)} \right]_{\alpha = i m} \end{aligned} \quad (16)$$

$$\text{ここに、 } \lambda = (2j-1) \frac{\pi n_*}{2 n_B}, \quad K_j = \left[\frac{(2j-1)\pi}{2 n_B} \right]^2,$$

$$Y = \frac{1}{\alpha} + \frac{F^2}{\alpha F^2 + \gamma} - \frac{F^2 - 1}{\alpha(F^2 - 1)} + \frac{F^2}{\alpha F^2 + 2\gamma} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial c^2}{\partial \alpha}$$

また、 α_{jl} ($l=1, 2, 3$)は、 α に関する三次方程式

$$F^2(F^2 - 1)\alpha^3 + \gamma(4F^2 - 1)\alpha^2 + (K_j F^2 + 3\gamma)\alpha + 2\gamma K_j = 0$$

の3根。同様にして、

$$\begin{aligned} u = & \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{2 \sin \lambda}{(-1)^j (2j-1) \pi} \frac{2}{\sqrt{K_j}} \right. \\ & \sum_{l=1}^3 \exp(\alpha s_*) \frac{\gamma - \alpha}{\alpha F^2 + 2\gamma} \frac{1}{\alpha - i m} \left(F^2 - \frac{\gamma}{\alpha(F^2 - 1) + 3\gamma} \right) \frac{1}{Y} \Big]_{\alpha = \alpha_{jl}} \\ & + \frac{e^{i m s}}{\alpha F^2 + 2\gamma} \left[\frac{\gamma(\gamma - \alpha)}{\alpha(F^2 - 1) + 3\gamma} \left(n_* - \frac{\sinh(cn_*)}{c \cosh(cn_B)} \right) \right. \\ & \left. + (\gamma - \alpha) F^2 \frac{\sinh(cn_*)}{c \cosh(cn_B)} - \gamma n_* \right]_{\alpha = i m} \end{aligned} \quad (18)$$

$$\begin{aligned}
& + \left[\frac{\exp(\alpha s)}{F^2} \frac{\gamma}{\alpha - i m} \left(\frac{\gamma - \alpha}{\alpha (F^2 - 1) + 3\gamma} - 1 \right) n_* \right]_{\alpha = -2\gamma/F^2} \\
v = & \sum_{j=1}^{\infty} \left[\frac{\cos \lambda}{n_s} \frac{2}{\sqrt{K_j}} \right. \\
& \cdot \sum_{l=1}^3 \left\{ -\exp(\alpha s_*) \frac{1}{\alpha F^2 + \gamma} \frac{1}{\alpha - m} - \left(F^2 - \frac{\gamma}{\alpha (F^2 - 1) + 3\gamma} \right) \right\} \frac{1}{Y} \right]_{\alpha = \alpha_{jl}} \\
& + e^{i m s} \left[\frac{1}{\alpha F^2 + \gamma} \left(F^2 - \frac{\gamma}{\alpha (F^2 - 1) + 3\gamma} \right) \left(1 - \frac{\cosh(c n_*)}{c \cosh(c n_s)} \right) \right]_{\alpha = i m}
\end{aligned} \tag{19}$$

3.3 射流蛇行流の実験

直線部に蛇行部が接続する幅12cmの水路を作った(図-2)。蛇行部の平面形は波長1.2m、最大偏角28°の sine-generated-curve である。側壁はアクリル板、水路床は耐水ベニヤである。実験条件は流量 $Q=1.19\text{l/sec}$ 、 $h_0=1.54\text{cm}$ 、 $F=1.65$ 、 $I_0=0.0142$ である。

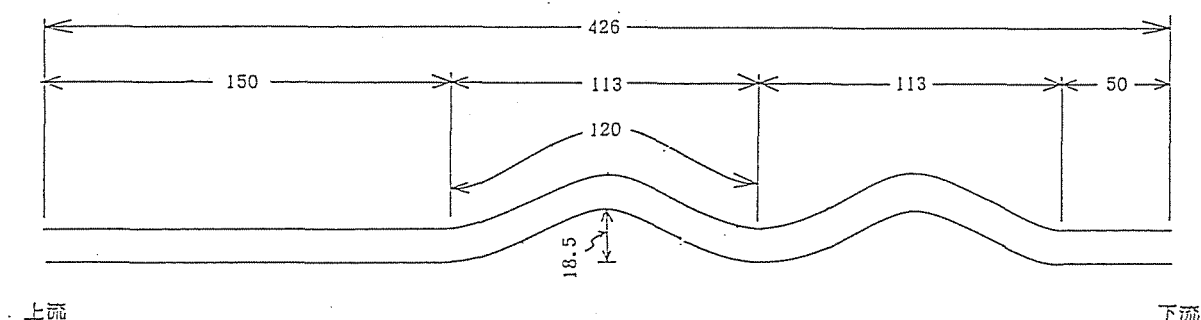


図-2 実験水路平面図

図-3, 4, 6に水深の理論値と実験値の比較を示した。

図-3は $s_0=0\sim 120\text{cm}$ の水位を鳥瞰図的に見たものである。 $s_0=0\sim 30\text{cm}$ の上流域では理論値(a図: $I_0=0$, b図: $I_0=0.0142$)と実験値(c図)の傾向は一致している。蛇行部入口右岸で発生した正の衝撃波(以後、この衝撃波を S_1 で表す。図中の点線は S_1 の立ち上がり点)は、15cm付近で左岸に達する。この地点より約10cm下流で高水深の S_1 が左岸に達して強い反射が起こる(この地点をR点と呼ぶことにする)。

これより下流では理論値と実測値の違いが大きい。 S_1 はR点で反射後2列の波

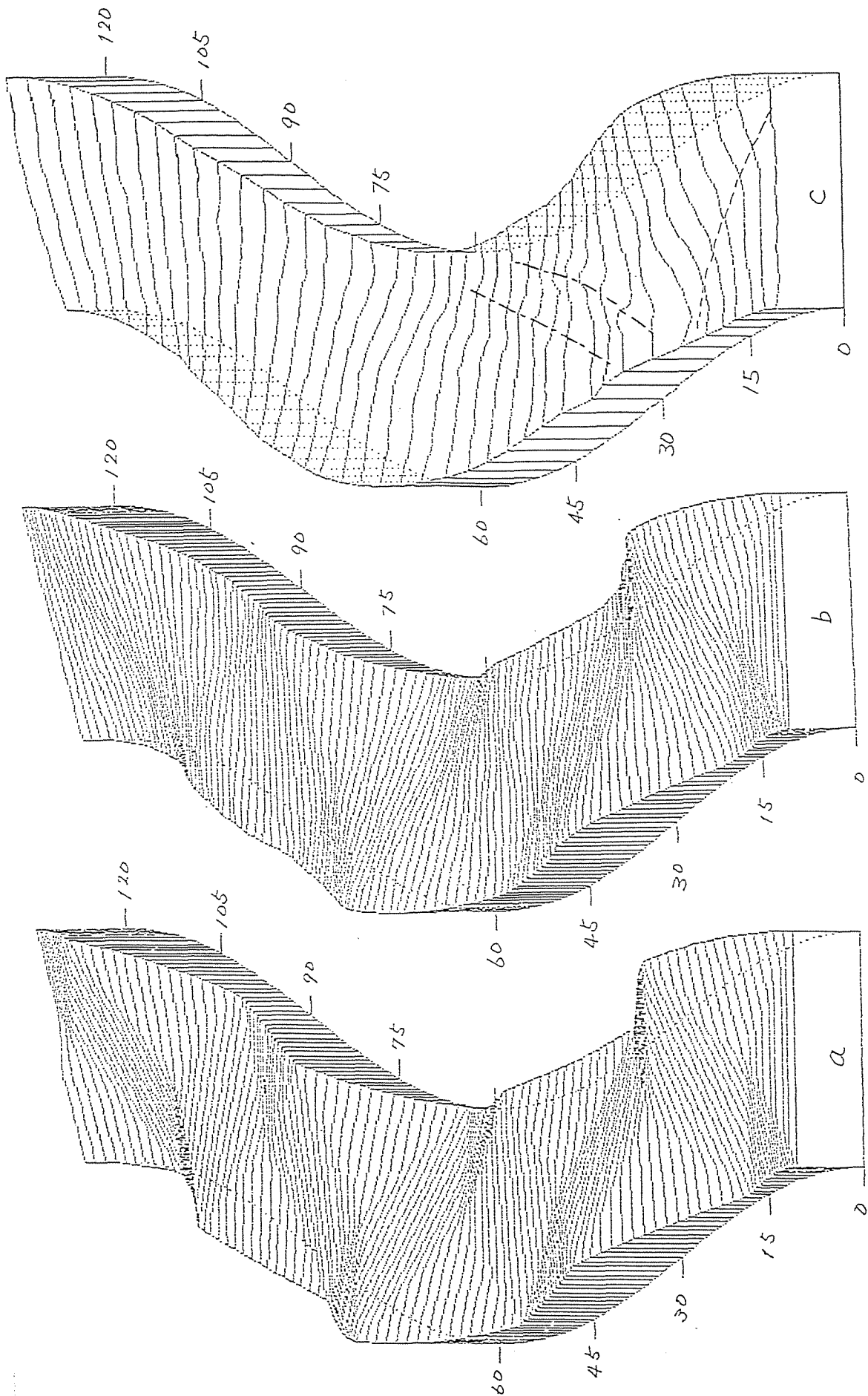


図 - 3 理論値と実測値の比較 (鳥観図)

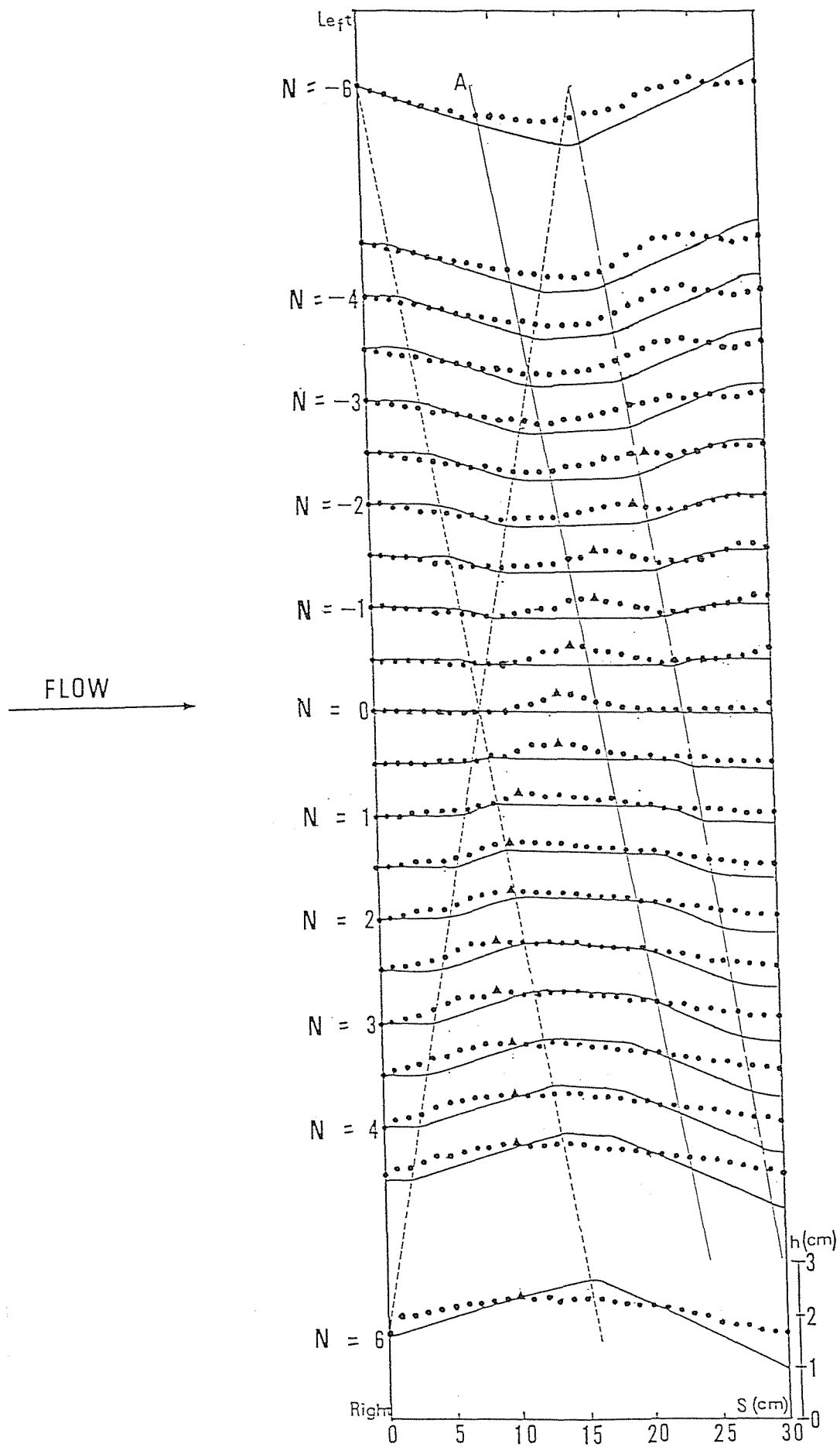


図 - 4 水位の理論値と実測値の比較 ($s_0 = 0 \sim 30 \text{ cm}$ の縦断水位)

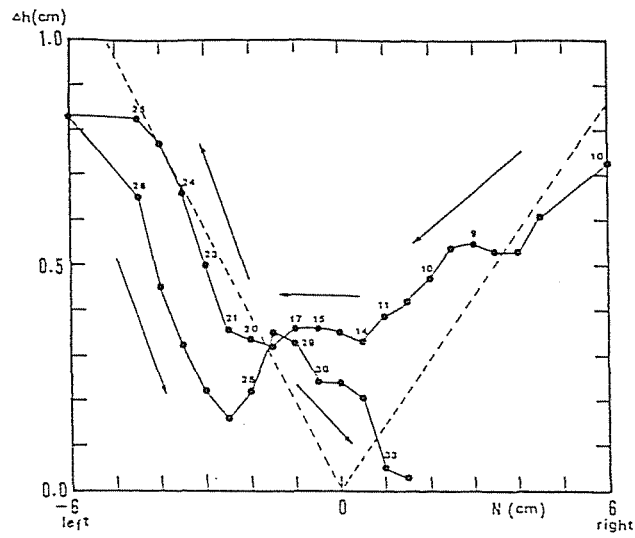


図 - 5 Δh の変化

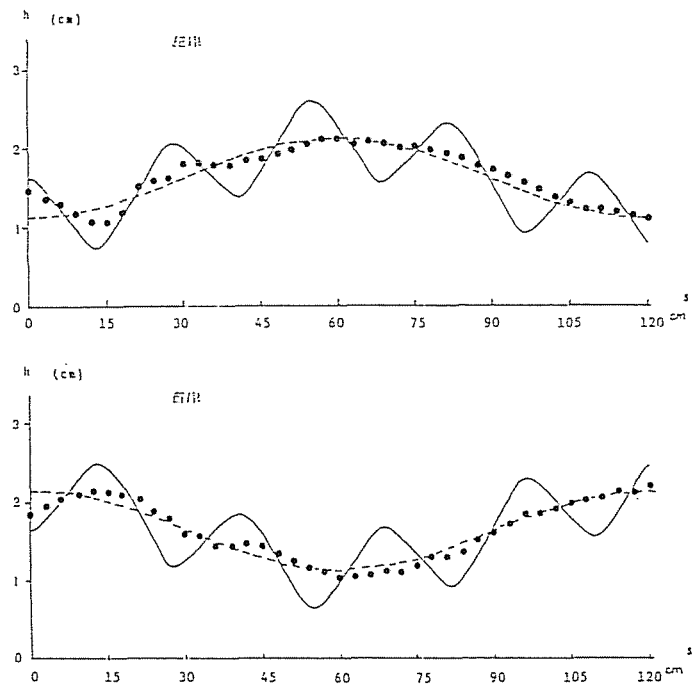


図 - 6 水位の理論値と実測値の比較 ($s_0 = 0 \sim 120 \text{ cm}$ の縦断水位)

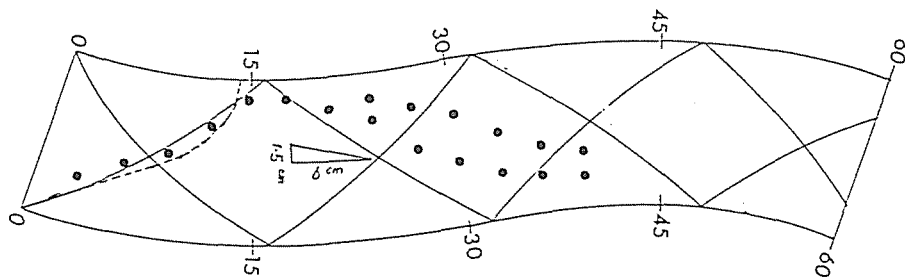


図 - 7 衝撃波の立ち上がり点、実線：理論値、●：実測値

列（一点鎖線）に変形する。この波列は流下とともに減衰し、60cm付近でほとんど消滅する。理論値（b図）における衝撃波の減衰は、実験値を説明できるほどではなく、 $s_0 = 0 \sim 60\text{cm}$ では低面摩擦の効果は小さい。

図-4は、実測値と理論値の対応がよい $s_0 = 0 \sim 30\text{cm}$ の水位縦断変化を細かくみたものである（実線：理論値（ $I_a = 0$ ）、黒丸：実験値）。両者は比較的よく一致している。しかし、 S_1 の発生点を細かく見ると、理論値より少し上流で水位上昇が始まっている。この水位上昇は水路中央付近では実測値よりかなり大きくなっている。更に、左岸に至ると上昇量が大きく、且つ、上昇範囲がかなり上流におよんでいる。

図-5は S_1 による水深増加高 Δh のプロットである[#]。図中の矢印は S_1 の伝播方向であり、数字は最大水深点の s の値である（矢印の方向に s の値が同じ場合には省略）。図中の点線は理論値（ $I_a = 0$ ）である。反射前に水路中央において理論より大きい水位上昇がある。反射後は減衰、消滅する。

図-6は S_1 の立ち上がりの位置とR点より下流における波列の crest の位置を示したものである（実線：理論値、黒丸：実験値）。R点より上流では理論値と実測値はよく一致している。しかし、R点より下流に発生する波列が水路となす角度は Mach 角よりかなり小さい。

図-7は $s_0 = 0 \sim 120\text{cm}$ の左右岸水深である。R点より上流では理論値（実線 $I_a = 0$ ）は実験値（黒丸）の傾向を表している。R点より下流では微小な振動が継続的に見られるが、 S_1 はほとんど消滅し、周期解（点線）にほぼ一致する。

これらの図からわかるように理論値と実測値は次の点が異なる。

- 1) R点上流における S_1 による水位上昇は実測値の方が理論より大きい。
- 2) 蛇行部入口内岸に大きい水位上昇があり、内岸の負の衝撃波は充分に発達しない。

[#] Δh はある n における正の衝撃波の最大水深（図-中の●地点） h_a と衝撃波の立ち上がり地点の水深 h_s の差である。R点より上流の h_s を次の様に与えた。
 $n > 0$ では蛇行入口の水深、 $n < 0$ では正のマッハ波通過点の水深、R点より下流では正のマッハ波の反射波の通過点の水深（近似的に負のマッハ波と平行な直線とした。図-4中の一点鎖線）。

3) S_1 はR点での反射により変形し、減衰、消滅する。

2節に述べた理論は二次元線形解である。従って、三次元効果と非線形効果が考えられる。ところで、高速空気流の分野では、衝撃波と境界層の相互干渉(SBI)が流れの三次元構造に深く関わっていることが知られている。そこで本研究では、次節で二次元場での非線形効果を調べ、3.5節でSBI効果を調べる。

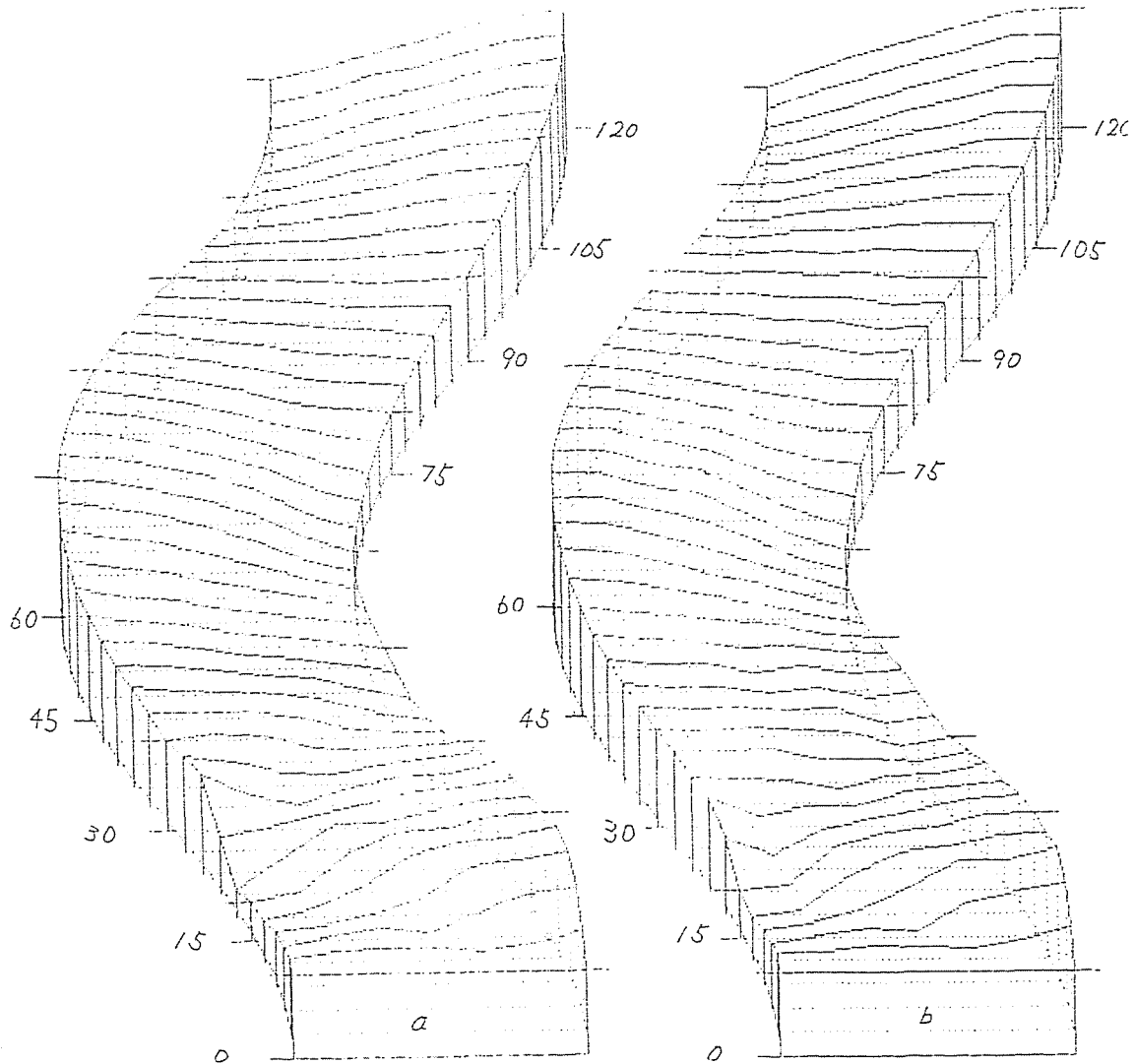


図 - 8 水位鳥観図 (二次元数値解)

3.4 二次元場における非線形効果

数値計算で調べる。基礎方程式は二次元浅水流式である。非定常項を残して時間発展法により定常解を求める。流れは射流なので保存形を用いる。

$$\frac{\partial r * U}{\partial t} + \frac{\partial h E}{\partial s_0} + \frac{\partial r * h F}{\partial n} + h G = 0$$

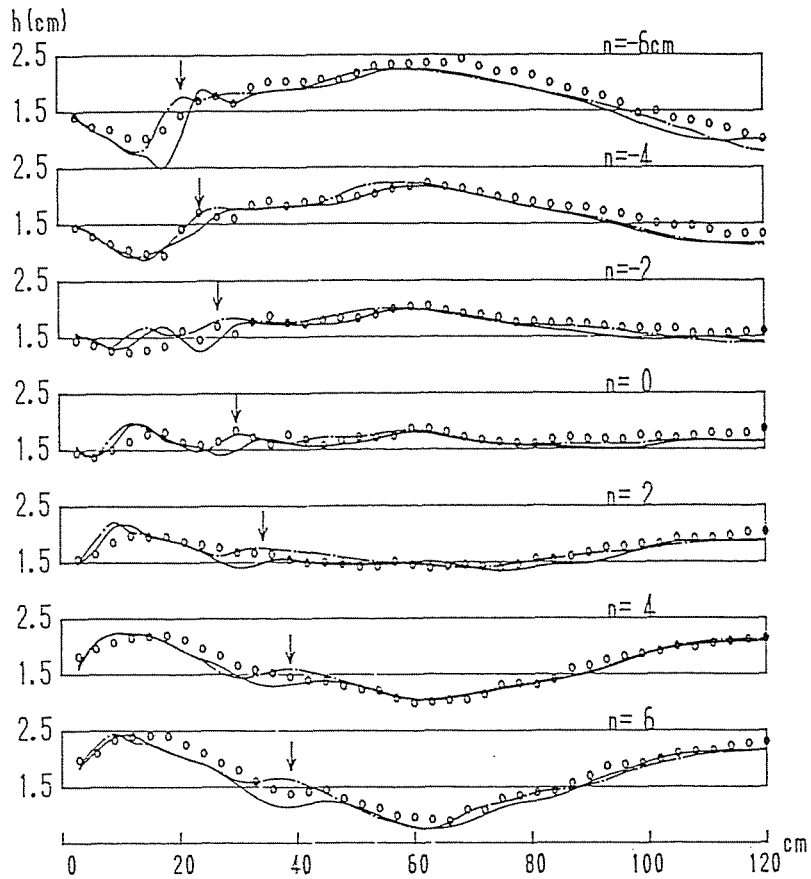


図-9 縦断水位の計算値（二次元数値解）と実測値の比較

ここに、
$$U = \begin{vmatrix} h & U \\ h & V \\ h & \end{vmatrix}, \quad E = \begin{vmatrix} U^2 + g h / 2 - \sigma_s / \rho \\ U V - r_* \tau_{rs} / \rho \\ U \end{vmatrix},$$

$$F = \begin{vmatrix} U V + X - \tau_{rs} / \rho \\ V^2 + g h / 2 - \sigma_r / \rho \\ V \end{vmatrix},$$

$$G = \begin{vmatrix} U V / r_a - g I_a - \tau_{rs} / \rho r_a + r_* f_{r,q} U / h \\ - U^2 / r_a - g h / 2 r_a + \sigma_s / \rho + r_* f_{r,q} V / h \\ 0 \end{vmatrix}$$

$$r_* = r / r_a, \quad q = \sqrt{U^2 + V^2}$$

数値解法には MacCormack の陽的 time split 法⁹⁾を用いる。二次精度差分である。
 ν_t は (21) 式で与える。

$$\nu_t = \frac{\kappa \sqrt{g h_a I_a}}{6 U_a} U h \quad (21)$$

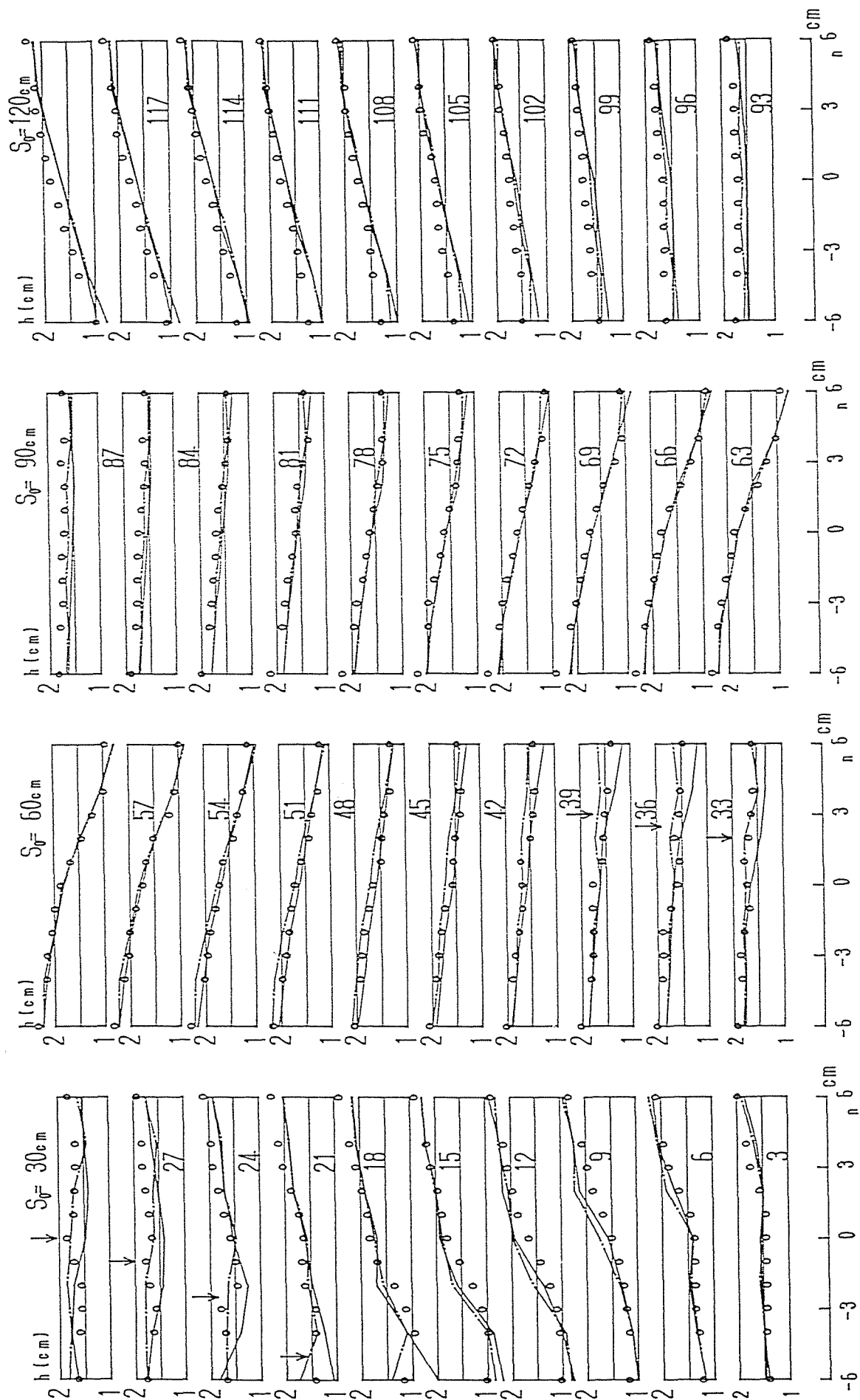


図 - 10 横断水位の計算値（二次元数値解）と実測値の比較

図 - 8 a は水位の計算値を鳥瞰図的に見たものである。

図 - 9、10 は水位の計算値（実線）と実測値（○）の比較である。図 - 9 は縦断水位、図 - 10 は横断水位である。

これらの図から二次元的な非線形効果を考慮すれば、前節で指摘した線形解と実測値の違いのうち、1) の S_1 による水位上昇や反射後の速やかな減衰が再現できることがわかる。しかし、2) や反射による変形についてはこれだけでは説明できない。

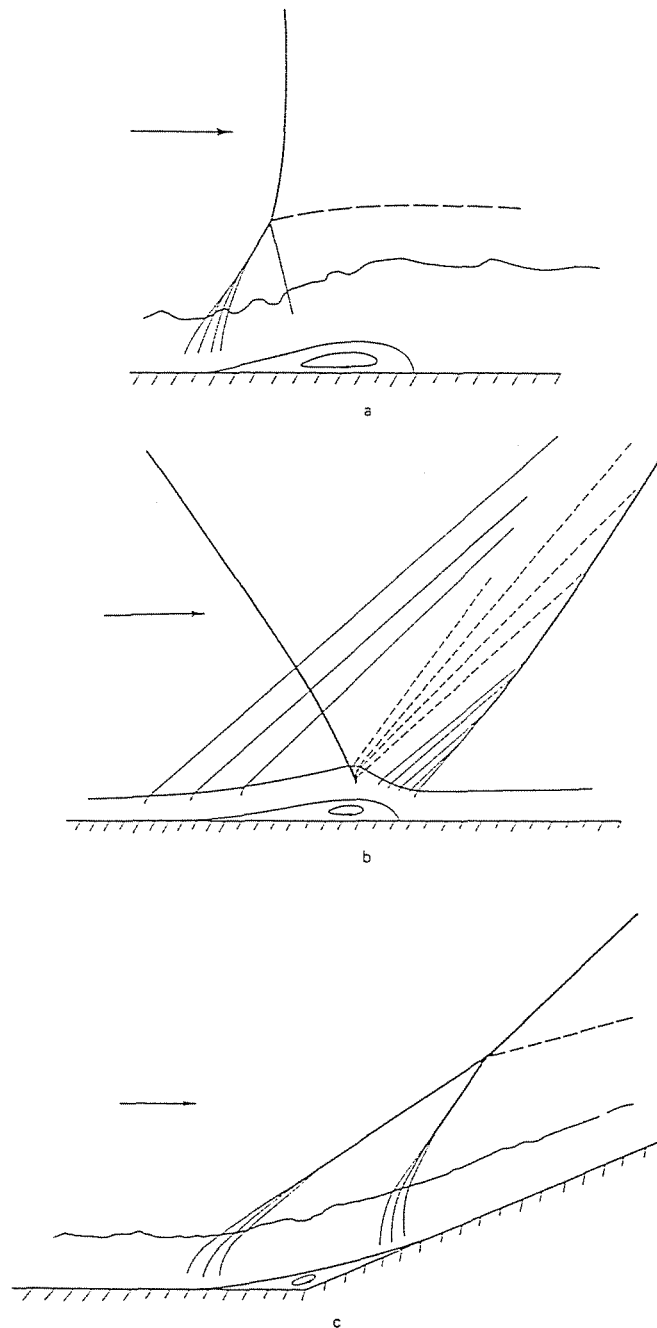


図 - 11 二次元 S B I の典型的な例

3.5 衝撃波と境界層の相互干渉 - SBI

図-11に示す様に、衝撃波により境界層の圧力が急増するとその影響が境界層を通じて上流に伝わる。この影響が大きい場合には、衝撃波自体も変形する。“Shock Wave/(Turbulent-)Boundary Layer Interaction” (ここでは略してSBI)と呼ばれ高速空気流の分野で盛んに研究されている。SBIは様々な場で観察されている。二次元場における典型的な例として図-11の3つが示されている¹⁰⁾。

