



HOKKAIDO UNIVERSITY

Title	補強材の付着すべりを考慮したコンクリート構造部材の力学性状に関する理論的研究
Author(s)	上田, 正生
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	乙第4178号
Issue Date	1992-12-25
DOI	https://doi.org/10.11501/3065016
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/32671
Type	doctoral thesis
File Information	4178.pdf



補強材の付着すべりを考慮したコンクリート構造部材の
力学性状に関する理論的研究

上 田 正 生

目 次

第1章	序 論	1
1. 1	研究の背景	1
1. 2	補強材とコンクリート間の付着作用に関する既往の研究概観	3
1.2.1	鉄筋コンクリート構造に関する既往の研究	4
(1)	軸方向力のみを受ける鉄筋コンクリート部材の1次元付着に関する既往の研究	4
(2)	2次元(および3次元)問題としてのRC構造に関する既往の研究	5
(3)	RC梁としての解析に関する既往の研究	6
(4)	RC床板としての解析に関する既往の研究	8
1.2.2	プレストレストコンクリート構造に関する既往の研究	8
(1)	2次元(および3次元)問題としてのPC構造に関する既往の研究	8
(2)	RC梁としての解析に関する既往の研究	9
(3)	PC床板としての解析に関する既往の研究	10
1. 3	本研究の目的	10
1. 4	本研究の概要	11
	第1章の参考文献	14
第2章	鉄筋コンクリート棒部材の一次元付着すべり解析	18
2. 1	はじめに	18
2. 2	鉄筋コンクリート棒部材のための理論式の展開	19
2.2.1	基本仮定事項	19
2.2.2	変位場、および歪と応力	19
2.2.3	全ポテンシャル・エネルギー汎関数	20
2.2.4	支配微分方程式	21
2. 3	有限要素法への定式化	22
2.3.1	低次関数要素による定式化	22
(1)	変位関数と歪の有限要素表示	22

(2) 有限要素方程式	23
2.3.2 高次関数要素による定式化	24
(1) 変位関数と歪の有限要素表示	24
(2) 有限要素方程式	25
2. 4 数値計算例と考察	26
2.4.1 解析モデルの概要	26
2.4.2 計算結果と考察	26
(1) 要素分割数の影響	26
(2) 既往の理論解との比較	28
2. 5 本章のまとめ	29
第2章の参考文献	31
第3章 補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート梁部材の解析	33
3. 1 はじめに	33
3. 2 鉄筋コンクリート梁部材のための理論式の展開	34
3.2.1 基本仮定事項	34
3.2.2 変位場、および歪と応力	34
(1) 変位場	34
(2) コンクリート部分の歪と応力	35
(3) 鉄筋の歪と応力	35
3.2.3 軸力、曲げモーメント、および剪断力	36
3.2.4 全ポテンシャル・エネルギー汎関数	36
3.2.5 支配微分方程式と平衡方程式	37
3. 3 有限要素法への定式化	38
3.3.1 低次関数要素による定式化	38
(1) 変位関数と歪の有限要素表示	38
(2) 有限要素方程式	40
3.3.2 高次関数要素による定式化	41
(1) 変位関数と歪の有限要素表示	41
(2) 有限要素方程式	43
3. 4 数値計算例と考察	45

3.4.1	部材両端で鉄筋が完全に定着された R C 単純梁	45
(1)	等分布荷重時の解析結果	45
(2)	2 点荷重時の解析結果	50
3.4.2	部材両端で鉄筋のすべりが自由な R C 単純梁	50
3. 5	本章のまとめ	52
	第 3 章の参考文献	54
第 4 章	補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の解析	56
4. 1	はじめに	56
4. 2	鉄筋コンクリート床板のための理論式の展開	57
4.2.1	微小変形理論による定式化	57
(1)	基本仮定事項	57
(2)	変位場、および歪と応力	57
(3)	膜力とモーメント	59
(4)	全ポテンシャル・エネルギー汎関数	61
(5)	支配微分方程式と平衡方程式	62
4.2.2	有限変形理論による定式化	64
(1)	追加基本仮定事項	64
(2)	面内歪	64
(3)	膜力とモーメント	65
(4)	全ポテンシャル・エネルギー汎関数	65
(5)	支配微分方程式と平衡方程式	66
4. 3	各鉄筋層が任意の配筋方向をもつ R C 床板を対象とした有限 要素解析	68
4.3.1	微小変形理論による定式化	68
(1)	変位場、および歪と応力	68
(2)	有限要素解析のための全ポテンシャル・エネルギー汎関数	69
(3)	変位関数と歪の有限要素表示	69
(4)	有限要素方程式	72
4.3.2	有限変形理論による定式化	74
(1)	変位関数と歪の有限要素表示	74

(2) 接線剛性マトリックスの誘導	76
(3) 非線形解析手法と収束条件	78
4. 4 数値計算例と考察	79
4.4.1 微小変形理論による計算例	79
(1) x, y 直交配筋を有する単純支持 R C 床板	79
(2) 斜め45度直交配筋を有する単純支持床板	82
4.4.2 有限変形理論による計算例	84
(1) 既往の等方性板の解との比較	85
(2) 周辺拘束 R C 床板の解析	86
4. 5 本章のまとめ	95
第4章のAPPENDIX	96
第4章の参考文献	110
第5章 曲線テンドンを有するプレストレストコンクリート梁部材の解析	112
5. 1 はじめに	112
5. 2 曲線テンドンを有する P C 梁部材のための理論式の展開	113
5.2.1 基本仮定事項	113
5.2.2 変位場、および歪と応力	114
(1) 変位場	114
(2) コンクリートの歪と応力	114
(3) テンドンの歪と応力	114
(4) 付着応力	115
5.2.3 全ポテンシャル・エネルギー汎関数	115
5.2.4 支配微分方程式	117
5.2.5 等価軸力および等価曲げモーメントの導入と平衡方程式	118
5. 3 有限要素法への定式化	119
5.3.1 テンドンの2次曲線近似	119
5.3.2 P C 梁要素の変位関数と歪	120
5.3.3 2種の有限要素方程式	121
(1) 原汎関数に忠実に従う厳密な有限要素方程式	121
(2) 簡略化有限要素方程式	124

5. 4	テンドンのプレストレス力の減少量の評価とその算入法	127
5.4.1	テンドンに沿うプレストレス力と摩擦力分布の評価	127
(1)	緊張力導入時	127
(2)	アンカースリップの生ずる定着時	128
5.4.2	テンドンのプレストレス力の減少およびアンカースリップ の影響を考慮したP C梁の緊張解析手法	131
(1)	テンドンのプレストレス力分布と摩擦力分布 の等価節点力への変換	132
(2)	繰り返し計算手法	133
5. 5	数値計算例と考察	133
5.5.1	曲線形状配筋を有するR C梁としての計算例	133
(1)	付着係数と補強筋の曲線形状の違いが梁の力学性状に およぼす影響	133
(2)	簡略化有限要素解の精度	138
5.5.2	曲線テンドンを有するP C梁の計算例	140
(1)	モデルP C梁の解析	140
(2)	Linの実験P C梁の解析	147
5. 6	本章のまとめ	149
	第5章のAPPENDIX	151
	第5章の参考文献	153
第6章	曲線テンドンを有するプレストレストコンクリート床板の解析	156
6. 1	はじめに	156
6. 2	曲線テンドンを有するP C床板のための理論式の展開	157
6.2.1	基本仮定事項	157
6.2.2	変位場、および歪と応力	158
(1)	変位場	158
(2)	コンクリートの歪と応力	158
(3)	テンドンの歪と応力	159
(4)	テンドンのすべり変位と付着応力	160
6.2.3	全ポテンシャル・エネルギー汎関数	160

6.2.4	支配微分方程式	162
6.2.5	等価膜力と等価曲げモーメントの導入と平衡方程式	164
6.3	各テンドン層が任意の配筋方向を有するP C床板の有限要素解析	166
6.3.1	追加仮定事項	166
6.3.2	変位場、および歪と応力	167
(1)	変位場	167
(3)	テンドンの歪と応力	167
6.3.3	有限要素解析のための全ポテンシャル・エネルギー汎関数	169
6.3.4	変位関数と歪の有限要素表示	169
(1)	面内変形	169
(2)	曲げ変形	170
(3)	すべり変形	171
(4)	コンクリート部分の歪とテンドン層の歪	171
6.3.5	有限要素方程式	172
6.3.6	摩擦によるプレストレス力損失の評価とその算入法	173
(1)	テンドンのプレストレス力分布と摩擦力分布 の等価節点力への変換	174
6.4	数値計算例と考察	176
6.4.1	解析モデルスラブの設定	177
6.4.2	計算結果とその考察	179
(1)	第I類のモデルP Cフラットプレート	179
(2)	第II類のモデルP Cフラットプレート	189
(3)	第III類のモデルP Cフラットスラブ	192
6.5	本章のまとめ	195
	第6章のAPPENDIX	198
	第6章の参考文献	205
第7章	補強材の付着すべりを考慮したR C部材の材料非線形問題への 一二の拡張と適用の試み	207
7.1	はじめに	207
7.2	鉄筋コンクリート棒部材の材料非線形付着すべり解析	208

7.2.1	非線形解析のための仮定事項	208
7.2.2	材料の力学性状と構成関係	209
(1)	コンクリートの応力-歪関係	209
(2)	鉄筋の応力-歪関係	210
(3)	付着応力-すべり関係	210
7.2.3	非釣り合い応力の等価節点力への変換	212
7.2.4	非線形解析手法	212
(1)	収束条件	213
(2)	亀裂荷重を正確に求めるための荷重増分量の決定手法	213
(3)	亀裂の亀裂要素への選択導入	214
7.3	鉄筋コンクリート梁部材の材料非線形解析	214
7.3.1	非線形解析のための仮定事項	215
7.3.2	材料の力学性状と構成関係	216
(1)	コンクリートの応力-歪関係	216
(2)	鉄筋の応力-歪関係	216
(3)	付着応力-すべり関係	216
7.3.3	材料非線形解析のための増分汎関数	217
7.3.4	非釣り合い応力の等価節点力への変換	218
7.3.5	非線形解析手法	218
(1)	平面保持の仮定がもたらす矛盾点	218
(2)	上記矛盾点を克服するための既往の手法	219
(3)	本解析で用いた一簡略化手法	220
7.4	数値計算例と考察	222
7.4.1	R C 棒部材の非線形計算例	222
(1)	山本らの引抜き試験体の解析	222
(2)	森田らの両引き試験体の解析	225
(3)	山本らの除荷を含む両引き試験体の解析	226
(4)	半無限コンクリート躯体に埋め込まれた鉄筋の付着すべり問題	228
(5)	引張り亀裂の生ずる両引きモデル部材の解析	231
7.4.2	R C 梁部材の非線形計算例	237
(1)	林らの片持ち実験梁の解析	237

(2) 鈴木らの R C および P R C 単純支持実験梁の解析	243
7. 5. 本章のまとめ	247
第 7 章の参考文献	249
第 8 章 研究の総括と今後の課題	251
8. 1 本研究の総括	251
8. 2 今後の研究方向と課題	257
既発表論文リスト	258
謝 辞	273
英文要旨	274
独文要旨	278

第1章 序 論

1. 1 研究の背景

コンクリート構造（鉄筋コンクリート、およびプレストレストコンクリート構造）は、今日、土木・建築構造物の主体構造として確固たる地位を占めており、我々の日常市民生活と密接な関わりをもっている。従って、コンクリート構造物に要求される最も重要な条件は、まず、その使用目的である機能が全耐用期間を通して安全に達せられること、即ち、1)構造的に安全性が確保されることであり、また、利用者に使用上の不都合や、安全性に対する心理的な不安（力学的には十分安全であっても）を感じさせないこと、即ち、2)使用性が保持されることである。勿論、使用上の快適性やデザイン的な美観と言った“人間の感性”に関わる事柄、および建設・維持費の経済性など、このほかにも考慮すべき要件は多々あるが、これらの重要度は、構造設計の見地からすれば、前掲の2大要件の付帯条件の位置におかれて然るべきもののようと思われる。

しかし、理屈の上では至極当然なこの 1) 構造的安全性の確保と 2) 使用性の保持が、現在、“限界状態設計法”として知られる「コンクリート構造の設計のための基本理念」となって世界の先進諸国の設計規準や指針に取り入れられるようになったのは、比較的最近のことである。周知のように、コンクリート構造設計法の歴史的発展経過は、①許容応力度設計法（弾性設計法）、②終局強度設計法、③限界状態設計法の順であり¹⁾、この限界状態設計法に至ってはじめて、1)終局限界状態(安全性の確保)と2)使用限界状態(使用性の保持)に対する検討が同列に扱われることとなった。コンクリート構造に限らず「各時代の構造・設計法」は、確実にその時代の研究レベルを反映することになるから、換言すれば、「近年に至ってはじめて、この分野の研究レベルが完全とは言えないまでも、コンクリート構造の“安全性の確保”と“使用性の保持”を検討することに意味を見いだし得る段階に達した」と観ることもできよう。しかし乍ら、この限界状態設計法自体が、現在、揺籃期にあり、「特性値」や「部分安全係数」の取り方など多くの問題を抱えているのも事実であるから²⁾、ある国の設計規準がまだ限界状態設計法の基本手法を採用していないからと言って、その国の研究レベルが低いということには必ずしもならない（未だ多くの問題点を抱えている新しい設計法の採用が、将来、技術者に与えるかもしれない混乱を慮れば、その採用に慎重にならざるを得ぬのもまた当然のことであろう）が、世界各国の

構造設計法が、終局限界状態と使用限界状態と言うコンクリート構造の非弾性領域における力学性状を重視する限界状態設計法へと確実に移行しつつあるのもまた紛れもない事実である^{3)~6)}。このように今日では、コンクリート構造の非弾性領域における変形・力学性状に関する研究の必要性が従来にも増して昂まりつつあるのが現状のように思われる。

“コンクリート構造”は言うまでもなく、コンクリートと鋼と言う全く異質な材料から構成される典型的な複合材料であり、また実際、その変形－破壊性状も極めて複雑な様相を呈することが知られている。勿論、近年の電子計算機的高速化・大容量化とこれに伴う有限要素法のような数値計算法の著しい進展は、種々のコンクリート構造部材の弾性から塑性域をへて破壊にいたるまでの変形挙動をも、解析によって可成り実現象に近い形で追跡することを可能にしつつあるが、コンクリート構造の形態それ自体の種類が数多く、したがって、その破壊に到達するまでのメカニズムも極めて多岐にわたるため、現時点においてもなお、解析手法に関する新たな提案を含む多くの研究が、次々と報告されているのが現状である。

このように、コンクリート構造の非弾性解析を困難ならしめている大きな要因としては、①亀裂現象を含むコンクリートの応力－歪性状の多様性、②補強材（鋼）とコンクリート間の相互作用のメカニズムの複雑性、の二つを挙げることができる。これらの二大要因の内の前者①については、現在、コンクリート工学の分野における最も重要な研究課題の一つ、即ち、“多軸応力下のコンクリートの構成則問題”として、精力的な研究が継続して行われているのは周知のとおりである。しかし、この①に関連する“コンクリートの構成則”は、有限要素法等による数値計算のプロセスにおいては、解析に従事する技術者がもし望めば、ブラックボックス的に解析に取り込むことも可能であるが、他方、後者②の「補強材とコンクリートの相互作用を考慮する場合」は、本質的に各解析手法の独自性に委ねられる部分が多いものであり、前者とはその性質を異にするものである⁴⁾。したがって、数値解析手法そのものの適合性と信頼性は、「補強材とコンクリートの相互作用をいかに精度よく表現し得るか」に最も大きく左右されることになる。

一口に「補強材とコンクリートの相互作用」と言っても、例えば、剪断亀裂場にある壁

注)： 勿論、別法としてコンクリート構造をよりマクロに捉える手法、例えば、補強筋を含めたRC平板要素そのもの（補強筋とコンクリートを分離せずに）の応力－歪構成則を取り扱う手法も提案されているので、そのような場合には、②のコンクリートと鋼の相互作用そのものがこのRC平板要素の応力－歪構成則のなかに包含されることになるが、両者間の相互作用をよりミクロに捉えようとすれば、コンクリートと鋼を別個に取り扱わざるを得ないことは明らかである。

の亀裂面と斜交する部分の鉄筋のdowel作用や、同じく剪断亀裂場にある梁部分の引っ張り鉄筋と被りコンクリートの剥離現象の追跡など、一筋縄では行かない複雑で厄介な問題が多いが、また一方では、地震時の横荷重による柱筋のフーチングからのすべり出しや、スラブの引っ張り鉄筋の周辺拘束梁からのすべり出しの問題など、補強材とコンクリートの付着作用がその支配的要因と見做し得る比較的単純な問題が数多いのも事実である。

当然のことながらコンクリート構造は、コンクリートと補強材が一体となって働くことによって始めて成立するものであり、この両者の一体の程度を規定するのが「補強材とコンクリート間の付着作用」であるから、この付着作用は間違いなく「個々のコンクリート構造部材の力学性状を支配する最も基本的で且つ重要な要因の一つである」と言うことができる。この“補強材とコンクリートの付着作用”を直接考慮して取り扱い得る、有用なコンクリート構造の解析法としては、「ボンドリンクを用いる有限要素法」に代表される2次元応力解析手法があるのは周知のとおりである。しかし、これらの手法は対象とする部材の局所的な力学性状を、よりミクロに詳細に取り扱う必要がある場合には、極めて有用であるが、数多くの梁と柱から構成されるより大きな骨組み構造や、スラブ・梁・柱システム等、その対象を全体的により大きく捉えなければならない場合には、限界があり不向きであることは明らかである。ここに、“補強材とコンクリートの付着作用”を簡便に、しかも精度よく考慮し得る「より適用性の広い解析手法」の希求される所以があるように思われる。

1. 2 補強材とコンクリート間の付着作用に関する既往の理論研究概観

周知のように、コンクリート構造における「補強材とコンクリート間の付着作用」を理論的に取り扱う手法には、大別すると二つの方法がある。即ち、亀裂発生後の鉄筋コンクリート梁部材の剛性評価をその例にとれば、①複雑な付着問題を直接取り扱わずに、付着作用の結果として鉄筋から伝達されるコンクリートの引張り側の応力分担を、“平均歪(応力)”と言う形で評価し、この部分の部材剛性への寄与を算定する間接的な手法^{7)~12)}、②付着作用を何らかの方法で解析に組み入れる直接的な手法の2種である。これらのうち①の間接的な方法は、角田⁷⁾や鈴木ら¹¹⁾の研究に代表されるように、「部材の平均剛性のみならず平均亀裂幅や亀裂間隔まで評価することが可能」であり、しかも、既に数多くの実験データによって裏打ちされているため、信頼性が高く極めて有用であることが実証

されている。しかしながら、拘束端における補強材のすべり出し等、局所的な付着作用が部材全体の挙動に少なからぬ影響を及ぼし得るような問題を、より詳細に取り扱おうとすると、付着作用そのものを何らかの形で考慮に入れる②の直接的な方法をとることが必要となる。

ここでは、本研究がその範疇に属する後者②の「付着作用を直接取り扱う既往の理論研究」について概観することにする。

1. 2. 1 鉄筋コンクリート構造に関する既往の研究

(1) 軸方向力のみを受ける鉄筋コンクリート部材の1次元付着に関する既往の研究

1909年、Arnovljjevicは、鋼材の溶接接合部分の付着応力分布を求めるために導いた式を、軸方向力のみを受ける鉄筋コンクリート（以下RCと略記）部材の1次元付着すべり問題に拡張し、今日、“鉄筋とコンクリート間の基本付着方程式”として知られる著名な式を始めて導いた¹³⁾。

福田（1933年）¹⁴⁾及びBufler（1958年）¹⁵⁾は、付着応力 τ_b と相対すべり変位 S の間に線形関係を仮定し、種々の境界条件下におけるこの基本式の解を求めている。当時におけるこの福田の研究は、世界的に見ても特筆すべきものであるが、 τ_b - S 関係に線形を仮定し得るのは比較的低応力領域においてであり、高応力下においては、 τ_b - S 関係は著しい非線形性を示すことが知られている。1961年、Rehm¹⁶⁾は、実験に基づく非線形な τ_b - S 関係を用いて先の基本式を解き得ることを示唆した。しかしながら、コンクリート棒部材に埋め込まれた鉄筋の詳細な付着実験から直接的に τ_b - S 関係を求め、これを非線形式でシミュレートし、前記の付着方程式を解いて、漸増荷重（両引き）下のRC部材の付着実験結果を、精度よく表現できることを明らかにしたのは、森田ら（1967年）¹⁷⁾の研究が最初である。その後、田ら（1973年）¹⁸⁾及び山本ら（1973年）¹⁹⁾も同様な手法を用いて、漸増荷重下におけるRC部材の付着すべり解析について報告しており、青柳ら（1978年）²⁰⁾及び田辺ら（1989年）²¹⁾は、これをコンクリートに順次亀裂が発生する場合をも取り扱えるように拡張し、さらにまた、中田（1970年）²²⁾及びTassiosら（1981年）²³⁾は、それぞれ差分手法を用いて、この問題を繰り返し荷重時の付着の劣化をも考慮し得る（但し、両者とも亀裂の発生領域は対象としていない）ように拡張している。

以上に述べてきたように、軸方向力のみを受けるRC部材の1次元付着に関する既往の理論研究の殆どは、前記の“付着方程式”をその基礎としているが、これとは別の方法で

この問題を定式化したものとしては、接触面におけるエネルギー消費の概念を導入した有限要素法によるSchafer(1974年)²⁴⁾の研究があり、この論文中には、漸増荷重下における「両引き鉄筋コンクリート部材」の非線形付着すべりの解析例が示されている。

ここで見てきた「鉄筋コンクリート部材の1次元付着に関する既往の解析手法」を通観して気付くことは、有限要素解析が全盛の昨今にあって、この分野では有限要素法を用いた報告が極めて少ない（上記の文献中で有限要素法によるのは、僅かに田辺らとSchaferの研究のみである）ことである。その大きな理由の一つは、1次元付着の基本方程式自体が単純であるため、 τ - s 曲線を適切に仮定すれば、非線形問題も比較的容易に解くことが可能であること、即ち、「有限要素法のような近似手法は、亀裂の発生によって境界条件が刻々変化する場合や、繰り返し載荷による付着の劣化をも考慮しなければならないような、より複雑な問題以外には使用する必要がなかった」からである。また今一つの理由としては、「次項で述べる“より簡単で有用なボンドリンクを用いる2次元有限要素解析手法”が存在したこと」を挙げることができるように思われる。

尚、このほかにも、①部材接合部内の鉄筋の挙動の追跡²⁵⁾や、②マッシブなコンクリート内に埋め込まれた鉄筋の付着作用²⁶⁾、および、③ひびわれ後のRC部材の平均的な引張り剛性の評価²⁷⁾、などにそれぞれ焦点を絞った研究も多数報告されているが、これらの研究の主旨は、本研究とはいささかその範疇を異にするので、ここでは敢えて触れていない。

（2）2次元（および3次元）問題としてのRC構造に関する既往の研究

RC構造における付着作用は、有限要素解析法を用いれば、比較的容易に“より詳細な2次元（稀には3次元）問題”として取り扱うことが可能である。

周知のように、付着作用をも考慮に入れた2次元有限要素法による既往の研究は、すでに膨大な数に上っており、その主要な研究論文の題名をリストアップするだけでも、かなりのページ数を割くことが必要になる程である。幸いなことに、この種の研究に関する優れたレビューが既に幾つか報告^{28)~30)}されており、また、後述するように本研究の目的も、「2次元有限要素解析における付着作用の取り扱い」とは、その主旨を異にするものであるから、ここでは、この種の既往の研究について、文字通り“大まかに概観”するに留めることとする。

広く知られているように、有限要素法をRC構造の解析に初めて適用したのは、1967年のNgoとScordelisのRC梁の解析³¹⁾が最初である。この研究では、鉄筋とコンクリート

間の付着作用を直交する二つのバネから成るボンドリンク要素で表示し、前もって設定された斜め亀裂と曲げ亀裂を有するRC梁の解析が行われた。この研究が画期的であったのは、その後、有用な付着モデルとして多用される^{32)~40)}に至ったボンドリンクが初めて導入されたことである。勿論、付着作用を鉄筋とコンクリートの接触境界における付着すべり現象として捉えるこのボンドリンク要素も万能ではないが、その有用性は疑いもなく、現在においてもなお、多くの研究者⁴¹⁾によって使用されており、また、改良された新たなボンド・スリップ要素を用いる手法も幾つか提案されている^{42), 43)}。

ボンドリンクとは全く異なるが、鉄筋要素とコンクリート要素間に同様な働きをする細長い矩形のジョイント要素⁴⁴⁾を介在させることによって、付着作用を表示する有限要素解析手法も報告されている⁴⁵⁾。この手法は、節理のある岩盤の安定性の解析のために提案された“ジョイント要素”をコンクリート構造の問題に適用したものである。

鉄筋とコンクリート間の付着作用を、ボンドリンクのような接触境界での付着すべり現象としてではなく、鉄筋近傍のコンクリートの剪断作用として捉える考え方もある。例えば、池田(1973年)⁴⁶⁾は、微細な内部ひびわれを擬似的に表現するためのバネ系の有限要素を用いる方法(厳密な2次元解析ではなく、1次元要素を連ねることによって2次元的な広がりをもたせる方法である)を提示しており、また、黒正ら(1974年)⁴⁷⁾や野口(1977年)⁴⁸⁾らは、鉄筋近傍のコンクリート部分にボンドゾーン(内部ひびわれゾーン)を設定して、付着作用をこの部分の剪断作用として表示する方法について報告している。

(3) RC梁としての解析に関する既往の研究

前項で見たように、RC梁部材における付着作用を2次元有限要素法を用いた「平面応力問題の一部」として取り扱った解析手法については、既に夥しい数の報告があるが、この付着作用を平面保持の仮定に立脚したRC梁部材の曲げ理論に直接関連づけて取り扱う手法となると、その数はまだそれほど多くはないのが現状である。

「鉄筋とコンクリート間の付着作用」を既往の梁理論と結びつける最初の試みは、1978年のAldstedtとBerganの有限要素解析⁴⁹⁾に見いだすことができる。この研究では、亀裂発生後の梁要素に“crack opening”なる概念を導入することによって、鉄筋の付着応力とすべり変位による仕事を考慮に入れており、結果として、亀裂発生後の引っ張り側コンクリートの応力分担を、梁全体の剛性の評価に組み込むことに成功している。Aldstedtらのこの方法は、その定式化が非常に煩雑であり、鉄筋も一層、即ち、単配筋の場合のみしか扱えないこと、また、後続のこの種の研究に殆ど影響を及ぼしていないなど、その適用性

も極限定されたものであったが、鉄筋の付着作用を「亀裂発生後のRC梁の剛性の評価」に初めて直接的に関連づけた点で、特筆に値するものである。

鬼沢ら(1979年)⁵⁰⁾は、通常のRC梁要素(積層化有限要素)を用い、①隣接要素間の鉄筋応力の差から求められる付着応力 τ_b と仮定 τ_b -S関係よりすべり変位Sを計算し、次に、②鉄筋の分担歪を、先のすべり変位Sから得られる平均付着歪と平面保持則より求められる鉄筋位置の歪の和として算定し、結果として、③亀裂の生じた場合の梁要素の鉄筋の等価剛性を評価する方法を提示した。即ち、この手法は付着作用を考慮した“鉄筋の等価剛性”を用いることによって、亀裂の生じた梁要素の剛性の評価を行うものである。この研究がAldstedtらの手法より優れている点は、拘束端からの鉄筋のすべり出しをも取り扱うことが可能なことである。この鬼沢らの付着作用の評価手法を用いた他の研究としては、コンクリートの構成則にエンドクロニック理論を採用した小坂ら(1982年)⁵¹⁾の積層化有限要素法によるRC梁部材の非線形解析がある。

児島ら(1981年)⁵²⁾は、RC梁としての有限要素の剛性を、「軸剛性を考慮したコンクリート梁要素の両端の配筋位置に、鉄筋のための棒要素を水平バネ要素(ボンドリンク)で接合する」ことによって表示する手法を用い、鋼繊維補強コンクリートを使用したRC梁部材の非線形解析を行った。この方法は2次元有限要素解析におけるボンドリンク手法の“梁要素版”とも言うべきもので、その定式化も前述のAldstedtらや鬼沢らの手法より単純で容易であり洗練されている。しかし、この方法では、鉄筋の歪は要素内一定であり、コンクリート梁要素の鉄筋位置のコンクリートの歪の変化(線形)との間に整合性を欠いているから、厳密な意味では、「この方法は理論的な矛盾を幾分含んだ近似的な手法に分類される」ことになる。

多田・武田(1980年)^{53)・54)}は、一つの梁要素を、要素両端の二つのヒンジ領域と中央部の剛性領域に分けて表示し、コンクリートの亀裂は要素両端にのみ生ずるものとして、上・下2層の鉄筋の付着すべりをも考慮し得る新たなRC梁の非線形解析法の提案を行った。市之瀬(1983年)⁵⁵⁾は、多田らと同様な考えを更に発展させた解析手法を展開して、既往の多くの実験結果との比較・対照を試み、良好な結果が得られることを報告している。この種の手法は、RC梁要素のヒンジ領域での、付着すべりを含めた梁の剛性評価のための定式化が極めて複雑で面倒であり、また、梁の中央部には亀裂は発生せぬものと仮定されているなど、その適用性は限定されたものであるが、RC梁一部材を一つの要素で表示することが可能であるため、大規模なRCラーメン構造の地震応答解析などへの適用が容

易な“マクロモデル”としての大きな利点を有している。

松浦・山本(1982年)⁵⁶⁾は、既往の梁要素(積層化有限要素)に鉄筋層のすべり変位 S を節点変位として追加することによって付着すべり作用を考慮し、亀裂の生じたRC梁部材の長期変形挙動の解析を行った。この方法は、通常の梁要素の節点変位のほかに新たな節点変位を追加していると言う点で、先の児島らの手法に類似していると言うことができる。しかし両者が決定的に異なるのは、児島らの方法では、「鉄筋はボンドリンクによって、要素の両端の節点でのみコンクリート梁に接合され、付着作用もこの二つの節点における集中現象として取り扱っている」のに対して、松浦らのこの方法では、「鉄筋とコンクリートの付着作用は、要素内の接触境界に沿って評価されるため、この現象をより実際に近い形で表現することが可能」な点である。坂田ら(1987年)^{57), 58)}も、この手法を採用して付着すべり作用を考慮し、さらに、梁・柱接合部変形をも考慮したRCフレームの非線形解析を行った結果について報告している。

以上に述べた研究の殆どは有限要素法によるものであるが、佐藤・青柳(1983年)^{59), 60)}は、付着作用をも考慮し得るRunge-Kutter法を用いた独自の方法を展開して、低温度下におけるRC梁部材の非線形曲げ変形挙動の解析を行っている。

(4) RCスラブとしての解析に関する既往の研究

曲げを受ける鉄筋コンクリートスラブの解析としては、亀裂の生じた拘束端辺における周辺梁からの鉄筋のすべり出し量のみを算定し、その影響を端部に起こる付加的な強制回転角として考慮に入れる便宜的な簡便法^{60)~62)}があるのみであり、スラブ内部における鉄筋とコンクリート間の付着作用をも直接解析に組み入れた研究は、著者の知る限りではまだ見当らぬようである。

1. 2. 2 プレストレストコンクリート構造に関する既往の研究

周知のように、プレストレストコンクリート(PC)構造には、プレテンション方式とポストテンション方式の2種がある。言うまでもなく、前者のプレテンション方式のPC構造は、「補強材(PC tendon)に予め引っ張り力が存在するのみで、コンクリートとPC tendonの間には、RC構造の場合と全く同様な付着作用が期待できる」構造であるから、その力学的な取り扱いも、RC構造の解析手法がそのまま適用可能であり、理論解析上何らの困難も存在しない。従って、ここで論ずべきは、後者のポストテンション方式のPC構造が、その主たる対象となる。

(1) 2次元(および3次元)問題としてのP C構造に関する既往の研究

2次元(および3次元)問題としてポストテンショニング方式のP C構造の付着すべり問題を取り扱う場合には、既に前節のR C構造に関する項(2)で述べた“ボンドリンク手法”が、有効に適用可能である。即ち、P C構造を解析する場合、①プレストレス導入時には、ボンドリンクの剛性に見捨てし得る程度の微小な値を設定して緊張解析を行い、また、②グラウチング完了後の構造挙動の追跡には、同じくボンドリンクの剛性にグラウトの材料性状を反映する値を設定することによって、R C構造と全く同様に解析することができることになる。この種のボンドリンク手法のただ一つの制約は、曲線テンドンを持つP C構造を解析する際に、要素分割のメッシュがテンドンの配置曲線形に左右されることである⁶⁴⁾。