(a)では、垂直衝撃波の入射点の上流に高圧部が伝達し、これに伴って圧縮波が生ずる。この圧縮波が重なって衝撃波全体が強められる。(b)は、斜め衝撃波が境界層に入射した場合である。(a)と同様に衝撃波の入射点上流に圧縮波が生ずる。図の様に流れが剥離する場合には下流部に膨張波(点線)が発生し、更に下流の再付着点で再び圧縮波が発生する。これらが複合して反射波を形成する。(c)は、境界に曲がりがある場合で、流れの構造は(b)に類似する。

図-12は、三次元SBIの例である¹¹⁾。平板上に置いたクサビ(a図)の先端から衝撃波が発生する。b図は表面流線の実測例である。図中に示した非粘性解

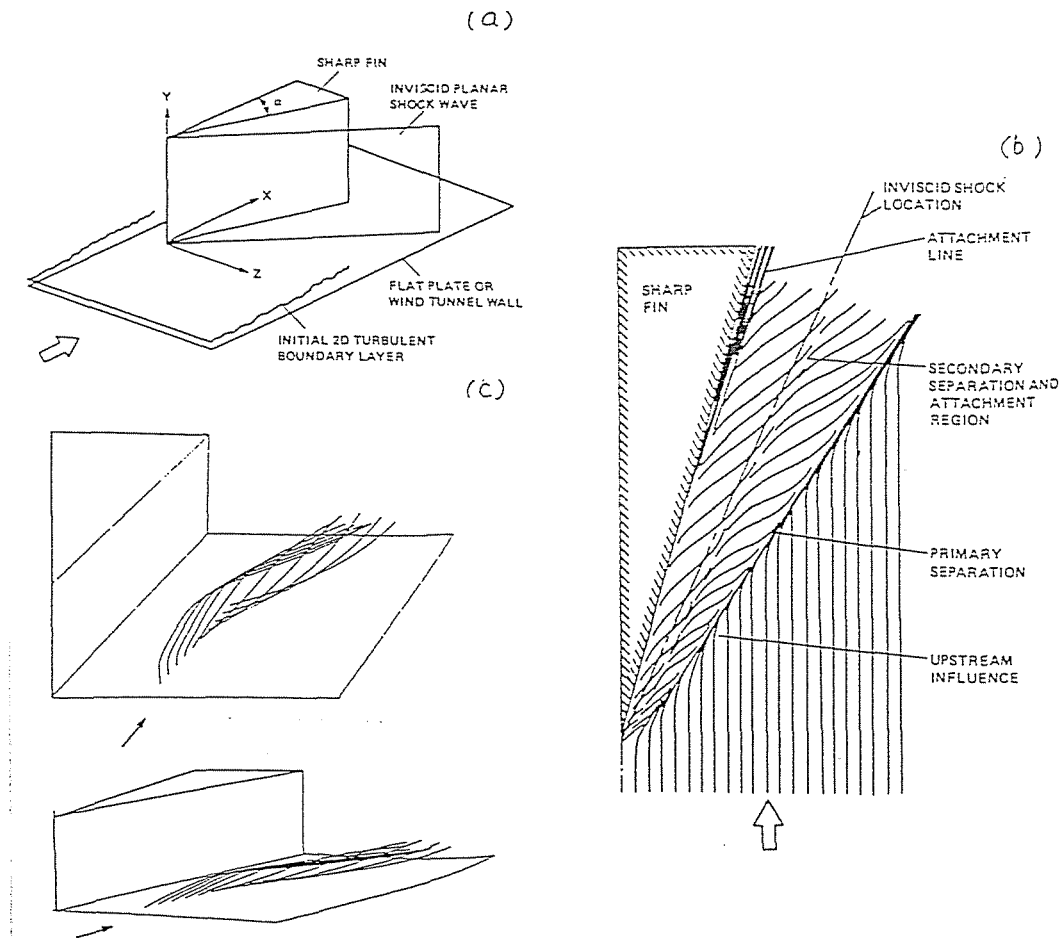


図-12 三次元SBIの例

の衝撃波線の位置より上流に衝撃波の影響が及んでいる。影響域の上流端で流線が右に曲げられている。この実験では流れが剥離してc図の様な左周りのラセン流の発生が観察されている。この様に境界層上に斜め衝撃波が伝わると直線流でもラセン流が発生する。

Prandtle によると二次流の発生機構は2種類ある。上述の例は第1に属するものと考えることができる。 $|V| \ll U$ の場合のVの運動方程式を簡単に

$$U \frac{\partial V}{\partial x} \doteq - \frac{\partial P}{\rho \partial y} \quad \rightarrow \quad \frac{\partial V}{\partial x} = - \frac{P_y}{\rho U}$$

と書くと、 $P_y \neq 0$ であれば二次流が成長する。更に、Uや P_y がz方向に変化するとラセン流が発生する。常流における典型的な P_y は側壁の曲がりにより生ずる。射流ではななめ衝撃波が P_y の1つの成因となる。上記の二次流の発生はこのように説明できる。

以上のSBIに着目して射流蛇行流の構造を見ることにする。

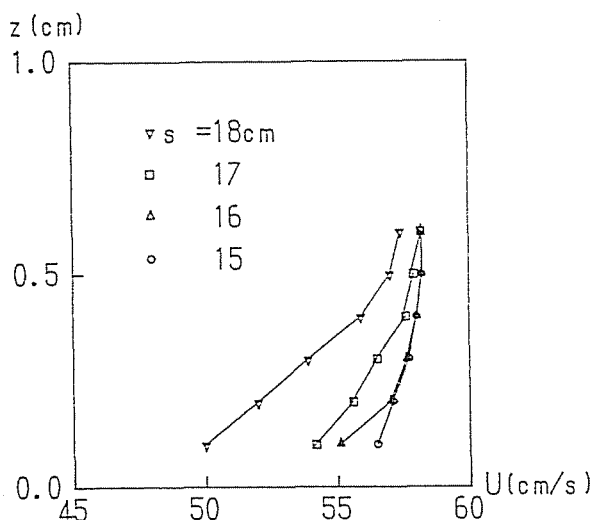


図-13 R点上流のU-分布の変化

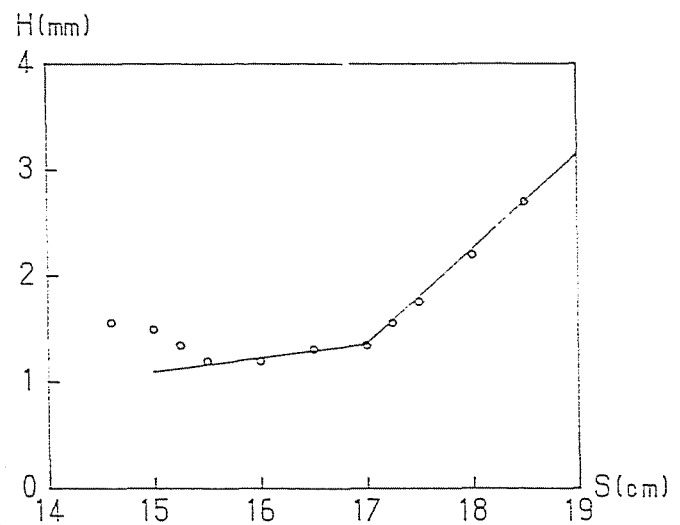


図-14 R点上流の水位変化

3.5.1 左岸R点上流の水位

R点近傍には波長が1～2cm程度の水面波が上、下流に振動しているのが観察される。これに対応して、R点上流の $s_0=15$ cm付近の側壁に付着した微小な水泡が上、下流に1cm程度の振幅で振動しているのが観察された。これはR点の流況が上流に伝播していることを示している。

図-13は、 $s_0=15\sim 18$ cm、左岸から2cm地点のU-分布の測定値である。下流に

向かって河床付近の流速が減少している。S₁到達点近傍の17cmから18cmにかけての減少が著しく大きい。表-1は、この区間のs方向運動方程式の各項の大きさを示したものである。圧力分布には静水圧を仮定している。V成分は小さいので無視した。W成分は比較的大きな値をもつ下流部のみ示した。下流ほど運動方程式の残差が大きくなっている。

図-14は、この間の水位変化である。s₀ = 17cm を境に水面勾配が急変している。この地点に働く圧力の非静水圧分 $\hat{p}$ を以下概算する。Wの運動方程式を次式で近似する。

$$U \frac{\partial W}{\partial s} = - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \hat{p}}{\partial z}$$

水面勾配急変点の上、下流の水位を図中の実線で近似すると、水面勾配は上流側で -1/83、下流側で -1/11。図-13から水面付近のU = 58cm/s とすると、水面のWは上流側で 0.7cm/s、下流側で 5.3cm/s。Wの水深平均値をこれらの 1/2

表-1.1 s₀ = 15.5cm (単位はcm-sec)

z	$U \frac{\partial U}{\partial s}$	+	$g \frac{\partial H}{\partial s}$	+	$W \frac{\partial U}{\partial z}$	-	$\nu_t \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	=	0
5mm	0		-15.1				7.4		-7.7
4	0		-15.1				5.6		-9.5
3	-5.4		-15.1				9.3		-11.2
2	-5.3		-15.1				24.1		3.7

表-1.2 s₀ = 16.5cm (単位はcm-sec)

z	$U \frac{\partial U}{\partial s}$	+	$g \frac{\partial H}{\partial s}$	+	$W \frac{\partial U}{\partial z}$	-	$\nu_t \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	=	0
5mm	-16.2		27.8				3.7		9.3
4	-16.2		27.8				18.5		24.1
3	-58.6		27.8				0		36.8
2	-72.7		27.8				33.3		-17.6

表-1.3 s₀ = 17.5cm (単位はcm-sec)

z	$U \frac{\partial U}{\partial s}$	+	$g \frac{\partial H}{\partial s}$	+	$W \frac{\partial U}{\partial z}$	-	$\nu_t \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	=	0
5mm	-48.5		91.1		6.8		11.1		60.5
4	-90.5		91.1		13.3		32.4		46.3
3	-134.6		91.1		15.3		-5.6		-33.8
2	-181.6		91.1		-12.9		11.1		-67.3

とする。 $\Delta z \doteq h \doteq 1 \text{ cm}$, $\bar{U} = 55 \text{ cm/s}$, $\Delta s = 1 \text{ cm}$ とする。これらを上式に代入すると、河床と水面の β の差 $\Delta \beta$ は、

$$\Delta \beta / \rho = 1.3^{(100)} \bar{U} = 127 \text{ cm}^2/\text{s}^2$$

である。この概算値は表-1.3の残差と同程度である（ただし、 $\Delta s \doteq 1 \text{ cm}$ とする）。

壁付近における圧力の増加、これに伴う上流域の主流速の著しい減少はSBIの大きな特徴である¹²⁾。以上から本実験においてもR点において強いSBIが発生し、R点の流況が上流側に伝わったものとする。

以下、R点におけるSBI効果を検討する。

乱流境界層と衝撃波の相互干渉において剥離がない場合（弱いSBI）は解析的取扱が行われている。本実験では剥離泡は確認できなかったが、ピトー管では確認できない程度に微小であることも考えられ、有無ははっきり言えない。従って、弱いSBIの可能性はあるが、90°に交わる壁面上への衝撃波の入射であることから両壁面上のSBIが重合してその効果が強められる。また、自由水面により複雑な三次元流況となっている。そこで、ここでは数値解析により以下の簡単なモデルを用いてSBIの効果を見ることにする。

SBIの効果を低面摩擦の増加で表すことにして $\bar{\tau}_b$ を次式で与える。

$$\bar{\tau}_b = \bar{\tau}_{eq} + (\bar{\tau}_{ub} - \bar{\tau}_{eq}) \exp \left[-\frac{S_0 - S_K}{\lambda_b h} \right] \quad (22)$$

ここに、

$$\bar{\tau}_{eq} = \bar{\tau}_a \left[1 + \gamma \frac{I_b}{I_a} \exp \left(-\frac{|\Delta n|}{\lambda_u h} \right) \right]$$

$$I_b(S_0) = \int_0^\infty -\frac{h_s + |h_s|}{2} \exp \left(-\frac{S_b}{\lambda_u h} \right) d\frac{S_b}{h}, \quad h_s = \frac{\partial h}{\partial S_b} (S_0 + S_b),$$

Δn : 側壁からの距離。 S_b : S_0 からの流下距離。

上式にはSBI効果の空間的な広がりに関して次の3つの要素が含まれている。

第1は、すでに述べた圧力の上流伝播効果で I_b に関する項で表している。

第2は、 $S_0 = S_K$ で発生した衝撃波による擾乱が下流に伝播することによるもので(22)式右辺第2項で表している。 $\bar{\tau}_{ub}$ は $S_0 = S_K$ での $\bar{\tau}$ 。これは渦動粘性係数の履歴効果を表すための relaxation model¹³⁾の応用である。

第3は、これらの作用が横断方向については側壁で最も大きいことを表したものである。

λ_u , λ_v は空気流における研究から類推すると1～3程度と考えらる。本研究では $\lambda_u = \lambda_v = 2$ とした。また、 $\gamma = 0.1$, $\lambda_v = 5$ とした。

得られた計算値を図-9bおよび図-10, 11中の一点鎖線で示す。

図-9bは、水位を鳥観図的にみたものである。R点上流に注目すると、SBIを考慮しないa図に比べてかなり実測値に近づいている。このことは、図-10, 11の水位比較図に明瞭である。

R点より下流では図-10, 11中に矢印を付した擾乱の発達にSBIの影響が現れている。この擾乱は図-6のR点下流の波動に対応しており、3.3章で指摘した線形解と実測値の違いのうち3)を説明するものである。右岸で反射後この擾乱は速やかに減衰する。この点も計算値と実測値でよく一致している。

以上のことから線形理論と実測値の違いの2), 3)はSBIの効果によると判断できる。

3.5.2 ラセン流の発生とラセン流による運動量輸送

図-15に流向の偏角の実測値を示した。図-16に流路平面形との対応を示した。図-17は ラセン流の強度 $\Delta\theta$ (= 深さ方向における偏角の最大と最少の差)のコンター(実測値)を示したものである。これらのラセン流の分布形や発達状況は常流の場合と以下の点で異なる。

常流では、直線部から弯曲部に入ると横断面内にほぼ一様にラセン流が発達する。このときの河床と水面の二次流の強度は同程度である¹⁴⁾。これは流れが楕円型であることによる。これに対して図-17ではラセン流は最大水深点(図中の●)に沿って発達している。また、図-15を見ると、 $s_0=0\sim30\text{cm}$ のラセン流の発生域では主として河床付近で二次流が発生している。これらのことから本実験で測定された二次流は前述の三次元SBIの例から類推して、衝撃波によつて誘起されたものと推測される。

図-15には $s_0=60\text{cm}$ 付近にもR点上流と類似のラセン流が見られる。この点について考察する。

射流弯曲部の外岸側には、図-11(c)型の衝撃波が発生する。しかし、本実験

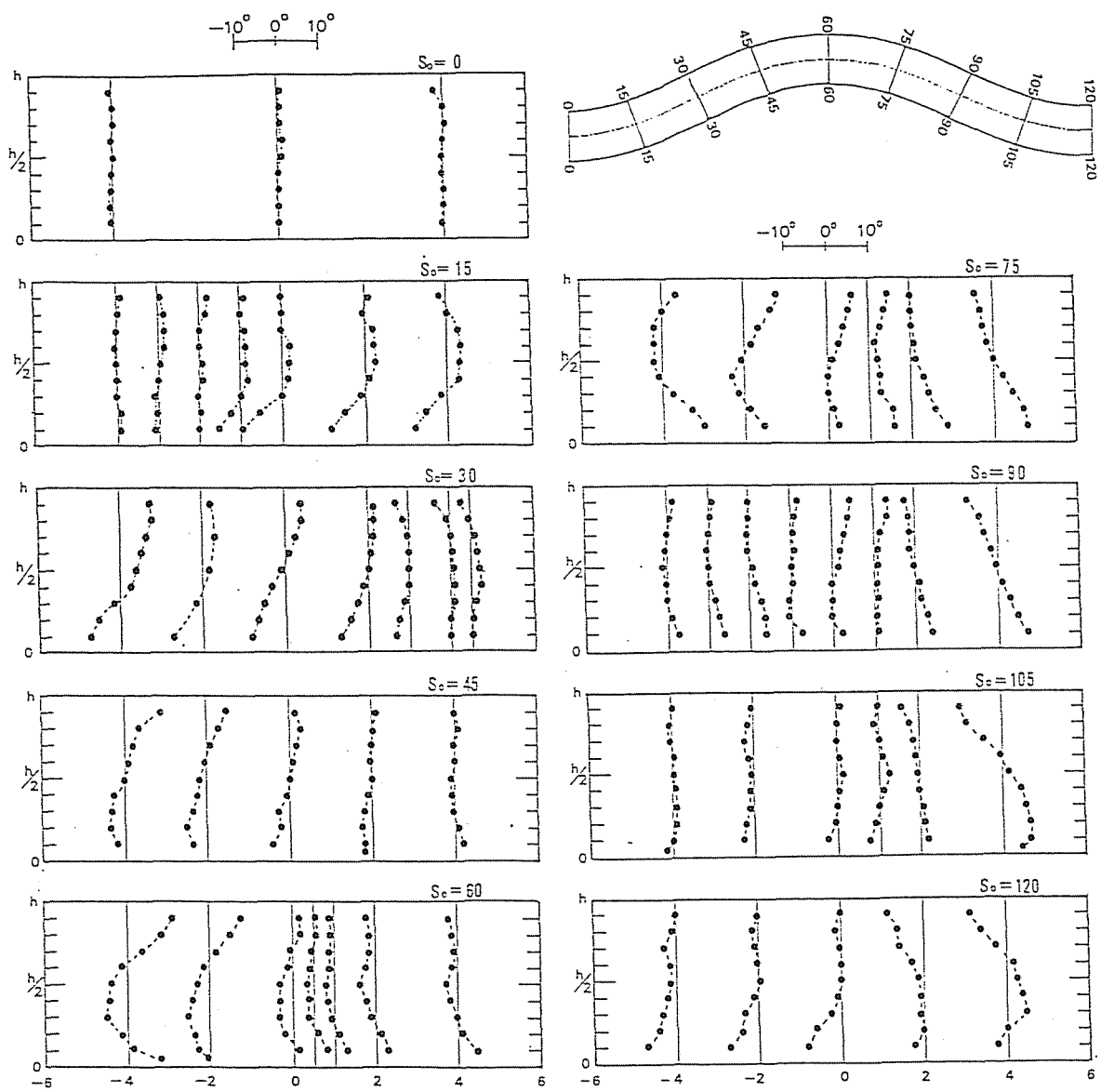


図 - 15 流向分布

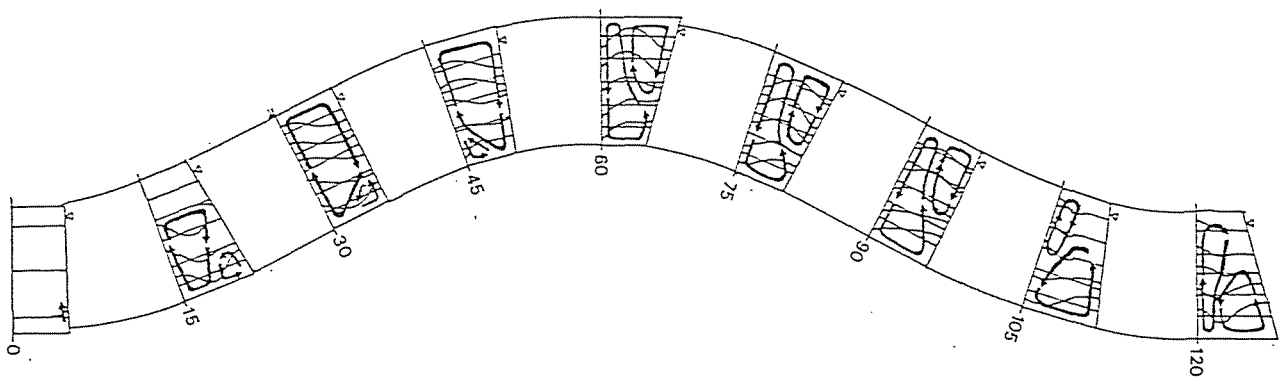


図 - 16 ラセン流分布と流路平面形の対応

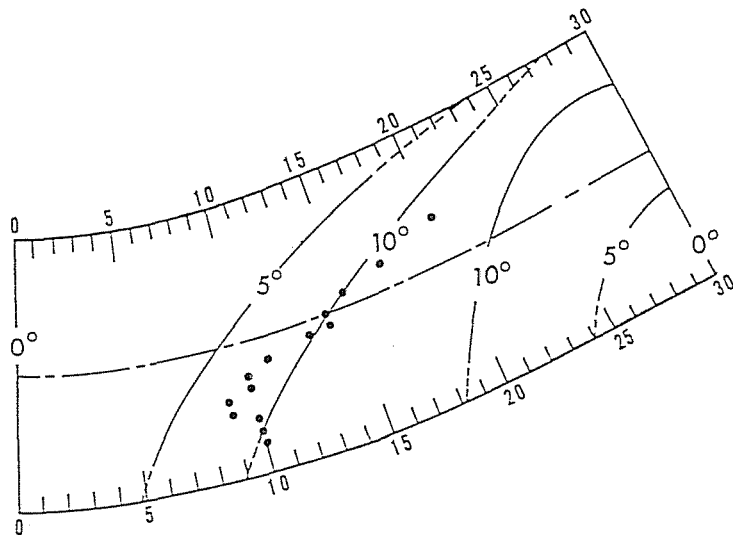


図-17 ラセン流強度のコンター

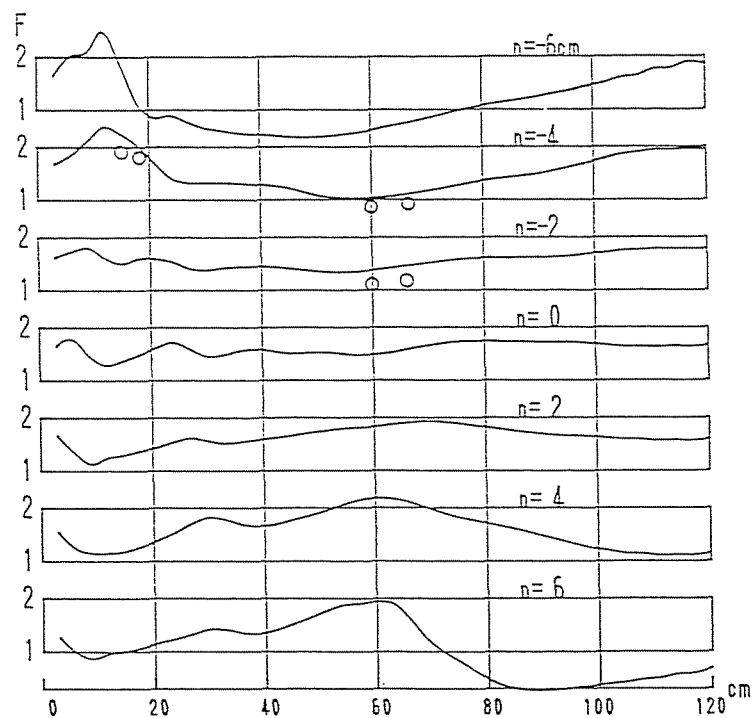


図-18 Fの分布

における $s_0 = 60\text{cm}$ の外岸域は $F < 1$ である。図-18に F (実線: 前節の数値解、○: 実験値) の変化を示した。図中の実測値によればこの領域では $n = -2\text{cm}$ 近くまで常流域が広がっている。

図-19は、 $s_0 = 60, 66\text{cm}$, $n = -4, -2\text{cm}$ の U 分布である。河床付近に減速域がある。その度合は、 $s_0 = 66\text{cm}$ より 60cm の方が、また、 $n = -4\text{cm}$ より -2cm の方が強い。このことから、 $s_0 = 60\text{cm}$, $n = -4\text{cm}$ の常・射流の境界付近に何らかの衝撃波が発生しているものと推定される。従って、この領域においても衝撃波によるラセン流の発生を考えることができる。

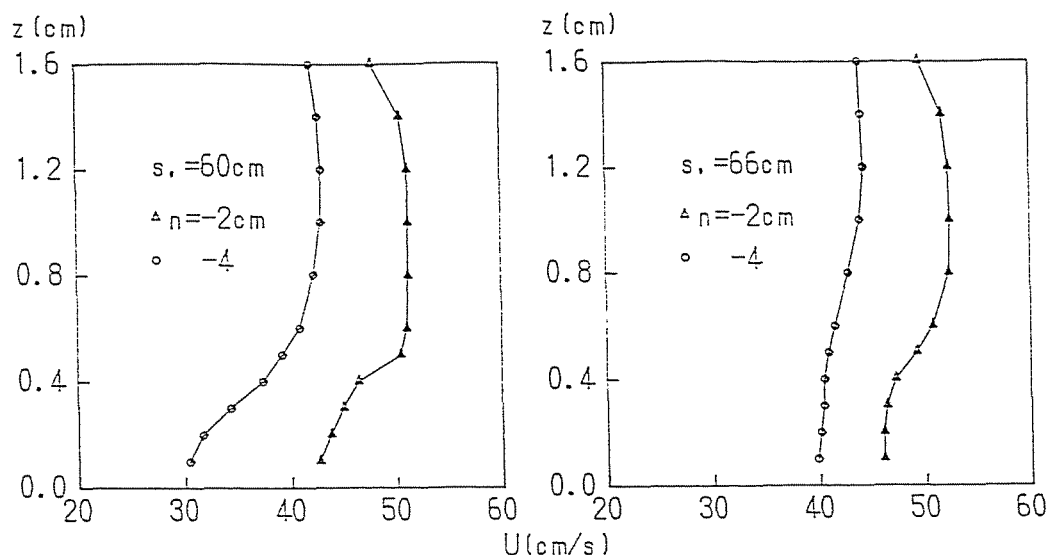


図 - 19 $s_0 = 60, 66\text{cm}$ 外岸付近の U - 分布

一方、常流域の拡大は常流でのラセン流の発生機構の効果も大きくなることを意味する。この地点のラセン流の1つの特徴は、二重ラセン構造である。De Vriend¹⁵⁾の数値解析結果（流れは楕円型）によると $De = \delta^{1/2} Re$ [$\delta = h/r_0$, $Re = \bar{U}h/\nu$] が50程度を越えると二重ラセン構造が発生する。 ν に(21)式を用いると、本実験でもこの限界値程度であり、常流でのラセン流発生機構が働いている可能性がある。図 - 18の数値計算結果によれば、 S_1 発生点付近にもわずかに常流域がある。

以上のことを考えると、本実験のラセン流の発生はSBIによるものと常流における形成機構の両者が複合しているものと思われる。

表 - 2 は、 $s_0 = 60, 66\text{cm}$, $n = -4, -2\text{cm}$ の流速、流向の測定値から計算された運動方程式の各項の大きさを示したものである。圧力分布は静水圧を仮定している。 $z = 4\text{mm}$ 付近の流速分布が大きく変形している点では残差が大きくなっているが、

表 - 2.1 s 方向運動方程式 (単位は cm-sec)

z	$U \frac{\partial U}{\partial s}$	$+ V \frac{\partial U}{\partial n}$	$+ \frac{UV}{r}$	$+ g \frac{\partial H}{\partial s}$	$- \nu \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	$=$	0
13mm	13.8	1.9	-0.6	-18.2	11.7		8.6
11	12.4	-12.7	3.5	-18.2	5.8		-9.2
9	11.0	-18.9	4.9	-18.2	3.7		-17.5
7	7.6	-26.1	6.2	-18.2	6.4		-24.2
6	-1.4	-25.3	5.8	-18.2	27.6		-11.6
5	3.2	-21.0	4.5	-18.2	45.6		14.0
4	19.8	-12.2	3.1	-18.2	-40.3		-47.8
3	34.6	-8.7	2.1	-18.2	-7.4		2.4
2	48.3	-2.7	0.6	-18.2	-21.2		6.8

表-2.2 n方向運動方程式 (単位はcm-sec)

z	$U \frac{\partial V}{\partial s}$	$+ V \frac{\partial V}{\partial n}$	$- \frac{U^2}{r}$	$+ g \frac{\partial H}{\partial n}$	$- U_z \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$	= 0
13mm	-9.5	0.7	64.3	-58.8	3.7	-7.0
11	-15.3	-2.2	65.4	-58.8	21.7	-32.7
9	-16.2	-0.8	65.1	-58.8	1.9	-12.6
7	-13.7	1.4	63.9	-58.8	13.2	-20.5
6	-9.3	7.7	61.3	-58.8	19.1	-18.2
5	-8.6	7.5	58.2	-58.8	7.4	-9.1
4	-7.3	5.6	52.8	-58.8	-9.5	1.8
3	-6.7	4.4	49.7	-58.8	20.1	-31.6
2	4.1	1.6	47.0	-58.8	49.8	-55.9

その他の地点では運動方程式は概ね満たされている。表によればラセン流による強い加速作用が働いている。図-20は、図-8の実測値を用い、U分布に二次式を仮定して計算された横断方向運動量輸送(=X)の分布図である。3.4節の数値解のXにはこの図の分布形を用いている。

3.6 反射による衝撃波の変形

前節に示した様に衝撃波の反射域の構造は複雑であり、流体力は局所的に大きく、また、非定常性も強い。Zang et al¹⁶⁾は、単純な平面波が衝撃波を通過すると強い変形を受けることを数値解析で示している。これらのことから反射点における衝撃波の変形が充分考えられる。

三次元ポテンシャル場を考える。二次元河床波上の三次元ポテンシャルは(林¹⁷⁾による)、

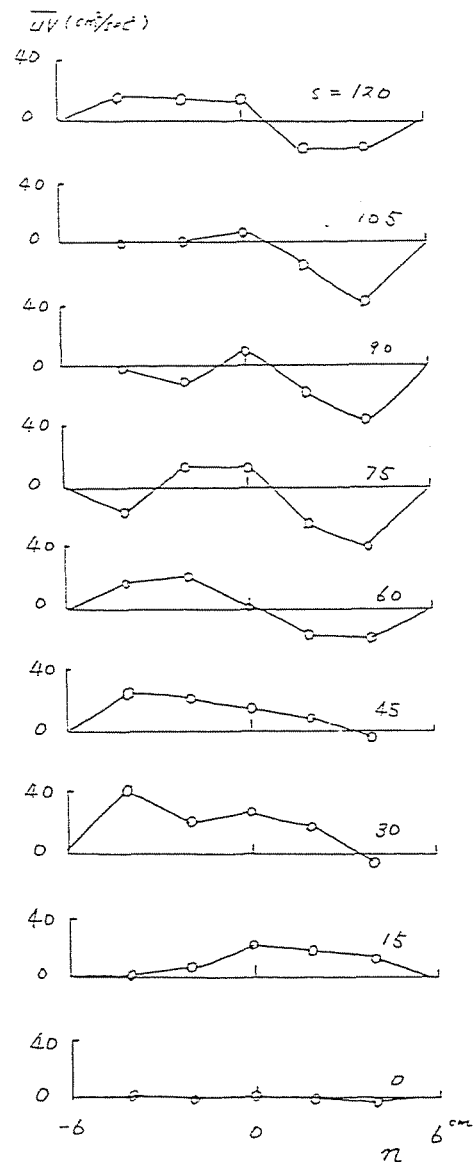


図-20 ラセン流による運動量輸送

$$\phi = U x - \frac{U k}{\beta} A \left[\cosh \beta z + \frac{F^2 k^2 h}{\beta} \sinh \beta z \right] \cos k x \cos l y \quad (23)$$

ここに、 $A = a_z/K$, a_z : 河床波の波高、 k , l : x , y 方向の波数、

$$\beta = \sqrt{k^2 + l^2}.$$

$$K = \sinh \beta h - \frac{F^2 k^2 h}{\beta} \cosh \beta h \quad (24)$$

本実験では $a_z=0$ であるから、有意な値を持つためには、 $K=0$ 、すなわち、

$$F^2 k^2 = \beta h \tanh(\beta h) \quad (25)$$

この波動は定在波と呼ばれる。本実験 ($F=1.65, h=1.54$ cm) に対する上式の関係を図-20に示した。図から $L_x=5\sim 7$ cm のとき、 $L_y=1.5$ cm, $\tan^{-1}(L_x/L_y)=15^\circ$ であり、図-7に示した波動とよく一致する。これから衝撃波は、R点において定在波に変形したものと考えられる。

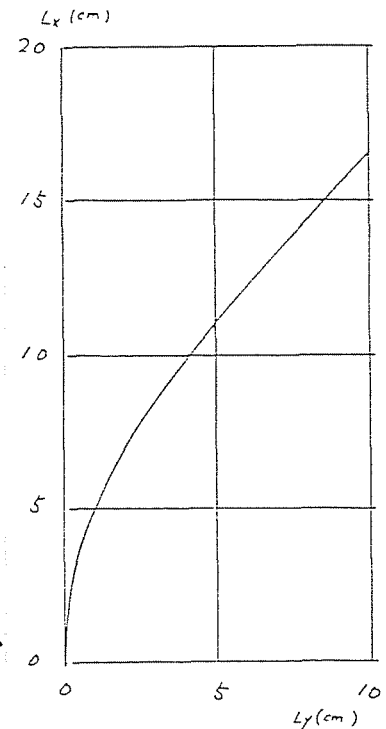


図-21 定在波の

3.7 衝撃波減衰後の横断流速分布

$k_x - k_y$ の関係

以上の解析から流路の平面形状の大きな変化によって発生する衝撃波は、反射による変形、SBIなどを通じて非線形効果により速やかに減衰するものと考えられる。本実験は滑面水路で行われたが、現地河川は粗度が大きい。この場合には底面摩擦による減衰も大きくなることが線形理論によって確かめられている。

このようなことから、(18)式から周期成分のみを取り出してこの成分のみにより流路の平面変形を推定する。周期成分の $s^*=0$, $n^*=n_s$ での流速、すなわち外岸頂部での流速を u_v と書くと、

$$u_v = \text{Re} \left[\frac{n_s}{F^2 - 2i\Gamma} \left\{ \frac{i\Gamma(\gamma - \alpha)}{\alpha(F^2 - 1) + 3\gamma} (1 + \Phi) - (i\Gamma + 1)F^2\Phi + i\Gamma \right\} \right] \quad (26)$$

ここに、

$$\Gamma = \frac{L I_a}{2\pi h_s}, \quad \Phi = \frac{\tan \Psi}{\Psi},$$

$$\Psi = \left[\frac{(F^2 - i\Gamma)(F^2 - 1 - 3i\Gamma)}{F^2 - 2i\Gamma} \right]^{1/2} \pi \frac{B}{L}$$

である。 u_D を決める水理量として、 $L I_a / h_a$ 、 L/B 、 F を選ぶ。 図-21は、 $L I_a / h_a$ vs. F 図上に $L/B = 6.7, 10, 20$ のときの $u_D = 0$ となる線を書いたものである。 この線より上では $u_D > 0$ 、 下では $u_D < 0$ である。 なお、 池内、 玉井¹⁸⁾の蛇行流理論の一次解は、 図中の $L/B = \infty$ の線に一致する。

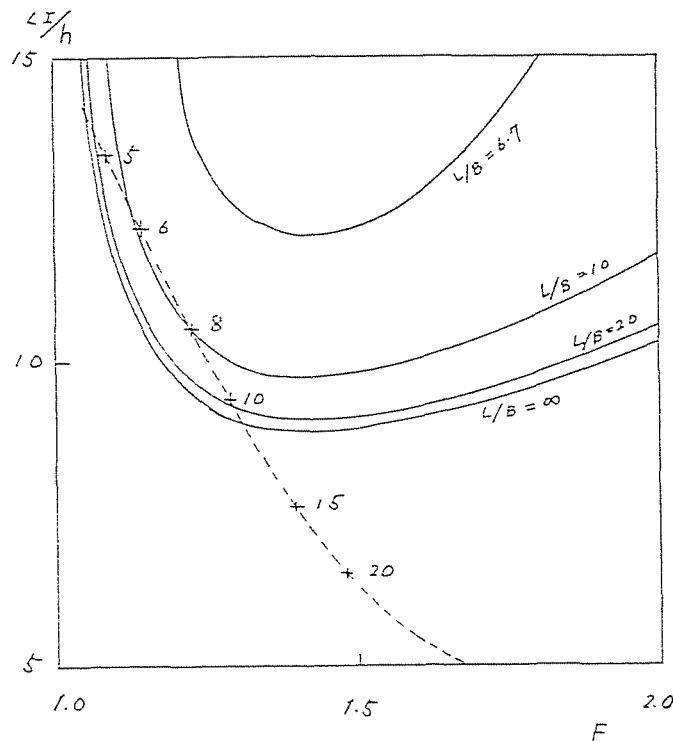


図-21強制渦型と自由渦型の発生域区分図

図-1に示した蛇行平面形を蛇行波長 $L = 80\text{m}$ 、 勾配 $I_a = 1/20$ 、 $B = 9\text{m}$ とし流れの抵抗則を

$$f = (8/\varphi)^2 = \left[2.03 \log \frac{11.1h}{d_{s4}} \right]^{-2}$$

で与えると⁴⁾、 $L I_a / h_a$ と F の関係は Q をパラメーターとして図中に点線で示す様に変化する。 L/B は10程度であるから、 $6 \sim 8 \text{ m}^3/\text{sec}$ のときに $u_D > 0$ となる。

河床材料の平均粒径の移動限界流量は $4.5\text{m}^3/\text{sec}$ である。従って、小出水のときには流路蛇行が成長し、大きな出水のときには直線化が進むものと推定される。

3.8 結論

射流蛇行流は、蛇行部入口から短区間では線形理論で近似できる。また、ある程度流下すると線形理論の周期解で近似できる。

しかし、細部を見ると非常に複雑である。流下距離が大きくなるに従って非線形効果により、衝撃波は減衰する。衝撃波と乱流境界層の相互干渉は、ラセン流を誘起したり、流況の上流伝播を引き起こして流れの構造に大きな影響を与える。反射域では波動の変形が生ずる。

このような流れの細部構造が河床変動に果たす役割は現時点でははっきりしない。しかし、筆者らが白水川で観察した例について言えば、大局的な流れの構造は線形解における周期解であり、これが流路の平面形状変動の主要を支配していると言える。

参考文献

- 1) 森、黒木、岸、戸嶋、谷口：山地河川における階段状河床形の分類と形成機構に関する研究、水理講演会論文集、第30回、1986年
- 2) 森、黒木、岸、戸嶋、谷口：白水沢における階段状河床形の調査研究、土木学会北海道支部論文報告集、第41号、1986年
- 3) 森、岸、戸嶋、定木：高速蛇行流の研究、土木学会北海道支部論文報告集、第43号、1987年
- 4) 岸、森、長谷川、黒木：山地河川における土砂輸送と河床形状に関する比較研究、文部省科学研究費特定研究(1)「比較河川学の研究」(代表岸力)最終報告書1987年
- 5) 森、岸、戸嶋：山地河川における“自己制御蛇行”、土木学会年次学術講演会、第42回、1987年
- 6) 森、岸、定木、平井：射流蛇行流の衝撃波の減衰に関する研究、土木学会北海道

支部論文報告集、第45号、1989年

- 7) Lenou: Supercritical flow in bend of trapezoidal section, Proc/ASCE. vol. 105, EM1, 1981
- 8) 芦田、高橋、新井: 土石流の調節制御に関する研究(2)、京都大学防災研究所年報、第24号B、1981年
- 9) MacCormac, R.W.: Numerical solution of the interaction of a shock wave with a laminar boundary layer, Proc. Second. Int. Conf. Num. Methods Fluid Dyn., Lecture Notes in Physics, VOL. 8, Springer-Verlag, New York
- 10) Adamson, T.C. and Messiter, A.F.: Analysis of two-dimensional interaction between shock wave and boundary layers, Ann. Rev. Fluid Mecha. vol. 12, 1980
- 11) Horstman, C.C: Computation of sharp-fin-induced shock wave/turbulent boundary-layer interaction., AIAA Jour. VOL. 9, 1986
- 12) Edwards, D.E. Carter, J.E. and Hafez, M.M: Viscous/inviscid analysis of transonic shock-induced separation including normal pressure gradients AIAA Jour. vol. 24, no. 5, 1986
- 13) Shang, J.S., Hankey, W.L. and Herbert Law, C.: Numerical simulation of shock wave/turbulent boundary-layer interaction, AIAA Jour. vol. 14, NO. 10, 1976
- 14) De Vriend: Velocity distribution in curved rectangular channels, J. Fluid Mecha., vol. 107, 1981
- 15) Rozovskii, i. l.: Flow of water in bends of open channels, Israel Program for Scientific Translation, 1961
- 16) Zang, T.A, Hussaini, M.y. and Bushnell, D.M.: Numerical Computation of Turbulence amplification in sfoch-wave interactions, AIAA Jour, vol. 22, no. 1, 1984.
- 17) Hayashi: On the cause of meandering of rivers, Proc. Intl. Symp. on river mechanics, Bangkok, Vol. 1, 1973
- 18) 池内、玉井: 蛇行水路における水深平均流れ場の遷移特性、土木学会論文報告集、No. 334, 1983

第4章 弯曲・蛇行流の三次元数値解法¹⁾

はじめに

実河川では流路の弯曲に加えて川幅の変化が流れを複雑にしている。また、わが国では複断面河道が多いが、高水敷の流れと低水路の流れの相互干渉が流れを更に複雑にしている。このような流れは三次元性が強く、その性質が弯曲部や蛇行流路特有の河岸近傍の河床洗掘の特性を強く支配している。本研究では、このような境界形状の効果を取り入れた流れの三次元数値解法を開発した。

境界形状に合った一般座標系を採用した。一般座標系では座標曲線の曲がりや斜交性のため運動方程式には Cartesian座標系に比べて多くの付加項が加わる。本研究では河川流の特性からこれらの付加項の大きさを吟味して微小項を取り除き大幅に簡略化した基礎式を得た。この結果、三次元開水路数値計算の難点である自由水面の取扱が容易になった。

数値解法では主流と横断流速間の相互干渉効果を考慮して計算点を配置した。また、解の収束法に1つの工夫を行った。この計算法を石狩川下流部に適用し、良好な結果を得た。

4.1 弯曲・蛇行流解析の基礎方程式

一般座標系の方程式から河川流の特性を考慮して微小項を除き、方程式を簡略化する。

4.1.1 座標系と計量テンソル

流れの運動方程式および連続式をテンソル記号を用いて次式で表す²⁾。

$$u^{\alpha} u^{\beta}{}_{;\beta} = -P^{\alpha}/\rho + \tau^{\alpha\beta}{}_{;\beta}/\rho, \quad u^{\alpha}{}_{;\alpha} = 0 \quad (1)$$

ここに、 $\tau^{\alpha\beta}$: Reynolds stress で、渦動粘性係数 μ を用いて次式で与える。

$$\tau^{\alpha\beta}/\rho = \mu(u^{\alpha}{}_{;\beta} + u^{\beta}{}_{;\alpha}) \quad (2)$$

以下では u^{α} の物理的成分を U (x^1 方向), V (x^2 方向), W (x^3 方向)で表す。

河川流を解析するための座標系 x^{α} を以下の様にとる。まず、Cartesian座標系 y^1 は、 y^3 を河床を原点に鉛直上方を正にとる。 y^2 を左岸を原点として流路中央線にほぼ直交する様にとる。 y^1 は下流方向を正にとる(左手系)。

z 座標系を次の様にとる (図 - 1 参照)。

z^3 : 河床を原点に鉛直上方を正にとり、水面を $z^3 = h_m$ (h_m : 水路全体の平均水深) にとる。

z^2 : 左岸を原点、右岸を B_m (B_m : 平均川幅) にとる。

z^1 : 下流方向を正にとり、 z^1 と y^1 のなす角度を図 - 2 に示す様に ϕ と書く。 dz^1 の物理的成分を $A ds_0$ と書き、左岸を $A = 1$ にとる。 $dy^1 = A ds_0 \cos \phi$ である。

x 座標系は、 $x^3 = 0$ が河床に、 $x^3 = h_m$ が水面にそれぞれ接するようににとる。図 - 3 に示す様に z^1 を θ_1 傾けたものを x^1 、 z^2 を θ_2 傾けたものを x^2 とし、scale は、鉛直上方からそれぞれ z^1 、 z^2 を射影したものとする。 $x^3 = z^3$ とする。この x 座標系の計量テンソル g_{ik} は (3) 式で与えられる。

$$\begin{aligned} g_{11} &= A^2 (1 + \tan^2 \theta_1) \\ g_{22} &= \tilde{B}^2 (1 + \tan^2 \theta_2) \\ g_{33} &= \tilde{h}^2 \\ g_{12} &= A \tilde{B} (-\sin \phi + \tan \theta_1 \cdot \tan \theta_2) \\ g_{23} &= -\tilde{B} \tilde{h} \tan \theta_2 \\ g_{31} &= -A \tilde{h} \tan \theta_1 \end{aligned} \quad (3)$$

ここに、 $\tilde{B} = B/B_m$, $\tilde{h} = h/h_m$ 。

最も精密な河川流の計算は、計量テンソルに (3) 式を用いてなされる。しかし、(3) 式をそのまま用いるのは、 θ_1 , θ_2 が水面や河床の変化とともに変わるため 2 つの点で問題がある。第 1 は、計量テンソルと運動方程式の係数を繰り返し計算の各ステップ毎に計算するのに多くの時間が必要なことである。第 2 は、数値計算の安定性を厳し

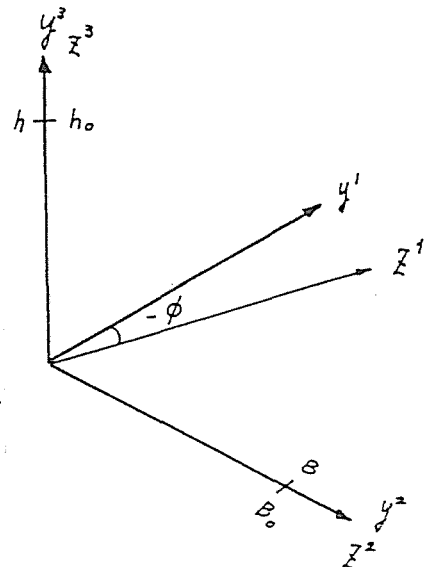


図 - 1 $y - z$ の関係

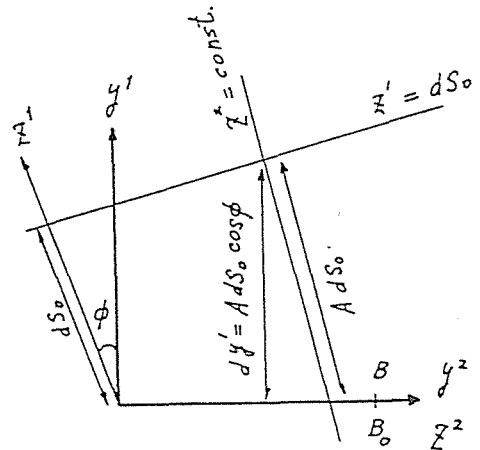


図 - 2 $y - z$ の関係

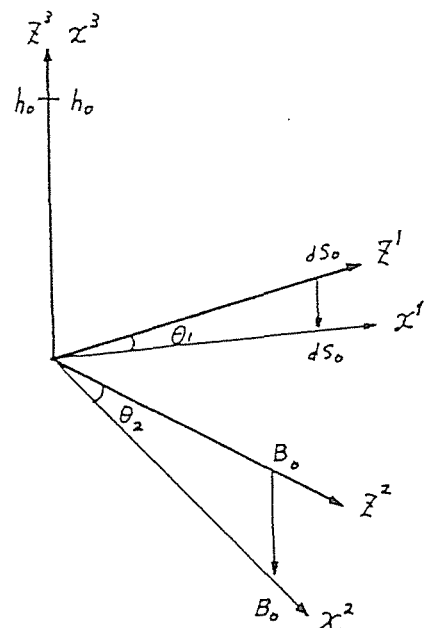


図 - 3 $z - x$ の関係

くする点である。例えば、水面に凸面が生じた場合を考える。

θ_1 や θ_2 は、河床や水面の擾乱の大きさを表す量であり、 θ_1 、 θ_2 の微係数に比例した遠心力が x^3 方向に働く。この作用が

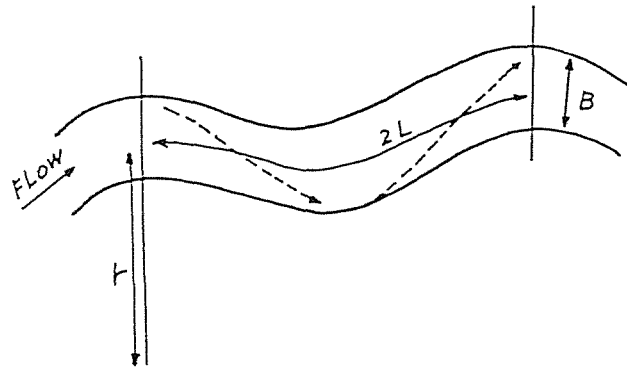


図-4 蛇行流路の平面幾何スケール

水面擾乱を増幅させ、計算を不安定にすると予想される。

θ_1 や θ_2 は、河床波や水面波が発生せず計算が安定に実行されれば微小な量である。以下ではこの様な場合について θ_1 、 θ_2 およびその他の量の大きさを調べ、加速度項およびレイノルズストレス項における微小項を取り除く。更に、弯曲流の特性を考慮して基礎方程式を定める。

4.1.2 河川の流路形状と流れの特性

蛇行流路の長さの特性量には、 B 、 h の他に、図-4に示す蛇行半波長 L 、曲率半径 r がある。これらを用いて θ_1 、 θ_2 およびその他諸量のオーダーを表す。

蛇行流路の河床形および平面形を次式で近似する。

$$\frac{h}{h_0} = \left(\frac{r}{r_0}\right)^n = \left(1 + \frac{n}{r_0}\right)^n, \quad \frac{1}{r_0} = \frac{1}{R} \cos k s \quad (4)$$

ここに、 R ：流路蛇行の最小曲率半径、 $k = \pi/L$ 。上式によれば、 θ_1 、 θ_2 のオーダーを ε_1 、 ε_2 とおくと、

$$\varepsilon_1 = O\left[\frac{dh}{ds}\right]_{n=\text{一定}} = M \frac{\pi B h}{2 R L}$$

$$\varepsilon_2 = O\left[\frac{dh}{dr}\right]_{s_0=\text{一定}} = M \frac{h}{r}$$

A の微係数の大きさは、 $A \sim ds/ds_0 \sim r/r_0 \sim 1+B/r_0$ と書けるから(4)式から

$$O\left[\frac{dA}{ds}\right]_{n=\text{一定}} = \frac{\pi B}{R L}$$

$$O\left[\frac{dA}{dr}\right]_{s_0=\text{一定}} = \frac{1}{r}$$

である。

流れについては、水深平均流とラセン流の両者を考える。水深平均流は、流線が図-4の矢印の様に、深掘れから（対岸）深掘れに向かうから(5)式である。

$$\frac{V}{U} \sim \frac{B}{L} \quad (5)$$

流路の弯曲に伴う二次流の強さは(6)式の様に書ける。

$$\frac{V}{U} \sim m \frac{h}{r} \quad (6)$$

Wの大きさは、河床または水面での運動学的条件を考え、水面（または河床）の座標をYと書くと、

$$W_{z=y} = U Y_x + V Y_y \quad (7)$$

であるから、Cartesian座標系では、

$$O(W) = O(U \theta_1) = O(V \theta_2). \quad (8)$$

これに対して前節で導入した座標系では、河床面および水面を座標曲面にとっているため $W_{z=y} = 0$ となり、Wの大きさは上式より小さい。

ただし、流路弯曲部の河岸付近など水平軸をもつ剥離渦の発生する地点では大きく、この場合は流れの連続の条件から

$$O\left(\frac{W}{h}\right) = O\left(\frac{U}{L}\right) = O\left(\frac{V}{B}\right). \quad (9)$$

基本量間の関係を以下の様に与える。B/hは多列砂州の発生しない 10^{-1} のオーダーを対象とする（黒木、岸³⁾によれば、 $B/h \cdot I^{0.2}$ が約30以上になると多列砂州が発生する。このときのB/hの限界値は $I = 1/100 \sim 1/1000$ の場合、約100である）。 $O(L/B) = 10$ （Spight⁴⁾による）、 $R/B = 2.3$ （Leopold and Wolman⁵⁾による）とする。(6)式中のmの値は Engelund⁶⁾によると約7である。(4)式中のMの値は長谷川・岸⁷⁾による石狩川および雨龍川での調査によれば2～8である。また、筆者らの理論（第2章）によれば、上限値があり、約10である。平均的な値をとり $M = 4$ とする。以上から

$$O\left(\frac{V}{U}\right) = O(\theta_2) = O\left(\frac{B}{L}\right) = O\left(\frac{h}{B}\right) = \varepsilon_2 = 10^{-1},$$

$$O(\theta_1) = O\left(\frac{h}{L}\right) = \varepsilon_1 = 10^{-2}.$$

ϕ の大きさは $O(\phi) = 10^{-1} = \varepsilon_2$ とする。流路の拡幅部において ϕ が過大になると流れに剥離が生じる。この結果、河岸に土砂が堆積して川幅を減少させるため ϕ の大きさに限界がある。上の関係はこれを表す。

4.1.3 運動方程式各項の評価

(3)式で与えられる計量テンソルから θ_1 と θ_2 の二次の項を除く。共変および反変テンソル g_{ik} 、 g^{ik} は(10)式。

$$\begin{aligned} g_{11} &= A^2, \quad g_{12} = -A\bar{B}\sin\phi, \quad g^{11} = (A\cos\phi)^{-2}, \quad g^{12} = \frac{\tan\phi}{A\bar{B}\cos\phi} \\ g_{22} &= \bar{B}^2, \quad g_{23} = -\bar{B}\bar{h}\tan\theta_2, \quad g^{22} = (B\cos\phi)^{-2}, \quad g^{23} = \frac{\tan\theta_2}{\bar{B}\bar{h}\cos^2\phi} \\ g_{33} &= \bar{h}^2, \quad g_{31} = -\bar{h}A\tan\theta_1, \quad g^{33} = \bar{h}^{-2}, \quad g^{31} = \frac{\tan\theta_1}{A\bar{h}\cos^2\phi} \end{aligned} \quad (10)$$

(10)式をもとに運動方程式の各項の大きさを評価する。

加速度項：加速度項 $u^s u^i{}_{,s}$ の大きさは $u^s u^i / L_s$ ($L_1 = L$, $L_2 = B$, $L_3 = h$) であるから(9)式が成立する場では各 i について $s = 1, 2, 3$ の各項が同じ大きさになる。従って、この様な場では各流速成分を同じ相対精度で計算する必要がある。以下、この場合について考える。

(1)式左辺を $u^s u^i / L_s$ で無次元化したものから θ_1 、 θ_2 を含む項で ε_1 の一次、 ε_2 の二次以上の微小項を除くと(11)が得られる。

$$\begin{aligned} u^i u^1{}_{,s} &= u^i u^1{}_{,s} + \frac{1}{2} [g^{11} g_{11,1} + g^{12} (2g_{12,1} - g_{11,2})] u^1 u^1 \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{11} (2g_{12,2} - g_{22,1}) u^2 u^2 + (g^{11} g_{11,2} + g^{12} g_{22,1}) u^1 u^2 \\ u^i u^2{}_{,s} &= u^i u^2{}_{,s} + \frac{1}{2} [g^{21} g_{11,1} + g^{22} (2g_{12,1} - g_{11,2})] u^1 u^1 \\ &\quad + \frac{1}{2} g^{21} (2g_{12,2} - g_{22,1}) u^2 u^2 + (g^{12} g_{11,2} + g^{22} g_{22,1}) u^1 u^2 \\ u^i u^3{}_{,s} &= u^i u^3{}_{,s} + \frac{1}{2} [g^{31} g_{11,1} + g^{23} (2g_{12,1} - g_{11,2}) + 2g^{33} g_{13,1}] u^1 u^1 \\ &\quad + [g^{31} g_{11,2} + g^{23} g_{22,1} + g^{33} (g_{13,2} + g_{23,1})] u^1 u^2 \\ &\quad + g^{33} g_{23,2} u^2 u^2 + g^{33} g_{33,2} u^2 u^3 + g^{33} g_{33,1} u^1 u^3 \end{aligned} \quad (11)$$

レイノルズストレス：一般座標系でのレイノルズストレスの表現には慣性項よりはるかに多くの付加項が加わる。レイノルズストレスの算定に関する近年の数

値解析を前提とした乱流モデルの進展は目ざましく、様々な分野で実用化が進められている。しかし、河川流については単純な流路形の流れについてその適用性の検討が始まったところであり、本研究が対象とする複雑な境界形状を有する場では今後の発展にまたなければならない。この様な状況からレイノルズストレスについては θ_1 、 θ_2 を含まない項についても ε_1 の一次、 ε_2 の二次以上の微小項を除くことにする。

u_i の大きさは次式で評価する。

$$v_i \sim \kappa u_i h, \quad O(u_i/\bar{U}) = 10^{-1}$$

(12)式は得られた結果を物理的成分に書換えて示したものである。

$$\begin{aligned} A \tau_{ij}^1 &= (\mu_i U_z)_z, \quad B \tau_{ij}^2 = (\mu_i V_z)_z \\ h \tau_{ij}^3 &= (\mu_i U_z)_z + (\mu_i V_z)_y + 2(\mu_i W_z)_z \\ &\quad + 2\mu_i U_z \frac{h_z}{h} + 2\mu_i V_z \frac{h_y}{h} \\ &\quad + 2(\mu_i U)_z \frac{h_z}{h} + 2(\mu_i V)_z \frac{h_y}{h} + \mu_i U_z \frac{B_z}{B \cos^2 \phi} \end{aligned} \quad (12)$$

4.1.4 MK法の基礎方程式

(11)、(12)式を見ると $i = 1$ と 2 の運動方程式には θ_1 や θ_2 が含まれていない。しかし、 $i = 3$ については(11)式中の ρ_{23} , ρ_{31} , ρ^{23} , ρ^{31} および(12)式中の h_x , h_y に θ_1 および θ_2 が含まれている。流れを2つに分けてこれらの項の効果を考える。

第1は、流れが境界面に沿う場合で、4.1.2に述べたように、この場合には U^3 は小さく、 $i = 1, 2, 3$ の各方程式において U^3 の項が無視できる。 $i = 3$ の方程式は付加項と圧力項および剪断力項のみとなる。これらの付加項および剪断力項の大きさは $i = 1$ や 2 の慣性項に比べると ε_1 または ε_2 のオーダーである。従って、これにつり合う圧力項も同程度に小さい。このことは $i = 1$ および 2 の方程式において非静水圧分が無視できることを意味する。

この流れは静水圧の仮定で充分正確に計算できる。

第2は、剥離などがある流れで U^3 を含む項は小さくない。この場合には静水圧の仮定では不正確である。 θ_1 、 θ_2 を含む項の取扱に工夫が必要になる。これらの項は河床や水面が曲率を持つことによる遠心力と移流方向への水深変化による

スケール変化の補正などを表す。

本研究の中心課題である弯曲・蛇行流は、水路中央では普通第1の流れであるが、側壁付近には剥離が発生して第2のケースとなる。

図-5の太い実線で表す様な河床形に対して、a図の様に河床に沿って $x^3 = 0$ をとると θ_1 や θ_2 による遠心力項が現れる。しかし、b図の様に通常の Cartesian座標系をとると現れない。このことを利用する。高水敷を含む側壁付近の横断面座標系をb図の座標系で近似することによって θ_1 、 θ_2 に関する付加項を取り除く。

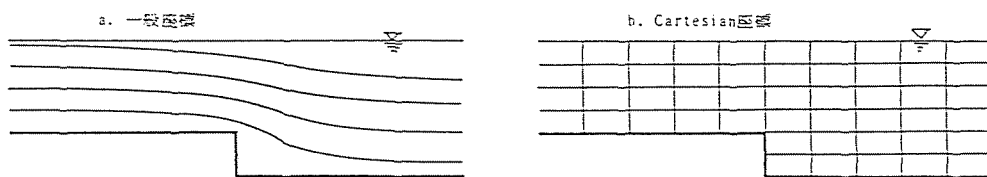


図-5 側壁付近の座標系

河床波のcrestの下流部や水理構造物の周辺では流れは剥離し易い。水平軸を持つ剥離流れを精密に計算するためにはa図の型の座標系を用いて θ_1 、 θ_2 を含む付加項を正確に評価しなければならない。本研究の最終目的は河床変化の予測であるが、河床変動計算を行うと河床波が発生する。また、問題によっては水理構造物の効果を調べる必要もある。

本計算法ではこのような場においても θ_1 、 θ_2 を含む付加項は除くことにする。このため、これらの周辺の微細な構造は得られない。この場合には問題に応じて適切なモデル化が必要になる。

以上をまとめるとMK法の基礎方程式は、

1) θ_1 、 θ_2 を含む付加項は総て無視する (x 座標系を z 座標系で近似することになる)。

2) 圧力は河道中央部では静水圧、側壁で非静水圧とする (側壁付近では水平方向の遠心力に起因する V 成分が圧力項を介在して W 成分に変換する。この過程が弯曲部における二次流 (ラセン流) 発生 of 主要機構であり静水圧の仮定は許されない)。

このような流れの数値解析は、全計算領域で非静水圧とする方法、あるいは W 方

程式に遠心力などの付加項を残した方法などに比べてはるかに容易である。この方程式を以下に物理的成分を用いて書いておく。ただし、s および n での 2 階微分項は小さいが数値計算上の理由から残した。

$$\begin{aligned}
\frac{dU}{dt} + C_U^{11} U^2 + C_U^{12} UV + C_U^{22} V^2 &= -\frac{C_p^1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{C_p^2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + 2 \frac{\partial}{\partial s} \left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial s} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial n} \left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial n} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial z} \right) \\
\frac{dV}{dt} + C_V^{11} U^2 + C_V^{12} UV + C_V^{22} V^2 &= -\frac{C_p^2}{\rho} \frac{\partial p}{\partial s} - \frac{C_p^1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial n} + 2 \frac{\partial}{\partial n} \left(\nu_t \frac{\partial V}{\partial n} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial V}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\nu_t \frac{\partial V}{\partial s} \right) \\
\frac{dW}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial z} + 2 \frac{\partial}{\partial z} \left(\nu_t \frac{\partial W}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial s} \left(\nu_t \frac{\partial W}{\partial s} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\nu_t \frac{\partial W}{\partial n} \right) \\
&+ \frac{\partial}{\partial s} \left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial z} \right) + \frac{\partial}{\partial n} \left(\nu_t \frac{\partial V}{\partial z} \right) \\
\frac{1}{Bh \cos \phi} \frac{\partial Bh \cos \phi U}{\partial s} &+ \frac{1}{Ah \cos \phi} \frac{\partial Ah \cos \phi V}{\partial n} + \frac{\partial W}{\partial z} = 0
\end{aligned}$$

ここに、 $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial s} + V \frac{\partial}{\partial n} + W \frac{\partial}{\partial z}$

$$\begin{aligned}
C_p^1 &= \frac{1}{\cos^2 \phi}, \quad C_p^2 = \frac{\tan \phi}{\cos \phi} \\
C_U^{11} &= \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial s} \left(\frac{2}{\cos^2 \phi} - 1 \right) - \frac{\tan \phi}{\cos \phi} \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial AB \sin \phi}{\partial s} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial n} \right) \\
C_U^{12} &= \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial n} \left(\frac{2}{\cos^2 \phi} - 1 \right) + 2 \frac{\tan \phi}{\cos \phi} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial s} \\
C_U^{22} &= -\frac{1}{\cos^2 \phi} \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial AB \sin \phi}{\partial n} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial s} \right) \\
C_V^{11} &= \frac{\tan \phi}{\cos \phi} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial s} - \frac{1}{\cos^2 \phi} \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial AB \sin \phi}{\partial s} + \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial n} \right) \\
C_V^{12} &= -\frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial s} + 2 \frac{\tan \phi}{\cos \phi} \frac{1}{A} \frac{\partial A}{\partial n} + \frac{2}{\cos^2 \phi} \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial s} \\
C_V^{22} &= -\frac{\tan \phi}{\cos \phi} \left(\frac{1}{AB} \frac{\partial AB \sin \phi}{\partial n} + \frac{1}{B} \frac{\partial B}{\partial s} \right)
\end{aligned} \tag{13}$$

4.2 河川流の三次元数値計算法

4.2.1 計算法の概要

N S 方程式を解くのに様々な簡略化が行われている。境界層近似が比較的扱い易い。境界層近似と完全な N S 方程式の間には様々なレベルの近似方程式がある。これらの方程式系は数学的にいくつかの型に分かれ、その型によって解法が異なる。M K 法の基礎方程式は境界層方程式と N S 方程式の間の様々な側面を持っている。この点について計算法と併せて概略を述べる。

水路中央については以下のように計算する。河道横断面内において U , V を運動方程式から求め、 W を流れの連続式から求める。これを上流から下流に向かって 1 断面ずつ計算する。この計算法は境界層と同じである。境界層の圧力分布は、通常、非粘性解を与える。河川流では自由水面の位置が圧力分布に相当するが、水深平均流が連続条件を満たす様に与えなければならない。このため繰り返し計算が必要になる。これは P P N S (partial parabolized N S 方程式) の計算法である。従って、三次元境界層と二次元 P P N S の組合せと考えることができる。

Rozovskii⁸⁾ は弯曲流の重要な性質の 1 つとして流れの剥離を挙げている。境界層や P P N S でも剥離流れの計算法が工夫されているが、プログラミングは複雑になる。これは計算機の容量の制約から流速の三次元記憶が（簡単には）とれなかったことによる。しかし、近年の計算機の大容量化によりこれが可能となり、M K 法では剥離流れの計算が容易である。