1989年、ElwiとHrudey⁶⁵⁾は、上記のボンドリンク手法とは全く異なる、「コンクリート部分の要素分割がP Cテンドンの配置曲線形状に影響されない、テンドンの付着すべりをも考慮し得る“新しい2次元有限要素モデル”」を提示し、更に、単純な二、三の弾性問題の解析例を示してその有用性を明らかにしている。しかし、著者の知る限りでは、この方法によるP C構造の材料非線形問題への適用例については、まだ報告されていない。なお、この手法のように、テンドンを要素の節点位置とは無関係に、要素内に存在する曲線として定式化する他の方法としては、PhilipsとZienkiewicz (1976年)⁶⁶⁾及びElwiとMurray (1980年)⁶⁷⁾の研究があるが、これらは共に完全付着状態を対象としたものであり、テンドンの付着すべりは考慮されていない。

(2) P C梁としての解析に関する既往の研究

直線テンドンを有するP C梁部材の場合、その理論的な取り扱いと比較的容易であり、この場合もR C梁のための手法がそのまま適用可能である。従って、ここでは、曲線テンドンを有するP C梁の既往の研究についてのみ記述することとする。

通常の構造設計に用いられる慣用の近似計算手順を、単にコンピュータ用にプログラミングし直したものではなく、より理論的で詳細な手法を用いて「曲線テンドンを有するP C梁部材を取り扱った研究」となると、その数も極めて限定されたものとなる。

KangとScordelis (1980年)⁶⁸⁾は、テンドン位置が各梁要素内で線形変化するものとし、曲線テンドンのプレストレス力による効果を、要素節点における等価軸力と等価曲げ上げ力に置き換える手法を用いた有限要素法を提示してP Cフレームの非線形解析を行った。また、田辺ら (1980, 1989年)^{69), 70)}は、テンドンとコンクリート間の摩擦によるエネル

ギー損失の概念を導入した独自の手法を展開して、テンドンの付着すべりを考慮した「曲線テンドンを有するP Cフレーム」の有限要素解析について報告している。

HaberとAbel (1983年)⁷¹⁾は、上で述べた研究手法と全く異なる概念に基づいて、コンクリート部分を剛と仮定した場合の「緊張力導入時におけるP C梁部材のテンドンの応力分布」を求める方法を提示した。しかし、この研究は、膜構造とそれを支えるケーブルシステムのコンタクト・スリップ問題等の解析を主たる目的とするものであり、P C構造の詳細な変形挙動の追跡に適する方法ではない。

(3) P Cスラブとしての解析に関する既往の研究

“曲線テンドンを有するP Cスラブ”に関する既往の理論的研究としては、GreunenとScordelis (1983年)⁷²⁾の有限要素法による非線形解析があるが、この研究では、前項(2)で述べたKangらのP C梁の解析と同様、テンドンは要素内で直線変化するものと仮定され、また、プレストレス力によるテンドンの力学的な貢献も各要素の節点における“等価節点力”に置換して取り扱う方法がとられており、テンドンの付着作用を直接解析に組み込むタイプの手法によるものではない。

少なくとも著者の知る限りでは、テンドンの付着すべり作用をも直接考慮に入れた「曲線テンドンを有するP Cスラブの解析」に関する研究は、今のところまだ報告されていないようである。

1. 3 本研究の目的

前節で概観したように、コンクリート構造における「補強材とコンクリート間の付着作用」を取り扱った既往の研究の総数は、全体としては、既に夥しい数に上っているが、その内訳を見ると、ボンドリンク手法に代表される2次元有限要素解析によるものがその大多数を占めており、次いで、軸方向力のみを受けるR C部材の“基本付着方程式”に基づく1次元付着すべり解析に関する報告がこれに続いている。しかしながら、補強材の付着すべり作用を、平面保持の仮定に基づく梁理論と直接関連づけて取り扱った研究については、R Cに関しては比較的その数が多いものの、P Cとなると極端に少なくなり、更に、これをスラブ理論と結びつけた研究にいたっては、最早、R CおよびP C構造とも殆ど見当らないのが現況である。しかも、近年になって研究者の関心を集め、比較的数多く報告されるようになった「この梁理論と関連づけるタイプの既往の研究」についても、それら

の多くは、亀裂発生後の非弾性領域における梁の挙動の追跡に、その主眼を置いているため、“付着すべり”の取り扱いも巧妙ではあるが、解析上のテクニックを駆使した結果として、定式化の過程が極めて複雑なものとなっており、この種の問題の最も基本となるべき「線形領域における、補強材の付着すべりを考慮したRC（並びにPC）梁部材のための基礎微分方程式」さえ明らかにされていないのが現状のようである。

勿論、既往の有用な2次元有限要素解析手法は、単に梁部材（RCおよびPC）の曲げや剪断の問題に含まれる補強材の付着作用だけでなく、部材接合部の変形挙動の追跡にも使用することが可能であり、きわめて広い適用性をもっている。しかし、計算量が膨大となるため、電子計算機の容量と演算速度が飛躍的に向上した今日においてもなお、この種の手法の実用性は、部材単位のマクロな問題への適用に限られており、また、当然のことながら、面外の曲げを伴うスラブの問題を取り扱うことはほぼ不可能である。

以上のような研究の趨勢に鑑み、本研究は、「補強材の付着すべりを考慮した、より広い適用性を有するコンクリート構造のための解析手法」を確立することをその目的としている。

即ち、本研究は、「軸方向力のみを受けるRC部材のための周知の“基本付着方程式”が、全ポテンシャル・エネルギー原理によっても誘導しうること、また、これは有限要素法を用いて容易に定式化できることから、その着想を得たもので、この考え方を更に発展させることによって、既往の梁および板理論に、補強材（鉄筋またはテンドン）の付着すべり作用を、厳密に考慮に入れた（ボンドリンクのような数値解析上のテクニックとしてではなく）場合の、RCおよびPC構造としての“梁”と“スラブ”のための基礎微分方程式を導くことと、更にまた、これを有限要素法を用いて解析し得る“統一された解析手法”を提示すること」を、その主要な目的として行ったものである。

1. 4 本研究の概要

本論文は、補強材の付着すべりを考慮した場合の「より適用性の広いコンクリート構造部材のための解析手法」を確立するために行った研究で、8章より構成されている。

これら各章の内容を以下に略述する。

第1章においては、本研究の背景と現状について述べ、既往の研究を概観して、本論文の目的と研究の概要を記述した。

第2章では、軸方向力のみを受ける鉄筋コンクリート棒部材のための、周知の“1次元基本付着方程式”が、「コンクリート部分の変位 u と鉄筋の相対変位 S の二つを独立変数にとり、全ポテンシャル・エネルギー原理を用いることによって誘導し得る」ことを示し、次いで、この問題を有限要素法を用いて、精・粗2種の有限要素により再定式化し、さらに、若干の数値計算例を掲げて既往の解析解との比較・検討を行い、ここで用いた基本的な考え方が、梁やスラブの様なより複雑なコンクリート構造部材中の、補強材の付着すべり問題へも拡張可能なことを指摘して、本解析手法の位置付けを明らかにしている。

第3章では、前章で展開した基本手法の最も簡単な最初の適用例について論じている。即ち、軸力と曲げを受けるRC梁部材を対象として、コンクリート断面に平面保持を仮定し、補強材に付着すべりを許した場合の基礎微分方程式を導き、次いで、この理論に基づいて精・粗2種の形状関数を用いた有限要素により定式化し、線形領域におけるRC梁の解析例を示して、両解の精度を比較・検討し、さらに、付着係数の大きさが梁の曲げ性状に及ぼす影響を明らかにする。

第4章では、補強材に付着すべりを許し、コンクリート部分には法線保持を仮定した場合の、RCスラブの曲げについて取り扱っている。即ち、まず、先の章で述べた問題と同様、全ポテンシャル・エネルギー原理に基づいて、RCスラブが微小変形領域と幾何学的非線形領域に、それぞれある場合の基礎微分方程式を導いている。次に、これらの問題を有限要素法を用いて定式化し、さらに、個々の領域における独自のRCスラブの数値計算例を示して、補強材の付着すべりが、それぞれの領域におけるスラブの力学性状に及ぼす影響について論じている。

第5章では、テンドン（緊張材）が曲線形状を有するポストテンションPC梁の問題について論じている。即ち、まず最初に、テンドンに付着すべりを許し、コンクリート部分には平面保持を仮定した場合の、テンドンへの緊張力導入時からシースへのグラウチング完了後の挙動をも一貫して取り扱い得る“曲線テンドを有するPC梁部材”のための基礎微分方程式を導いている。次いで、有限要素法への定式化を行い、さらに、緊張力導入時におけるテンドンとシース間の摩擦、ならびにアンカースリップに起因して生ずるプレストレス力の減少も容易に考慮し得る解析法を提示している。最後に本解析法による数値計算例を掲げて、若干の検討・考察を加えている。

第6章では、曲線テンドンを有するポストテンションPCスラブの問題を取り扱っている。即ち、まず第一に、テンドンに付着すべりを許容し、コンクリート部分には法線保持

を仮定した場合の、緊張力導入時からグラウチング完了後までの挙動を一貫して取り扱い得る“曲線テンドンを有するP Cスラブ”のための基礎微分方程式を導いている。次に、この問題を有限要素法を用いて定式化し、さらに、我が国では設計規準そのものが未整備の状態にある“フラットタイプのP Cスラブ”数種を取り上げて数値計算例を示し、テンドンの配分方法等、この種のスラブの力学性状についての検討・考察を行っている。

第7章では、前2章～6章において展開してきた「“弾性領域”における、補強材のすべりを考慮に入れたコンクリート構造の有限要素解析法」を、コンクリートの亀裂や補強材の降伏をも伴う、より複雑な“材料非線形領域”にまで拡張することを意図し、その最も基本的な一、二の問題への適用を計っている。即ち、まずはじめに、この種の問題の最も単純な例として「軸方向力のみを受けるR C棒部材」を取り上げ、「荷重の増大とともに、コンクリート部分に生ずる断続的な亀裂の発生と亀裂幅の拡大現象」連続して追跡し得る解析手法を提案してその計算例を示し、さらに、この方法をR C梁の材料非線形解析に拡張し適用することを試みている。

第8章においては、以上の各章で得た結論を総括し、さらに、補強材（緊張材）のすべりを考慮した場合のコンクリート構造の解析における問題点と今後の研究方向について述べている。

第1章の参考文献

- 1) 岡村 甫：コンクリート構造の限界状態設計法、共立出版、1984.
- 2) 谷川恭雄ほか：鉄筋コンクリート構造、森北出版、1987.
- 3) CEB-FIP Model Code for Concrete Structures, 1978.
- 4) Paul F. Riece, Edward S. Hoffman, David P. Gustafson and Albert J. Gouwens : Structural Design Guide to the ACI Building Code, 3-rd Edition, Van Nostrand Reinhold, 1985.
- 5) コンクリート標準示方書（61年版）, 土木学会, 1986.
- 6) British Standards Institution : (British Standard) Structural Use of Concrete, Part 1. Code of practice for design and construction, 1985.
- 7) 角田與史雄：鉄筋コンクリートの最大ひびわれ幅、コンクリート・ジャーナル, Vol.8, No.9, 1970.
- 8) 角田與史雄、佐伯 昇、堺 孝司：RC引張り部における付着の共同作用に関するモデル化の研究、土木学会北海道支部論文報告集、第36号、1980, 2.
- 9) Branson, D.E. : Deflections of Concrete Structures, McGraw-Hill Inc. co., 1977.
- 10) 角田與史雄：曲げを受けるコンクリート部材のひびわれとたわみに関する研究の現状、土木学会論文集, No.384/V-7, 1987, 8.
- 11) 鈴木計夫、大野義照：プレストレス鉄筋コンクリートはりの曲げひびわれ幅に関する研究（その1）、日本建築学会論文報告集、第303号、1981, 5.
- 12) 鈴木計夫、大野義照：プレストレス鉄筋コンクリートはりの曲げひびわれ幅に関する研究（その2）、日本建築学会論文報告集、第305号、1981, 7.
- 13) 福田武雄：鉄筋コンクリート理論、生産技術センター、1976.
- 14) 福田武雄：軸方向力を受くる鉄筋コンクリート部材における応力分布に関する二、三の理論的問題について、土木学会誌、第19巻、第2号、1933, 3.
- 15) Bufler, H. : Ein neuer Ansatz zur Berechnung der Draft und Haftspannungen in Stahlbeton, Bauing., 22. Jr. H. 10 Oct. 1958.
- 16) Rehm, G. : Über die Grundlagen des Verbundes Zwischen Stahl und Beton, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton H. 138, 1961.
- 17) 六車 熙、森田司郎、富田孝次郎：鋼とコンクリートの付着に関する基礎的研究、日本建築学会論文報告集、第131, 132, 134, 139号、1967, 1, 2, 4, 9.
- 18) 田 政範、島田静雄：鉄筋とコンクリートの付着に関する基礎的研究、土木学会論文報告集、No.217号、1973, 9.
- 19) 中島 亨、山本康弘：鉄筋コンクリートの付着応力度の履歴とひびわれの復元性に関する研究、土木学会論文報告集、No.219, 1973, 11.
- 20) 青柳征夫、佐藤良一：低温度下における鉄筋コンクリート引張り部材の変形とひびわれ性状、セメント技術年報、V.32, 1978.
- 21) 田辺忠顕、呉 智深、加藤千貴：クラックひずみ分布関数を用いたRC単軸要素の引

- っ張り剛性に関する F E M 解析の定式化、コンクリート工学年次論文報告集、第11巻2号、1989.
- 22) 中田慎介：付着特性を考慮した鉄筋コンクリート部材の復元力特性に関する研究、日本建築学会関東支部研究報告集、第41号、1971, 1.
- 23) Tassios, T.P. and Yannopoulos, P.J. : Analytical Studies on Reinforced Concrete Members under Cyclic Loading based on Bond Stress-Slip Relationship, ACI Journal, Vol. 78, 1981.
- 24) Shafer, H. : A Contribution to the Solution of Contact Problems with the Aid of Bond Element, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 6, 1975.
- 25) 例えば、Filippou, F.C., Popov, E.P. and Bertero, V.V. : Modeling of R/C Joints under Cyclic Excitations, ASCE, Vol. 109, No. ST11, 1983.
- 26) 例えば、島 弘、周 礼良、岡村 甫：マッシュなコンクリートに埋め込まれた異形鉄筋の付着応力-すべり-ひずみ関係、土木学会論文集、No. 378号/V-6, 1987, 2.
- 27) 例えば、吉川弘道、田辺忠顕：鉄筋コンクリート部材の引張剛性に関する解析的研究、土木学会論文集、No. 366号/V-4, 1986, 2.
- 28) Wegner, R. : Finite Element Models for Reinforced Concrete, Proceedings, U.S.-Germany Symposium, "Formulations and Computational Methods in Finite Element Analysis", MIT, Boston, August 1976.
- 29) 岡村 甫：鉄筋コンクリートへの有限要素法解析の適用、第31回応用力学連合講演会、1981, 11.
- 30) 野口 博、井上範夫：有限要素法による鉄筋コンクリート構造のせん断解析手法、RC構造のせん断問題に対する解析的研究に関するコロキウム、日本コンクリート工学協会、1982, 9.
- 31) Ngo, D. and Scordelis, A.C. : Finite Element Analysis of Reinforced Concrete Beams, ACI Journal Vol. 64, 1967, 3.
- 32) Nilson, A.H. : Nonlinear Analysis of Reinforced Concrete by the Finite Element Method, ACI Journal Vol. 65, No. 9, 1968, 9.
- 33) Franklin, H.A. : Nonlinear analysis of reinforced concrete frames and panels, Ph. D. Dissertation, Univ. of Calif., Berkeley, 1970, 3.
- 34) 黒正清治、滝口克己：有限要素法による鉄筋コンクリート部材の二次元非線形解析、その1, その2, 日本建築学会論文報告集、第169号、第180号、1971, 11, 1972, 10.
- 35) Valliapan, S. and Doolan, T.F. : Nonlinear Stress Analysis of Reinforced Concrete, ASCE, Vol. 98, No. ST4, 1972.
- 36) 大築和夫、小幡 守、工藤仁司：有限要素法による鉄筋コンクリート梁の弾塑性解析結果に及ぼす付着力の影響について、日本建築学会大会学術講演会梗概集、1975, 10.
- 37) 武藤 清ほか：FEMによる鉄筋コンクリート柱の3次元弾塑性解析、その1, 日本建築学会論文報告集、第249号、1976, 11.

- 38) 六車 熙、森田司郎、富田孝次郎：曲げひびわれを生じた鉄筋コンクリートはり材の応力状態と変形に関する研究、日本建築学会論文報告集、第200号、1972, 10
- 39) 小阪義夫、谷川恭雄、立島哲也、木村克彦：鉄筋とコンクリート間の付着特性について、セメント技術年報、Vol.27, 1973.
- 40) Labib, F. and Edwards, A.D. : An Analytical Investigation of Cracking in Concrete and Eccentric Reinforced Concrete Tension Members, Proc. Institute of Civil Engineers, Part 2, Vol.65, 1978, 3.
- 41) 例えば、近藤吾郎、藤井 栄、森田司郎：RC単純ばりの曲げ・せん断破壊の寸法効果についての検討、コンクリート工学年次論文報告集、第12巻、第2号、1990.
- 42) De Groot, A.K., Kusters, G.M.A. and Monnier, Th. : Numerical Modelling of Bond-Slip Behaviour, HERON, the Netherlands, Vol.26, No.1B, 1981
- 43) 藤井 栄、森田司郎：異形鉄筋の付着応力-すべり関係に関する考察、第2回RC構造のせん断問題に対する解析的研究に関するコロキウム論文集、コンクリート工学協会、1983, 10.
- 44) Goodman, R.E., Taylor, R.L. and Brekke, T.L. : A Model for the Mechanics of Jointed Rock, ASCE, Vol.94, No.SMB, 1968, 3
- 45) 例えば、橘 吉宏、梶川康男、川村満紀：鉄筋腐食によって損傷を受けたRCばりの挙動に関する考察、土木学会論文集 NO.402号/V-10, 1989, 2.
- 46) 池田尚治：鉄筋コンクリート部材における鉄筋とコンクリートの応力伝達に関する研究土木学会論文報告集、No.307号、1981, 3.
- 47) 黒正清治、滝口克己、林 静雄、山中久幸：異形鉄筋とコンクリートの付着に関する基礎的研究、日本建築学会大会学術講演会梗概集、1974, 10.
- 48) 野口 博：有限要素法による鉄筋コンクリートの非線形解析、その1～その4、日本建築学会論文報告集、第252, 258, 261, 262号、1977, 2, 8, 11, 12.
- 49) Aldstedt, E. and Bergan, P.G. : Nonlinear Time-Dependent Concrete-Frame Analysis, ASCE, Vol.104, No.ST7, 1978.
- 50) 鬼沢浩司、林 静雄、黒正清治：付着剛性を考慮した鉄筋コンクリート部材の変形解析日本建築学会大会学術講演会梗概集、1979, 10.
- 51) 小阪義夫、谷川恭雄、山田和夫：エンドクロニック理論による鉄筋コンクリートの非線形解析、第1, 2報、日本建築学会論文報告集、第326, 330号、1983, 4, 8.
- 52) 児島孝之、阪 正行、前岡隆顕：鋼繊維補強コンクリート使用RC部材の曲げ性状に関する基礎的研究、コンクリート工学年次講演論文集、第3巻、1981.
- 53) 多田利正、武田寿一：鉄筋コンクリート部材における付着劣化過程の解析的研究、大林組技術研究所報、No.22, 1981.
- 54) 多田利正、武田寿一：鉄筋コンクリート部材における付着劣化過程の解析的研究、その1, その2, 日本建築学会構造系論文報告集、第351, 360号、1985, 5, 1986, 2.
- 55) 市之瀬敏勝：付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート骨組の非線形解析法、日本建築学会論文報告集、第327, 328号、1983, 5, 6.
- 56) 松浦 誠、山本春行：鉄筋コンクリートはり・柱部材の非線形及び時間依存性挙動、

日本建築学会論文報告集、第322号、1982,12.

- 57) 坂田弘安、和田 章、林 静雄、黒正清治：接合部パネルのせん断変形、鉄筋の付着すべりを考慮した分割要素法による鉄筋コンクリート骨組みの弾塑性解析法、日本建築学会構造系論文報告集、第386号、1988,4.
- 58) 坂田弘安、和田 章、林 静雄、黒正清治：曲げ降伏するはりの軸方向伸びを考慮した鉄筋コンクリート骨組みの弾塑性挙動に関する解析研究、日本建築学会構造系論文報告集、第396号、1989,2.
- 59) Sato,R. and Aoyagi,Y. : Studies on Deformation and Crack of Reinforced Concrete Flexural Members under Low Temperature, Proc. of JSCE, No.329, 1983,2.
- 60) Sato,R., Aoyagi,Y. and Kanazu,T. : Experimental and Theoretical Studies on the Behaviours of Flexurally Restrained Reinforced Concrete Members Subjected to Temperature Gradient, Proc. of JSCE, No.348, 1984,8.
- 61) 武田寿一、高橋久雄、小柳光生：床スラブの長期たわみに関する研究、コンクリート工学、V.21, No.9, 1983,9.
- 62) 杉野目章、井野 智、土橋由造：使用荷重下における鉄筋コンクリート床スラブのたわみの予測計算、日本建築学会構造系論文報告集、第372号、1987,2.
- 63) 岩原昭次：使用荷重下における鉄筋コンクリート床スラブの長期曲げ問題に対する解析法に関する研究（第1報）、日本建築学会構造系論文報告集、第415号、1990,9.
- 64) 例えば、池田尚治、南雲広幸：RCおよびPC構造物への有限要素法の合理的適用方法に関する研究、土木学会論文集、No.414号/V-12, 1990,2.
- 65) Elwi,A.E.E. and Hradey,M. : Finite Element Model for Curved Embedded Reinforcement ASCE, Vol.115, No.EM4. 1989.
- 66) Philips,D.V. and Zienkiewicz,O.C. : Finite Element Non-linear Analysis of Concrete Structures, Proc. Instit. Civ. Engrs., Part 2, Vol.61, No.3, 1976.
- 67) Elwi,A.E. and Murray,D.W. : Nonlinear Analysis of Axisymmetric Reinforced Concrete Structures, Structural Engineering Report No.87, Univ. of Alberta, Edmonton, Alberta, Canada,1980.
- 68) Kang,Y.J. and Scordelis,A.W. : Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Frames, ASCE, Vol.106, No.ST2, 1980,2.
- 69) 田辺忠顕、Hong,P.W. : アンボンドPC構造物の組立て工程を考慮した応力解析、土木学会論文報告集、No.303号、1980,11
- 70) 梅原秀哲、田辺忠顕、吉田弥智：鋼材の付着状態を考慮したPCラーメンの履歴挙動に関する研究、土木学会論文集、No.396号/V-9, 1988,8.
- 71) Haber,R.B. and Abel,J.F. : Contact-Slip Analysis Using Mixed Displacements, ASCE, Vol.109, No.EM2, 1983.
- 72) Van Greunen,J. and Scordelis,A.C. : Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Slabs, ASCE, Vol.109, No.ST7, 1983,7.

第2章 軸力を受ける鉄筋コンクリート棒部材の1次元付着すべり解析

2. 1 はじめに

コンクリート構造のうちでも、軸方向力のみをうける鉄筋コンクリート棒部材は、補強材とコンクリート間の付着作用を、純粋な形で抽出し得る最も単純な構造を有しているため、過去の理論研究の多くもこれを対象にして行われている^{1)~15)}。周知のように、ボンドリンク等を用いる「2次元有限要素解析法」が出現する以前には、コンクリートと鉄筋間の付着作用を取り扱うことができる解析理論と言え、Arnovljevicによって導かれた“基本付着方程式”に基づく「1次元解析法」が、殆ど唯一の手法であった。

勿論、既に第1章において言及し指摘したように、「付着現象そのものをよりミクロに詳細に追跡する」と言う見地からすれば、これら2次元有限要素解析手法の1次元解析法に対するその優位性は圧倒的であり疑うべくもないが、しかし、この補強材とコンクリート間の付着作用を、既往のコンクリート梁理論や板理論に取り込むタイプの“よりマクロな解析手法”を新たに構築することを考える場合には、2次元解析手法よりも基本付着方程式に基づく1次元解析手法の方が、遙かに示唆的で有用であることもまた疑いのないところである。

本章は、完全付着の仮定に基づく既往のコンクリート梁理論や板理論に、補強材の付着すべりを組み入れた場合の“統一的な解析法”を展開するための基本手法の確立を目的として、この種の問題のうちでも最も単純な「軸方向力のみをうける鉄筋コンクリート棒部材」を対象とした“1次元付着すべり問題”のための有限要素解析手法について述べたものである^{16)~18)}。

本章では、まず、解析に当たっての基本的な仮定事項を明記して、コンクリート部分の変位と鉄筋の相対変位の二つを基本独立変数として選んだ場合の、鉄筋コンクリート棒部材のための全ポテンシャル・エネルギー汎関数を求めている。次に、既往の著名な“1次元基本付着方程式”が、ここで得た汎関数からも容易に導き得ることを示して、その理論的な位置付けを明らかにし、次いで、この理論に基づき2種の形状関数要素を用いて有限要素法への定式化を計り、さらに、若干のモデル部材の数値計算例を掲げて、本解析値と既往の理論解との比較・検討を行ない、本有限要素解の妥当性について検証する。

2. 2 鉄筋コンクリート棒部材のための理論式の展開

2.2.1 基本仮定事項

理論展開に当って用いた基本仮定事項を以下に列挙する。

- 1) コンクリートと鉄筋の材軸に垂直な断面は、変形後も平面を保ち、それぞれの歪は断面内に一様分布するものとし、コンクリートと鉄筋は共に弾性領域にあるものとする。
- 2) 材軸に垂直な方向の変形は無視できるものとする。
- 3) コンクリートと鉄筋の界面には、材軸方向のすべりが生じ、ある位置における鉄筋のすべり変位は、その位置のコンクリート部分からの相対的なズレ変位として定義する。
- 4) コンクリートと鉄筋の界面に生じる付着応力とすべり変位の間には、部材内の位置に関係なく同一の線形関係が成り立つ。

2.2.2 変位場、および歪と応力

図2-1に、今考慮中の鉄筋コンクリート棒部材の断面記号と座標軸を示す。前項の仮定に基づき、この1次元付着すべり問題を定式化するために必要となる変位場は、この部材のコンクリート部分の材軸方向の変位 u と、コンクリートと鉄筋間の材軸方向のすべり変位 S の二つである。

〔コンクリート部分の歪と応力〕：

この部材の任意の位置 x におけるコンクリート部分の歪 ϵ_c と応力 σ_c は、次のように表わされる。

$$\epsilon_c = \frac{du}{dx} \quad (2-1)$$

$$\sigma_c = E_c \epsilon_c \quad (2-2)$$

但し、 E_c ：コンクリートのヤング係数

〔鉄筋の歪と応力〕：

鉄筋の任意位置 x における歪 ϵ_s と応力 σ_s は、次のように表示される。

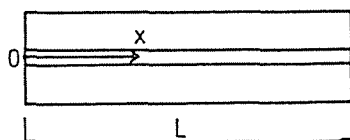


図 2-1 鉄筋コンクリート棒部材の概念図

$$\varepsilon_s = \frac{du}{dx} + \frac{dS}{dx} \quad (2-3)$$

$$\sigma_s = E_s \varepsilon_s \quad (2-4)$$

但し、 E_s ：鉄筋のヤング係数

[すべり変位と付着応力]：

基本仮定事項(4)より、付着応力 τ_b とすべり変位 S の間には、次の関係が成立する。

$$\tau_b = K_b S \quad (2-5)$$

但し、 K_b ： τ_b と S を関係づける付着係数

2.2.3 全ポテンシャル・エネルギー汎関数

一般に、弾性構造体の全ポテンシャル・エネルギーは次のように表わされる。

$$\Pi = U - V \quad (2-6)$$

ここに、 U は外力の作用によって構造系の内部に蓄えられる内部エネルギーで、一般には歪エネルギーを意味し、 V は外力がなす負荷ポテンシャル・エネルギーを表わしている。

補強材の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート棒部材の場合の内部エネルギー U は、次式で表示することができる。

$$U = U_{c,n} + U_{s,t} + U_{b,s} \quad (2-7)$$

但し、 $U_{c,n}$ ：コンクリート部分の歪エネルギー、 $U_{s,t}$ ：鉄筋部分の歪エネルギー、

$U_{b,s}$ ：鉄筋とコンクリートの界面における付着ポテンシャルエネルギー

上式中の各内部エネルギー $U_{c,n}$ 、 $U_{s,t}$ 、 $U_{b,s}$ は容易に書き下され、おののお次のようになる。

$$U_{c,n} = \frac{1}{2} \int_0^L E_c A_c \varepsilon_c^2 dx \quad (2-8)$$

$$U_{s,t} = \frac{1}{2} \int_0^L E_s A_s \varepsilon_s^2 dx \quad (2-9)$$

$$U_{b,s} = \frac{1}{2} \int_0^L K_b A_{b,s} S^2 dx \quad (2-10)$$

但し、 A_c ：コンクリート部分の断面積、 A_s ：鉄筋の断面積、 $A_{b,s}$ ：単位長さ当りの鉄筋の付着表面積、 L ：部材長

また、負荷ポテンシャル・エネルギー V は、当然のことながら外荷重の載荷状態によって異なったものとなるが、今一例として、部材の両端の鉄筋に引き抜き力が作用する場合

を示すと下式となる。

$$V = \int_0^L P_0 \left(\frac{du}{dx} + \frac{dS}{dx} \right) \quad (2-11)$$

但し、 P_0 ：部材両端に作用する引き抜き力

以上の関係より、鉄筋コンクリート棒部材の付着すべりに関する全ポテンシャル・エネルギー汎関数 Π は、最終的に次のように表示することができる。

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ (A_c E_c + A_s E_s) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 + 2 A_s E_s \frac{du}{dx} \frac{dS}{dx} + A_s E_s \left(\frac{dS}{dx} \right)^2 + A_{bs} K_b S^2 \right\} \\ - \int_0^L P_0 \left(\frac{du}{dx} + \frac{dS}{dx} \right) dx \end{aligned} \quad (2-12)$$

2.2.4 支配微分方程式

鉄筋コンクリート棒部材の付着すべり現象を支配する基礎微分方程式は、(2-12)式的全ポテンシャル・エネルギー汎関数 Π の停留関数として求めることができる。通常の変分手法に従い、変位 u と S に関する第1変分をとると、以下の関係式を得る。

変位 u に関して、

$$A_c E_c \frac{d^2 u}{dx^2} + A_s E_s \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 S}{dx^2} \right) = 0 \quad (2-13)$$

変位 S に関して、

$$A_s E_s \left(\frac{d^2 u}{dx^2} + \frac{d^2 S}{dx^2} \right) = A_{bs} K_b S \quad (2-14)$$

上2式から $d^2 u/dx^2$ を消去して整理すると、よく知られた1次元付着すべりに関する基礎微分方程式（基本付着方程式）が得られ下式となる。

$$\frac{d^2 S}{dx^2} - A_{bs} K_b \left(\frac{1+n\rho}{E_s A_s} \right) S = 0 \quad (2-15)$$

但し、 ρ ：鉄筋比（ $\rho = A_s/A_c$ ）， n ：鉄筋とコンクリートのヤング係数比（ $n = E_s/E_c$ ）

以上で明らかのように、本節で述べた全ポテンシャル・エネルギー汎関数を用いてこの問題を取り扱うことは、本質的には、既往の“1次元基本付着方程式”を解くことと等価であることが分かる。

また、(2-2)、(2-4)及び(2-5)式の関係を用いると、(2-12)、(2-13)式は次のような平衡方程式に変換することができる。

$$A_c \frac{d\sigma_c}{dx} + A_s \frac{d\sigma_s}{dx} = 0 \quad (2-16)$$

$$A_s \frac{d\sigma_s}{dx} = A_{bs} \tau_b \quad (2-17)$$

言うまでもなく、上の式(2-16)と(2-17)は、それぞれ軸方向の力の釣合い式と、鉄筋の力の釣合い式である。

2. 3 有限要素法への定式化

2.3.1 低次関数要素による定式化

(1) 変位関数と歪の有限要素表示

変位 u と S に共に1次の形状関数を用いる図2-2に示す要素は、この問題に対する最も単純な型であり、この要素の変位 u と S は次のように表示される。

$$u = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \alpha_{u0} \\ \alpha_{u1} \end{Bmatrix} = [f_1] \{ \alpha_u \} \quad (2-18)$$

$$S = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \alpha_{s0} \\ \alpha_{s1} \end{Bmatrix} = [f_1] \{ \alpha_s \} \quad (2-19)$$

但し、 $\{ \alpha_u \}$ ：変位 u に関する一般化変位、 $\{ \alpha_s \}$ ：変位 S に関する一般化変位

ここに、 $\{ \alpha_u \}$ と $\{ \alpha_s \}$ は、(2-18)、(2-19)式に節点I, Jの座標値($x=0$, $x=l$)を代入し、 u と S を対応するそれぞれの節点変位(u_i , u_j および S_i , S_j)と等値することによって、要素の節点変位と下式で関係づけられる。

$$\{ \Delta_u \} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \{ \alpha_u \} = [C_1] \{ \alpha_u \} \quad (2-20)$$

$$\{ \Delta_s \} = \begin{Bmatrix} S_i \\ S_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \{ \alpha_s \} = [C_1] \{ \alpha_s \} \quad (2-21)$$