この結果、M K 法の基礎方程式は定常非圧縮の N S 方程式に近いものになっている。数値計算は静水圧の仮定により容易である。

一方、壁面では非静水圧としているから、 θ_1 、 θ_2 を無視している点を除けば、数値計算は定常非圧縮の N S 方程式を解くのと同じである。

N S 方程式の解法は幾つか提案され、更に、開発が進められている。これらの中で Patankar and Spalding の S I M P L E⁹⁾ 法が取扱が容易で最もよく使われている（計算法は、空気流で言えば、超音速と亜音速で体系は大きく異なる。ここでは、亜音速、従って常流の場合のみを考える）。S I M P L E 法は、ある圧力の推定値に対する流速計算と、連続条件を満たす圧力を求める圧力補正計算、の 2 つの計算を別々に行う分離解法である。本計算法は基本的にはこれと同じ系統に属するが、開水路である点や複雑な境界形状による複合計算のためいくつか

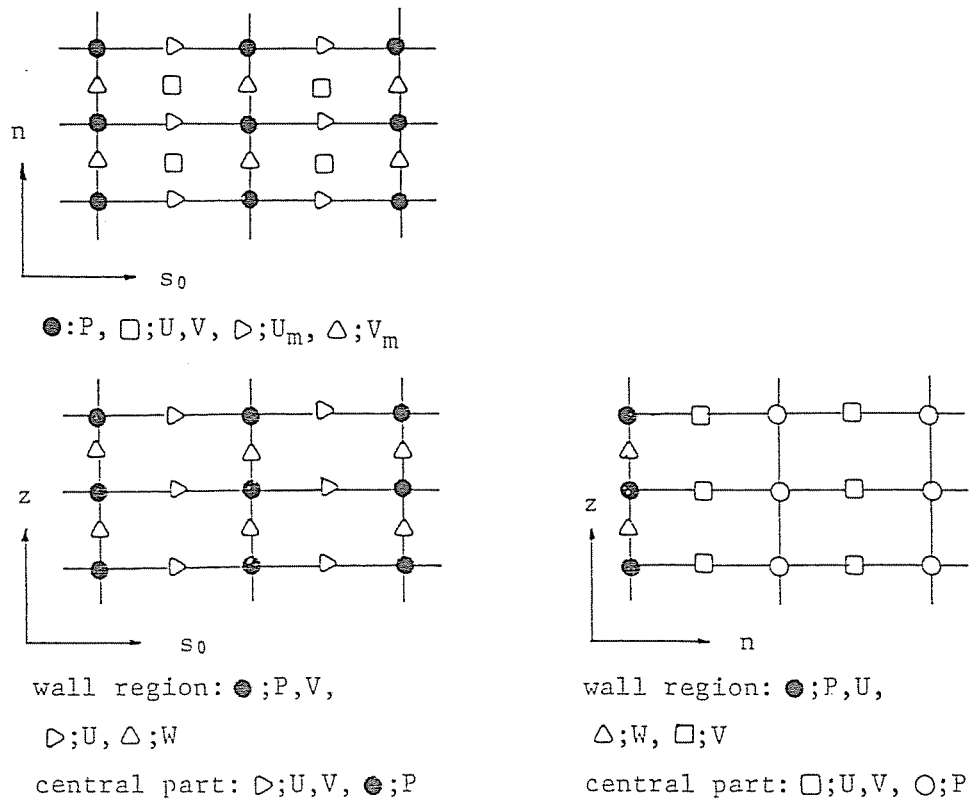


図 - 6 計算点の配置

の工夫を行った。

4.2.2 加速度項の差分

本研究で対象とする流れは衝撃波や段波の様な不連続を含まないので、運動方程式には非保存形を用いている。最近、Harten¹⁰⁾ によって保存形に対して安定な TVD 差分法が示された。TVD 差分は本質的に風上差分であり、非保存形にも応用できる。本研究では不連続な解は含まないが、TVD の性質を持った方がより良い安定性が得られると考えられるためこれを採用した。例えば、次の様に差分化する (Sod¹¹⁾ による)。

$$a \frac{\partial U}{\partial s} \rightarrow a_{i+1/2}^- \frac{U_{i+1} - U_i}{\Delta s} + a_{i-1/2}^+ \frac{U_i - U_{i-1}}{\Delta s} \quad (14)$$

ここに、 $a_{i+1/2}^- = (a_{i+1/2} - |a_{i+1/2}|) / 2$

$$a_{i+1/2}^+ = (a_{i+1/2} + |a_{i+1/2}|) / 2$$

$$a_{i+1/2} = a_x (x = (i+1/2)\Delta x)$$

移流項の総てをこの方式で差分化する。

4.2.3 低水路中央部の計算法

計算点を図-6の様に配置する。UとVの計算点を同じ位置に取ったのは、U、V間の相互干渉効果を重視したためである。U、Vを推定値とその補正值に分けて

$$U = U + \delta U, \quad V = V + \delta V \quad (15)$$

とおく。これらを(13)に代入して補正值の二次の項を無視して線形化し、 δU 、 δV を同時に解く。これによりU、V間の相互干渉が考慮されて安定な計算が期待できる。深さ方向の計算点についても同時に解く。河川流は境界層的な性質が強いのである。連立方程式を解くのに block eliminated 法¹²⁾を利用する。

平面的には次の順で計算する。上述の計算を最小単位として平面上のある点のが計算されると、次にy方向のとなりの点を同様に計算する。横断面について総て計算されると、1つ下流の断面に移り同様の計算を行う。これを繰り返して全計算点のU、Vを計算する。Wは連続式から求める。

4.2.4 側壁の計算法

側壁では静水圧を仮定せずに運動方程式からWを求める。このため図-6に示している様に計算点の配置が中央部と少し異なる。垂音速の計算でよく用いられる千鳥格子である。各流速成分毎に線形化した方程式を深さ方向に連立して解く。

4.2.5 高水敷の計算法

高水敷の中心線に沿ってs軸を取り、これと直交する様にn軸を取る。高水敷上の流れに対しては、水深平均流を用いて二次元浅水流の計算を行う。運動方程式は(16),(17),連続式(18)である。

$$U_r \frac{\partial U_r}{\partial s} + \frac{I_D V_r - |I_D V_r|}{2} \frac{U_L - U_r}{B_r/2} + C^{12} U_r V_r = \frac{1}{\rho} \frac{\partial P_r}{\partial s} - N U_r \quad (16)$$

$$U_D \frac{\partial V_r}{\partial n} + I_D V_r \frac{V_L - V_r}{B_r/2} + C^{11} U_D^2 = -\frac{C_D \partial P_r}{\rho \partial n} - \frac{C_D \partial P_r}{\rho \partial s} - N V_r \quad (17)$$

$$\frac{\partial B_r U_r h_r}{\partial s} + I_D V_r h_r = 0 \quad (18)$$

ここに、添え字rは高水敷を表す。 $N = n_r^2 g \sqrt{U_r^2 + V_r^2} / h_r^{4/3}$ 、 U_L : 低水路

の右岸または左岸の流速、 C^{12} および C^{11} ：低水路の右岸または左岸の値を用いる。 U_D ： V_r の計算点の流れが高水敷から低水路に向かう場合は $U_D = U_F$ ，逆の場合は $U_D = -U_F$ ， I_D は、左岸では1、右岸では-1。

高水敷と低水路では n 座標線の方法が異なる場合がある。両者の流速の関係は図-7の記号を用いて次式で与えられる。

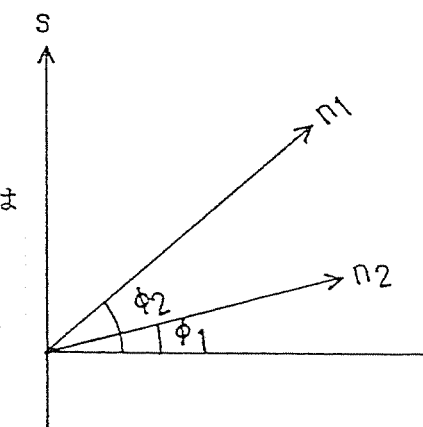


図-7 $s - n_1, n_2$ 座標系

$$U_1 = U_2 + V_2 \cos \phi_2 (\tan \phi_1 - \tan \phi_2)$$

$$V_1 = V_2 \cos \phi_2 / \cos \phi_1 \quad (19)$$

ここに、添え字1は、 $s - n_1$ 系、 $s - n_2$ 系に関するものをそれぞれ表す。

4.2.6 境界条件

河床：理論河床から Δ ($30 < u_* \Delta / \nu$ となる様にとる)離れた点を河床に最も近い計算点とし、この点の $U = U_b$ と河床剪断力 τ_b の間に次ぎの関係を仮定する。

$$\frac{\tau_b}{\rho} = C_D U_b^2, \quad C_D = 1 / (8.5 + 0.41 \ln \frac{\Delta}{k_s})^2 \quad (20)$$

ここに、 k_s ：相当粗度高。

上流端：計算対象区間の上流に助走区間を設ける。最上流端 $J = 1$ において $V = 0$ 。 U は、繰り返し計算の1回前の $J = 2$ (1つ下流の計算点)の U の計算値に断面全体の流量が所定のものになる様に補正係数を掛けたものを与える。水位は横断方向に一定とし、 $J = 2$ を通過する流量が所定のものとなる様な予測水位を与える。

下流端：平均水位を一定とする。横断方向には n 方向運動方程式において、横断水面勾配と遠心力のみを考えて、両者がバランスする水位を与える。

流路を途中で切断することにより反射波が起こる。これの除去法に関する研究はいくつかあるが現時点では決定的な方法がない。本研究では、河川流への適用が容易な Israeli and Orszag³⁾の sponge 層を設けた。

周期水路の場合には、以上の上、下流端条件は不要である。

4.2.7 渦動粘性係数 ν_t

ν_t を以下の様に与える.

1) 鉛直方向の計算には $\nu_t = \nu_{tz}$ と書き、これを(21)式で与える.

$$\nu_{tz} = \kappa [u_* h + \alpha |W_{max}| h_w (1 - \xi)] (1 - \frac{z}{h}) \frac{z}{h} \quad (21)$$

ここに、 α : 低水路と高水敷の境界を横切る流れが剥離する場合には1、剥離しない場合は0、 $|W_{max}|$: 低水路岸のWの絶対値の最大値、 ξ : 河岸からの無次元距離、 $\xi = L/h_w$, L : 河岸からの距離(図-8参照). 剥離の発生は、低水路岸の肩より下で、肩に最も近い計算点のWの向きによって判断した.

2) 水平方向の計算には $\nu_t = \nu_{tr}$ と書き、これを(22)式で与える.

$$\begin{aligned} \nu_{tr} &= \nu_{tz}, \quad z/h < 1/2 \\ &= \nu_{tz} (z/h=1/2), \quad z/h \geq 1/2 \end{aligned} \quad (22)$$

4.2.8 水位の計算

U , V を深さ方向に積分して平均流速 U_m , V_m を求める. 得られた U_m を更に横断方向に平均して図-9に示す△地点の平均流速 $\bar{U}$ を求める. 同様にして V_m を縦断方向に平均して□地点の平均流速 $\bar{V}$ を求める. これらの流速を使って図中の点線で囲まれた領域の連続条件を満たす様に○地点の P を修正する. 計算法はSIMPLE法と基本的に同じであるが、収束性を高めるために以下の工夫を行った.

収束法: x 方向の運動方程式の差分式を次の様に書く.

$$A \bar{q} = f_i - A a \frac{\partial H^n}{\partial x} \quad (23)$$

ここに、 q : 単位幅流量、上付き添字 n は繰り返し計算の回数. (23)式から

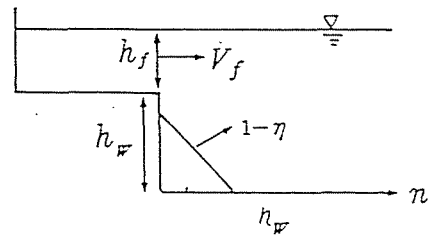


図-8 低水路岸定義図

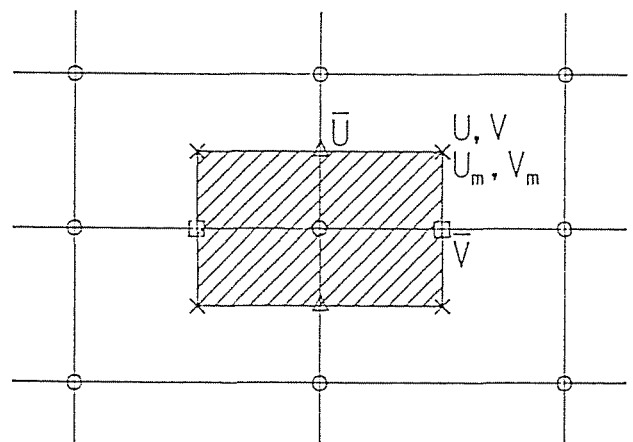


図-9 $\bar{U}$, $\bar{V}$ 計算点の配置

求まる $\hat{q}$ は、 q^{n+1} の推定値である。上式中 A および f に q^n 、 H^n が含まれる非線形式である。このため繰り返し計算では under relaxation が必要である。これを以下の様に行う。 q^{n+1} を求める差分式として(23)式の代わりに(24)を用いる。

$$\frac{[q^{n+1} - q^n]}{\Delta t} + A q^{n+1} = A \hat{q} - \lambda * A a \frac{\partial H'}{\partial x} \quad (24)$$

ここに、 Δt ：非定常式としたときの時間の刻み幅、 $H' (= H^{n+1} - H^n)$ ：補正水位、 $\lambda *$ ：係数 ($= 1/\lambda$)。 (24)式を変形して

$$q^{n+1} = (1 - \lambda) q^n + \lambda \hat{q} + \delta q \quad (25)$$

$$\text{ここに、} \quad \lambda = A \Delta t / (1 + A \Delta t) \quad (26)$$

$$\delta q = -a \partial H' / \partial x \quad (27)$$

このようにして求まる q^n は一般に流れの連続の条件を満たさない。その誤差 ε^n を

$$\varepsilon^n = \text{div}(q^n) \quad (28)$$

で表す。(25)式の div をとると、次式が得られる。

$$\varepsilon^{n+1} = (1 - \lambda) \varepsilon^n + \lambda \varepsilon + \text{div}(\delta q), \quad \varepsilon = \text{div}(\hat{q}) \quad (29)$$

n とともに誤差が減少するための条件として次の関係を採用する。

$$0 < \frac{\varepsilon^{n+1}}{\varepsilon^n} < 1 \quad (30)$$

$0 < \beta < 1$ なる β を導入すると(30)式の条件は

$$1 - \lambda + \lambda \frac{\varepsilon}{\varepsilon^n} + \frac{\text{div}(\delta q)}{\varepsilon^n} = 1 - \beta \quad (31)$$

と書ける。(27)式を(31)式に代入すると

$$\text{div}\left(a \frac{\partial H'}{\partial x}\right) = \lambda (\varepsilon - \varepsilon^n) + \beta \varepsilon^n \quad (32)$$

(32)式が補正水位の計算式である。

λ と β は次の様な意味を持つ。計算を安定にするため $A \Delta t \ll 1$ となるように Δt を選ぶものとすと

$$\lambda \sim A \Delta t \sim U \Delta t / \Delta x \quad (33)$$

である。従って、CFL条件から $\lambda < 1$ でなければならない。実際には非線

形性のため $\lambda \ll 1$ とする必要がある。この場合 β は計算の 1 ステップでの誤差の補正率を表すと考えられる [(34)式]。

上述の計算法の意味は次の様である。

(24)式は非定常式の陽形式差分に右辺第 2 項を加えたものである。この項による q^{n+1} の変化への寄与分は (25)式右辺の δq である。同第 1, 2 項が非定常効果による変化分であるのに対して、 δq は $H = H'$ に対する定常解に相当する。従って、補正水位の擾乱の伝播速度を無限大とし、流れ場への影響をただちに計算域全域に広げたことになる。この方法により補正水位に対して過不足のない適切な流速場の補正がなされる。 H' の計算式には定常解としての連続式の誤差を減少させる条件式 (32) を用いる。この方法は、言い替えると、双曲型の水面波動を楕円型化して人工的に速やかに減衰させる方法である。

流れの非定常連続式を用いると、安定条件は (陽形式差分の場合)

$$\Delta t \leq \frac{\alpha_1 \Delta x}{|U| + \alpha_2 \sqrt{g h}}, \quad O[\alpha_1] = O[\alpha_2] = 1 \quad (34)$$

の形になる。本計算法では (34)式において $\alpha_2 = 0$ であり、 Δt が大きくとれる。従って、単純な陽形式差分に比べると、 Δt が大きくとれ、更に、速やかな擾乱の減衰が期待できる。

(32)式は楕円型であるから繰り返し計算が必要であるが、これは A D I などにより簡単に計算ができる。

横断平均水位の補正：上述の方法により、各 P の計算点の連続条件は比較的速やかに満たされる。しかし、横断面全体の流量については各計算点の誤差が累積して必ずしもよい精度が得られない。S I M P L E 法では断面の平均圧力を調節して断面流量の連続条件を満たすようにしている。Parabolic な管路流ではこれが簡単にできる。この方法を開水路流れに応用するため以下の工夫を行った。

断面全体の水面勾配の補正量を δI とする。4.2.3 ~ 5 の計算から各 U_i 計算点の補正量が

$$\delta U_i = G_i \delta I, \quad (35)$$

の様に書ける。これに面積要素を掛けて横断面全体について加え合わせると断面全体の流量の誤差 ΔQ と δI の関係が定まる。各横断面の流速計算終了毎に (33)式により流速を補正する。

各断面の水位はこの段階では補正しない。 δI を一種のポテンシャルと考え、計算が下流端に達した後に、

$$H_j = H_{j+1} + \alpha \delta I_j \cdot \Delta x \quad (36)$$

により平均水位を補正する (α : 1 より小さい係数)。

4.3 石狩川下流部へのモデルの適用

図-10に矢臼場弯曲の代表的な横断面を示した。河岸付近に最深部を持つ蛇行流路特有の断面形が見られる。この深掘れが流路弯曲の変化に応じて右岸から左岸に移行している。北海道開発局ではこの区間の1/50の大型模型により流れの構造を調べている。この実験で得られた結果と本計算法で得られた計算値の比較を行う。計算に用いた横断線は序論の図-1中に示してある。計算点の数は横断方向に15点、深さ方向に9点である。

図-11は、 U の表面流速の比較である。両者の一致は良好で、5.6kmから5.2kmにおける最大流速点の移行がよく再現されている。

図-12に V の鉛直分布の計算値を示した。6.1kmでは全断面で $V > 0$ である。これは7～6kmの高水敷の形状により、流れが低水路を横切るためである。一方、5.25km～5.65kmでは、流路の曲がりによる遠心力によってほとんどの計算点で $V < 0$ となつている。これより更に下流でラセン流が発達し始める。

図-13は4～6kmの弯曲部のベクトル図である(河床に最も近い計算点で河床から約30cm)。主流がほぼ流路中央に沿っている。左岸付近は3つの部分に分けられる。第1は、5.2kmより上流で高水敷から低水路流の流入により流速は小さい。第2は、5.2～4.8kmで右岸に向かう二次流が発達する。第3は、4.8kmより下流で、主流が発達する。右岸では、5.2kmで流れが剥離して剥離渦が形成されている。4.6kmでは中州(点線で囲まれた部分)により流れが分割されている。

計算結果は実河川の蛇行流が非常に複雑な構造を持つことを示していめる。このモデルにより、複雑な蛇行流路における治水上の弱点となる地点の予測が可能になった。

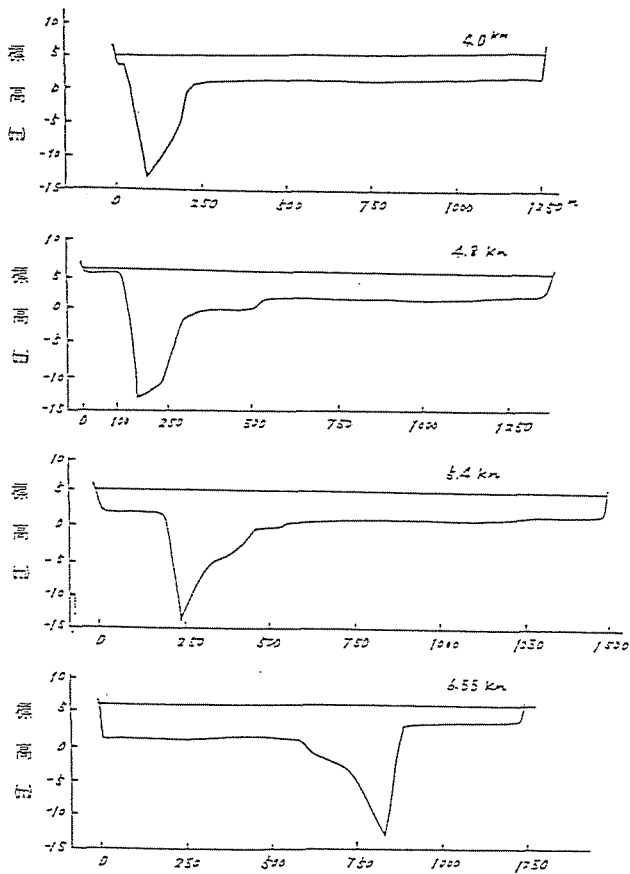
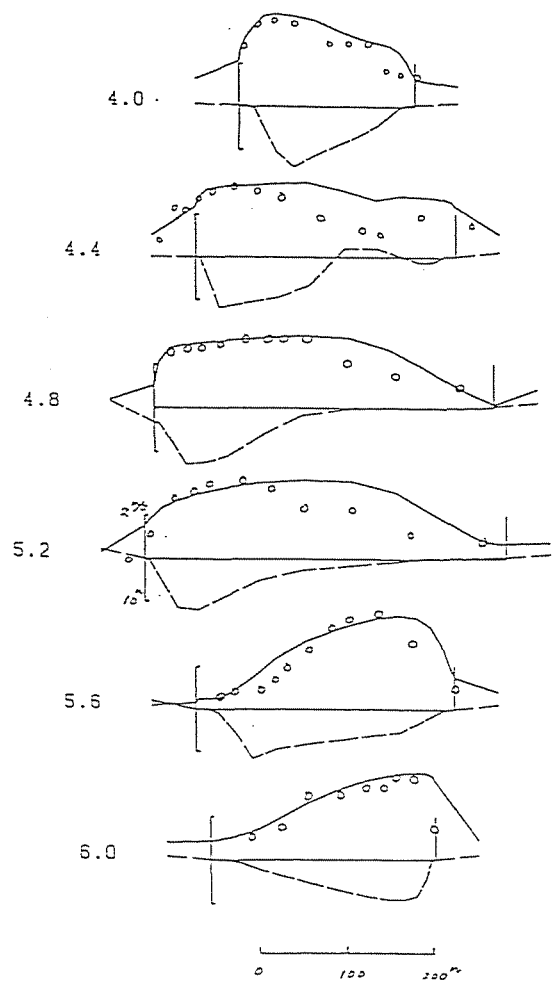
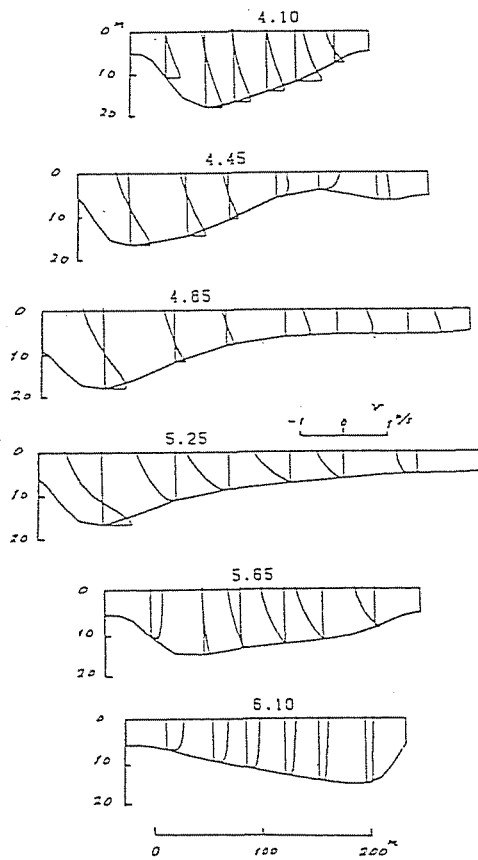


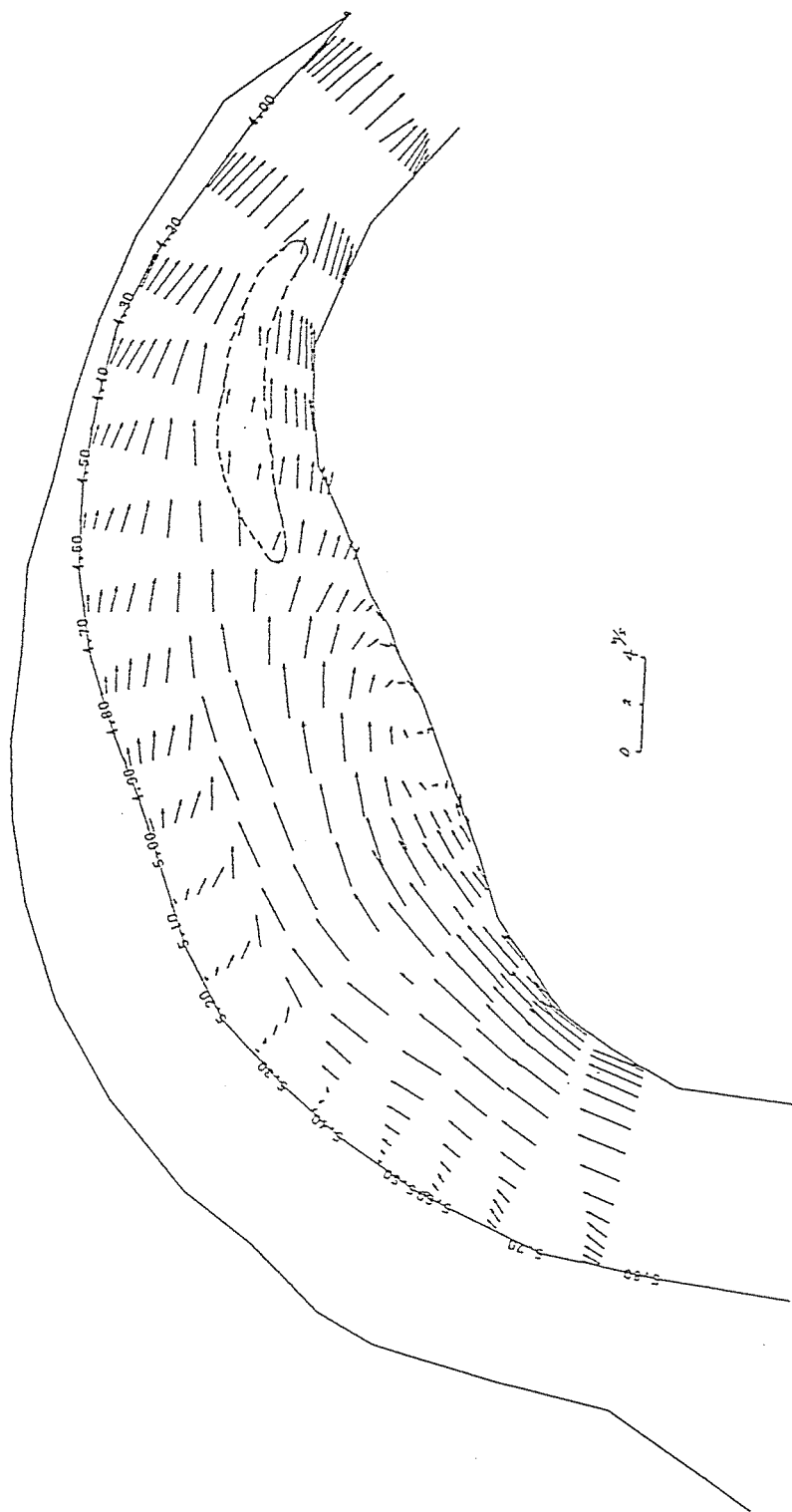
図-10 石狩川矢臼場弯曲の横断河床形



上：図-11 表面流速の計算値と実測値の比較



左：図-12 V-分布の変化
(計算値)



参考文献

- 1) 森： 弯曲・蛇行河道における三次元数値解、文部省科学研究費自然災害特別研究「沖積河川における洪水流の制御と治水安全度の向上に関する研究」（代表岸力）最終報告書、1988年.
- 2) 玉井： 連続体の力学(Ⅲ)、土木工学体系 7、1986年
- 3) 黒木、岸： 中規模河床形態の領域区分に関する研究、土木学会論文集、第342号、1984年
- 4) Speght: Meander spectra of the Angabunga river. J. Hydr. 3, 1965
- 5) Leopold and Wolman: River channel pattern-braided, meandering and straight, U.S.G.S Prof. Paper, 282B, 1957
- 6) F. Engelund: Flow and bed topography in channel bend, ASCE, NO. 11, 1974
- 7) 長谷川、岸： 蛇行河岸侵食係数に関する比較研究、文部省科研費特定(1)「比較河川学の研究」（代表岸力）最終報告書、1987年
- 8) I. L. Rozovskii: Flow of Water in Bends of Open Channels, Israel Program for Scientific Translation, 1961
- 9) Patanker and Spalding: A calculation procedure for heat, mass and momentum transfer in three dimensional parabolic flow, Int. J. Heat Mass Transfer, vol. 5, 1972
- 10) Harten, A.: On a class of high resolution total variation stable finite-difference schemes, SIAM J. NUMER. ANAL., vol. 21, No. 1, 1984
- 11) Sod, G. A.: Numerical methods in fluid dynamics, Cambridge University Press, 1984
- 12) Keller, H. B.: Accurate difference methods for two-point boundary-value problems, SIAM J. numerical analysis, Vol. 11, 305
- 13) Israeli and Orszag: Approximation of radiation boundary condition, J. of Comp. Physics, 41, 1981

はじめに

わが国では砂州河川が多い。砂州上の流れは蛇行して交互深掘れを生ぜしめ、河岸侵食の原因となる。故に、砂州が再現できる計算法である必要がある。一方、小規模河床波はその性質を調べる場合は別として、発生しても直ちに減衰する様にした方がよい。小規模河床波は流れの抵抗要素として働くが、これには抵抗則が使えるからである。

数値計算的にみると砂州も小規模河床波も擾乱である。数値計算の安定条件は擾乱の発達を抑えるものである。数値解析のこの性質に留意しつつ砂州を発達させ、小規模河床波の発達を抑制する差分法を考えなければならない。これを以下様に行う。

数値解析を行うときの擾乱の不安定には数値的不安定と物理的不安定がある。砂州に関する物理的不安定性を残し、数値的不安定は中立に近いものとする。小規模河床波の物理的不安定については特に考慮せず、数値的安定性を強くして発達を抑制する。

砂州的擾乱と小規模河床波的擾乱の区分は、伝播機構に着目して特性帯の理論と数値解を用いて行う。特性帯の理論で基本的特性を調べる。数値解で具体的な分析を行う。砂州の発達には側壁の存在が本質的である。数値解でこの効果を調べる。

以上の解析から流砂の連続式の差分法として主流方向には風上差分、横断方向には中央差分とする差分スキームが考えられた。経験的に、この差分法をとると砂州状の擾乱が発達することがわかっている。

本章での解析は浅水流式の線形解析に基づいて行う。最近の砂州に関する理論的研究は非線形解析に重点が移りつつある。しかし、黒木、岸⁴⁾の理論から、河床波の領域区分については、線形解析で充分正確に推定できることがわかっているからである。

5.1、5.2で、砂州的擾乱と小規模河床波的擾乱を区分する。河床波擾乱の伝播機構と流砂の関係を調べ、差分スキームの基本的骨組みを提示する。5.3で砂州発達の物理的要因を考察して差分スキームが満たすべき条件を明らかにする。

ここに、 $F_1 = 1 - F^2$

(X, Y) は t を固定して λ を変えると
 図-1 の様な曲線を描く ($t=0$, x 軸を中心
 に左右対称なので $y > 0$ の部分のみ
 示す)。これは点擾乱が伝播するときの峰
 の連なりに相当する。図中の実線は $F=0.5$ 、
 点線は $F=1.5$ である。(X, Y) 線は
 $x = a / F \cdot t$ で x 軸と直交する。この点
 を P 点、この波速で伝わる波動を P 波と呼
 ぶことにする。また、(X, Y) 線は $x = b t$
 で x 軸と接する。この点を S 点、この
 波速で伝わる波動を S 波と呼ぶことにす
 る。これらの波動の物理的意味は (X, Y)
 線の形状から次の様に考えられる。

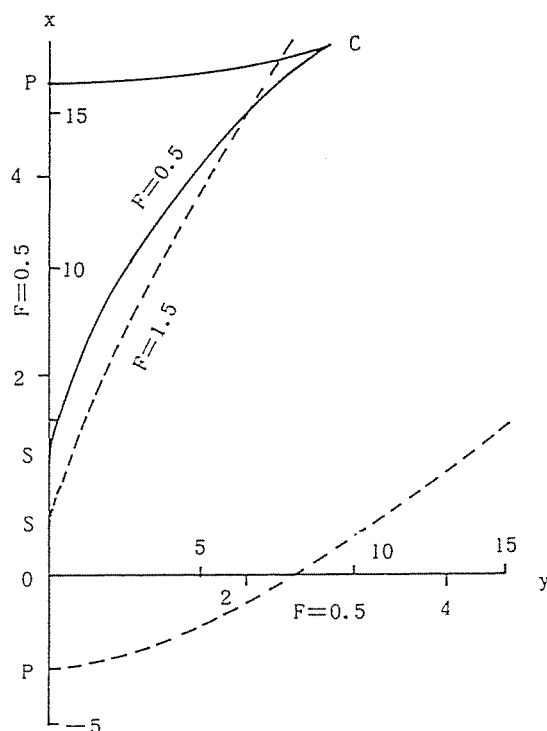


図-1 (X, Y) 線

P 波は横断方向に一次元的な峰線を持つ
 波動である。S 波は S-C 線 (C 点は P 点および S 点からのびる (X, Y) 線の
 接点) も含めて考えると主流を斜めに横切る二次元的な峰線を持つ波動である。
 常流と射流の (X, Y) 線を比較すると、P 波は常流では下流に、射流では上流
 (P 点付近) に伝わる。一方、S 波は常、射流いすれも下流に伝わる。これらの
 形状および伝播特性から P 波は小規模河床波、S 波は中規模河床波に対応する性
 質をそれぞれ持っていることがわかる。