但し、 $\{ \Delta_u \}$ ：変位 u の要素節点変位ベクトル、 $\{ \Delta_s \}$ ：変位 S の要素節点変位ベクトル
従って、一般化変位 $\{ \alpha_u \}$ と $\{ \alpha_s \}$ は、

$$\{ \alpha_u \} = [C_1^{-1}] \{ \Delta_u \} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix} \{ \Delta_u \} \quad (2-22)$$

$$\{ \alpha_s \} = [C_1^{-1}] \{ \Delta_s \} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix} \{ \Delta_s \} \quad (2-23)$$

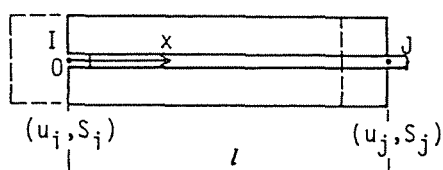


図 2-2 1 次の形状関数要素

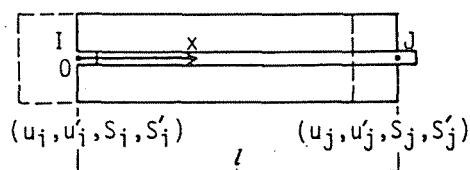


図 2-3 3 次の形状関数要素

また、変位 u と S の1次導関数は、(2-18)、(2-19)式をそれぞれ微分することによって得られ次のようになる。

$$\frac{du}{dx} = [f_1]\{\alpha_u\} = [0 \ 1]\{\alpha_u\} = [f_1][C_1^{-1}]\{\Delta_u\} \quad (2-24)$$

$$\frac{dS}{dx} = [f_1]\{\alpha_s\} = [0 \ 1]\{\alpha_s\} = [f_1][C_1^{-1}]\{\Delta_s\} \quad (2-25)$$

(2) 有限要素方程式

変位 u と S に対して、共に1次の形状関数を用いた場合の、この問題に対する有限要素表示されたエネルギー汎関数は、前項(1)で得た関係式を先の汎関数式(2-12)に代入することによって得られ、下式で表わされる。

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l & \left[(E_c A_c + E_s A_s) \{\Delta_u\}^T [C_1^{-1}]^T [f_1]^T [f_1] [C_1^{-1}] \{\Delta_u\} \right. \\ & + 2E_s A_s \{\Delta_u\}^T [C_1^{-1}]^T [f_1]^T [f_1] [C_1^{-1}] \{\Delta_s\} \\ & + E_s A_s \{\Delta_s\}^T [C_1^{-1}]^T [f_1]^T [f_1] [C_1^{-1}] \{\Delta_s\} \\ & \left. + K_b A_{bs} \{\Delta_s\}^T [C_1^{-1}]^T [f_1]^T [f_1] [C_1^{-1}] \{\Delta_s\} \right] dx \\ & - \{\Delta_u\}^T \{P_0\} - \{\Delta_s\}^T \{P_0\} \end{aligned} \quad (2-26)$$

但し、 $\{P_0\}$ ：部材両端の鉄筋に作用する外荷重ベクトル

従って、上式を節点変位 $\{\Delta_u\}$ と $\{\Delta_s\}$ について変分をとれば、この低次関数要素による鉄筋コンクリート棒部材のための有限要素方程式が得られ、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{us} \\ K_{us}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_u \\ \Delta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_0 \\ P_0 \end{Bmatrix} \quad (2-27)$$

ここに、 $[K_{uu}]$ 、 $[K_{us}]$ 、 $[K_{ss}]$ は部分剛性マトリックスで、

$$\begin{aligned} [K_{uu}] &= (E_c A_c + E_s A_s) [C_1^{-1}]^T \int_0^l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dx [C_1^{-1}] \\ &= \frac{(E_c A_c + E_s A_s)}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-28)$$

$$\begin{aligned} [K_{us}] &= E_s A_s [C_1^{-1}]^T \int_0^l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dx [C_1^{-1}] \\ &= \frac{E_s A_s}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-29)$$

$$\begin{aligned} [K_{ss}] &= E_s A_s [C_1^{-1}]^T \int_0^l \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} dx [C_1^{-1}] \\ &\quad + K_b A_{bs} [C_1^{-1}]^T \int_0^l \begin{bmatrix} 1 & x \\ x & x^2 \end{bmatrix} dx [C_1^{-1}] \\ &= \frac{E_s A_s}{l} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + \frac{K_b A_{bs} l}{6} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (2-30)$$

2.3.2 高次関数要素による定式化

(1) 変位関数と歪の有限要素表示

有限要素法では分割数が同一の場合、当然のことながら、より高次の形状関数を採用する方が有利となる。ここでは、変位 u と S に対して3次の形状関数を用いることにする。この要素を使用する理由は、「鉄筋とコンクリート間の界面に生ずる付着応力を、(2-5)式のすべり変位からだけではなく、(2-17)式の鉄筋の応力からも得ること」を意図したところにある。

図2-3に示すこの要素の変位 u と S は、次のように書かれる。

$$u = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} \alpha_{u0} \\ \alpha_{u1} \\ \alpha_{u2} \\ \alpha_{u3} \end{Bmatrix} = [f_3] \{ \alpha_u \} \quad (2-31)$$

$$S = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} \alpha_{s0} \\ \alpha_{s1} \\ \alpha_{s2} \\ \alpha_{s3} \end{Bmatrix} = [f_3] \{ \alpha_s \} \quad (2-32)$$

但し、 $\{ \alpha_u \}$ 、 $\{ \alpha_s \}$ ：この高次関数要素の変位 u と S に関する一般化変位で、先の低次関数要素のそれとは異なる

従って、変位 u と S の導関数は、

$$u' = \frac{du}{dx} = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] \{ \alpha_u \} = [f'_3] \{ \alpha_u \} \quad (2-33)$$

$$S' = \frac{dS}{dx} = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] \{ \alpha_s \} = [f'_3] \{ \alpha_s \} \quad (2-34)$$

図2-3の節点変位ベクトル $\{ \Delta_u \}$ 、 $\{ \Delta_s \}$ と、一般化変位 $\{ \alpha_u \}$ 、 $\{ \alpha_s \}$ のそれぞれの対応関係は、上の(2-31)～(2-34)式を用いることによって得られ、次のようになる。

$$\{ \Delta_u \} = \begin{Bmatrix} u_i \\ u'_i \\ u_j \\ u'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{u1} \\ \alpha_{u2} \\ \alpha_{u3} \\ \alpha_{u4} \end{Bmatrix} = [C_3] \{ \alpha_u \} \quad (2-35)$$

$$\{ \Delta_s \} = \begin{Bmatrix} S_i \\ S'_i \\ S_j \\ S'_j \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \alpha_{s1} \\ \alpha_{s2} \\ \alpha_{s3} \\ \alpha_{s4} \end{Bmatrix} = [C_3] \{ \alpha_s \} \quad (2-36)$$

従って、一般化変位 $\{ \alpha_u \}$ と $\{ \alpha_s \}$ は、下式で表示される。

$$\{ \alpha_u \} = [C_3^{-1}] \{ \Delta_u \} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} \{ \Delta_u \} \quad (2-37)$$

$$\{ \alpha_s \} = [C_3^{-1}] \{ \Delta_s \} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} \{ \Delta_s \} \quad (2-38)$$

(2) 有限要素方程式

変位 u と S に対して、共に3次の形状関数を用いた場合の、有限要素表示されたエネルギー汎関数は、先の低次関数要素のときと同様にして求められ、次式となる。

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l & \left[(E_c A_c + E_s A_s) \{ \Delta_u \}^T [C_3^{-1}]^T [f_3']^T [f_3'] [C_3^{-1}] \{ \Delta_u \} \right. \\ & + 2E_s A_s \{ \Delta_u \}^T [C_3^{-1}]^T [f_3']^T [f_3'] [C_3^{-1}] \{ \Delta_s \} \\ & + E_s A_s \{ \Delta_s \}^T [C_3^{-1}]^T [f_3']^T [f_3'] [C_3^{-1}] \{ \Delta_s \} \\ & \left. + K_b A_{bs} \{ \Delta_s \}^T [C_3^{-1}]^T [f_3]^T [f_3] [C_3^{-1}] \{ \Delta_s \} \right] dx \\ & - \{ \Delta_u \}^T \{ P_0 \} - \{ \Delta_s \}^T \{ P_0 \} \end{aligned} \quad (2-39)$$

従って、この高次関数要素による鉄筋コンクリート部材のための有限要素方程式は、見掛け上前掲の低次関数要素のそれと同形の下式で表示される。

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{us} \\ K_{us}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_u \\ \Delta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_0 \\ P_0 \end{Bmatrix} \quad (2-40)$$

但し当然のことながら、この場合の部分剛性マトリックス $[K_{uu}]$, $[K_{us}]$, $[K_{ss}]$ は、低次関数要素のそれとは全く異なり、次のように表わされる。

$$\begin{aligned} [K_{uu}] &= (E_c A_c + E_s A_s) [C_3^{-1}]^T \int_0^l [f_3']^T [f_3'] dx [C_3^{-1}] \\ &= (E_c A_c + E_s A_s) [C_3^{-1}]^T [\bar{k}_{uu}] [C_3^{-1}] \end{aligned} \quad (2-41)$$

但し、

$$[\bar{k}_{uu}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & l^2 & 4l^3/3 & 3l^4/2 \\ 0 & l^3 & 3l^4/2 & 9l^5/5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [K_{us}] &= E_s A_s [C_3^{-1}]^T \int_0^l [f_3']^T [f_3] dx [C_3^{-1}] \\ &= E_s A_s [C_3^{-1}]^T [\bar{k}_{us}] [C_3^{-1}] \end{aligned} \quad (2-42)$$

但し、

$$[\bar{k}_{us}] = [\bar{k}_{uu}]$$

$$\begin{aligned} [K_{ss}] &= [C_3^{-1}]^T \left[\int_0^l E_s A_s [f_3']^T [f_3] dx + \int_0^l K_b A_{bs} [f_3]^T [f_3] dx \right] [C_3^{-1}] \\ &= [C_3^{-1}]^T \left[E_s A_s [\bar{k}_{ss1}] + K_b A_{bs} [\bar{k}_{ss2}] \right] [C_3^{-1}] \end{aligned} \quad (2-43)$$

但し、

$$[\bar{k}_{ss1}] = [\bar{k}_{uu}]$$

$$[\bar{k}_{ss2}] = \begin{bmatrix} l & l^2/2 & l^3/3 & l^4/4 \\ l^2/2 & l^3/3 & l^4/4 & l^5/5 \\ l^3/3 & l^4/4 & l^5/5 & l^6/6 \\ l^4/4 & l^5/5 & l^6/6 & l^7/7 \end{bmatrix}$$

2. 4 数値計算例と考察

本章で展開した2種の有限要素による解の妥当性を検証するため、モデル鉄筋コンクリート棒部材の数値計算例を掲げ、既往の理論解と本解析値との比較・検討を行って若干の考察を試みることにする。

2.4.1 解析モデルの概要

図2-4に、解析の対象とするモデル鉄筋コンクリート棒部材の形状寸度と仮定材料性状を掲げる。また、図2-5には、ここで計算例として取り上げる3種の載荷条件、即ち、(a)両引き載荷、(b)引抜き載荷、(c)押し抜き載荷の各載荷状態と部材位置記号を一覧した。

尚、これらの解析モデルは、福田が文献1)の中で計算例として取り扱ったものと同一である。

2.4.2 計算結果と考察

(1) 要素分割数の影響

言うまでもなく有限要素法は近似解法であり、定式化の際に用いた要素の変位関数の違いや要素分割数が、得られる計算結果に影響を及ぼすことになる。本章 2.3では、変位 u

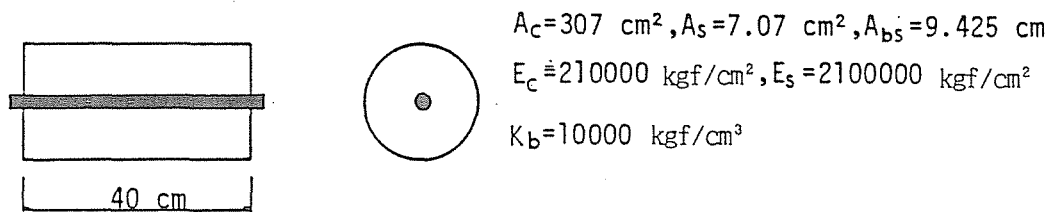


図2-4 モデル鉄筋コンクリート棒部材の形状寸度と仮定材料性状

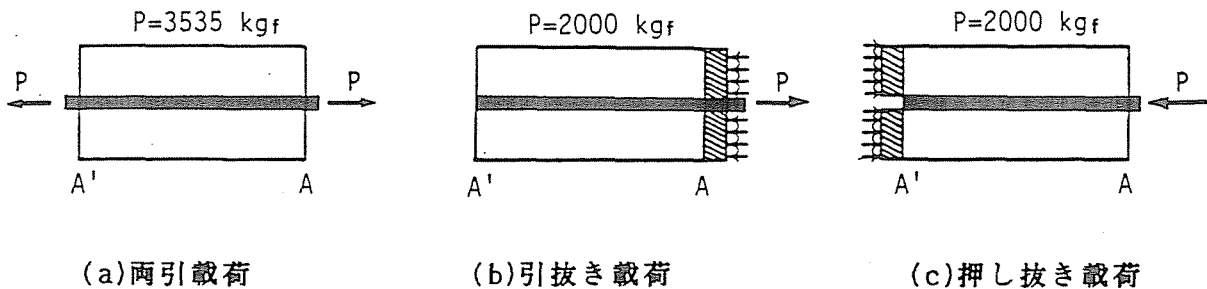
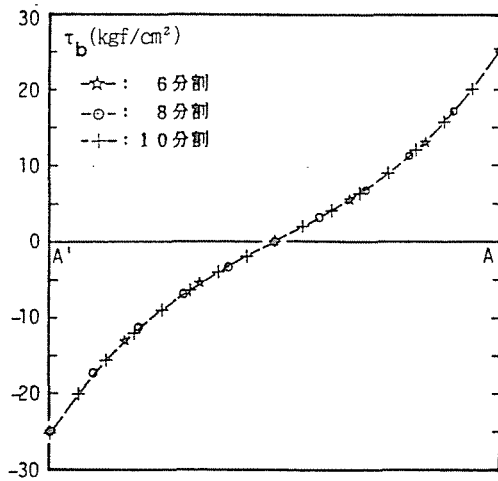


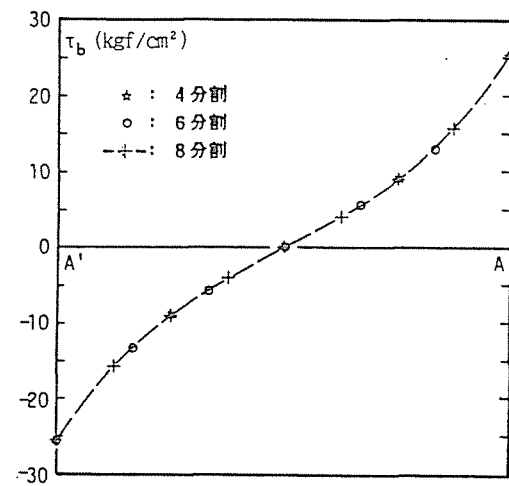
図2-5 設定した3種の載荷状態と部材位置記号

注) 単位系について：最近では単位系としてS I単位が推奨されているが、本論文では、一貫して従来のKgf, cm単位を使用する。

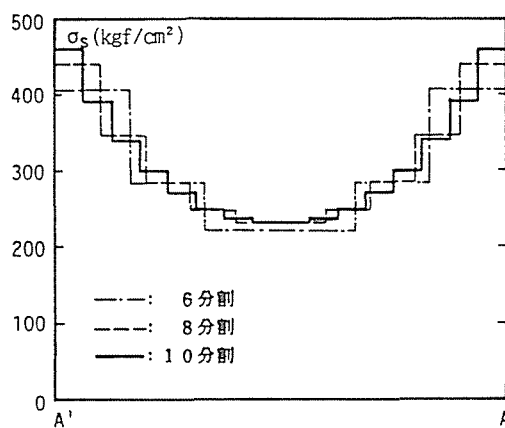
とSに共に低次（1次）と高次（3次）の変位関数を、それぞれ用いた場合の2種の有限要素について定式化を行ったが、ここでは、図2-5の(a)の両引き載荷を受けるこのモデル



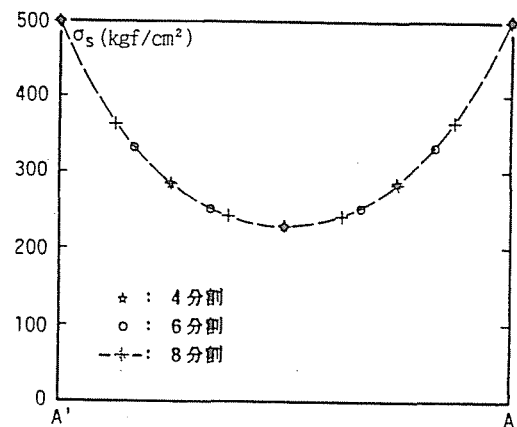
(a) 付着応力 τ_b 分布の比較



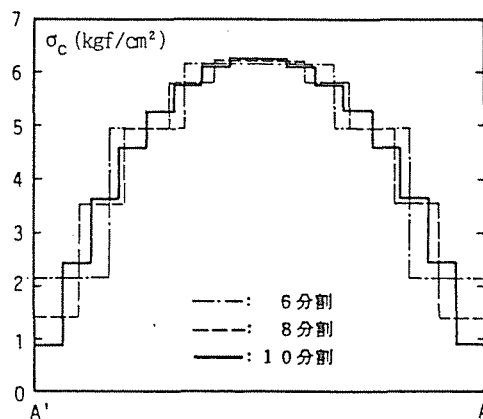
(a) 付着応力 τ_b 分布の比較



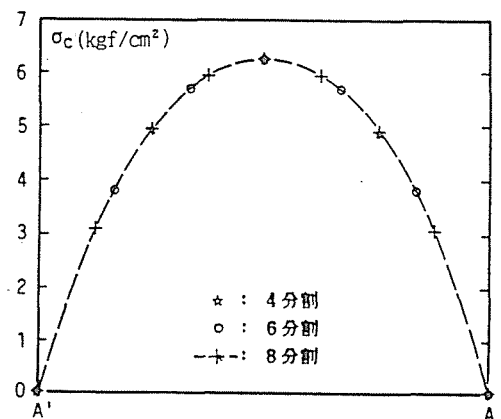
(b) 鉄筋の応力 σ_s 分布の比較



(b) 鉄筋の応力 σ_s 分布の比較



(c) コンクリートの応力 σ_c 分布の比較



(c) コンクリートの応力 σ_c 分布の比較

図2-6 低次関数要素の分割数の影響の比較

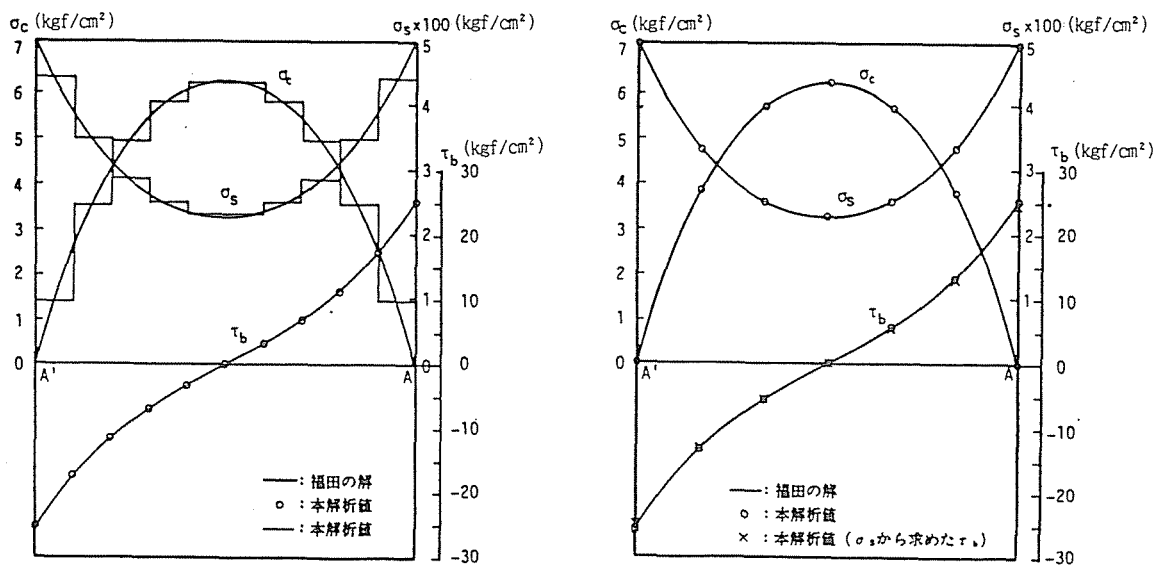
図2-7 高次関数要素の分割数の影響の比較

鉄筋コンクリート棒部材（図2-4）を例にとって、両要素の解の精度を調べてみる。

図2-6と図2-7は、それぞれ低次関数要素と高次関数要素による、この場合の解析結果を、(a)付着応力 τ_b 分布、(b)鉄筋の応力 σ_s 分布、(c)コンクリートの応力 σ_c 分布の各曲線で比較し、各々の解ごとに要素分割数の影響を検討したものである。これらのうちの図2-6には、分割数6，10，16の3種の解を、また、図2-7には、同じく分割数4，6，8の4種の解を併記して掲げた。両図の結果からも知り得るように、低次関数要素による前者の図2-6では、最も粗い6分割の解には他の分割の解と比べると比較的大きな差が認められるが、10分割と16分割の解は殆ど一致しており、また、高次関数要素による後者の図2-7では、4分割でも十分な精度が得られることを読み取ることができる。

(2) 既往の理論解との比較

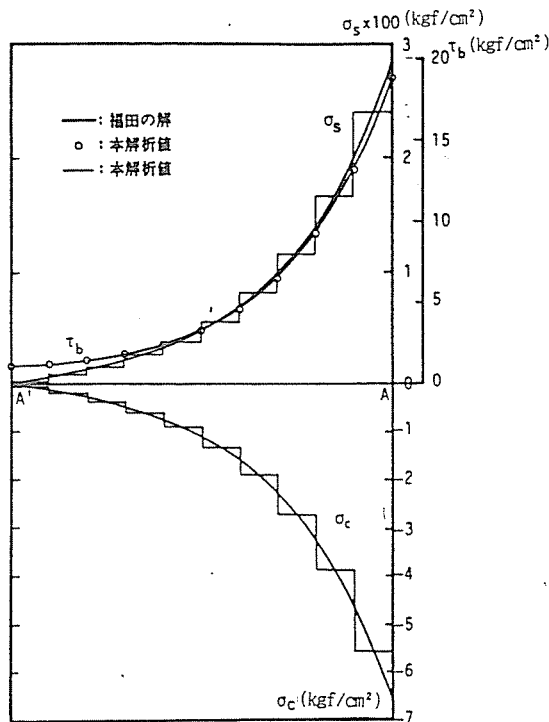
図2-8、図2-9、および図2-10は、それぞれ“両引き”、“引き抜き”、および“押し抜き”の各載荷時の解析結果を示したもので、各図には、(a)低次関数要素と(b)高次関数要素による解を、おのおの分離して表示し、ともに福田による厳密解と対比して掲げた。但し、これらの図の(a)、(b)図中の各解析値は、前項(1)の結果を踏まえて、それぞれが十分な精度の得られる要素分割数10、および6のときの値で記入したものである。各図(a)、(b)の解析曲線を見ると明らかなように、低次関数要素と高次関数要素の両者とも、本解析値は既往の理論解に極めて良く一致しており、満足し得る十分な精度を有していることを知る。尚、前述したように高次関数要素では、付着応力は(2-5)式のすべり変位からだけでなく、(2-14)式の関係により鉄筋の応力からも算出することができるので、図2-8～



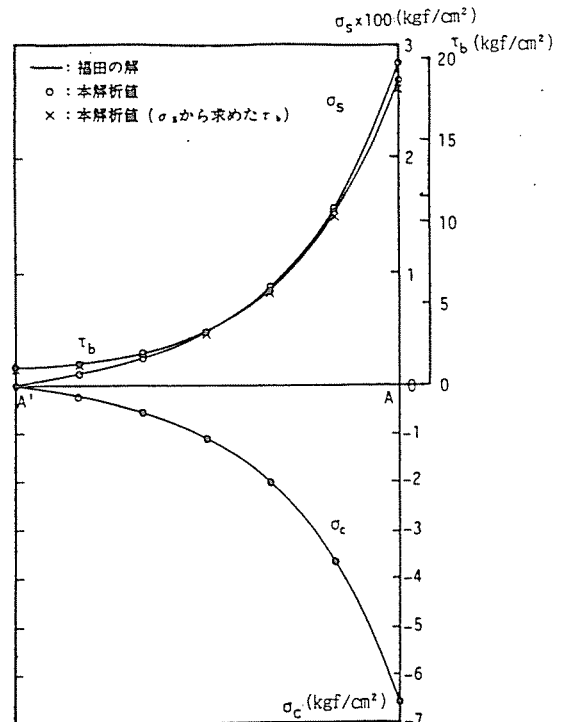
(a) 低次関数要素

(b) 高次関数要素

図2-8 既往の理論解と本解析値との比較－両引き載荷の場合－

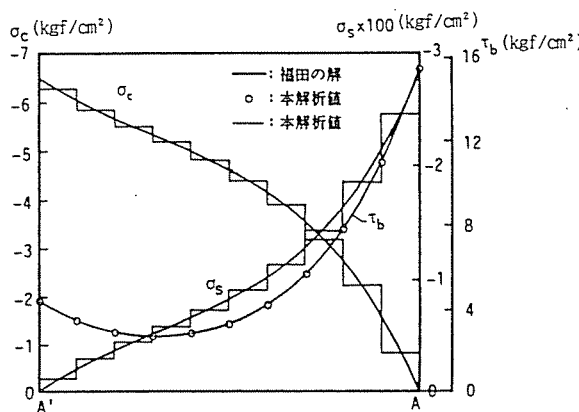


(a) 低次関数要素

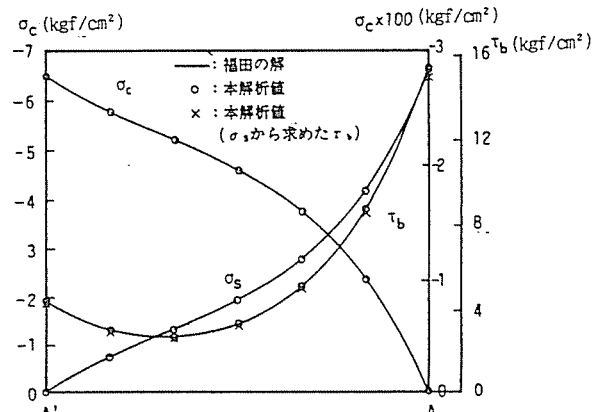


(b) 高次関数要素

図2-9 既往の理論解と本解析値との比較－引き抜き载荷の場合－



(a) 低次関数要素



(b) 高次関数要素

図2-10 既往の理論解と本解析値との比較－押し抜き载荷の場合－

図2-10の各図の(b)の全てには、参考のためこの値をも併記してあるが、これらの図の結果は、この程度の粗い分割数の場合でも、(2-14)式の鉄筋応力から求められる付着応力は、(2-5)式による元の値に比較的良好に近似することを示している。

2. 5 本章のまとめ

第2章では、コンクリート構造における、補強材とコンクリート間の付着すべりに関わる問題のうちでも、最も基本的な「軸方向力のみを受ける鉄筋コンクリート棒部材」の1

次元付着すべり解析を行うための手法について論じた。

本章の内容を要約し列挙すると以下のとおりである。

(1) 理論展開に当たっての基本仮定事項を列挙し、コンクリート部分の変位と鉄筋の相対すべり変位を基本独立変数に選んだ場合の、「軸方向力のみを受ける鉄筋コンクリート棒部材」の全ポテンシャル・エネルギー汎関数を導いた。

(2) 前項で求めたエネルギー汎関数を用いて、この問題を支配する基礎微分方程式を導き、さらに、ここで得た微分方程式を変形することによって、周知の“1次元基本付着方程式”が誘導されることを明示し、この全ポテンシャル・エネルギー汎関数に基づいて展開される有限要素解析が、既往の1次元基本付着方程式を近似的に解くことと等価であることを示して、その理論的位置付けを明らかにした。

(3) 前述の全ポテンシャル・エネルギー汎関数に基づき、要素内の設定変位に1次形状関数と3次形状関数をそれぞれ採用した2種の有限要素を用いて定式化し、次いで、モデル鉄筋コンクリート棒部材3種の数値計算例を掲げて、両要素解に及ぼす要素分割数の影響を調べ、さらに、既往の理論解との比較・検討を行って本有限要素解2種の妥当性を検証した。

第2章の参考文献

- 1) 福田武雄：鉄筋コンクリート理論、生産技術センター、1976
- 2) 福田武雄：軸方向力を受くる鉄筋コンクリート部材における応力分布に関する二、三の理論的問題について、土木学会誌、第19巻、第2号、1933, 3.
- 3) Bufler, H. : Ein neuer Ansatz zur Berechnung der Draft und Haftspannungen in Stahlbeton, Bauing., 22. Jr. H. 10 Oct. 1958.
- 4) Rehm, G. : Über die Grundlagen des Verbundes Zwischen Stahl und Beton, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton H. 138, 1961.
- 5) 六車 熙、森田司郎、富田孝次郎：鋼とコンクリートの付着に関する基礎的研究(Ⅰ. 付着応力分布について)－(Ⅰ)、日本建築学会論文報告集、第131号、1967, 1.
- 6) 六車 熙、森田司郎、富田孝次郎：鋼とコンクリートの付着に関する基礎的研究(Ⅰ. 付着応力分布について)－(Ⅱ)、日本建築学会論文報告集、第132号、1967, 2.
- 7) 六車 熙、森田司郎：鋼とコンクリートの付着に関する基礎的研究(Ⅱ. 鉄筋コンクリート引っ張り部材の変形について)、日本建築学会論文報告集、第134号、1967, 4.
- 8) 六車 熙、森田司郎：鋼とコンクリートの付着に関する基礎的研究(Ⅲ. 引抜試験について)、日本建築学会論文報告集、第139号、1967, 9.
- 9) 田 政範、島田静雄：鉄筋とコンクリートの付着に関する基礎的研究、土木学会論文報告集、No.217号、1973, 9.
- 10) 中島 亨、山本康弘：鉄筋コンクリートの付着応力度の履歴とひびわれの復元性に関する研究、土木学会論文報告集、No.219, 1973, 11.
- 11) 青柳征夫、佐藤良一：低温度下における鉄筋コンクリート引っ張り部材の変形とひびわれ性状、セメント技術年報、V. 32, 1978.
- 12) 田辺忠顕、呉 智深、加藤千貴：クラックひずみ分布関数を用いたRC単軸要素の引っ張り剛性に関するFEM解析の定式化、コンクリート工学年次論文報告集、第11巻2号、1989.
- 13) 中田慎介：付着特性を考慮した鉄筋コンクリート部材の復元力特性に関する研究、日本建築学会関東支部研究報告集、第41号、1971, 1.
- 14) Tassios, T.P. and Yannopoulos, P.J. : Analytical Studies on Reinforced Concrete Members under Cyclic Loading based on Bond Stress-Slip Relationship, ACI Journal, Vol. 78, 1981.
- 15) Shafer, H. : A Contribution to the Solution of Contact Problems with the Aid of Bond Element, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 6, 1975.
- 16) 上田正生、土橋由造：鉄筋コンクリート部材の材料非線形付着すべり解析、土木学会北海道支部論文報告集、第40号、1984, 2.
- 17) 上田正生、土橋由造：引張り力を受けるRC部材の付着滑り挙動解析、土木学会北海道支部論文報告集、第41号、1985, 2.

- 18) 上田正生、土橋由造：軸力を受ける鉄筋コンクリート棒部材の材料非線形付着すべり解析、土木学会論文集、第306号/V-3、1985, 8.