5.2 一定幅水路における二次元擾乱の伝播

水路床左岸 (原点) に次式で与えられる有限擾乱をおいたときの擾乱の伝播構
 造を数値解析で調べる。

$$\eta = [1 + \cos(2\pi r / L)] / 2 \quad \text{for } r \leq L/2$$

$$\eta = 0 \quad \text{for } r \geq L/2$$

$$r^2 = x^2 + y^2$$

計算法の詳細は Appendix 3 に示す。

5.4 ではこれらの結果に基づいて、差分法の提示と、安定条件の検討を行う。

5.5 に、長谷川⁵⁾の ME-1 (砂州) と Hooke⁶⁾の Run-20 (非砂州) に本計算法を適用した結果を示す。

二次元河床変動計算で重要な斜面上流砂の計算法については Appendix 1 に示す。

5.1 点擾乱の伝播特性

河床波の発生、発達に関しては重力や底面摩擦は重要な要素である。しかし、擾乱の伝播について見れば第 1 位の要素ではない。擾乱の伝播機構と、擾乱の伝播過程において擾乱が発達するかどうか、は別問題である。そこで、本節と次節では伝播機構のみに着目することにして、運動方程式からこれらの項を除く。基礎方程式は、流砂の連続式、運動方程式 (x -, y -方向)、流れの連続式。

$$\eta_t + a u_x + b v_y = 0 \quad (1.1) \quad F^2 u_x + \xi_x = 0 \quad (1.2)$$

$$F^2 v_x + \xi_y = 0 \quad (1.3) \quad \xi_x + u_x + v_y = \eta_x \quad (1.4)$$

上式において、全ての変量が平均流速、平均水深で無次元化されている。 F : フルード数、 a , b : 流砂量を u のべきで表すことによる係数で、常数とし、 $a = 4$, $b = 1$ とする ((1.1)式の誘導は Appendix 2)。

特性帯の理論を用いてこの方程式系の伝播特性を調べる。(8)式の特性曲面 ϕ の特性条件は、

$$\begin{vmatrix} \phi_t & a\phi_x & b\phi_y & 0 \\ 0 & F^2\phi_x & 0 & \phi_x \\ 0 & 0 & F^2\phi_y & \phi_y \\ -\phi_x & \phi_x & \phi_y & \phi_x \end{vmatrix} = 0 \quad (2)$$

特性曲線は特性微分方程式

$$\frac{dt}{F_1\phi_x^2 + \phi_y^2} = \frac{dx}{2F_1\phi_t\phi_x + b\phi_y^2 + 3a\phi_x^2} = \frac{dy}{2\phi_t\phi_x + 2b\phi_x\phi_y} = \frac{d\phi}{0}$$

から得られる。これを解くと、時間 $t = 0$ に原点においた擾乱が時間 t 後に到達する地点 (X , Y) はパラメータ λ を用いて (3) 式で与えられる。

$$X = \frac{aF_1 + (3a - bF_1)\lambda^2 + b\lambda^4}{(F_1 + \lambda^2)^2} t \quad (3)$$

$$Y = \frac{2\lambda(bF_1 - a)}{(F_1 + \lambda^2)^2} t$$

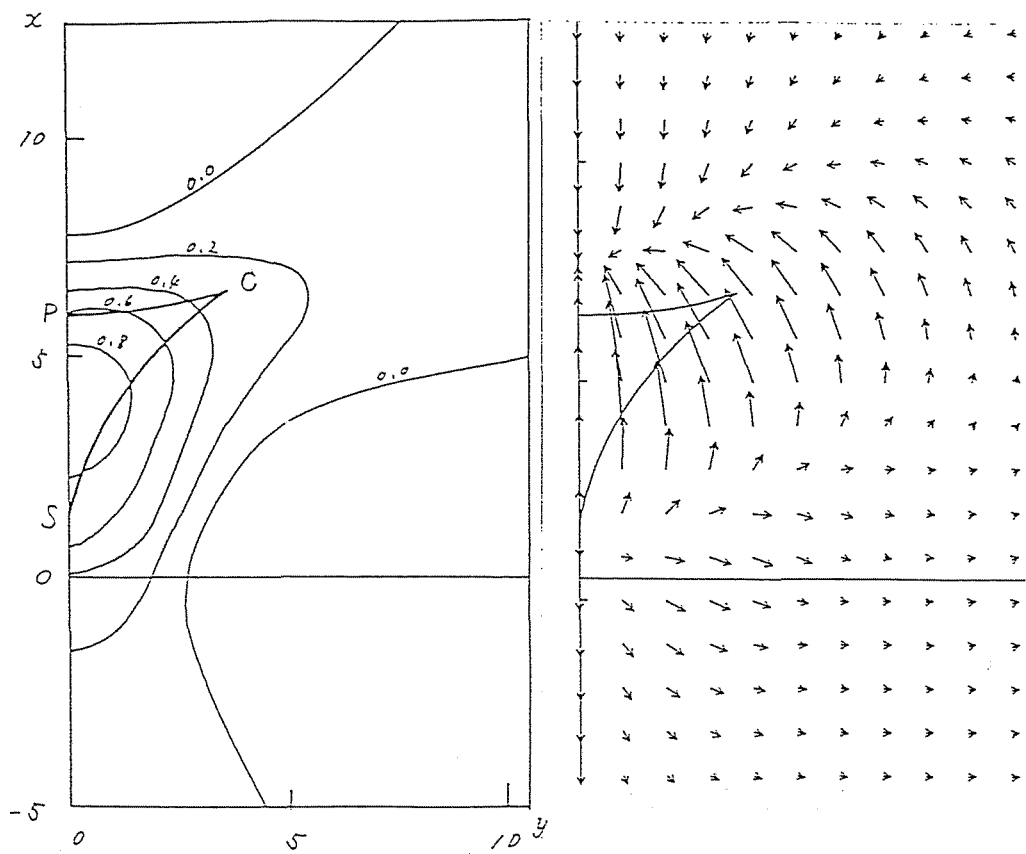


図 - 2 $t=0.94 (L=6)$ のときの η の等高線と変動流速ベクトル

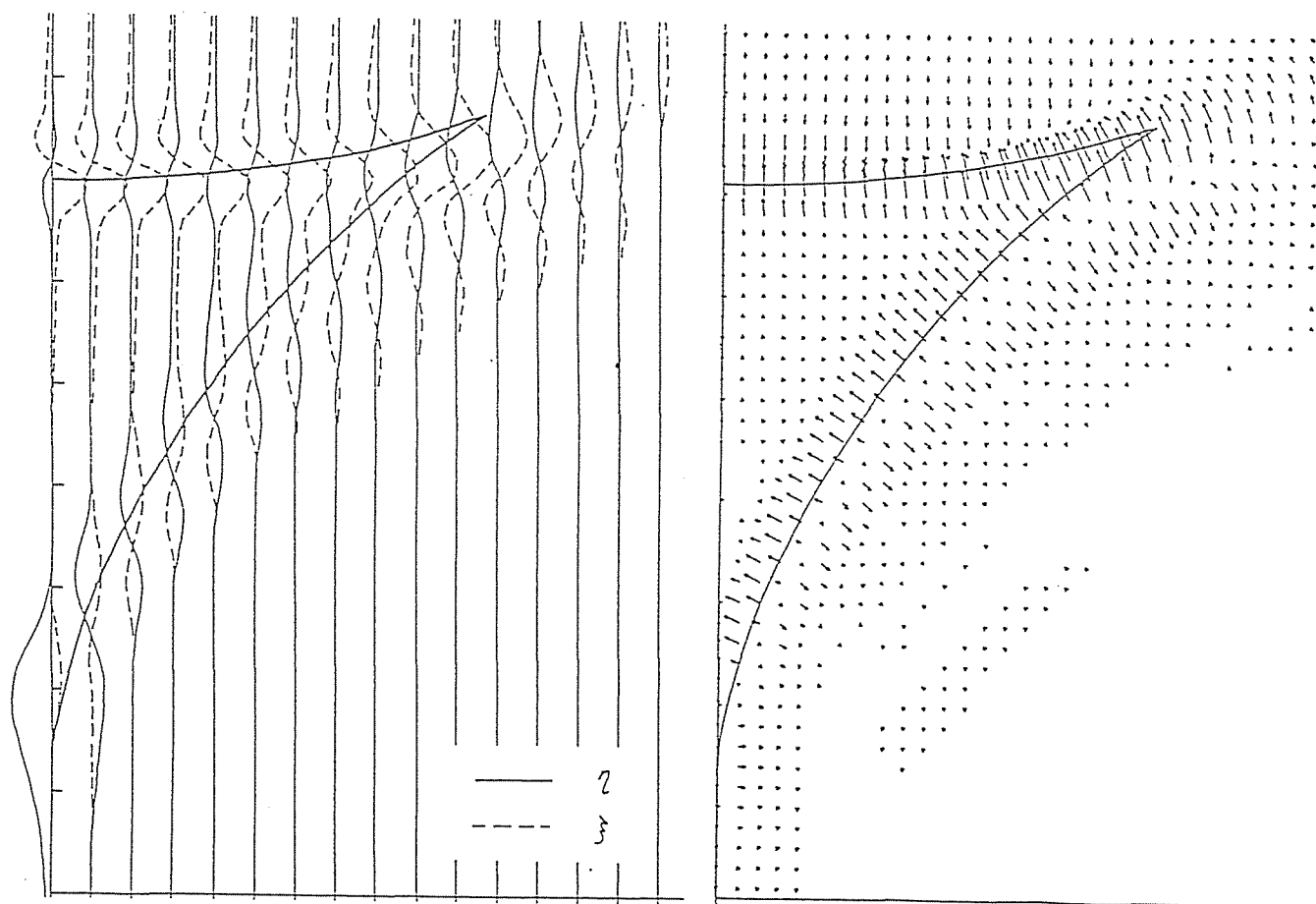


図 - 3 $t=6.56 (L=6)$ のときの η , ξ の縦断面図と変動流速ベクトル

5.2.1 $F < 1$ の場合

図-2に、 $t = 0.94$ ($L=6$, $t=0$ に通水開始)のときの η の等高線と変動流速のベクトル図を示した。比較のため(X , Y)線も示してある。

擾乱は下流方向と同時にC点方向にも伝播している。この方向は変動流速ベクトルに直交する。図-3 ($t=6.56, L=6$)からわかる様に、C点方向に伝播しつつ、P波、S波の2つに分裂して、S-C線とP-C線を形成する。これから擾乱が二次元的な広がりなす上にC点の伝播が重要な働きをしているのがわかる。

擾乱が右岸に達すると(図-4)、反射して左岸に向かう。左岸に達すると交互深掘れが形成される(図-5: このときの初期擾乱はくぼみである)。

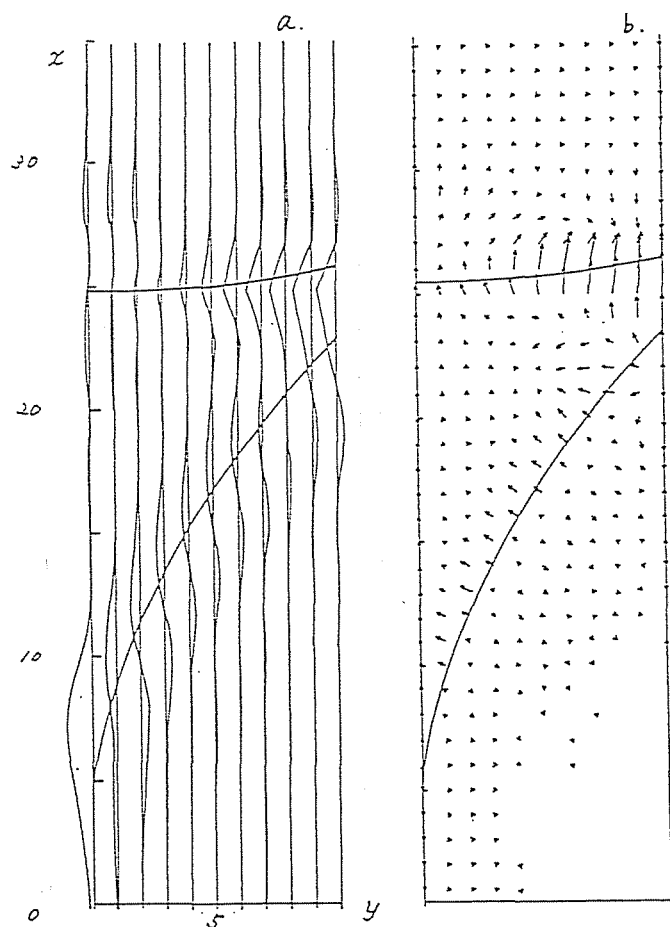


図-4 擾乱の河岸における反射

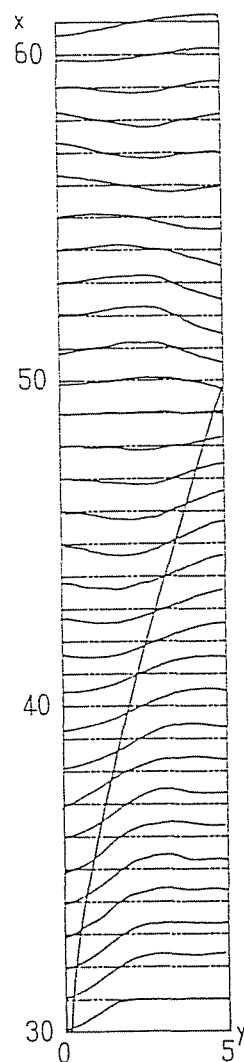


図-5 交互深掘れの形成

5.2.2 $F > 1$ の場合

$F < 1$ では、 $S-C$ 線と $P-C$ 線の形状が大きく異なるので両者の判別に問題は無い。しかし、 $F > 1$ では図-6に示す様に、 $Y \rightarrow$ 大になると両者の形状は似ており、特性曲線の伝播方向も共に下流である。

両者を判別するのに次の2つの特徴が利用できる (Appendix 4)。

- 1) y を固定して擾乱を見ると、伝播方向は、 S 波は下流、 P 波は上流である。
- 2) 水面と河床の位相関係は、 S 波は逆位相、 P 波は同位相である。

図-7は、通水初期 ($t=0.0381, L=5, B=10$) の摂動流速ベクトル図である。河床擾乱の下流側から発生する衝撃波が図中の実線で示す様な波面をもって下流に広がっている。この波面の傾きは Airy 波のものに一致する。この流れに対応して河床擾乱は直ちに流路の下流側全域に広がる。

図-8に $t=0.762$ での η の峰線 (実線) と谷線 (点線) を示した。斜め交錯縞を描き、その傾きは Airy 波のものに一致する。最大波高のものを結ぶと蛇行している (太い実線)。時間経過を追うと、太い実線は下流に、細い実線は上流に向

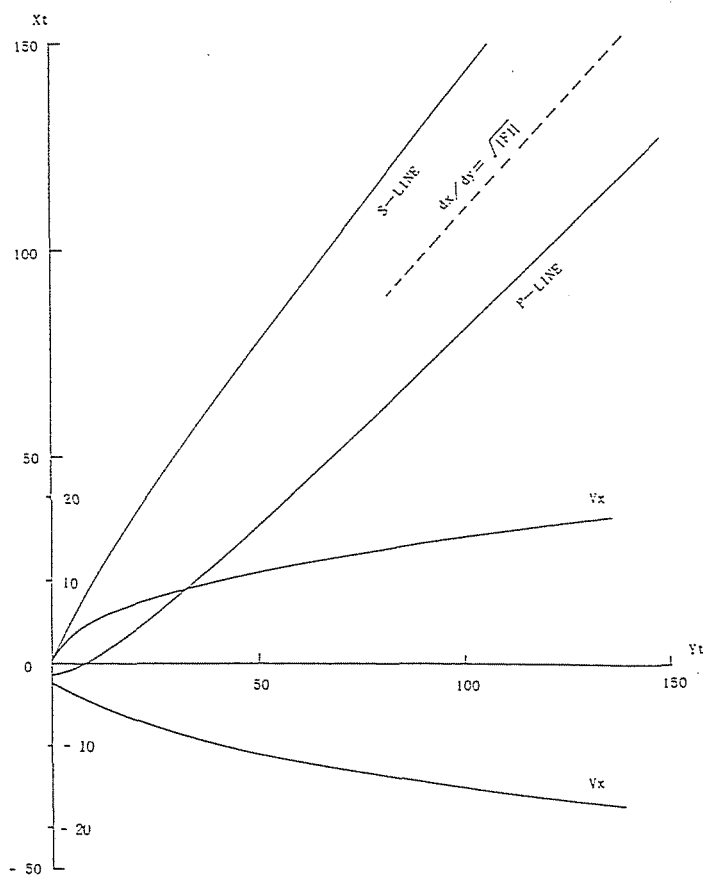
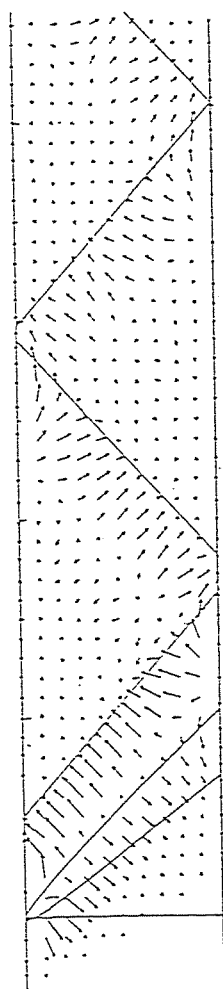


図-6 射流 ($F=1.5$) の (X , Y) 線と V_x

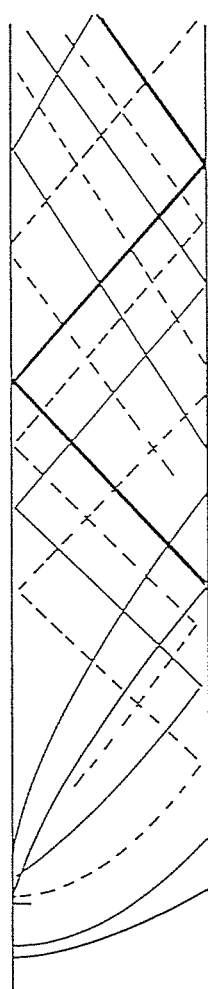
かう。更に時間が経過すると細い実線は消滅し、太い実線は交互の深掘れを形成する（図－9）。これらの2つの波動は、前述1）のS波、P波の判別法を用いると、上流に伝播するものはP波、下流に伝播するものはS波と判断される。

以上の常流と射流での数値解析から、S波はFによらず下流に伝播し、交互深掘れを形成することがわかった。これは砂州の性質に一致する。

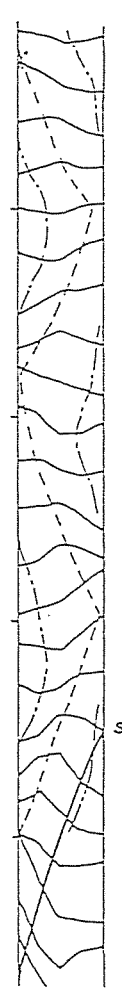
S波の波速は b である。（1-1）式を見れば v の作用による横断流砂がS波にかかわっているのがわかる。伝播機構は次の様である。図－10は円形の河床擾乱の周りの擾乱流速のベクトル図（数値解）である。上流側半分では $v > 0$ で $\eta \rightarrow$ 減、下流側半分では $v < 0$ で $\eta \rightarrow$ 増 に作用しており、結果として擾乱を下流方向に移動させる。



図－7 通水初期の流速
ベクトル（ $t=0.0381$ ）



図－8 η の峰線と
谷線（ $t=0.762$ ）



図－9 η の横断図
（ $t=3.81$ ）

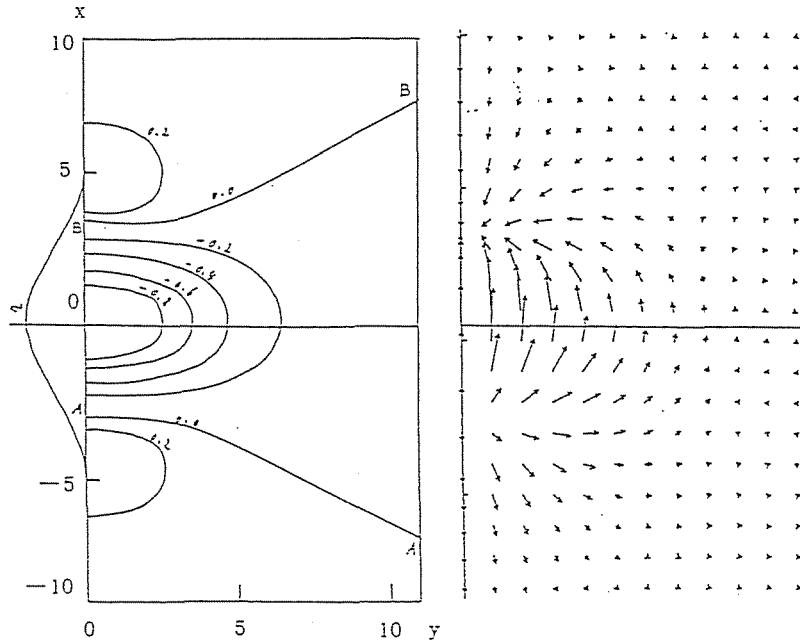


図-11 a: ξ の等高線、 b: 流速ベクトル図

本節と前節での考察から流砂の連続式の差分として次の差分法が考えられる。
 x 方向には安定性の強い風上差分をとり、 y 方向には不安定性の強い中央差分をとる。これにより P 波、従って小規模河床波の発達を抑制し、S 波、従って砂州の発達を助長することが期待できる。

S - C 線の形成要因は上述の様に横断方向流砂がかかわるが、実際には下流方向流砂との複合作用である。図-3 の擾乱流速のベクトル図（数値解）から下流方向の流砂が卓越するのが容易に推察できる。従って、中央差分による河床波の発達作用はそれほど強いものではない。

5.3 砂州の発達に及ぼす重力および低面摩擦の効果

5.1、5.2 節では擾乱の伝播機構を調べた。本節では擾乱の発達機構を調べる。基礎方程式は 5.1、5.2 節と同様に、流砂および浅水流の線形化方程式 (4.1) ~ (4.4) (流砂の連続式、 x および y 方向の運動方程式、流れの連続式) であるが、重力項および摩擦項が加わる ((4.1) 式の誘導は Appendix 2)。

$$\eta_t + a u_x + b v_y = \eta_{yy} / \gamma \quad (4.1)$$

$$F^2 u_x + \xi_x = -I_0 (2u - \xi + \eta) \quad (4.2)$$

$$F^2 v_x + \xi_y = -I_0 v \quad (4.3)$$

$$\xi_x + u_x + v_y = \eta_x \quad (4.4)$$

河床波の発達に及ぼす重要な流砂現象は、“重力効果”と“流砂と河床波形間の位相差”である。(4.1)式右辺が前者を表す。後者は考慮しない。この効果は小規模河床波の発達において重要な要素であるが砂州の発達に与える影響は小さいからである。

河床擾乱をフーリエ成分に分解して安定解析を行う。これは、Von Neumannの方法による差分の安定条件の検討に対応させるためである。砂州および小規模河床波に対応する k_x , k_y を以下の様に与える。ただし、前節との対応から、 k_x , k_y の絶対値より両者の比

$$k_r = k_y / k_x$$

に着目する。

砂州の x および y 方向波長 L 、 l は、典型的な砂州を考えると

$$l = 2B, \quad L / (2B) = 3 \sim 10, \quad B/h = 10 \sim 100.$$

これから

$$O[k_x] = 10^{-2}, \quad O[k_y] = 10^{-1}$$

である(波長は h で無次元化している)。これに対して小規模河床波では

$$L/h \sim 5, \quad \text{従って} \quad O[k_x] = 1.$$

k_y については様々なスケールがあり確定できない。そこで、 k_y は単に有限とすることにし、

$$\text{砂州では} \quad k_x \rightarrow 0, \quad \text{従って、} \quad k_r \rightarrow \infty$$

$$\text{小規模河床波では} \quad k_x \rightarrow \infty, \quad \text{従って、} \quad k_r \rightarrow 0$$

とする。 $k_r \rightarrow$ 大は峰線が流れ方向に連なる擾乱、 $k_r \rightarrow$ 小は峰線が主流を横断する擾乱であるから、おおむねそれぞれの平面形を表すものと考えられる。

$$u(x, y, t) = \hat{u} \exp[i(k_x x + k_y y - \sigma t)]$$

$$u = \begin{vmatrix} \eta \\ u \\ v \\ \xi \end{vmatrix} \quad \hat{u} = \begin{vmatrix} \hat{\eta} \\ \hat{u} \\ \hat{v} \\ \hat{\xi} \end{vmatrix} \quad (5)$$

とおきこれを(4)式に代入すると(6)式が得られる。

$$D \cdot \hat{u} = 0 \quad (6)$$

$$D = \begin{vmatrix} \omega & -1 & -b & 0 \\ -i I_k & F^2 - 2i I_k & 0 & 1+i I_k \\ 0 & 0 & F^2 - i I_k & \Delta_r \\ -1 & 1 & r & 1 \end{vmatrix}$$

ここに、 $\omega = -\frac{\sigma}{a k_x} - i \frac{k_y^2}{a k_x \gamma}$ 、 $I_k = \frac{I_a}{k_x}$ 、 $\Delta_r = \frac{\Delta x}{\Delta y}$

である。上式の第1式を次の様に変換する。

$$\sigma = -a k_x \omega - i k_y^2 / \gamma \quad (7)$$

河床擾乱は $\sigma_1 = \text{Im}g(\sigma)$ が負のとき減衰し、正のとき増幅する。

$$\sigma_1 = \sigma_{11} - k_y^2 / \gamma, \quad \sigma_{11} = -a k_x \omega_1 \quad (8)$$

と書くと、重力項は $\gamma > 0$ から常に $\sigma_1 < 0$ で、安定化の方向に働くのがわかる。

ω は、 $\hat{u}$ が恒等的に0でない条件 $|D| = 0$ から決まる。

$$\omega = \frac{B_3 + i I B_2}{B_1} \quad (9)$$

ここに、 $B_1 = A_{uu} A_v - A_{uh} A_v - k_r^2 A_{uu}$,

$$B_2 = k_r^2 - b k_r - A_v,$$

$$B_3 = k_r b A_{uu} - A_{uh} A_v,$$

$$A_{uu} = F^2 - 2i I, \quad A_{uh} = 1 + i I, \quad A_v = F^2 - i I,$$

$$b = k_r b / a, \quad I = I_a / k_x$$

(9)式から ω_1 を求めると、 I に関する項 σ_{11} は、 k_r により符号が変わり、

$$k_r \rightarrow 0 \text{ のとき } \frac{\sigma_{11}}{a k_x} = - \frac{3 I_k}{F_1^2 + 9 I_k^2} < 0$$

$$k_r \rightarrow \infty \text{ のとき } \frac{\sigma_{11}}{a k_x} = \frac{(1-b/a) I_k F^2}{F^4 + 4 I_k^2} > 0 \quad (10)$$

従って、摩擦項は、小規模河床波動的擾乱に対しては安定側、砂州的擾乱に対しては不安定側に作用する。

本研究の差分法においては物理的な安定または不安定機構として以上の重力および底面摩擦の効果を持たせる。

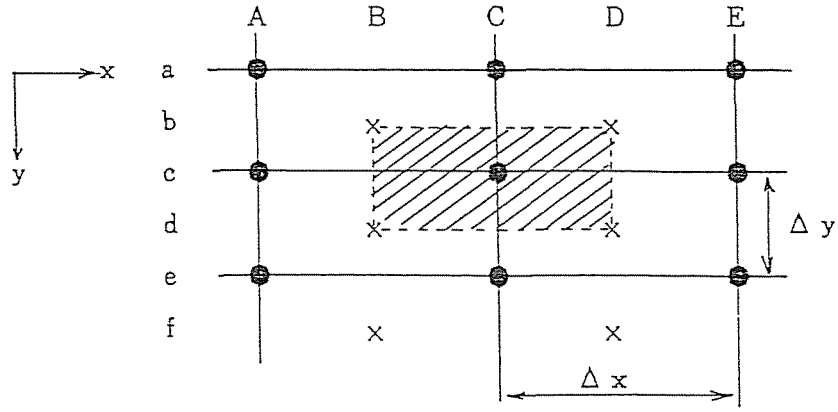


図-11 MK法の計算点の配置

●: ξ の計算点、×: U, V, η の計算点の配置

5.4 差分法と安定条件

η の計算点を U, V の計算点と同一点にとり (図-11)、以下の様に差分化する。

$$\begin{aligned} & \frac{(\lambda \eta_{Dd} - \eta_{Dd})}{\Delta t} + \frac{a(u_{Dd} - u_{Bd})}{\Delta x} + \frac{b(v_{Df} - v_{Db})}{2\Delta y} \\ &= \frac{[\theta \lambda + (1 - \theta)] (\eta_{Fd} - \eta_{De} + \eta_{Bd})}{\gamma \Delta y^2} \\ & \frac{(u_{Db} - u_{Bb})}{\Delta x} + \frac{(\xi_{Ea} + \xi_{Ec} - \xi_{Ca} - \xi_{Cc})}{2\Delta x F_2} = -I_B (2u_{Db} - \frac{\xi_{Da} + \xi_{De}}{2} + \eta_{Db}) \quad (11) \\ & \frac{(v_{Db} - v_{Bb})}{\Delta x} + \frac{r(\xi_{Ec} + \xi_{Cc} - \xi_{Ea} - \xi_{Ca})}{2\Delta y F_2} = -I_B v_{Db} \\ & u_{Db} + u_{Dd} - u_{Bb} - u_{Bd} + (v_{Dd} + v_{Bd} - v_{Db} - v_{Bb}) \Delta x / \Delta y \\ & + \xi_{Ec} + \xi_{Cc} - \xi_{Ca} - \xi_{Cc} = \eta_{Dd} + \eta_{Db} - \eta_{Bb} - \eta_{Bd} \end{aligned}$$

流砂の連続式の右辺の η は、 $\eta \rightarrow \theta \eta^{n+1} + (1 - \theta) \eta^n$, (ただし、 θ は $0 < \theta < 1$ の 常数) とおく。

(11)式の安定条件を Von Neumann の方法で調べる。(5)式において $t = n \Delta t$, $\exp(-i\sigma \Delta t) = \lambda$ とおくと、

$$u(x, y, t (=n\Delta t)) = \sum u \lambda^n \exp[i(k_x x + k_y y)] \quad (12)$$

(12)式を(11)式に代入すると(13)式が得られる。

$$D \cdot u = 0 \quad (13)$$

$$D = \begin{vmatrix} \omega & ES_p & bS_qC_q & 0 \\ -iI_* & A_{uu} & 0 & A_{uq} \\ 0 & 0 & A_v & \Delta_r S_q C_p \\ -C_q S_p & C_q S_p & \Delta_r C_p S_q & S_p C_p \end{vmatrix}$$

ここに、 $c = \Delta x / \Delta t$, $E = \exp(-ip)$, $\Delta_r = \Delta x / \Delta y$, $p = k_x \Delta x / 2$, $q = k_y \Delta y / 2$, $S_p = \sin p$, $S_q = \sin q$, $C_p = \cos p$, $C_q = \cos q$, $I_* = I_e \Delta x / 2$, $A_{uu} = F^2 E S_p - 2iI_*$, $A_{uq} = (S_p + iC_p I_*)C_q$, $A_v = F^2 E S_p - iI_*$ であり、

$$\omega = [(\lambda - 1)c + \frac{4\Delta_r}{\gamma \Delta y} S_q^2 (\theta \lambda + 1 - \theta)] / 2ia \quad (14)$$

である。(15)の諸量を導入して(14)式を(16)式に書き換える。

$$T_* = a \Delta t / \Delta x, \quad x = 4 \Delta_r / (c \gamma \Delta y), \quad (15)$$

$$e = 1 + \theta x S_q^2, \quad f = 1 - (1 - \theta)x S_q^2$$

$$|\lambda|^2 = [4|\omega|^2 T_*^2 - 4f\omega_1 T_* + f^2] / e^2. \quad (16)$$

ここに、 $\omega = \omega_R + i\omega_I$.