第3章 補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート梁部材の解析

3. 1 はじめに

一般に、鉄筋とコンクリートが共に弾性領域にある場合、鉄筋コンクリート（RC）梁部材の変形と応力は、完全付着の仮定に基づく既往の弾性理論に従って容易に求められるので、通常は何らの困難も生じない。RC梁部材の変形・力学挙動を予測する際に、補強材である鉄筋とコンクリート間の付着すべり作用が問題となるのは、改めて指摘するまでもなく、コンクリートに亀裂が生じた後の非弾性領域においてである。いくつか指摘し得る問題点のうちで、最も重要なものとしては次の二点を上げることができる。一つは、「亀裂発生後の部材の曲げ剛性の評価」であり、他の一つは、「フーチングと柱、梁と柱、あるいは、梁とスラブ等の部材接合部の変形挙動の追跡」である。ここに挙げた両者と密接な係わりをもつのは、言うまでもなく“鉄筋とコンクリート間の付着作用”であるが、前者では、鉄筋からコンクリートへの力の伝達の程度が重要であるのに対して、後者では、主として接合部からの鉄筋のすべり出しが問題となると言う違いがある。いずれにせよ、付着作用の評価法の善し悪しが、個々の解析手法の信頼性と精度に大きく影響することは確かである。従って、RC部材内部の実際の付着機構を、でき得る限り精度よくモデル化して解析にとり入れることが重要となる。

既に、第1章の「既往の研究」で概観したように、近年では、従来の平面保持の仮定に立脚した梁要素に、鉄筋の付着すべり効果を組み入れた有限要素解析手法がいくつか報告されている^{1)~11)}。これらの先駆的な研究は、「これまで、直接的には2次元平面応力問題としてしか扱い得なかった梁内部の鉄筋の付着作用を、より単純な梁の曲げ問題の一部として取り扱い得る可能性を示唆した」という意味で特筆されるべきものである。しかしながら、これらの既往の研究の殆どは、コンクリートに亀裂の生じた後の梁の材料非線形挙動の追跡をその目的としているが、いまだ多くの試行の余地と改良の必要があり、また材料非線形領域を志向する余り、この種の問題の最も基本となるべき“線形領域における支配微分方程式”についてさえ、未整備の状態にあるのが現状のようである。

このように、「線形領域におけるRC梁の補強筋の付着すべり」が等閑視されてきた背景には、1) 鉄筋の付着すべりが重要になるのは、先にも触れたようにコンクリートに亀裂の生じた非線形領域においてであること、2) 線形（弾性）領域における梁の実測撓み

や鉄筋の応力は、完全付着の仮定に基づく通常の弾性理論によって十分予測することが可能なこと、などにも起因している。しかしながら、アンボンドP Cという構造形式が現実に存在する以上、線形域における理論上の不備を補完しておくことは、必要なことのように思われる。

本章では、2章で展開した「鉄筋とコンクリート間の付着すべり問題」のための基本的な考え方を、R C梁の曲げの問題に拡張・適用することを試みる^{12)~14)}。

即ち、まず、全ポテンシャル・エネルギー原理を用いて、既往の梁部材の微小変形曲げ理論に補強筋の付着すべりを許容した場合の、線形領域におけるR C梁部材の支配微分方程式を導き、次いで、この理論に基づき、高次と低次の2種の変位関数を用いた有限要素による定式化を行い、更に、モデルR C梁の二、三の数値計算例を示し、鉄筋の付着すべりが梁全体の力学性状に及ぼす影響を明らかにして若干の検討・考察を加えることにする。

3. 2 鉄筋コンクリート梁部材のための理論式の展開

3.2.1 基本仮定事項

補強筋の付着すべりを考慮したR C梁部材の理論展開のために用いた基本仮定事項は、以下のとおりである。

1) 梁には軸力と曲げが作用するものとし、鉛直剪断変形無視の微小変形理論が適用できるものとする。

2) コンクリートは弾性体であり、コンクリート横断面には、変形後も平面保持の仮定が成立する。

3) 梁断面内には m 層の鉄筋が配筋されており、また各層の鉄筋は梁丈方向には大きさをもたず、配筋位置に集中して存在する軸方向力のみを負担する弾性線材と仮定する。

4) 個々の鉄筋層とコンクリートの間には、配筋（材軸）方向の付着すべりが生じ得るものとし、ある位置における個々の鉄筋層のすべり変位は、平面が保持されるその位置のコンクリート部分からの相対変位で表示でき、また、付着応力とすべり変位の間には、線形関係が成立するものとする。

3.2.2 変位場、および歪と応力

(1) 変位場

図3-1は、R C梁の座標と断面記号を概念的に図示したものである。前項の仮定に基づ

き、この問題を定式化するために設定しなければならない変位場は、梁の中心線上にとられたx軸上の材軸方向の変位 u と、z軸（図3-1参照）方向の変位 w 、および梁断面内に m 層配筋されている鉄筋層のすべり変位 $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_m$ の計 $(2+m)$ 個の変位である。

（２）コンクリート部分の歪と応力

梁中央のx軸から z だけ離れた任意点のコンクリート部分の歪は、下式で表わされる。

$${}_z \varepsilon_c = \varepsilon_o + z\phi \quad (3-1)$$

上式中の ε_o と ϕ は、それぞれ梁の軸歪と曲率であり、次のようになる。

$$\varepsilon_o = \frac{du}{dx} \quad (3-2)$$

$$\phi = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (3-3)$$

また、同じ位置のコンクリートの応力 ${}_z \sigma_c$ は、

$${}_z \sigma_c = E_c \quad {}_z \varepsilon_c \quad (3-4)$$

但し、 E_c ：コンクリートのヤング係数

（３）鉄筋層の歪と応力

梁断面内に m 個存在する鉄筋層のうち、任意の i 層を考える。この層の鉄筋の歪 ε_{si} は、前掲の仮定(3)と(4)より、次のように表示することができる。

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_o + h_{si}\phi + \varepsilon_{ssi} \quad (3-5)$$

但し、 h_{si} ：x軸から i 層の鉄筋位置までの距離

上式中の ε_{ssi} は、 i 層の鉄筋のすべり率で、次式で表わされる。

$$\varepsilon_{ssi} = \frac{dS_i}{dx} \quad (3-6)$$

また、この i 層の鉄筋の応力 σ_{si} は、

$$\sigma_{si} = E_{si} \quad \varepsilon_{si} \quad (3-7)$$

但し、 E_{si} ： i 層の鉄筋のヤング係数

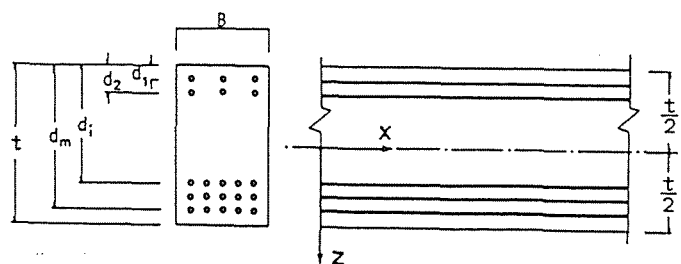


図3-1 RC梁の座標と断面記号

3.2.3 軸力、曲げモーメント、および剪断力

梁の任意断面における軸力 N と曲げモーメント M は、(3-1)～(3-7)式の関係を用いて容易に求められ、次のようになる。

$$N = (A_o E_c + \sum A_{s,i} E_{s,i}) \frac{du}{dx} - (\sum A_{s,i} E_{s,i} h_{s,i}) \frac{d^2 w}{dx^2} + \sum A_{s,i} E_{s,i} \frac{dS_i}{dx} \quad (3-8)$$

$$M = (\sum A_{s,i} E_{s,i} h_{s,i}) \frac{du}{dx} - (I_o E_c + \sum A_{s,i} E_{s,i} h_{s,i}^2) \frac{d^2 w}{dx^2} + \sum A_{s,i} E_{s,i} h_{s,i} \frac{dS_i}{dx} \quad (3-9)$$

また、剪断力 Q は、曲げモーメント M を微分することによって得られ、下式となる。

$$Q = (\sum A_{s,i} E_{s,i} h_{s,i}) \frac{d^2 u}{dx^2} - (I_o E_c + \sum A_{s,i} E_{s,i} h_{s,i}^2) \frac{d^3 w}{dx^3} + \sum A_{s,i} E_{s,i} h_{s,i} \frac{d^2 S_i}{dx^2} \quad (3-10)$$

但し、 A_o ：無筋の場合の梁の断面積、 I_o ：無筋の場合の梁の断面2次モーメント、

$A_{s,i}$ ： i 層の鉄筋の断面積、 $A_{s,i}^*$ ： i 層の鉄筋の換算断面積で $A_{s,i}^* = A_{s,i}(1 - E_c/E_{s,i})$ 、

3.2.4 全ポテンシャル・エネルギー汎関数

2章でも述べたように、補強筋の付着すべりを考慮した場合のRC部材の全ポテンシャル・エネルギー Π は、次式で表示される。

$$\Pi = U - V = (U_{c,n} + U_{s,t} + U_{b,s}) - V \quad (3-11)$$

但し、 U ：内部エネルギー、 V ：外力による負荷ポテンシャル・エネルギー

上式中の U を構成する内部エネルギーの内の $U_{c,n}$ と $U_{s,t}$ は、それぞれコンクリート部分と全鉄筋層に蓄積される歪エネルギーであり、 $U_{b,s}$ は、各鉄筋層とコンクリートの界面に生ずる付着すべりにかかわるエネルギーの総和を意味している。これらのうち、コンクリート部分の歪エネルギー $U_{c,n}$ は(3-1)式と(3-4)式を用い、また全鉄筋層の歪エネルギー $U_{s,t}$ は(3-5)式と(3-7)式の関係を用いて、それぞれ次のように表わすことができる。

$$U_{c,n} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-t/2}^{t/2} B E_c \epsilon_c^2 dz dx - \frac{1}{2} \int_0^L \sum A_{s,i} E_c h_{s,i} \epsilon_c^2 dx \quad (3-12)$$

$$U_{s,t} = \frac{1}{2} \int_0^L \sum A_{s,i} E_{s,i} \epsilon_{s,i}^2 dx \quad (3-13)$$

但し、 L ：梁の部材長、 B ：梁幅、 $\epsilon_{s,i}$ ： i 層の鉄筋位置のコンクリートの歪

上の(3-12)式の右辺の第2項は、鉄筋によるコンクリート断面の欠損を考慮するために必要となるものである。

次に、 $U_{b,s}$ を考える。基本仮定事項(4)に従えば、任意の鉄筋層 i の付着境界に生ずる付

着応力 τ_{bi} とすべり変位 S_i の間には、次の関係が成立する。

$$\tau_{bi} = K_{bi} S_i \quad (3-14)$$

但し、 K_{bi} : i 層の鉄筋の付着係数

従って、全鉄筋層とコンクリート間の付着すべりにかかわる内部エネルギー U_{bs} は、下式で表示される。

$$U_{bs} = \frac{1}{2} \int_0^L \sum_{i=1}^m A_{bsi} K_{bi} S_i^2 dx \quad (3-15)$$

但し、 A_{bsi} : 鉄筋層 i の単位長さ当りの付着表面積

一方、外力がなす負荷ポテンシャル・エネルギー V は、当然のことながら、荷重条件に応じて異なったものとなる。今、一例として、梁の両端に軸荷重 P_u が、また z 方向には一様な等分布荷重 q_z が作用する場合を考え、鉄筋は材端 ($x=0, x=L$) で定着されているものとする、負荷ポテンシャル・エネルギー V は、次のように表わされる。

$$V = \int_0^L (P_u \frac{du}{dx} + q_z w) dx \quad (3-16)$$

以上で得た U_{cn} 、 U_{st} 、 U_{bs} 、 V を (3-11) 式に代入して整理すると、補強筋の付着すべりを考慮した場合の RC 梁の全ポテンシャル・エネルギー汎関数 Π は、最終的に下式で表示される。

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L [& (A_o E_c + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si}) \left(\frac{du}{dx} \right)^2 - \left(\sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_{si} \right) \frac{du}{dx} \frac{d^2 w}{dx^2} \\ & + (I_o E_c + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_{si}^2) \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 + 2 \left(\sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} \frac{dS_i}{dx} \right) \frac{du}{dx} \\ & - 2 \left(\sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} h_{si} \frac{dS_i}{dx} \right) \frac{d^2 w}{dx^2} + \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} \left(\frac{dS_i}{dx} \right)^2 + \sum_{i=1}^m A_{bsi} K_{bi} S_i^2] dx \\ & - \int_0^L (P_u \frac{du}{dx} + q_z w) dx \end{aligned} \quad (3-17)$$

3.2.5 支配微分方程式と平衡方程式

補強筋の付着すべりを考慮した RC 梁部材の曲げを支配する基礎微分方程式は、前節で得たエネルギー汎関数 (3-17) 式の停留条件として求めることができる。変位 u と w 、および任意の鉄筋層 i のすべり変位 S_i に関して、Euler-Lagrange 方程式^{15), 16)} を構成すると、以下に示す支配微分方程式を得る。

変位 u に関して：

$$(A_o E_c + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si}) \frac{d^2 u}{dx^2} - \left(\sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} h_{si} \right) \frac{d^3 w}{dx^3} + \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} \frac{d^2 S_i}{dx^2} = 0 \quad (3-18)$$

変位 w に関して：

$$-(\sum^m A_{s,i} E_{s,i} h_{s,i}) \frac{d^3 u}{dx^3} + (I_o E_c + \sum^m A_{s,i} E_{s,i} h_{s,i}^2) \frac{d^4 w}{dx^4} - \sum^m A_{s,i} E_{s,i} h_{s,i} \frac{d^3 S_i}{dx^3} = q_z \quad (3-19)$$

変位 S_i に関して：

$$A_{s,i} E_{s,i} \left(\frac{d^2 u}{dx^2} - h_{s,i} \frac{d^3 w}{dx^3} + \frac{d^2 S_i}{dx^2} \right) = A_{b,s,i} K_{b,i} S_i \quad (3-20)$$

但し、 $i=1 \sim m$

これらの式のうちの最後の(3-20)式は、梁の断面内に配筋されている鉄筋層の数だけ成立するから、これと同種の式は m 個存在することになる。

また、上記の3式は、(3-8)～(3-10)式の関係を用いることにより、以下に示す一連の平衡方程式に変換することができる。

$$\frac{dN}{dx} = 0 \quad (3-21)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} = q_z \quad (3-22)$$

$$A_{s,i} \frac{d\sigma_{s,i}}{dx} = A_{b,s,i} \tau_{b,i} \quad (3-23)$$

但し、 $i=1 \sim m$

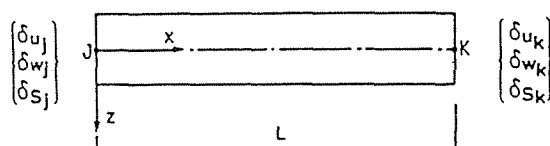
上の最後の(3-23)式は、言うまでもなく、従来、梁の変形とは全く独立に“曲げ付着”として論じられてきた慣用の式¹⁷⁾に対応するものであり、本論ではこれをRC梁の曲げ変形理論の中に完全に取り込んだことになる。

3. 3 有限要素法への定式化

3.3.1 低次関数要素による定式化

(1) 変位関数と歪の有限要素表示

図3-2に示すこの低次関数要素は、変形法を用いてこの問題を定式化するための最も単純な要素である。この要素の変位 u , w , S_i は、次のように表示される。



$\{\delta_{u_j}\}, \{\delta_{w_j}\}, \{\delta_{S_j}\}$ は節点 J の変位ベクトルで
 $\{\delta_{u_j}\} = u_j, \{\delta_{w_j}\} = (w_j \ w_j')^T,$
 $\{\delta_{S_j}\} = (S_{1j} \cdots S_{ij} \cdots S_{mj})^T$

図3-2 低次関数要素

$$u = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \alpha_{u0} \\ \alpha_{u1} \end{Bmatrix} = [f_1] \{\alpha_u\} \quad (3-24)$$

$$w = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} \alpha_{w0} \\ \alpha_{w1} \\ \alpha_{w2} \\ \alpha_{w3} \end{Bmatrix} = [f_3] \{\alpha_w\} \quad (3-25)$$

$$S_i = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \alpha_{si0} \\ \alpha_{si1} \end{Bmatrix} = [f_1] \{\alpha_{si}\} \quad (3-26)$$

但し、 $\{\alpha_u\}$ 、 $\{\alpha_w\}$ 、 $\{\alpha_{si}\}$ ：それぞれ変位 u 、 w 、 S_i に関する一般化変位、 $i=1 \sim m$ 従って、これらの変位 u 、 w 、 S_i の導関数は、

$$u' = \frac{du}{dx} = [f_1'] \{\alpha_u\} = [0 \quad 1] \{\alpha_u\} \quad (3-27)$$

$$w' = \frac{dw}{dx} = [f_3'] \{\alpha_w\} = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] \{\alpha_w\} \quad (3-28)$$

$$w'' = \frac{d^2w}{dx^2} = [f_3''] \{\alpha_w\} = [0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x] \{\alpha_w\} \quad (3-29)$$

$$S_i' = \frac{dS_i}{dx} = [f_1'] \{\alpha_{si}\} = [0 \quad 1] \{\alpha_{si}\} \quad (3-30)$$