安定条件は

$$|\lambda| \leq 1 + O[\Delta t] \quad (17)$$

(16)式中の ω は、 u が恒等的に0ではない解を持つための条件 $|D| = 0$

から

$$\omega = \frac{C_q B_3 + i C_p I_* B_2}{B_1} S_p \quad (18)$$

ここに $B_1 = A_{uu} A_v S_p C_p - A_{uu} \Delta_r^2 C_p^2 S_q^2 - A_{uq} A_v C_q S_p$

$$B_2 = \Delta_r^2 E C_p S_q^2 - A_v E S_p - \Delta_r b S_q^2 C_q^2$$

$$B_3 = A_{uq} A_v E S_p + A_{uu} \Delta_r b S_q^2 C_p C_q$$

p , q の取り得る全ての値 $-\pi/2 \sim \pi/2$ に対して(17)式を満たす様に Δt を与えなければならないが、 p , q に関して ω_R は偶関数、 ω_I は奇関数であることから、 p , q の $0 \sim \pi/2$ の範囲のみを考えればよい。

ここで、 θ に関して最も安定性の高い差分をとり、 $\theta = 1$ とする。安定条件は(19)式となる。

$$|\lambda|^2 = \frac{4|\omega|^2 T_*^2 - 4\omega_1 T_* + 1}{e^2} < 1 + O[\Delta t] \quad (19)$$

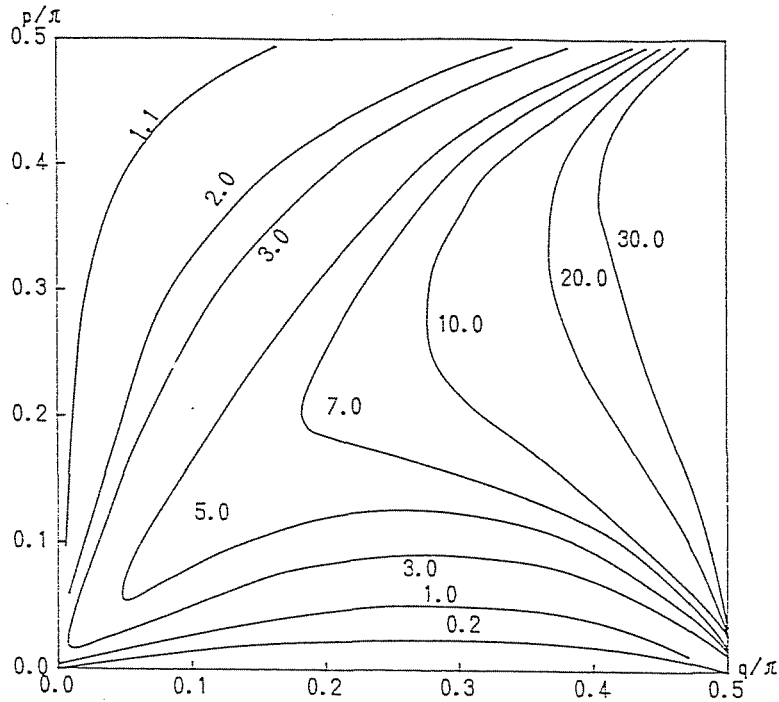


図-12 重力やIの項を除いたときの $T_*s (= \omega_1 / |\omega|)$ のコンター

(19)式は、重力項により $|\lambda|$ が減少すること、従って、重力項が安定化の方向に働いていることを示している。

前節と同様にしてIの働きを調べる。 $k_y \rightarrow$ 有限は $q \rightarrow$ 有限 に対応する。
 $k_r \rightarrow \infty$ は $P \rightarrow 0$ に対応する。 $k_r \rightarrow 0$ については $P \rightarrow \pi/2$ に対応させる。これらの値に対する $|\lambda| [= \exp(\sigma_1 \Delta t)]$ の値は、

$$p \rightarrow \pi/2 \quad \text{のとき} \quad \omega = i$$

$$p \rightarrow 0 \quad \text{のとき} \quad \omega = (1 - 3b/a \cdot C_q^2) S_p / 2 > 0$$

である。Iの作用のみを取り出すために(19)式において $e = 1$ とおいて重力作用を除くと、

$$|\lambda|^2 = 4 |\omega|^2 T_*^2 - 4 \omega_1 T_* + 1$$

ここで、 $T_* = 1$ とおけば、

$$p \rightarrow \pi/2 \quad \text{のとき} \quad |\lambda|^2 = 1$$

$$p \rightarrow 0 \quad \text{のとき} \quad |\lambda|^2 \geq 1$$

となり、小規模河床波的擾乱に対して中立、砂州的擾乱に対しては不安定である。

以上から重力の働きが(4)の基礎式と(11)の差分式で一致すること、また、
 $T_* = 1$ とおけば、Iについても同じことが言えるのがわかる。

ここで、(19)式において $|\lambda| = 1$ となる T_* を T_*s と書くと

$$T^*s = \frac{\omega_1 + [\omega_1 + |\omega|^2(e^2 - 1)]^{1/2}}{2|\omega|^2} \quad (20)$$

$T^* \leq T^*s$ にとると $|\lambda| \leq 1$ となる.

重力や I の項を除いたときの $T^*s (= \omega_1/|\omega|)$ のコンターを図 - 12 に示した. これらを除くと $\sigma_1 = 0$ [(8)式] となるから基礎方程式の厳密解では η は減衰も増幅もしない. 図からわかるように $p \neq 0$ を除いて、ほとんどが $T^* > 1$ である. $p \neq 0$ は砂州に対応する擾乱である. 従って、 $T^* = 1$ とすると砂州を発達させ、小規模河床波の発達を抑制することが期待できる.

以上から $T^* = 1$ を選ぶ. このとき安定条件は

$$\Delta t \leq \Delta x / a$$

となる. これは一次元河床変動計算における安定条件に対応する.

5.6 計算例

砂州が発生した長谷川の ME-1 と dune が発生した Hooke の Run20 の再現計算を行う. これらの実験は蛇行流路で行われている. 蛇行流を選んだのは、蛇行角がある限界角を越えると砂州の前進が停止するためである. このことにより実測値と計算値の比較が容易になる.

蛇行流路と直線流路の砂州について以下の研究がある.

木下⁹⁾は、自由蛇行の実験で、初期直線流路に砂州が発生すると水衝部から欠け込みが起こって流路は蛇行し始めるが、砂州の特徴は維持されることを見いだした. また、側壁拘束の流路で同様の実験を行い、蛇行流路と直線流路に発生する砂州が本質的に同じものであると判断した.

長谷川⁸⁾も木下と同様に直線と蛇行の拘束流路で実験を行い、得られた河床形を二重フーリエ級数に展開して比較し、蛇行流路では”水みち”が大きくなる点が見られたが大略は同じで、形成の基本的要因は同じと結論した.

表 - 1

	蛇行角 (°)	水路幅 (cm)	蛇行長 (cm)	d _m (mm)	流量 (l/s)	平均水深 (cm)	平均流速 (cm/s)	水面勾配
ME-1	30	30	220	0.43	0.751	0.89	32.2	0.0141
RUN-20	55	100	1320	0.30	20.0	7.3	27.5	0.0021

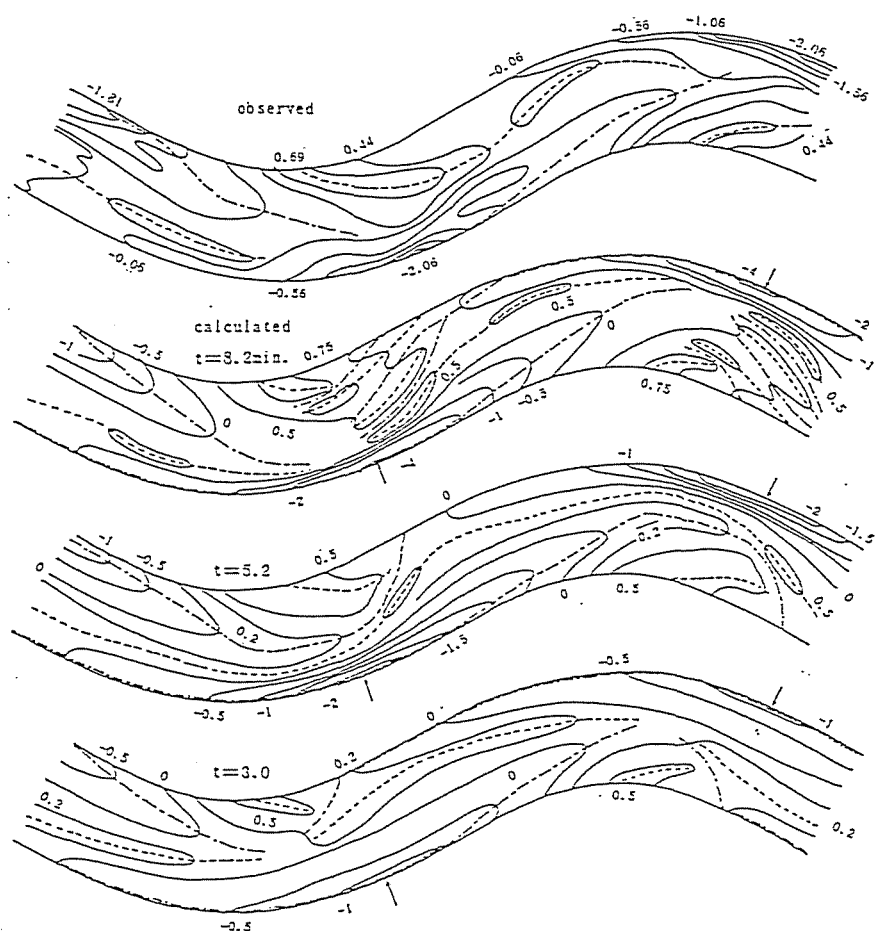


図 - 13 ME-1の河床高の実験値と計算値の比較

黒木、岸⁹⁾は、これらの点に着目して直線流路での河床形態の領域区分理論を作り、直線流路と同時に蛇行河川についても河床形態をうまく説明できることを示した。表 - 1 に両実験の水理条件を示す。黒木、岸の理論から ME-1 は砂州、Run20 は非砂州と判定される。

蛇行流路の非砂州河床はラセン流の作用により交互深掘れが発生して、砂州と平面形状の似た point bar が形成される。長谷川によると水みちの形成が砂州の特徴であり、これに着目すれば両者が判別できる。

河床波の比較：図 - 13、14に ME-1 と Run-20 の河床高 η の計算値と実測値の比較を示した（図中の点線は峰線、一点鎖線は谷線、ME-1 の t は通水時間で初期河床は矩形）。ME-1 では水みちがよく再現され、また、峰線や深掘れ、堆積の位置もよく一致している。RUN-20 は水みちがなく、全体的な形状が砂州と異なる。内岸側を除くと峰線は全ての領域で河床は内岸から外岸に向かって低下する。深掘れ部の河床横断勾配が堆積部より大きいため、両者の境界は前縁状を呈する。これらの特徴がよく再現されている。

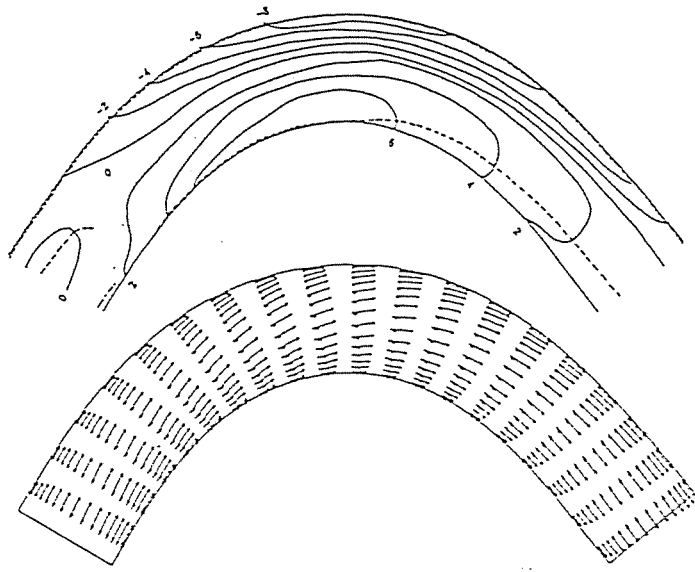


図 - 14 Run-20の河床コンター図と水面および河床の流速ベクトル図

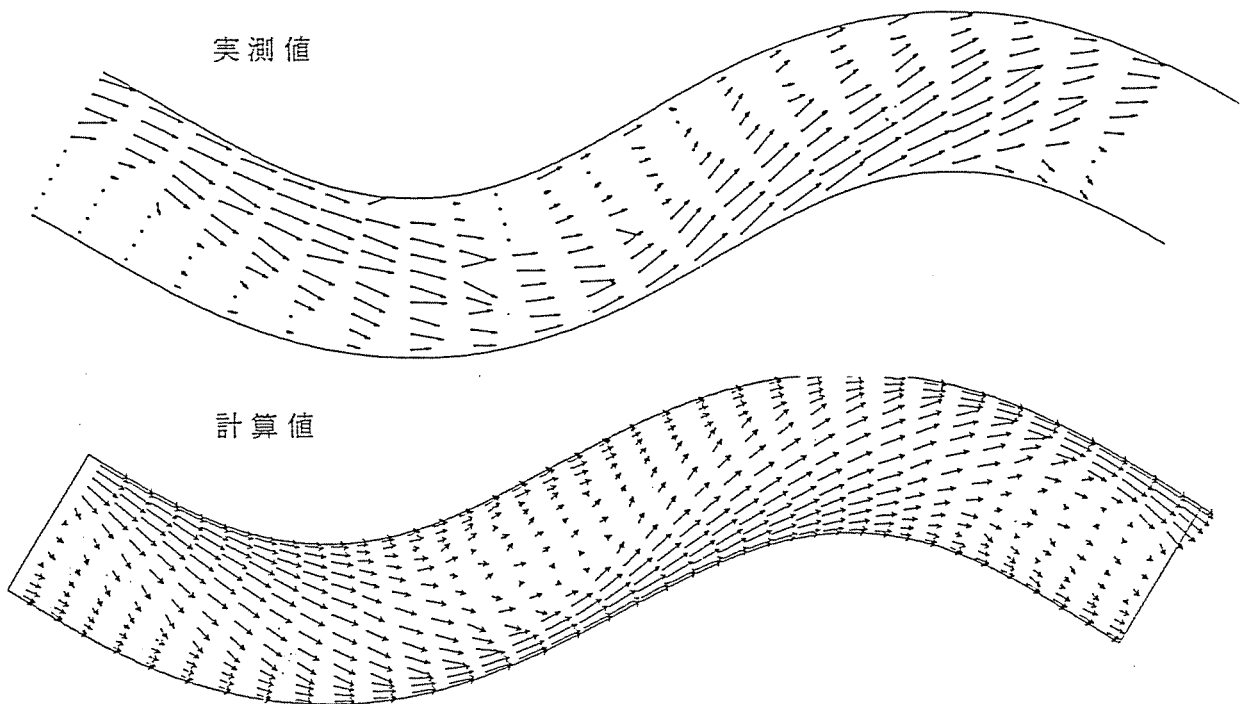


図 - 15 平均流速ベクトル図の実測値と計算値の比較 (ME-1)

図 - 15は、ME-1の平均流速ベクトルの比較である。流れが深掘れから深掘れへ河道を横断し、深掘れに集中する様子がよく再現されている。また、水うらに若干の流れがある点もうまく再現されている。

図-16は、ME-1の水面と河床の流速ベクトルの時間変化である。矩形断面のとき ($t=0$) は図-14に示した非砂州の場合と同様にラセン流が一様に発達している。

しかし、河床の洗掘、堆積が始まると、深掘れから深掘れに向かう“水みち”に沿って流向は全水深一様になる。水衝部においてのみ強いラセン流が発生している。

これらも砂州と非砂州の流れの特徴をよく表している。

以上の比較から本計算法により砂州と非砂州の違いがよく再現されているのがわかる。

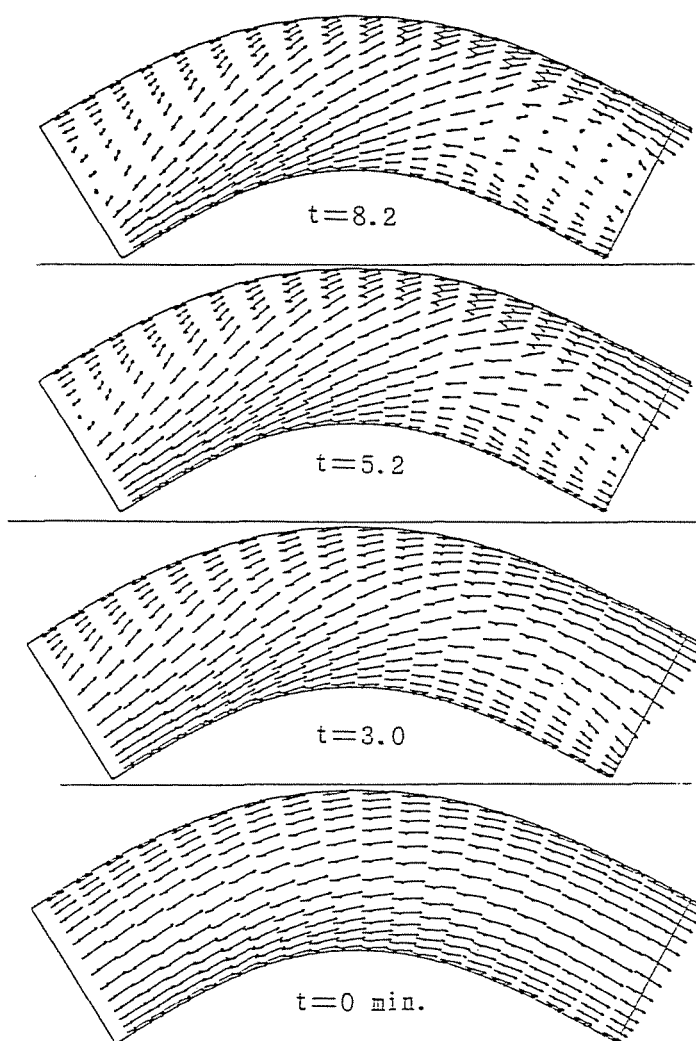


図-16 水面と河床の流速ベクトルの時間変化

参考文献

- 1) 森、岸：二次元河床擾乱の伝播機構、水理講演会論文集、第31回、1986年
- 2) 森、岸、春田：数値解による二次元河床擾乱の伝播機構の研究、土木学会北海道支部論文報告集、第42号、1986年
- 3) 森、岸：蛇行流路における砂州の発達機構と流れの構造、土木学会年次学術講演会、第41回、1986年
- 4) 黒木、岸：中規模河床形態の領域区分に関する理論研究、土木学会論文集、第342号、1984年
- 5) 長谷川、山岡：発達した交互砂州の性状に関する実験と解析、水理講演会論文集、第26回、1982年

- 6)Hooke,R.L:Shear-stress and sediment distribution in a meander bend, U
ng. Rept 30, Univ. of Uppsala,1974
- 7)木下：石狩川河道変遷調査、科学技術庁資源局資料第36号,1961年
- 8)長谷川：沖積蛇行の平面および河床形状と流れに関する水理学的研究、学位論
文、1984年
- 9)黒木、岸：沖積地河川の河床形態・流れの形態の形成領域区分、北大工研究報
告、第118号、1984年

第6章 複断面流路の流れと河床形¹⁾⁻³⁾

はじめに

図-1に示した石狩川矢白場弯曲のS56.8洪水時には図-1に示す様に通常、弯曲部外岸側に発生する最深部が河道中央に寄る現象が見られた。図-2は、5.2KPのS56.8洪水前後の河床横断形の比較で、点線はS56.5測定、実線は洪水直後に測定されたものである。

図-3aは、S56.8洪水のpeak付近の航空写真から得られた表面流の流線である。図-3bは、S54.5融雪出水時に得られた流跡線である。前者は複断面流であり、後者は単断面流（ピーク流量＝2000m³/sec）である。図からわかる様に単断面流では、時計回りの通常のラセン流の発生が認められる。これに対して複断面流では二次流向きが逆である。この流れが上述の河床変動に関わっているものと予想される。本章は、MK法を用いてこの様な流れの発生機構を調べ、河床変動との関係を明らかにする。

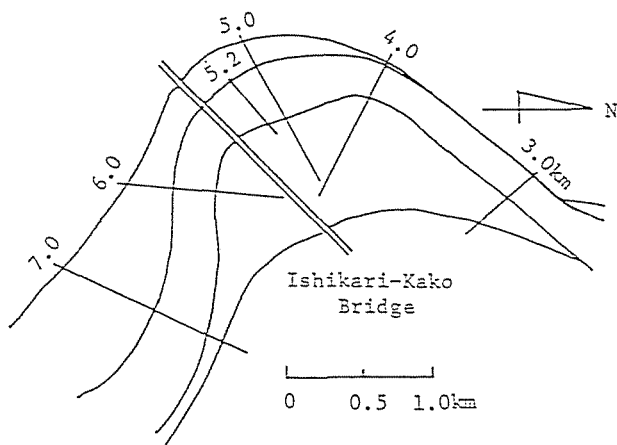


図-1 石狩川矢白場弯曲

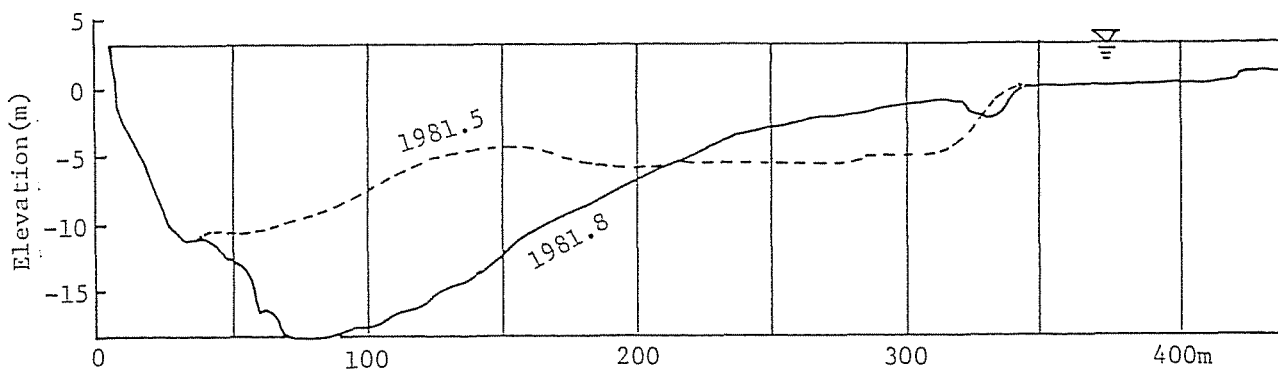


図-2 S56.8洪水前後の河床横断（5.2km）の比較

計算は2つのシリーズからなる。

第1のシリーズでは、石狩川矢白場弯曲の河床変化を、現地と同じ複断面とした場合と高水敷を取り除いて単断面とした場合を比較して高水敷流の効果を調べる。流れの効果を明確にするために初期河床は両者とも平坦である。

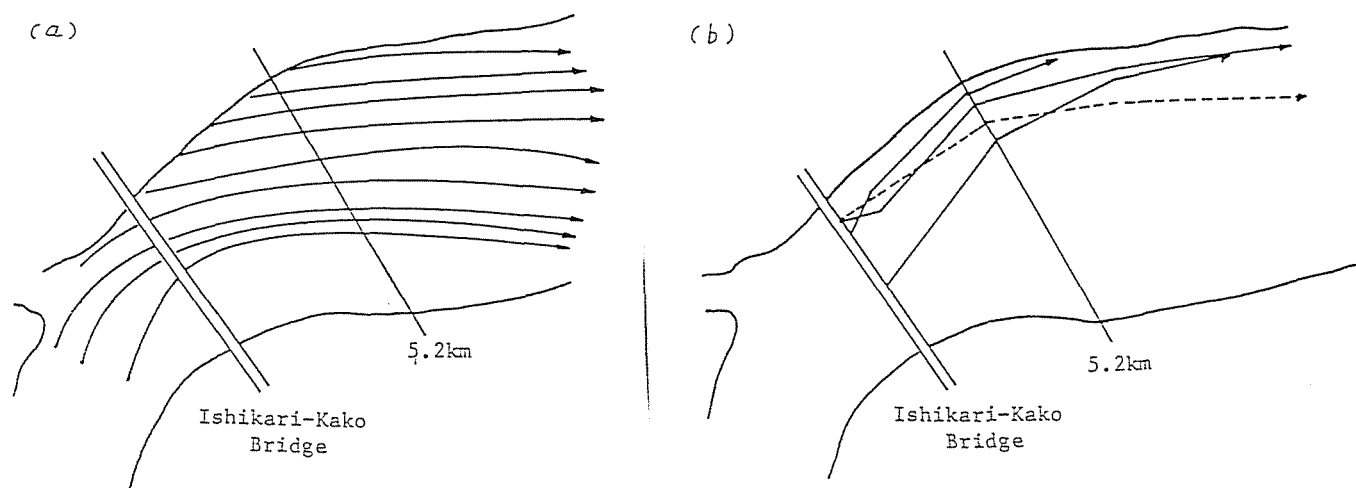


図 - 3 S 56.8洪水の流線 (a) と S 54.5融雪出水の流跡線 (b)

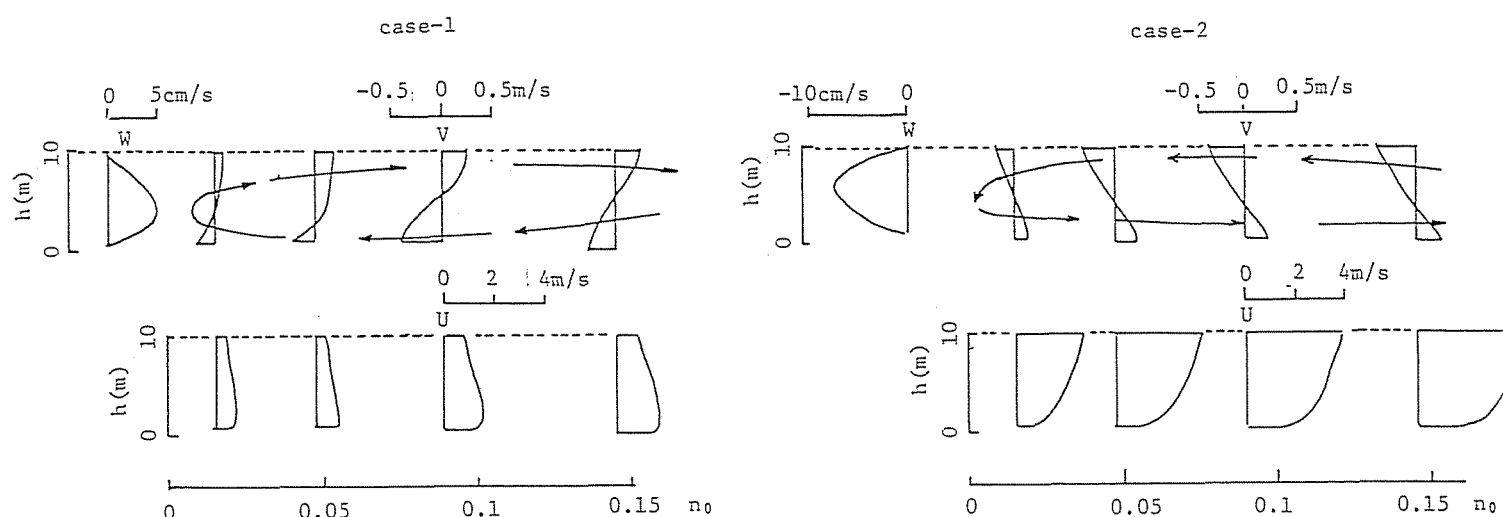


図 - 4 単断面と複断面のU, V計算値の比較

第2のシリーズでは、複断面蛇行流路の平面形と河床変形の関係を調べる。木下⁴⁾は、洪水流の観測から高水敷の蛇行と低水路の蛇行の間の位相関係により流路の安全度が大きく異なることを見いだした。木下⁵⁾は、これらの観測事実を分析してその結論と単断面の流路形に関する実験成果を基に複断面流路の最適形状を提案し、一連の移動床実験からこれを確かめた。木下の実験結果によると、石狩川矢臼場弯曲は安全な流路と推定される。これらの実験結果を再現して石狩川矢臼場弯曲の特性を考察する。

6.1 複断面蛇行流路の河岸維持機構 (シリーズ1)

次の2 case の数値解析を行う。

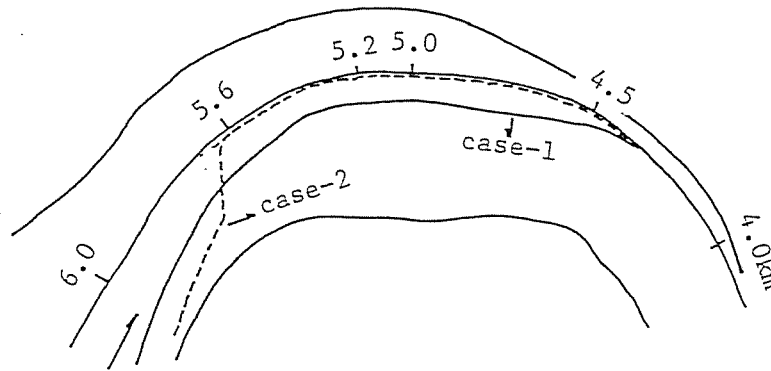


図-6 単断面と複断面の河床最深線の比較

に対応して、最深部線は図-6に示す様に単断面では外岸側の河岸に沿っているのに対して、複断面では流路中央に寄っている。

これらの計算結果は、高水敷流と低水路流の相互干渉によって反転ラセン流が発生し、この流れが最深部を流路中央に寄せていることを示唆している。

6.2 複断面蛇行流路の平面形と河床変動（シリーズ2）

図-7に木下実験の流路平面形を示す（これは木下実験の一部である）。c, d, eの4流路である。蛇行長1.8mの sine-generated-curveで、全水路幅60cm、低水路幅20cmである。弯曲角は堤防が 20° 、低水路は、e流路が 10° 、その他は 20° である。低水路の高水敷に対する下流側へのずれの距離は、 $c \rightarrow 0\text{cm}$ 、d、 $e \rightarrow 25\text{cm}$ である（実験の詳細は文献5）。図-8に河床形の実測値（実線）と計算値

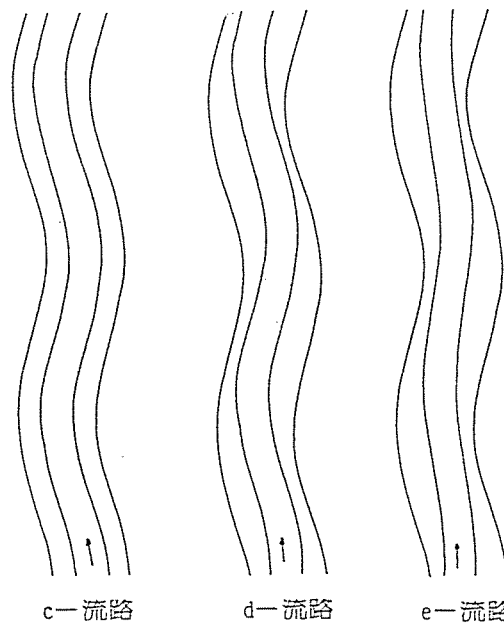


図-6 木下の複断面流実験の流路平面形

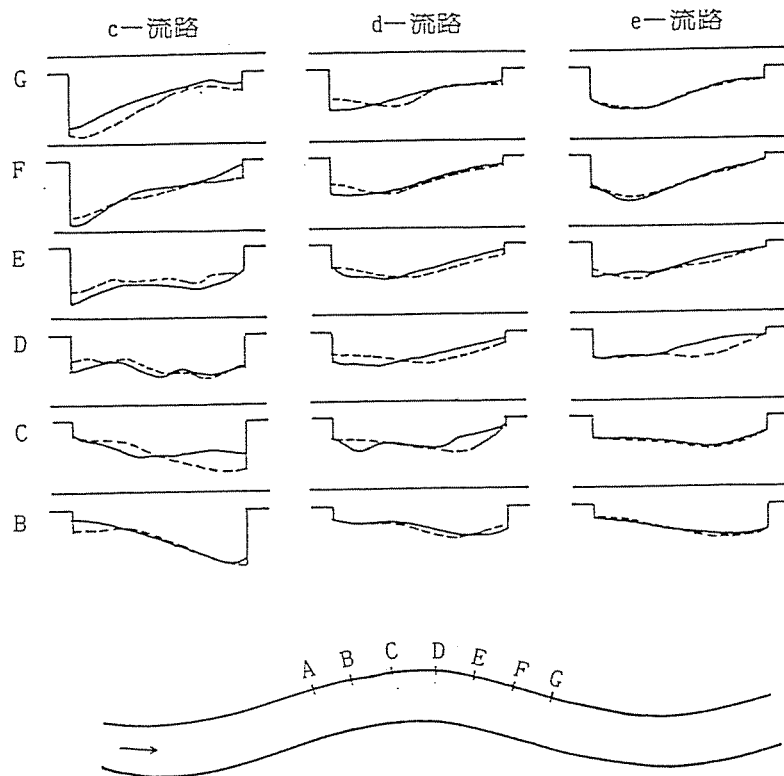


図 - 8 河床の計算値と実測値の比較

(点線)の比較を示した(断面の番号は図-8下図参照)。両者はよく一致している。各流路の河床形はc流路は低水路岸に最深部が発生し、dとe流路では水路中央に寄っている。

複断面流の構造：計算結果を基に低水路凹岸部に着目して複断面流の構造について図-9、10を中心に考察する。図-9は、 V_b のコンター図(斜線部は $V_b < 0$)。図-10はU、V、Wの深さ方向の分布図である。低水路岸を横断する流れが低水路から高水敷に向かうとき”乗り上げ”、逆の場合を”戻り流れ”と呼ぶ。乗り上げのとき、剥離が発生する場合”剥離乗り上げ”、発生しない場合を”非剥離乗り上げ”と呼ぶ。

c流路 低水路岸横断流は上流の一部で戻り流れ(反転ラセン流)であるが、大部分は乗り上げである。乗り上げの形態は頂部付近で非剥離、他は剥離である。頂部より下流側の剥離域で河床の洗掘が大きい。この洗掘構造は以下に述べる一種の河床波の発生と関連する。

図-9を見ると $V_b < 0$ と $V_b > 0$ の領域が交互に凹岸側から凸岸下流

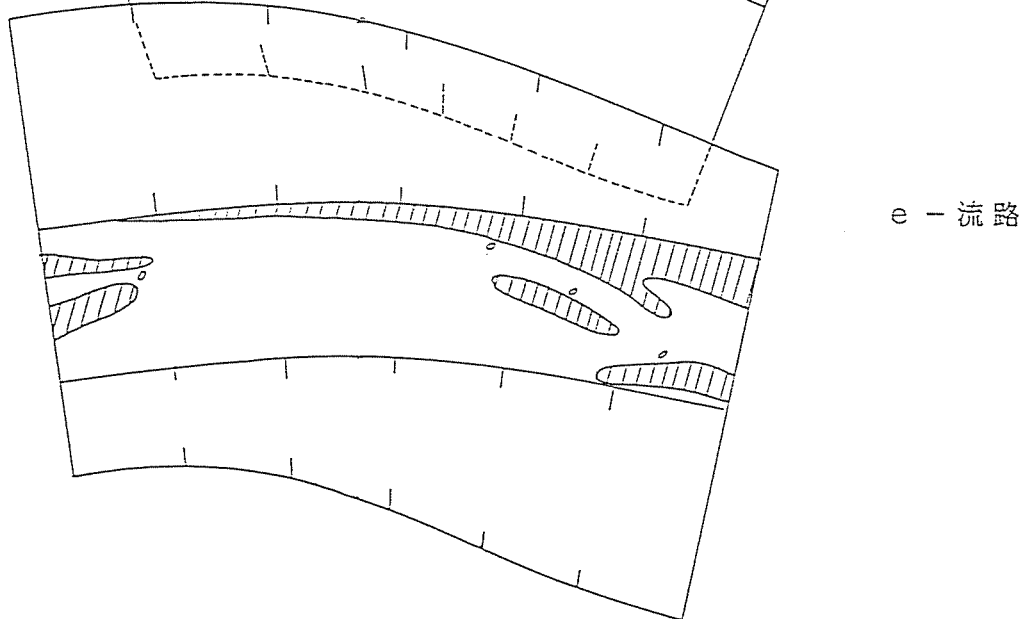
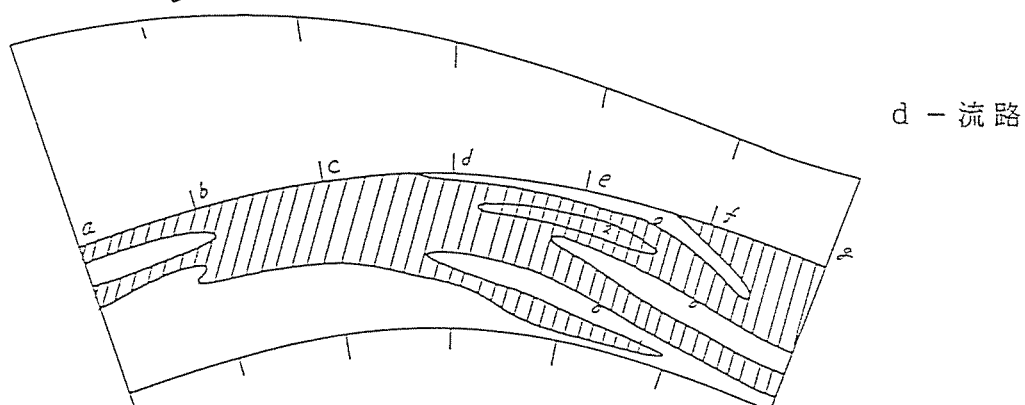
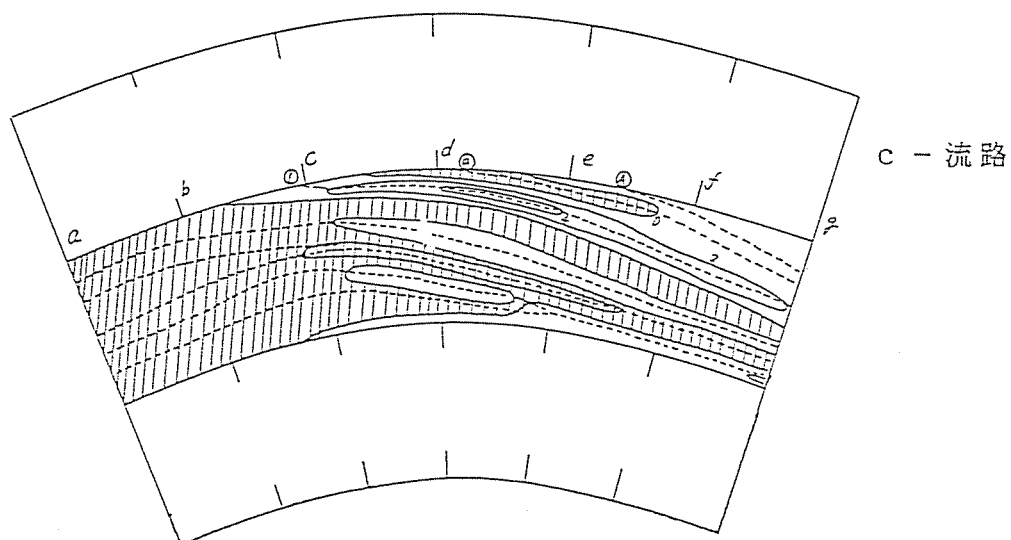
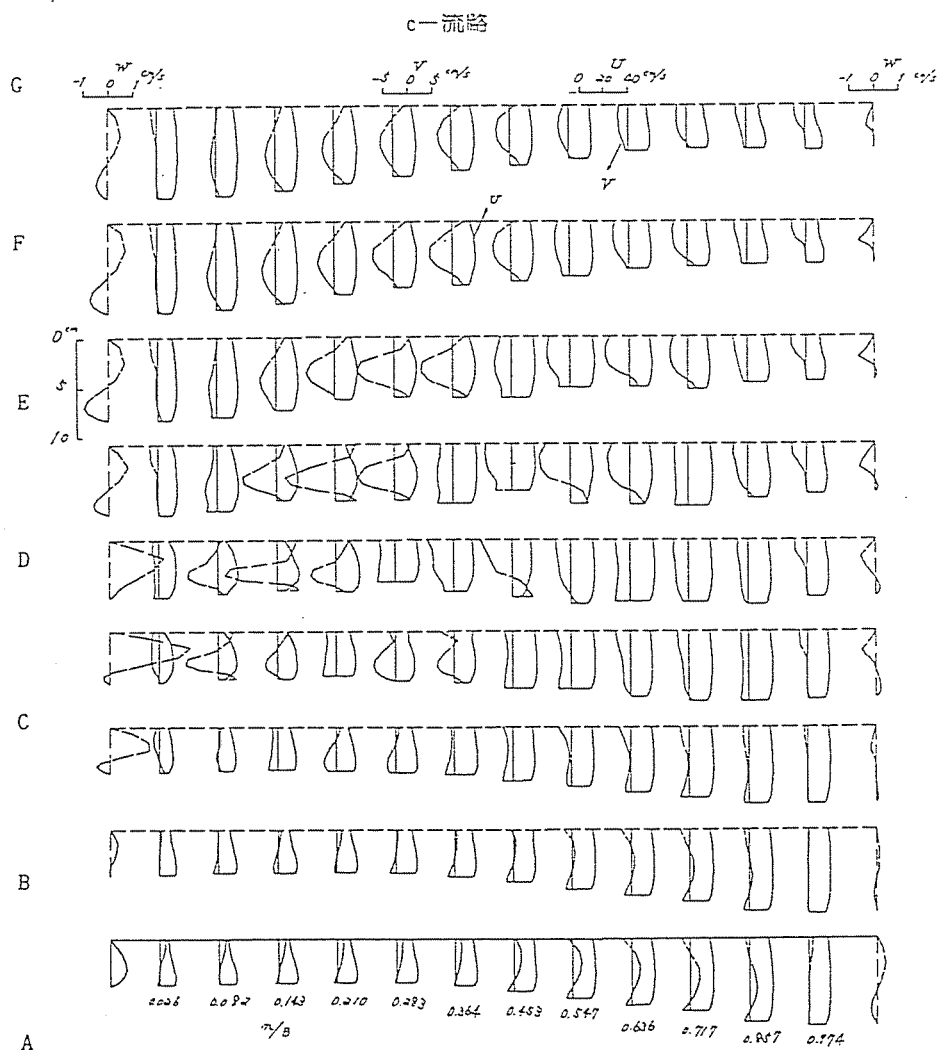


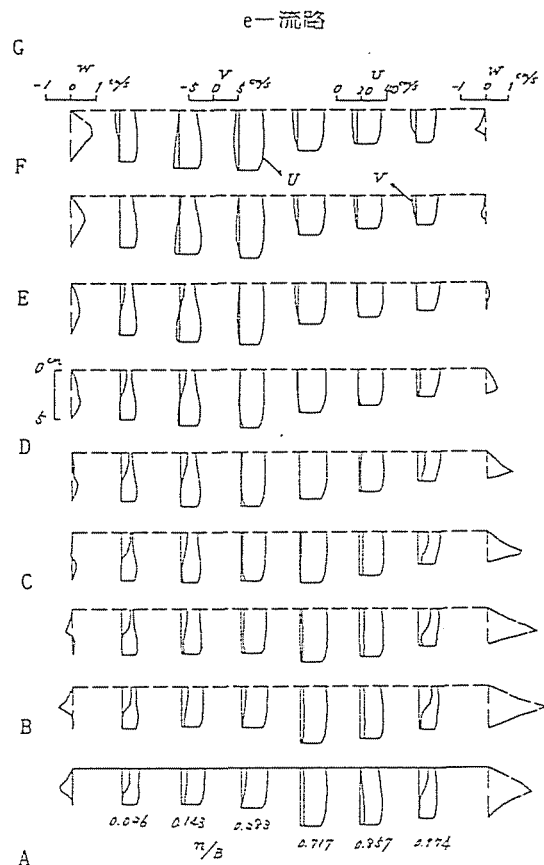
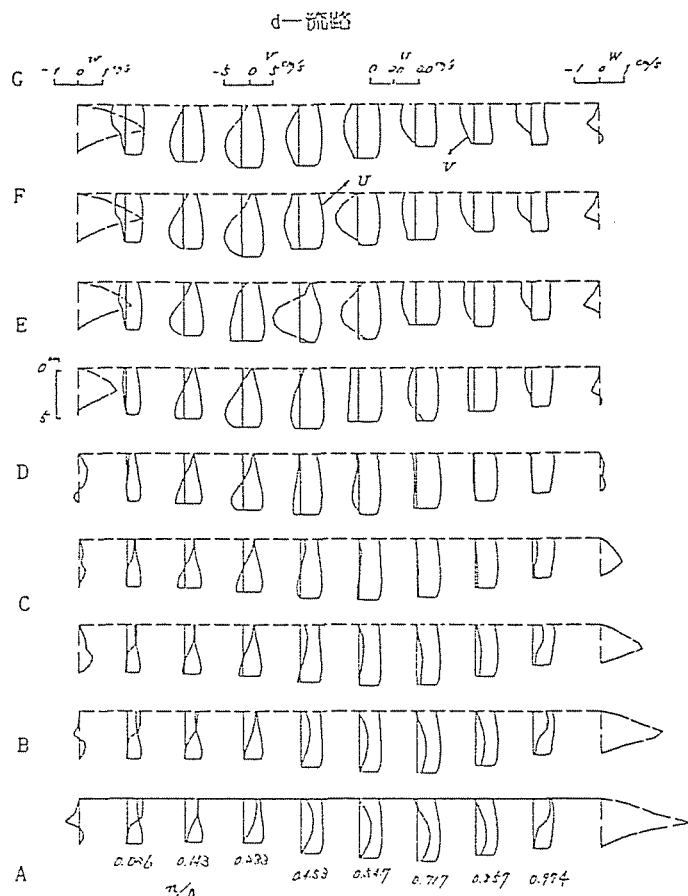
図 - 9 V_b の等高線

に向かって帯状に延びているのがわかる。これらの帯に沿って図-11に示す様な一種の河床波が形成されている。図-11は河床横断形（計算値）で、点線で示す位置に河床波の峰線が走っている。図-12はUのコンター図である。Uの峰（図中の点線）は $V_c < 0$ の帯にほぼ一致している。これらの図の比較から高速流がcrestを通過した後に剥離しているのがわかる。剥離域は図-12中の一点鎖線のように連なり、曲頂部の直下流で低水路岸に達している。この地点において剥離乗り上げによる河岸洗掘が大きい。

河床波の crest が低水路岸に達する地点は、浅水部が形成され、流れは非剥離乗り上げとなる。図-13に示す様に河床コンター図は非常に複雑であり曲頂部河岸から少し離れたところに浅瀬が見られる。単断面では、この付近は水深の大きい所である。

d 流路 上流部の大部分が反転ラセン流である。曲頂部付近に $V_c > 0$ の領



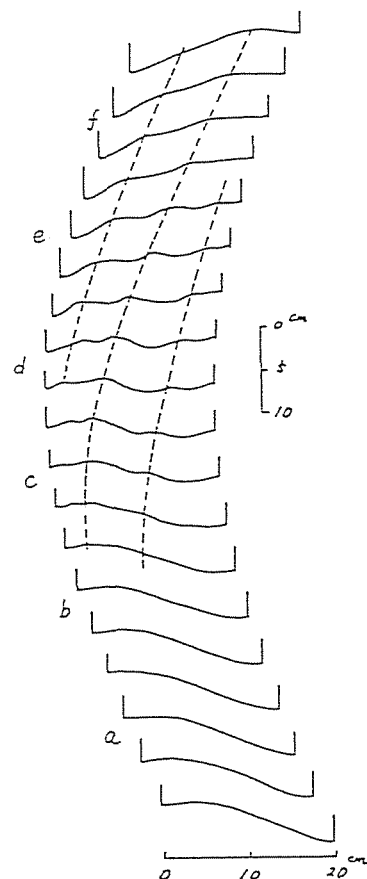


上：図 - 10 U , V の分布 (計算値)

右：図 - 11 C - 流路の Z 分布

域がある (流れは上、下流で異なり、上流側は非剥離の戻り流れ、下流側は剥離乗り上げ)。しかし、 V_b の値は非常に小さく、低水路河岸の洗掘は生じない。河床波は凸岸下流部に見られる。

e 流路 大部分が弱い反転ラセン流である。上流に非剥離の戻り流れ、下流の一部に非剥離乗り上げがある。この流路の特徴は、著しく二次流の強度が小さいことである (図 - 10 e)。この現象は木下によれば、高水敷流の作用により水面付近の低水路二次流の向きが河床付近の二次流の向きに変えられるためである。この作用により、低水路流は 1 つの流管のようになる。主流部は図 - 14 (



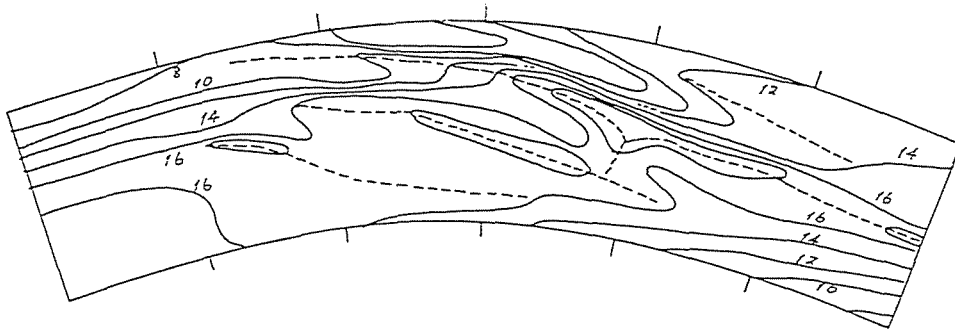


図 - 12 d - 流路の U のコンター図

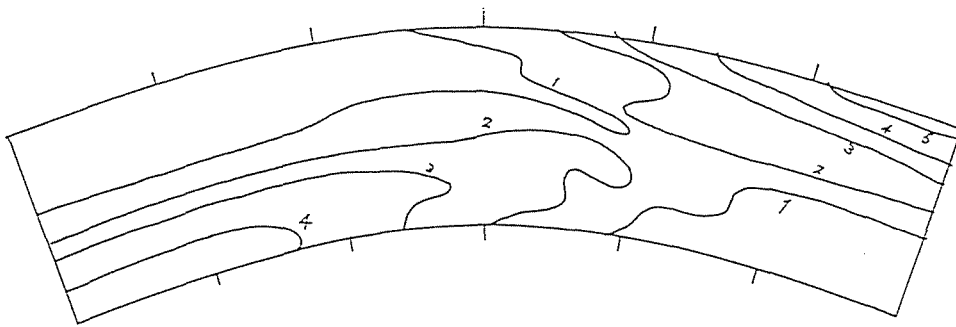


図 - 13 d - 流路の河床等高線

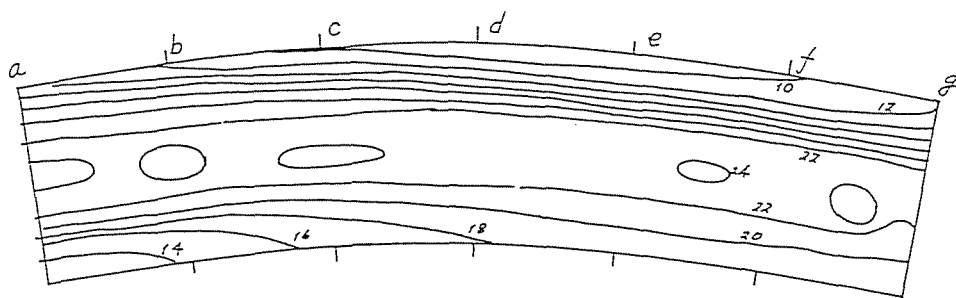


図 - 14 e - 流路の等流速線

水面におけるUのコンター図)に示す様に水路中央となる。

この流向調整と弱い反転ラセン流の発生が、低水路－高水敷間の弱い相互干渉によってなされている。これらの作用がe流路を安全で通水能の大きい流路としている。木下により“適正断面河道”と呼ばれている。

以上示した様にの複断面流の主要な作用は、反転ラセン流による河岸洗掘の抑制作用と、剥離乗り上げによる洗掘作用である。c～e流路に見られる様に流路平面形により両作用が様々な形態で発生する。

結論

d流路では反転ラセン流の作用によって最深部の位置が流路中央方向にずれる。石狩川矢白場弯曲の平面形状は、外岸側に着目すれば、d流路に相似であり、d流路の同様な機構で最深部の位置が流路中央方向にずれたものと判断される。

参考文献

- 1)森、岸：蛇行流路の河床変動の数値解析、土木学会北海道支部論文報告集、第40号、1984年
- 2)森、岸：昭和56年石狩川洪水で観測された弯曲部河床変動の特性、水理講演会論文集、第30回、1986年
- 3)Mori,A and Kishi,T:Effect of the flood-channel flow on the flow and scour of the meandering low-water channel,Fourth Inter. National Sympo. on river sedimentation,1989,Beijing,China
- 4)木下：航空写真による洪水流の流況測定、土木学会水工学に関する目夏期研修会、1968
- 5)木下：洪水時の沖積作用調査と適正複断面河道に関する実験的研究、文部省科学研究費自然災害特別研究「沖積河川における洪水流の制御と治水安全度の向上に関する研究」（代表岸力）最終報告書、1988年。

第7章 考察と結論

7. 1 三次元数値計算の必要性

序論および第3章で示した様に、弯曲・蛇行流の大局的構造は二次元解析で得られる。しかし、河床変動を正確に求めるためには三次元数値計算が必要である。三次元流況の複雑さに加え、二次流が強まると非線形効果が無視できず、これらが河床変動に与える影響が大きいからである。

第1章では、弯曲・蛇行流における非線形効果を河川工学的な観点からA、B 2つの型に分け、それぞれの効果が顕著に現れる条件を導いた。第2章ではB効果が弯曲部横断河床勾配を、線形理論で予測されるものより小さくする作用を持ち、この作用により河床横断勾配強度のパラメータ M に10程度の上限があることを指摘した。

1、2章は水路中央を対象としたものである。しかし、河川工学的には河岸維持が重要であり、河岸近傍の流れについても正確な計算が必要である。従来の研究ではこの部分は水深程度の狭い領域であるとして、ごく簡単にモデル化されている。

水面付近を河岸に向かう流れは、河岸近傍において圧力を介在して V から W に変換する。この結果河床に向かう流れは河床近傍で再び V に変換される。この流況は三次元性が強く、A、B両非線形作用も中央部より強い。本研究では河道形状や水理条件に応じて様々な三次元構造が現れ、それが河岸近傍に集中することを示した。

河床形態が小規模河床波のときは、流路平面形状に規定されるラセン流が流路全断面一様に見られる。これに対して砂州では、水衝部周辺の限られた部分に強いラセン流が発生する。（第5章）。射流ではSBIによりラセン流が発生し、これに常流のラセン流形成機構が加わる（第3章）。

複断面になると低水路岸を横切る流れが生じる。その流況は堤防と低水路の蛇行線形の配置により著しく異なり、流れが剥離する場合と非剥離の場合がある（第6章）。これらの剥離の軸は水平面内にある。第4章の石狩川矢臼場弯曲での計算例では更に鉛直軸を持つ水平剥離も発生している。

以上の様々な場において流れの三次元性とこれに伴う非線形性が河床変化に強

くかかわっている。この様な流れを正確に再現する必要があり、三次元数値計算の必要性が結論される。

7. 2 三次元数値計算法

上述のように河川蛇行流には様々な三次元構造がある。これら総てに対応できる三次元数値計算法を一足飛びに作るのは得策でない。本研究では第1歩として第4章に示した制約を設けた。

開水路流れの三次元計算で最も困難な点は自由水面の存在にある。本研究では境界形状にあった一般座標系で方程式系を表し、これから上述の制約下に微小項を除去して、自由水面の取扱が容易な基礎式を得た。これが本計算法の最も大きな特徴である。この様な制約下でも良好な流れの再現が得られることは本論に示した通りである。従来の計算法は想定される水面の位置に平板をおいているが、これは河床変化の計算には適しない。

本計算法は第3章に示した射流蛇行流の正確な再現はできない。しかし、第3章の結論にある様に流れの大局的構造は表し得る。また、第5章で計算した長谷川のME-1は $F = 1.09$ で射流であるが、衝撃波の影響がそれほど強くない例であり、この場合には河床変化もよく再現できる。

衝撃波の効果が強い流れの計算法には二次精度の衝撃波捕獲法などの河川流への応用が必要である。

上述の様な流れの簡略化により計算法は三次元境界層と二次元PPNSを組み合わせた様なものとなり数値解法が容易となった。ただし、側壁では静水圧の仮定が許されず計算法は多少複雑になっているが、これは本質的なものでありやむを得ない。

本研究の様に定常解を求める場合の最もポピュラーな手法は時間発展法である。この場合単純な陽解法では Δt をかなり小さくしなければならないし、陰解法ではアルゴリズムが複雑である。本研究ではこの点に1つの工夫を行って、擾乱の伝播速度の中から長波によるものを除去し、更に、波動の強制的減衰を図った。これにより安定な収束性のよい計算法が得られた。

7. 3 二次元河床変動計算法

第5章において、砂州の発生条件では砂州を発達させ、小規模河床波の発達は

常に抑制する差分法を考察した。このとき重要なのは、実際に存在しない様な河床波を発生させてはならないことである。適当に差分を取るとその様な河床波が発生する。砂州が発達しその他の河床波が発達しなければ実在しない河床波は発達しない。このため第5章では砂州の性質と差分法の間係を細かく吟味した。

第5章での検討から砂州性擾乱の伝播には、流下方向流砂と同時に横断方向流砂も関わっていることがわかった。この点に着目して流砂連続式の差分法として横断方向に中央差分を取ることにした。一方、小規模河床波に対しては流下方向に風上差分を取って安定化を図ることにした。

この差分法は砂州の1つの特徴である前縁を不明確なものにする可能性がある。砂州形成に及ぼす流下方向流砂の役割は大きいし、また、砂州性擾乱の特性線はC点において小規模河床波と共通点持つと考えられるからである。しかし、計算結果ではかなり明確な前縁が再現された。これは前縁の形成に前縁直下流のラセン流の作用が大きいためと考えられる。

計算の安定条件としては一次元計算に用いられているものが適当であることを示した。

7. 4 複断面蛇行流路における高水敷効果

以上の三次元数値解法と二次元河床変動計算法を組み合わせる石狩川矢白場弯曲に適用して反転ラセン流を見いだした。更に、木下の複断面蛇行流の移動床実験を良好に再現し、ここでも反転ラセン流が重要な役割を持っていることを見いだした。

反転ラセン流は木下の“適正複断面河道”の概念の延長線上にある。第6章で述べた様にこの河道の狙いは「高水敷流の作用により低水路流を低水路内に収める」ことである。高水敷流が低水路流を制御して、低水路流の流線を河岸に沿わせるのである。この作用を少し強めると反転ラセン流が発生すると考えることができるからである。いずれにしても、数値的に高水敷流効果を指摘できた点が本研究の重要な点である。

7. 5 結論

以上を総括すると、

1. 弯曲・蛇行流のおおよその構造は二次元計算で推定できる。しかし、河床変化の予測を正確に行うには三次元計算が必要である。
2. 常流から弱い射流の範囲に適用できる取扱が容易な複断面蛇行流の三次元計算法を開発した。
3. 砂州を発達させ、それ以外の河床波の発達を抑制する計算法を開発した。
4. 複断面蛇行流路における高水敷流効果を数値的に実証した。

Appendix 1 斜面上の流砂量の計算法^{1), 2)}

二次元の河床変動計算では斜面上の流砂に及ぼす重力効果の評価が必要である。流砂濃度は深さ方向に分布し、河床付近で高濃度になる。そこで、河床付近の流砂運動に着目して重力効果を取り込むことにする。河床付近の典型的な流砂の移動形式は saltation である。1 節で saltation の移動特性を明かにする。これに基づいて 2 節で斜面上の saltation 粒子の移動速度を求める。3 節で斜面上流砂量の平坦床流砂量に対する補正係数を与える。

1. saltation 粒子の移動特性

1.1 saltation 粒子の流れへの追従性

Luque and Beek³⁾は粒子の運動を高速カメラで撮影、解析した結果、saltation 運動を行う粒子の移動速度は周辺の流速とほぼ同じで浮遊運動であると述べている。このときの流れは、 $\tau_* = 0.051 \sim 0.053$ で τ_* 。よりわずかに大きいだけである。使用材料は水中比重 $s_d = 1.65$ 、 $d = 1.8\text{mm}$ の砂である。

以下 saltation 粒子の流れへの追従性を調べる。粒子軌跡の細部は必要ないので砂粒の運動方程式は流下方向のみ考える。

$$\frac{\pi}{6} d^3 \left(\rho_s + \frac{\rho}{2} \right) \frac{dU_d}{dt} = \frac{\rho}{2} \frac{\pi}{4} d^2 C_D q_d (U - U_d) \quad (1)$$

ここに、 U_d : 粒子の x 方向速度、 q_d : 流れと粒子の相対速度差の絶対値、 C_D : 抗力係数で(2)式で与える。

$$C_D = C_{Da} / Re^{1/2} \quad (2)$$

これは粒子の沈降速度に Rubbey の式が得られる

$$C_D = 24 / Re + 2 \quad (3)$$

を近似したものである。両者の関係を図-1に示した。ここに、 $Re = q_d d / \nu$ 、 $C_{Da} = 15$ 。

以下の無次元量を導入する。

$$\psi = \frac{4}{3} (s_d + 1.5) \frac{Re^{1/2}}{C_{Da}}$$
$$\Delta U = 1 - \frac{U_d}{U}, \quad t_* = \frac{U}{\psi d} t$$

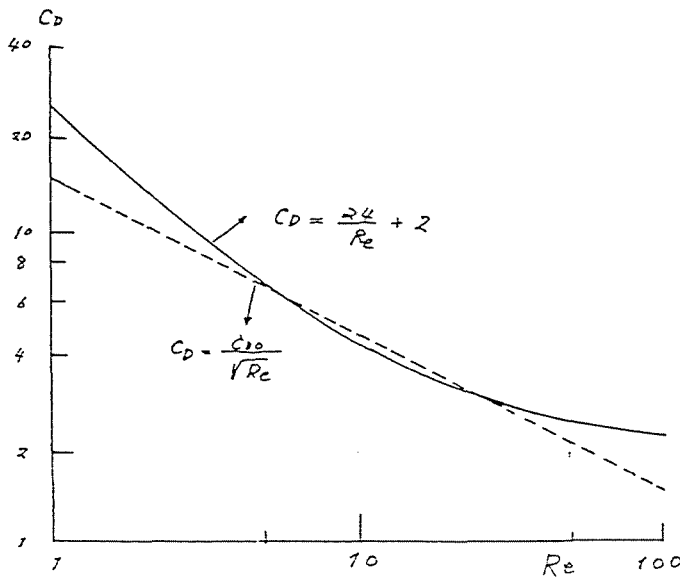


図 - 1 C_D

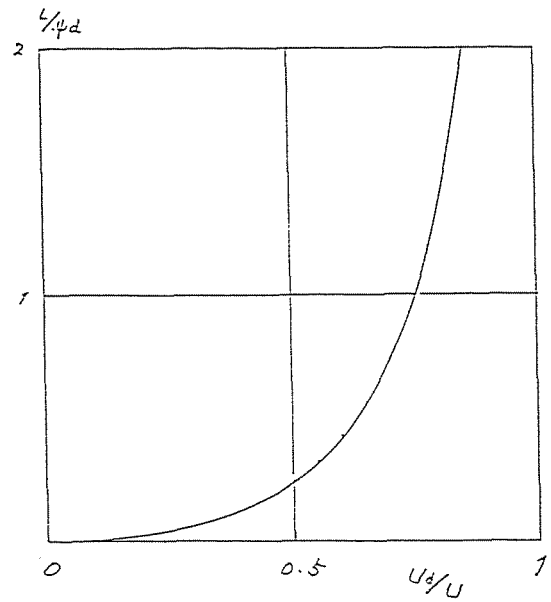


図 - 2

これらを用いて(1)式を無次元化すると

$$\frac{d\Delta U}{dt_*} = -\Delta U^{1.5} \quad (4)$$

これを $t_* = 0$ で, $U_d = U_{d1}$ ($\Delta U = \Delta U_1$) の条件で解くと,

$$\Delta U = \frac{\Delta U_1}{[1 + \sqrt{\Delta U_1} t_*/2]^2} \quad (5)$$

が得られる. 上式を $t_* = 0 \sim t_*$ で積分すると, この間の粒子の移動距離 L が得られる.

$$L = 2\psi d \left[\frac{1}{\sqrt{\Delta U}} + \sqrt{\Delta U} - \frac{1}{\sqrt{\Delta U_1}} - \sqrt{\Delta U_1} \right]$$

図 - 2 に $U_{d1} = 0$ ($\Delta U_1 = 1$) のときの $L/\psi \cdot d$ と U_d/U の関係を示した.

粒子が流れに追従するのに要する距離 L_d を $U_d/U \rightarrow 1$ となる様にとるのは

$L_d \rightarrow \infty$ となって实际的でない. $U_d/U = 0.7 \sim 0.8$ となる L_d を採用すると, 図から

$$L_d/d \sim \psi$$

である. これから ψ は粒子が流れに追従するのに要する無次元化距離を表すことがわかる. ψ のおよそのオーダーは次のようである.

河床に衝突した粒子が saltation 運動を継続するものとし, 再離脱直後の粒子速度と河床付近の流速の差を u_* 程度とすると, $Re = u_* d / \nu = R_*$ である. 浮遊

砂が問題となる様な河川では u_* が大きくても d が小さく、 R_* は 100 程度である。
従って、 $s_* = 1.65$ とすると

$$\psi = 2 \sim 3$$

である。Einstein⁴⁾ に従って saltation の飛距離を $100d$ 程度とすると saltation 粒子は移流過程の大部分を周囲流速と同じ速度で流下すると考えることができ、Luque and Beek の観察事実に一致する。

1.2 saltation の継続と河床との衝突による運動量損失

saltation 運動を観察すると、河床に落下、衝突後停止せず再び跳躍運動を継続する場合が多い。saltation の継続機構として揚圧力と河床粒子との衝突による反発力の 2 つが考えられている。

岸ら⁵⁾ は、粒子軌跡の解析から上向き速度を求め、その最大となる点が河床離脱点ではなく、上昇中に発生することを見だし、揚圧力が saltation 運動の主因であることを示した。Abbot and Francis⁶⁾ や Gordon ら⁷⁾ は、落下粒子が河床粒子と（撮影フィルムの）複数のコマ数にわたって接触した後に再離脱していることを見だし、反撥力が主因ではないと述べている。

しかし、Coleman⁸⁾ や Watter ら⁹⁾ の河床に静止する粒子に働く揚圧力の測定結果によると、粒子レイノルズ数 R_* が 100 以下では揚圧力は極めて小さい。土屋ら¹⁰⁾ は、反撥力による saltation 継続の理論を展開し、実測値との比較から反撥係数 ~ 0.5 を得ている。

現在、いずれの立場からも完全な説明はなされていない。移動床はルーズな河床であるから大きな反撥力は期待できない。しかし、揚圧力の直接測定結果を見ると saltation 運動の継続は難しい様にも見える。

筆者らは幅 10cm の水路の水路床に鉛玉（反撥係数 $e \approx 0$ ）を 1 層敷き詰め、上流から粒子を投入して軌跡を 16mm 高速カメラで撮影した（実験条件は表 - 1）。この結果、図 - 3 の軌跡の測定例に示す通り、河床からの反撥がなくても sal-

表 - 1

RUN	運動 粒径 mm	粒子 比重	沈降 速度 cm/s	河床材料 粒径 mm	流量 l/s	河床 勾配	水深 cm	摩擦 速度 cm/s	撮影 速度 17/s
A	2.1	2.21	12.6	2.0	4.08	1/208	7.8	4.6	375
B	2.7	1.12	4.3	4.0	1.93	1/435	4.5	2.3	190

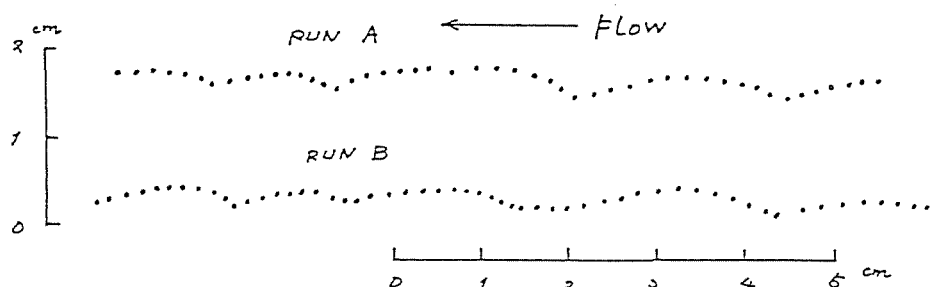


図 - 3 鉛玉河床上での粒子の移動軌跡

tion運動が継続することがわかった。この実験から、細部の機構は必ずしも明かではないが saltation 運動は流体力を主要因として継続するものと考えことにする。そこで本研究では、移動床では $e = 0$ と見なし、本実験結果を用いて衝突前後の運動を解析することにする。ただし、衝突は瞬間的に大きな力が働く現象なので以下の解析では流体力は考えない。

衝突粒子の運動の解析：図 - 4 の様に衝突前後の速度をそれぞれ V_2 、 V_1 、衝突点における接面となす角度を α 、 β とおく。このとき

$$E = 2 \frac{|\cos \alpha - (d/2)\omega_2/V_2|}{7\mu_d \sin \alpha (1+e)} \quad (7)$$

で定義される E が $E > 1$ であれば、衝突前後の運動量保存の関係は

$$V_1 \sin \beta = e V_2 \sin \alpha$$

$$V_1 \cos \beta = V_2 \cos \alpha - (1+e)\mu_d V_2 \sin \alpha \quad (8)$$

で与えられる。ここに、 μ は動摩擦係数。

(8)式から α 、 β を消去して e について解くと

$$e = \lambda \frac{\lambda + \cos \theta + \mu_d \sin \theta}{1 + \lambda \cos \theta - \lambda \mu_d \sin \theta} \quad (9)$$

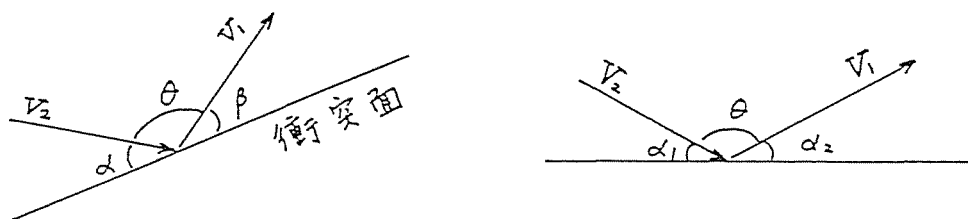


図 - 4 落下粒子と河床との衝突記号図

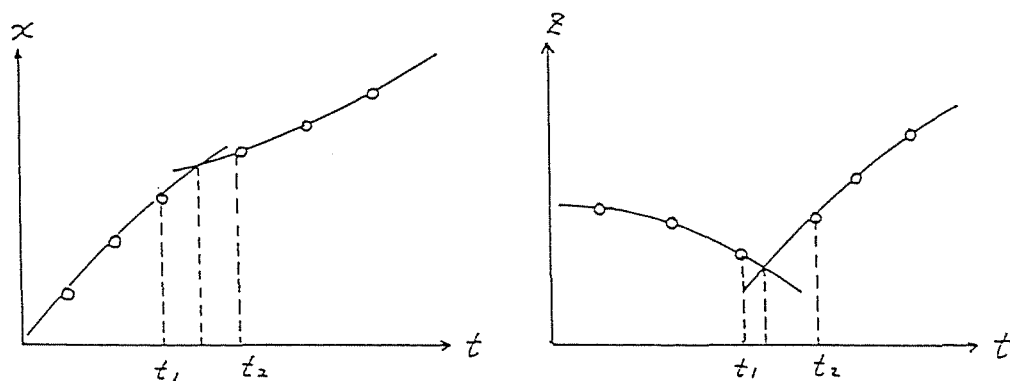


図-5 spline 関数による衝突点の計算

ここに、 $\theta = \pi - \alpha - \beta$ 、 $\lambda = V_1 / V_2$ 、本実験の様に $e = 0$ の場合 ($\beta = 0$)、 λ は次の様に書ける。

$$\lambda = \cos \alpha - \mu_d \sin \alpha \quad (10)$$

測定された粒子軌跡を三次の spline 関数で近似して、衝突に関する特性量を調べる。衝突前後の軌跡を次の様に計算する。粒子軌跡の流下方向座標 x および鉛直方向座標 z が図-5 の様に測定され、 $t = t_1$ と t_2 の間の河床に落下したものとすると、 $t \leq t_1$ と $t \geq t_2$ の記録でそれぞれ spline 関数を作る。それぞれの端点から衝突点に向けて spline 関数を外挿して衝突点を定める。これから図-5 b に示した α_1 、 α_2 が得られる。spline 関数の端点条件は勾配を与える。勾配は端点を含む 3 点を通る二次式で評価する。 α_1 、 α_2 が与えられれば、

$$\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha + \beta = \pi - \theta$$

の関係から θ が求められる。

$\mu_d = 0$ として (9) 式から $e (= e_a)$ を計算すると、ほとんどの case で $e_a < 0$ となり、 $\mu_d = 0$ とはできないことがわかった。

$\mu = 0.26$ ($e = 0$) としたときの (10) 式による λ の計算値と実測値の比較を図-6 に示した。参考のために $\mu_d = 0$ のときの計算値も示したが、 $\mu_d = 0.26$ とした方が実測値に近くなるのがわかる。

$e = 0$ 、 $\mu_d = 0.26$ としたときの E の計算値はほとんどが $E > 1$ となり摩擦が働いていることが確かめられた。

以上から、衝突時には摩擦力による運動量損失が生ずるものとする。 μ_d は 0.26 程度である。

なお、衝突前の接線方向運動量成分から摩擦損失を除いて saltation 軌跡を数

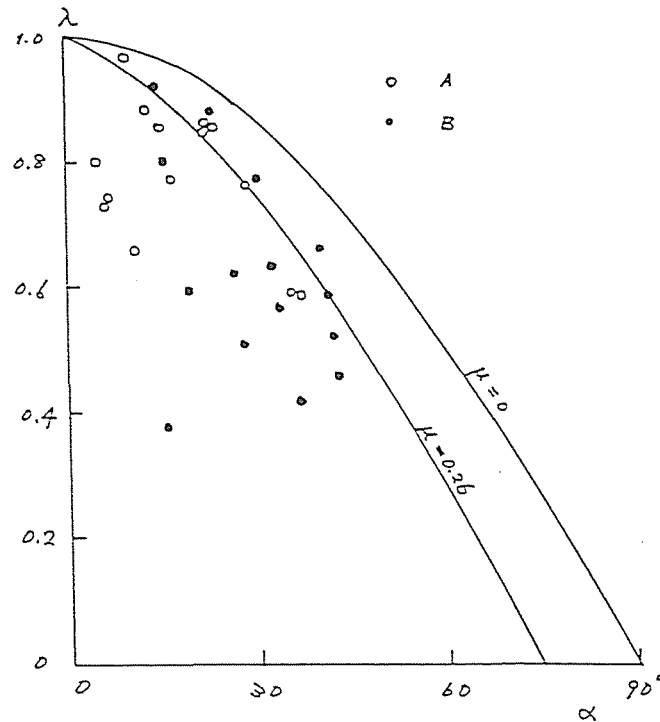


図-6 λ の α 関係. 計算値と実測値の比較

値的に計算すると (鉛直方向の粒子の運動方程式も考慮して、Runge-Kutter-Gill法で計算)、これだけでは saltation 運動が説明できないことを確かめている。

2 斜面上の saltation 粒子の移動速度

前節の結論は平坦床に関するものであるが、河床勾配がそれほど大きくないときには斜面上の saltation にも適用できるものとする。

間欠的に河床と衝突しながら斜面上を移動する saltation 粒子の軌跡を図-7の3つに分けて、各軌跡の速度ベクトルを U_{d1} , U_{d2} , U_{d3} で表す。 U_{d1} は河床に衝突直後、 U_{d2} は落下、 U_{d3} は浮遊である。

河床面に直交する単位ベクトルを n とすると

$$n = \nabla F / |\nabla F| \quad (11)$$

ここに、

$$F = z - Z, \quad \nabla F = k - \nabla Z,$$

$$|\nabla F| = [1 + Z_x^2 + Z_y^2]^{1/2} \quad (12)$$

河床付近の流速ベクトル $U = U i + V j + W k$ が河床に平行として、

$$W = U Z_x + V Z_y,$$

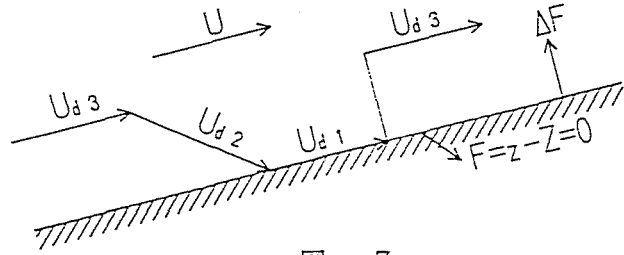


図 - 7

とする。ここに、 i 、 j 、 k ： x ， y ， z 方向の単位ベクトル。これらのベクトルを用いて U_{d1} ， U_{d2} ， U_{d3} を表す。

U_{d1} は流速ベクトル U に砂粒の沈降速度ベクトル $-Wsk$ を加えたものである。

$$U_{d1} = U - Wsk \quad (13)$$

U_{d3} は、 U_{d1} に Wsk の n 方向成分を加えたものである。

$$U_{d3} = U_{d1} + (Wsk \cdot n) \cdot n = U_{d1} + \frac{Ws}{|\nabla F|} n \quad (14)$$

河床に落下した砂粒は、 $e = 0$ であるから n 方向成分は失われる。 U_{d1} からこれを除くと U_{d3} 。河床の接線方向では摩擦により損失 ΔU が生ずる。 U_{d2} は U_{d3} からこれを除いて。

$$U_{d2} = U_{d3} - \Delta U,$$

$$\Delta U = \mu_d (Wsk \cdot n) f = \mu_d \frac{Ws}{|\nabla F|} f \quad (15)$$

ここに、 $f = U_{d3} / |U_{d3}|$ で、 U_{d3} 方向の単位ベクトル。

これから河床勾配があると摩擦損失が平坦床より少なくなるのがわかる。この点と見かけの沈降速度が減少することから斜面上の saltation は、平坦床より浮遊しやすい。

(13)式を(14)式に代入すると

$$U_{d3} = U - \frac{Ws [(Zx^2 + Zy^2)k + Zxi + Zyj]}{|\nabla F|^2} \quad (16)$$

ここで、 k 成分を無視し、水平成分のみ残したものを U_d とおくと、

$$U_d = U i + V j - \frac{Ws (Zxi + Zyj)}{|\nabla F|^2} \quad (17)$$

3 斜面上の流砂量

斜面勾配は、砂粒の飛距離程度の距離ではほとんど変化しないから一定とする。流砂は局所的に平衡な状態にあるものとする。従って、単位時間、単位面積当りの河床砂粒の pick up 数 N_e は落下砂粒数に等しい。このとき、流砂ベクトルを

$$q_b = q_{bx} i + q_{by} j \quad (18)$$

とおくと

$$q_b \sim N_e U_d \quad (19)$$

平坦床上の N_e を $N_{e,f}$ 、河床流速を q 、流砂量を $q_{b,f}$ と書くと、

$$\frac{q_b}{q_{b,f}} = \frac{N_e U_d}{N_{e,f} q} \quad (20)$$

ところで、1 コの saltation 粒子が河床面との衝突によって失う運動量は $m \Delta U$ (m : 砂粒 1 コの質量)。従って、一定の流砂量を維持するためには上層から

$$M = m N_e \Delta U = m N_e \frac{\mu W_s}{|\nabla F|} \quad (21)$$

の運動量の補給が必要である。ここで、 M が河床の傾きによらず一定とする。このとき

$$N_e = |\nabla F| N_{e,f} \quad (22)$$

(17)、(22)式を(20)式に代入すると

$$\frac{q_b}{q_{b,f}} = \left[\frac{U}{q} |\nabla F| - \frac{W_s}{q} \frac{Z_x}{|\nabla F|} \right] i + \left[\frac{V}{q} |\nabla F| - \frac{W_s}{q} \frac{Z_y}{|\nabla F|} \right] j \quad (23)$$

$q_{b,f}$ には、 τ_* の広範囲にわたって実測値とよく一致する岸ら¹¹⁾の式を用いる。

$$\Phi = \frac{q_{b,f}}{\sqrt{s_d g d^3}} = 0.048 (\tau_* - \tau_{*c})^2 \varphi^2 \frac{\sqrt{s_d g d}}{W_s} \quad (24)$$

(23)、(24)式から斜面上の流砂量が計算される。

参考文献

- 1) 山本、森、岸：運動砂粒子の移動形態、水理講演会論文集、第29回、1985年
- 2) 山本、森、岸：saltation 粒子の跳躍の継続機構について、土木学会年次学術講演会、第40回、1985年
- 3) Luque and Beek: Erosion and Transport of bed-load sediment, J. Hydr. Res. vol. 14, No. 2, 1976

- 4) Einstein, H.A.: The bed load function for sediment transportation in open channel flows, U.S. Department Agriculture Soil Conservation Service Technical Bulletin, 1950
- 5) 岸、鈴木、黒木: 流れによる河床砂礫の saltation 機構、土木学会年次学術講演会、第24回、1979年
- 6) Abbott and Francis: Saltation and suspension trajectories of solid grain in water stream, W.R.R. 1972
- 7) Gordon, R., Chemichael, J.B. and Isackson, f.: Saltation of plastic balls in a one-dimensional flume, Water Resou. Res., vol. 8, No. 2, 1972
- 8) Coleman: A theoretical and experimental study of drag and lift forces acting on a hypothetical stream bed, Inter. Associ. Hydr. Res., 1967
- 9) Watter, Maham and Rao: Hydrodynamic effect of seepage on bed particles A.S.C.E., 1971
- 10) 土屋、渡辺、青山: 水流による砂礫の saltation 機構、京都大学防災研究所年報、第12号B、1969年
- 11) 岸、黒木、今泉: 掃流流砂量の研究、土木学会北海道支部論文報告集、第30号、1974年

APPENDIX 2. (5-1.1)式の誘導

流砂の連続式は

$$\frac{1-\lambda_d}{\sqrt{s_d g} d^3} \frac{\partial Z}{\partial t} + \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} = 0 \quad (1)$$

ここに、 λ_d : 砂の空隙率、 Φ_x 、 Φ_y は x 、 y 方向の無次元流砂量、Appendix (23)式において $|\nabla F| \doteq 1$ とすると、

$$\Phi_x = \left(\frac{U}{q} - \frac{1}{\gamma} Z_x \right) \Phi_r, \quad \Phi_y = \left(\frac{V}{q} - \frac{1}{\gamma} Z_y \right) \Phi_r \quad (2)$$

ここに、 $\gamma = q/W_s$, $q = \sqrt{U^2 + V^2}$, ここで、

$$\Phi_r = \alpha q^m$$

と近似し、更に、

$$q \doteq U = U_0(1+u), \quad |u| \ll 1$$

とすると

$$\Phi_r \doteq \alpha U^m = \Phi_0(1+mu), \quad \Phi_0 = \alpha U_0^m \quad (3)$$

$|Z_x|$ 、 $|Z_y| \ll 1$ であるから(2)、(3)式から

$$\Phi_x \doteq \left(1 + mu - \frac{1}{\gamma} Z_x \right) \Phi_0, \quad \Phi_y = \left(v - \frac{1}{\gamma} Z_y \right) \Phi_0 \quad (4)$$

(4)式を(1)式に代入すると

$$\frac{\partial \eta}{\partial t_*} + m \frac{\partial u}{\partial x_*} + \frac{\partial v}{\partial y_*} = \frac{\eta_{xx}}{\gamma} + \frac{\eta_{yy}}{\gamma} \quad (5)$$

ここに、

$$t = \frac{1-\lambda_d}{\sqrt{s_d g} d^3} \frac{h^2}{\Phi_0} t_*$$

$|\eta_{xx}| \ll \eta_{yy}$ として η_{xx} を無視すると(5-4.1)式が得られる。

Appendix 3. (5-1)式の二次精度差分

記号は5章と同じ。

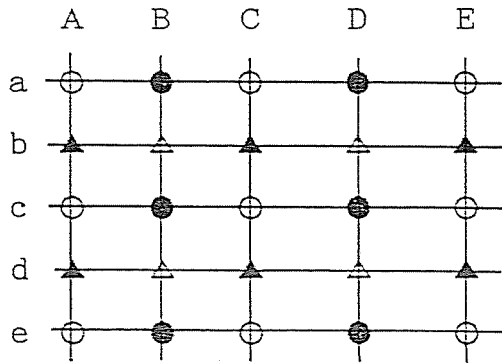


図 - 1 a

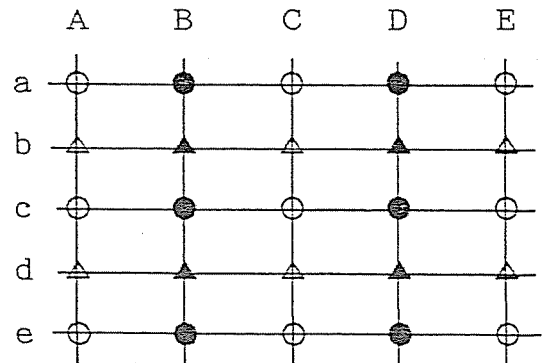


図 - 1 b

F < 1 の場合

η , ξ , u の計算点を図 - 1 の○地点にとる. この配置で(5-8)式に中央差分を取ると●地点の Z が求まる. この地点の Z に対しては、●地点の ξ , u , ▲地点の v が求まる. これらの地点の流速からは○地点の η が求まる. この関係を利用して two-step の差分スキームを作る.

計算の手順は以下の通りである. (地点の位置は図中の A, B, C, . . . , a, b, c, . . . など表す)

STEP 1. $t = n \Delta t$ の○地点の η を与える. (時間を表す添字 n は簡単のため、 η と後出の A, α のみに付ける.)

STEP 2. $t = n \Delta t$ の○地点の ξ , u , ▲地点の v を以下の差分から求める. ξ はAppendix(2)式を差分化して求める. 楕円型であるから繰り返し計算を行う.

$$1) F_1(\xi_{E_c} - 2\xi_{C_c} + \xi_{A_c}) + \Delta r^2(\xi_{C_e} - 2\xi_{C_c} + \xi_{C_a})$$

$$= F^2(\eta_{E_c} - 2\eta_{C_c} + \eta_{A_c})$$

$$2) F^2(u_{C_c} - u_{A_c}) + \xi_{C_c} - \xi_{A_c} = 0 \quad (1)$$

$$3) F^2(v_{D_b} - v_{B_b}) + \xi_{C_c} - \xi_{C_a} = 0$$

これらの値から

STEP 3. ●地点について、 $t = n \Delta t$ に対する

$$A_{Dc} = \left[a \frac{u_{Ec} - u_{Cc}}{\Delta x} + b \frac{v_{Dd} - v_{Db}}{\Delta y} \right] \Delta t \quad (2)$$

を求める。このAを用いて

STEP 4. ●地点の η の $t = (n+1/2)\Delta t$ の予測値を次式から求める。

$$\eta_{Dc} = (\eta_{Ec} + \eta_{Cc})/2 - A_{Dc}/2$$

この η を用いて

STEP 5. ●地点の ξ , u , ▲地点の v の $t = (n+1/2)\Delta t$ の予測値をSTEP 2

と同様な計算から求める。この u , v を用いて

STEP 6. ○地点の $t = (n+1/2)\Delta t$ のAを求める。

この差分の増幅率 λ は、

$$|\lambda| = [1 + 4\alpha^2 S p^2 (\alpha/S p + 1)\Gamma]^{1/2} \quad (3)$$

$$\Gamma = \alpha/S p - 1$$

安定条件は

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{|F_1 S p^2 + \Delta^2 S q^2|}{a S p^2 + b S q^2} \quad (4)$$

である。 $S p/S q$ が単調関数である点に注意すると

$$\frac{\Delta x}{\Delta y} \leq \text{Min} \left[\frac{\Delta_r}{b}, \frac{F_1}{a} \right] \quad (5)$$

が得られる。S波型の擾乱 $S p \sim 0$ が発達し、P波型の擾乱 $S q \sim 0$ が抑制される条件は、

$$\Gamma(S p \rightarrow 1) = \frac{b \Delta t}{\Delta_r \Delta x} - 1 > 0$$

かつ

$$\Gamma(S q \rightarrow 0) = \frac{a \Delta t}{F_1 \Delta x} - 1 < 0$$

両条件を満たすためには

$$\Delta_r = \frac{\Delta x}{\Delta y} < \frac{F_1 b}{a} \quad (6)$$

$F > 1$ の場合

方程式系は双曲型になる。このため図-1 a の計算点の配置ではスキームは Leap frog となり、 Δx , Δy が任意に取れず不便である。図-1 b のように計算

点を配置する。(5-8.4)式の代わりに(5-8.2)式を(5-8.4)式に代入して得られる次式を用いる。

$$F_1 \xi_x = F^2 v_y - F^2 \eta_x \quad (7)$$

上、下流の v を平均して Δ 地点の v を与え、 $F < 1$ の場合と同様にして two-step のスキームとする。安定条件は $F < 1$ の場合とほぼ同じで

$$\frac{\Delta t}{\Delta x} \leq \frac{|F_1 S p^2 + \Delta^2 S q^2|}{a S p^2 + b C p^2 S q^2} \quad (8)$$

しかし、この場合、 $F > 1$ であるから $F_1 < 0$ であり、分子 $=0$ となる k があり、これに対して不安定である。これを避けるために u の運動方程式に人工粘性 ν_a を導入して、 $\eta_{xx} < 0$ のときには

$$F^2 u_x + \xi_x = -\nu \xi_{xx} \quad (9)$$

とする。 $\eta_{xx} > 0$ のときは(5-8.1)式を用いる。このときの安定条件は、 $\nu < 1$ の条件のもとに

$$\Delta t < \frac{2 \nu F^2}{a + b F_1} \quad (10)$$

Appendix 4 射流におけるS波とP波の判別

初めに、波速 C と Airy波の傾きを求める。(5-5)式を(5-1)式に代入し、 u , v , ξ , η を消去すると、

$$C = \frac{\sigma}{k_x} = \frac{a k_x^2 + b k_y^2}{F_1 k_x^2 + k_y^2} \quad (1)$$

次に、(5-1.2)～(5-1.4)式から u , v を消去すると

$$F_1 \xi_{xx} + \xi_{yy} + F_2 \eta_{xx} = 0 \quad (2)$$

(5-5)式を(2)式に代入すると

$$\frac{\xi}{\eta} = \frac{F^2 k_x}{(F^2 - 1) k_x^2 - k_y^2} \quad (3)$$

上式において 分母 = 0、すなわち

$$\frac{dx}{dy} = \frac{k_y}{k_x} = \pm \sqrt{F^2 - 1} \quad (4)$$

が Airy波の傾きを与える。5章図-6中にこれを示した。図から

$$\text{P波では} \quad k_y/k_x \leq \sqrt{F^2 - 1} \quad (5)$$

$$\text{S波では} \quad k_y/k_x \geq \sqrt{F^2 - 1}$$

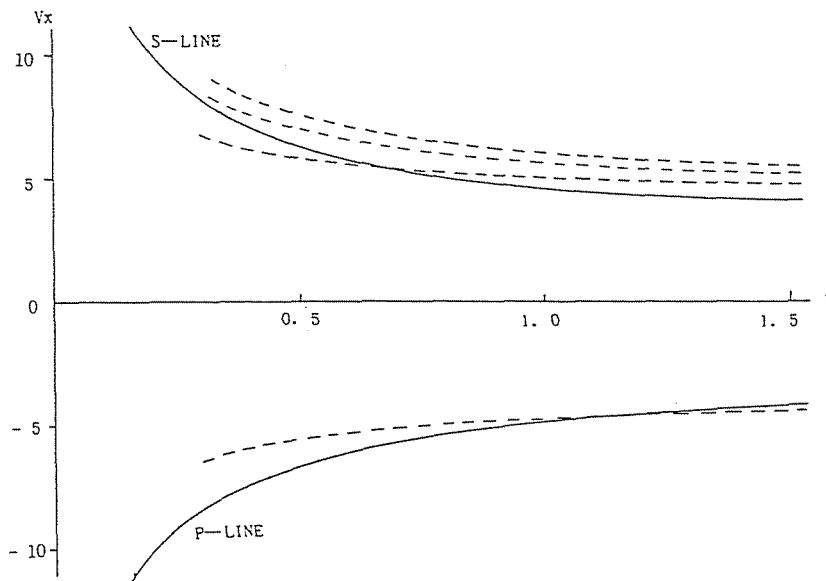


図-1 V_x の理論値と数値実験値の比較

である。この関係と(1)式を比べると、S波は常に下流に伝播し、5章図-6と一致する。一方、P波の伝播方向は常に上流方向で5章図-6と矛盾する様に見える。これは(1)式は固定点を通過する擾乱を見ているためである。特性曲線についても同じ見方をすれば同様の結果が得られる。このときの擾乱の伝播速度 V_x は、(5-3)式を、 y を固定して t で微分することによって得られる。

$$V_x = b + \frac{a - b F_1}{\kappa^2 + F_1} \quad (6)$$

図-1に V_x を示した。S波では常に $V_x > 0$ 、P波では常に $V_x < 0$ となっている。従って、固定点での伝播方向を見ることによってS波とP波の区別ができる。

水面波と河床波の位相関係を見ると(3)式からP波は同位相、S波では逆位相である。これが両波動のもう1つの違いになっている。

これらの点を流れが単純な $B \rightarrow \infty$ の場合についてみる。図-2は $y = 8$ での η (実線)、 ξ (点線) の縦断波形の時間変化をみたものである。s-line (S-C線の走時) より上流の河床波は上流に伝播し、下流の河床波は下流に伝播している。これらの波速 V_x は、図-1に点線で示す様に(6)式とよく一致している。これらと水面波との位相関係から s-line より上流の河床波はP波、下流の河床波はS波であることがわかる。

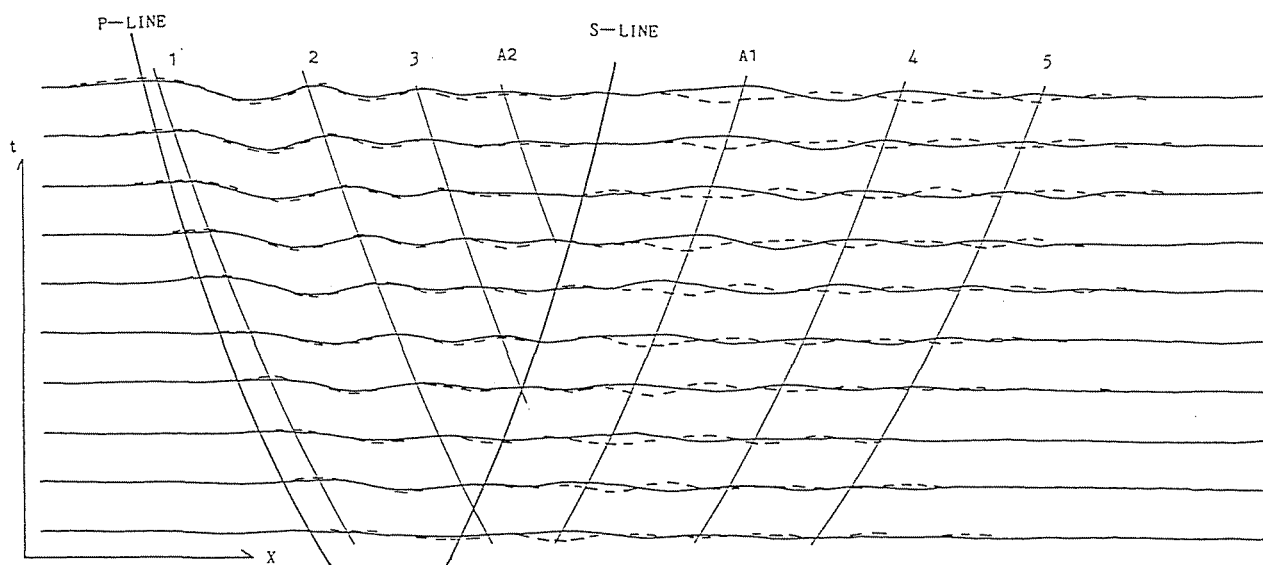


図-2 η , ξ の走時

あとがき

等流の直線流路で発達する二次流の強度は小さい。しかし、それが主流速分布に与える影響は必ずしも小さくはない（例えば、富永らによる矩形断面と台形断面の流速測定、JSCE,357号/Ⅱ-3,'85、381号/Ⅱ-7,'87）。蛇行部や弯曲部の様に形状効果によってラセン流が発生する場では、もともと直線流よりはるかに大きい二次流による非線形作用を受けているはずである。問題は、非線形項の解析的取扱が容易でないことである。そこで、河川工学的な観点から、非線形効果が強く現れる条件を調べたわけである。結局、本研究が対象とする問題では非線形作用は無視できないものと判断され、当初目指していた解析的手法での問題解決の方針を変更せざるを得なくなった。

それまでの数値計算の経験は一次元の不定流計算ぐらいであり、身近に多次元計算をしている人もおらず苦労した。SIMPLE法の存在は早くから知っていたが、しばらく試してから放棄した。それから悪戦苦闘した後に1つの計算法に気がついたが、良くよく考えてみるとそれは本質的にはSIMPLE法の考えであった。この間、De Vriendの特性曲線法から始まってSIMPLER法も含めて試行錯誤的に様々な計算法を試みた。数値計算は神経の疲れるプログラムのチェックに大半の時間が使われる。そんなわけで計算法の開発を一緒にやってくれた多くの卒・修論の学生・院生も苦労したものだと思います。ご苦労さまでした。

ともかくも、色々計算しているうちに、「高水敷流と低水路流の相互干渉が河床形に大きな影響を与える」ことがわかった。S56.8出水による石狩川矢臼場弯曲部の最大河床洗掘点はが弯曲部が終わって直線部に入った所で生じている。これは何故なのか？当初は、複断面流の作用によりこの地点の河床洗掘が強められると予想した。計算結果は逆の答えを示したわけである。弯曲度の強い上流部で河床洗掘が弱められたのである。

筆者がこの計算を行っていた頃、木下先生は、実河川の複断面流の観察結果から得た“適正複断面河道”の概念を検証するための実験を行っており、その途中経過を長谷川先生、黒木先生らとともに筆者も何度も見せて頂いた。初めのうちは、実験や結果の解析技術に驚いていたが、筆者の計算が進んで、始めて同じ現象を扱っていることに気が付いた。

このようなことから、木下先生には有益なご意見を多く戴いた。また、第6章

に示した貴重な実験資料を提供して戴いた。ここに、深甚の謝意を表する次第です。

複断面断面効果は、木下先生の実河川における多くの洪水観察および実験的検討からみて基本的に正しいものとする。しかし、この効果は流路の全体的形状と同時に局所的な形状効果も作用するから、個々の地点について更に水理学的な検討を行い、実地的な河川技術として確立する必要があると考える。例えば、上述した様に石狩川矢臼場弯曲の上流側は高水敷流効果により安全と考えられるが、下流部にはもはやこの効果は働かない（第4章図-13、第6章図-5）。S56.8出水では下流部において低水路護岸が何箇所か決壊している。

この様な細部を検討するためには乱流モデルの向上が必要であろう。高水敷流効果の基本現象として反転ラセン流を指摘したが、木下先生による可視化実験のビデオを見ると、この部分はきわめて複雑であり、第4章で示した様な簡単な乱流モデルでは不十分なところがあるかも知れない。最近、乱流モデルは剥離域に対する適用研究が進められている。一方、組織的渦構造の研究も着実に進んでいる。両者の成果が合わさって初めて、より実地的な河川流の構造に適合する乱流モデルが開発される。

この様な意味から本研究には、今後更に研究すべき点を含んではいるが、複断面流について1つの問題提起ができたものと思う。

序論で述べた様に、本研究の出発点は石狩川大型模型実験の補強であった。ことの性質上あまり時間的な余裕はなかったが、筆者は細かいことに拘り全体を見通すことが苦手であり、とても短期間に実用的な答えは出せそうもない。

しかし、本研究においては研究過程の全体を通じて、岸先生の指導により適切な方向をとることができた。岸先生には多くの討議を通じて、科学としての現象追求と工学としての問題解決の重要性を教わった。ここに、深甚の謝意を表する次第です。

最後に、河川、防災、港湾の各講座の諸先生には折りにふれ様々な角度からの討議やご意見を戴いた。ここに謝意を表します。