また、図3-2の要素の節点J、Kの節点変位ベクトル $\{\Delta_u\}$ 、 $\{\Delta_w\}$ 、 $\{\Delta_{si}\}$ は、それぞれ(3-24)～(3-26)式及び(3-28)式に、各節点の座標値($x=0$ 、 $x=l$)を代入することによって得られ、次のようになる。

$$\{\Delta_u\} = \begin{Bmatrix} u_J \\ u_K \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \{\alpha_u\} = [C_1] \{\alpha_u\} \quad (3-31)$$

$$\{\Delta_w\} = \begin{Bmatrix} w_J \\ w_J' \\ w_K \\ w_K' \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \{\alpha_w\} = [C_3] \{\alpha_w\} \quad (3-32)$$

$$\{\Delta_{si}\} = \begin{Bmatrix} S_{iJ} \\ S_{iK} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \{\alpha_{si}\} = [C_1] \{\alpha_{si}\} \quad (3-33)$$

但し、 l ：要素長

従って、先の一般化変位 $\{\alpha_u\}$ 、 $\{\alpha_w\}$ 、 $\{\alpha_{si}\}$ は、上式の関係より、

$$\{\alpha_u\} = [C_1^{-1}] \{\Delta_u\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix} \{\Delta_u\} \quad (3-34)$$

$$\{\alpha_w\} = [C_3^{-1}] \{\Delta_w\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -3/l^2 & -2/l & 3/l^2 & -1/l \\ 2/l^3 & 1/l^2 & -2/l^3 & 1/l^2 \end{bmatrix} \{\Delta_w\} \quad (3-35)$$

$$\{\alpha_{si}\} = [C_1^{-1}] \{\Delta_{si}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1/l & 1/l \end{bmatrix} \{\Delta_{si}\} \quad (3-36)$$

(2) 有限要素方程式

前項で得た(3-24)～(3-36)式の関係をも、先の汎関数(3-17)式に代入すると次式のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l & [(A_0 E_c + \sum_{s=1}^m A_{s1}^* E_{s1}) \{ \Delta_u \}^T [C_1^{-1}]^T [f_1]^T [f_1] [C_1^{-1}] \{ \Delta_u \} \\ & - 2 \sum_{s=1}^m A_{s1}^* E_{s1} \{ \Delta_u \}^T [C_1^{-1}]^T [f_1]^T [f_3'] [C_3^{-1}] \{ \Delta_w \} \\ & + (I_0 E_c + \sum_{s=1}^m A_{s1}^* E_{s1}) \{ \Delta_w \}^T [C_3^{-1}]^T [f_3']^T [f_3'] [C_3^{-1}] \{ \Delta_w \} \\ & + 2 \sum_{s=1}^m A_{s1} E_{s1} \{ \Delta_u \}^T [C_1^{-1}]^T [f_1]^T [f_1] [C_1^{-1}] \{ \Delta_{s1} \} \\ & - 2 \sum_{s=1}^m A_{s1} E_{s1} \{ \Delta_w \}^T [C_3^{-1}]^T [f_3']^T [f_1] [C_1^{-1}] \{ \Delta_{s1} \} \\ & + \sum_{s=1}^m A_{s1} E_{s1} \{ \Delta_{s1} \}^T [C_1^{-1}]^T [f_1]^T [f_1] [C_1^{-1}] \{ \Delta_{s1} \} \\ & + \sum_{s=1}^m A_{bs1} K_{bs1} \{ \Delta_{s1} \}^T [C_1^{-1}]^T [f_1]^T [f_1] [C_1^{-1}] \{ \Delta_{s1} \}] dx \\ & - \{ \Delta_u \}^T \{ P_u \} - \{ \Delta_w \}^T \{ P_w \} \end{aligned} \quad (3-37)$$

但し、 $\{P_u\}$ 、 $\{P_w\}$ ：それぞれ軸 (x) 方向および鉛直 (z) 方向の外荷重節点ベクトル
上式を節点変位ベクトル $\{ \Delta_u \}$ 、 $\{ \Delta_w \}$ 、 $\{ \Delta_{s1} \}$ について (但し、 $i=1 \sim m$) 変分をとり、整理することによって、この問題に対する有限要素方程式が得られ下式となる。

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} & K_{us} \\ K_{uw}^T & K_{ww} & K_{ws} \\ K_{us}^T & K_{ws}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_u \\ \Delta_w \\ \Delta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_u \\ P_w \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-38)$$

(3-38)式の左辺の剛性マトリックスを構成する個々の部分マトリックスの内の、 $[K_{uu}]$ 、 $[K_{uw}]$ 、および $[K_{ww}]$ は、(3-37)式から、それぞれ次のようになる。

$$\begin{aligned} [K_{uu}] &= (A_0 E_c + \sum_{s=1}^m A_{s1}^* E_{s1}) [C_1^{-1}]^T \left\{ \int_0^l [f_1]^T [f_1] dx \right\} [C_1^{-1}] \\ &= (A_0 E_c + \sum_{s=1}^m A_{s1}^* E_{s1}) [C_1^{-1}]^T [\bar{K}_{uu}] [C_1^{-1}] \end{aligned} \quad (3-39)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [\bar{K}_{uu}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \\ [K_{uw}] &= - \left(\sum_{s=1}^m A_{s1}^* E_{s1} \right) [C_1^{-1}]^T \left\{ \int_0^l [f_1]^T [f_3'] dx \right\} [C_3^{-1}] \\ &= - \left(\sum_{s=1}^m A_{s1}^* E_{s1} \right) [C_1^{-1}]^T [\bar{K}_{uw}] [C_3^{-1}] \end{aligned} \quad (3-40)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [\bar{K}_{uw}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \\ [K_{ww}] &= (I_0 E_c + \sum_{s=1}^m A_{s1}^* E_{s1}) [C_3^{-1}]^T \left\{ \int_0^l [f_3']^T [f_3'] dx \right\} [C_3^{-1}] \\ &= (I_0 E_c + \sum_{s=1}^m A_{s1}^* E_{s1}) [C_3^{-1}]^T [\bar{K}_{ww}] [C_3^{-1}] \end{aligned} \quad (3-41)$$

ここに、

$$[\bar{k}_{ww}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4l & 6l^2 \\ 0 & 0 & 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix}$$

また、(3-28)式中の部分マトリックス $[K_{us}]$, $[K_{ws}]$, $[K_{ss}]$ は、これらを構成する以下に掲げる任意の*i*層の鉄筋に関する部分マトリックス $[k_{usi}]$, $[k_{wsi}]$, $[k_{ssi}]$ を、全鉄筋層の節点すべり変位ベクトルの並び順に従って再構成することにより、容易に求められる。

$$\begin{aligned} [k_{usi}] &= A_{si} E_{si} [C_i^{-1}]^T \left\{ \int_0^l [f_i']^T [f_i'] dx \right\} [C_i^{-1}] \\ &= A_{si} E_{si} [C_i^{-1}]^T [\bar{k}_{usi}] [C_i^{-1}] \end{aligned} \quad (3-42)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [\bar{k}_{usi}] &= [\bar{k}_{uu}] \\ [k_{wsi}] &= -A_{si} E_{si} [C_i^{-1}]^T \left\{ \int_0^l [f_i'']^T [f_i'] dx \right\} [C_i^{-1}] \\ &= -A_{si} E_{si} [C_i^{-1}]^T [\bar{k}_{wsi}] [C_i^{-1}] \end{aligned} \quad (3-43)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [\bar{k}_{wsi}] &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 2l \\ 0 & 3l^2 \end{bmatrix} \\ [k_{ssi}] &= [C_i^{-1}]^T \left[A_{si} E_{si} \int_0^l [f_i']^T [f_i'] dx + A_{bsi} K_{bi} \int_0^l [f_i]^T [f_i] dx \right] [C_i^{-1}] \\ &= A_{si} E_{si} [C_i^{-1}]^T [\bar{k}_{ssi1}] [C_i^{-1}] + A_{bsi} K_{bi} [C_i^{-1}]^T [k_{ssi2}] [C_i^{-1}] \end{aligned} \quad (3-44)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [\bar{k}_{ssi1}] &= [\bar{k}_{uu}] \\ [\bar{k}_{ssi2}] &= \begin{bmatrix} l & l^2/2 \\ l^2/2 & l^3/3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

3.3.2 高次関数要素による定式化

(1) 変位関数と歪の有限要素表示

図3-3に、ここで用いた高次関数要素を示す。図からも知り得るように、この要素は各要素節点当り9自由度を有しており、各変位u, w, S_iは、それぞれ次のように書かれる。

$$u = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} \alpha_{u0} \\ \alpha_{u1} \\ \alpha_{u2} \\ \alpha_{u3} \end{Bmatrix} = [f_3] \{ \alpha_u \} \quad (3-45)$$

$$w = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3 \quad x^4 \quad x^5] \begin{Bmatrix} \alpha_{w0} \\ \alpha_{w1} \\ \alpha_{w2} \\ \alpha_{w3} \\ \alpha_{w4} \\ \alpha_{w5} \end{Bmatrix} = [f_5] \{ \alpha_w \} \quad (3-46)$$

$$S_i = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} \alpha_{si0} \\ \alpha_{si1} \\ \alpha_{si2} \\ \alpha_{si3} \end{Bmatrix} = [f_3] \{ \alpha_{si} \} \quad (3-47)$$

但し、 $\{ \alpha_u \}$ 、 $\{ \alpha_w \}$ 、 $\{ \alpha_{si} \}$ ：それぞれ変位 u 、 w 、 S_i の一般化変位。

従って、これらの変位 u 、 w 、 S_i の導関数は、

$$u' = \frac{du}{dx} = [f'_3] \{ \alpha_u \} = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] \{ \alpha_u \} \quad (3-48)$$

$$w' = \frac{dw}{dx} = [f'_5] \{ \alpha_w \} = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2 \quad 4x^3 \quad 5x^4] \{ \alpha_w \} \quad (3-49)$$

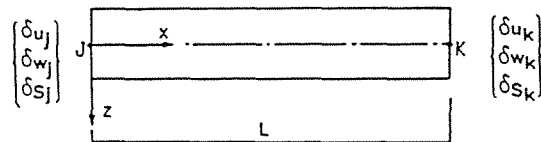
$$w'' = \frac{d^2w}{dx^2} = [f''_5] \{ \alpha_w \} = [0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x \quad 12x^2 \quad 20x^3] \{ \alpha_w \} \quad (3-50)$$

$$S'_i = \frac{dS_i}{dx} = [f'_3] \{ \alpha_{si} \} = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] \{ \alpha_{si} \} \quad (3-51)$$

また、図3-3に示す要素の節点 J 、 K の節点変位ベクトル $\{ \Delta_u \}$ 、 $\{ \Delta_w \}$ 、 $\{ \Delta_{si} \}$ は、(3-45)～(3-51)式を用いて、各節点の座標値 ($x=0$ 、 $x=l$) を代入することによって得られ、それぞれ次のようになる。

$$\{ \Delta_u \} = \begin{Bmatrix} u_J \\ u_J \\ u_K \\ u_K \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \{ \alpha_u \} = [C_3] \{ \alpha_u \} \quad (3-52)$$

$$\{ \Delta_w \} = \begin{Bmatrix} w_J \\ w_J \\ w_J \\ w_K \\ w_K \\ w_K \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 & l^4 & l^5 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 & 4l^3 & 5l^4 \\ 0 & 0 & 2 & 6l & 12l^2 & 20l^3 \end{bmatrix} \{ \alpha_w \} = [C_5] \{ \alpha_w \} \quad (3-53)$$



$\{ \delta u_J \}$ 、 $\{ \delta w_J \}$ 、 $\{ \delta S_J \}$ は節点 J の変位ベクトルで

$\{ \delta u_J \} = \{ u_J \quad u'_J \}^T$ 、 $\{ \delta w_J \} = \{ w_J \quad w'_J \quad w''_J \}^T$ 、

$\{ \delta S_J \} = \{ S_{ij} \quad S'_{ij} \quad \dots \quad S_{ij} \quad S'_{ij} \quad \dots \quad S_{mj} \quad S'_{mj} \}^T$

図3-3 高次関数要素

$$\{\Delta_{si}\} = \begin{Bmatrix} S_{ij} \\ S_{ij} \\ S_{iK} \\ S_{iK} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \{\alpha_{si}\} = [C_3] \{\alpha_{si}\} \quad (3-54)$$

(2) 有限要素方程式

前項で得た(3-45)～(3-54)式の関係、先の汎関数(3-17)式に代入すると下式のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L & [(A_0 E_c + \sum^m A_{si} E_{si}) \{\Delta_u\}^T [C_3^{-1}]^T [f'_3]^T [f'_3] [C_3^{-1}] \{\Delta_u\} \\ & - 2 \sum^m A_{si} E_{si} \{\Delta_u\}^T [C_3^{-1}]^T [f'_3]^T [f''_5] [C_5^{-1}] \{\Delta_w\} \\ & + (I_0 E_c + \sum^m A_{si} E_{si}) \{\Delta_w\}^T [C_5^{-1}]^T [f''_5]^T [f''_5] [C_5^{-1}] \{\Delta_w\} \\ & + 2 \sum^m A_{si} E_{si} \{\Delta_u\}^T [C_3^{-1}]^T [f'_3]^T [f'_3] [C_3^{-1}] \{\Delta_{si}\} \\ & - 2 \sum^m A_{si} E_{si} \{\Delta_w\}^T [C_5^{-1}]^T [f''_5]^T [f'_3] [C_3^{-1}] \{\Delta_{si}\} \\ & + \sum^m A_{si} E_{si} \{\Delta_{si}\}^T [C_3^{-1}]^T [f'_3]^T [f'_3] [C_3^{-1}] \{\Delta_{si}\} \\ & + \sum^m A_{bsi} K_{bsi} \{\Delta_{si}\}^T [C_3^{-1}]^T [f_3]^T [f_3] [C_3^{-1}] \{\Delta_{si}\}] dx \\ & - \{\Delta_u\}^T \{P_u\} - \{\Delta_w\}^T \{P_w\} \end{aligned} \quad (3-55)$$

但し、 $\{P_u\}$ 、 $\{P_w\}$ ：それぞれ軸(x)方向および鉛直(z)方向の外荷重節点ベクトル
節点変位ベクトル $\{\Delta_u\}$ 、 $\{\Delta_w\}$ 、 $\{\Delta_{si}\}$ について上式の汎関数の変分をとり整理すると、
この高次要素の有限要素方程式は、見掛け上低次要素のそれと同じ形で得られ下式となる。

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} & K_{us} \\ K_{uw}^T & K_{ww} & K_{ws} \\ K_{us}^T & K_{ws}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_u \\ \Delta_w \\ \Delta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_u \\ P_w \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (3-56)$$

ただし、(3-56)式の左辺の剛性マトリックスを構成する個々の部分マトリックスの内の
 $[K_{uu}]$ 、 $[K_{uw}]$ 、および $[K_{ww}]$ は、(3-55)式から得られ次のようになる。

$$\begin{aligned} [K_{uu}] &= [C_3^{-1}]^T \left\{ (A_0 E_c + \sum^m A_{si} E_{si}) \int_0^L [f'_3]^T [f'_3] dx \right\} [C_3^{-1}] \\ &= [C_3^{-1}]^T [\bar{K}_{uu}] [C_3^{-1}] \end{aligned} \quad (3-57)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [\bar{K}_{uu}] &= (A_0 E_c + \sum^m A_{si} E_{si}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & l^2 & 4l^3/3 & 3l^4/2 \\ 0 & l^3 & 3l^4/2 & 9l^5/5 \end{bmatrix} \\ [K_{uw}] &= -[C_3^{-1}]^T \left\{ \left(\sum^m A_{si} E_{si} \right) \int_0^L [f'_3]^T [f''_5] dx \right\} [C_5^{-1}] \\ &= -[C_3^{-1}]^T [\bar{K}_{uw}] [C_5^{-1}] \end{aligned} \quad (3-58)$$

ここに、

$$[\bar{K}_{uw}] = \left(\sum^m A_{s,i}^* E_{s,i} \right) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2l & 3l^2 & 4l^3 & 5l^4 \\ 0 & 0 & 2l^2 & 4l^3 & 6l^4 & 8l^5 \\ 0 & 0 & 2l^3 & 9l^4/2 & 36l^5/5 & 10l^6 \end{bmatrix}$$

$$[K_{ww}] = [C_5^{-1}]^T \left\{ (I_o E_c + \sum^m A_{s,i} E_{s,i}) \int_0^l [f_5'']^T [f_5''] dx \right\} [C_5^{-1}]$$

$$= [C_5^{-1}]^T [\bar{K}_{ww}] [C_5^{-1}] \quad (3-59)$$

ここに、

$$[\bar{K}_{ww}] = (I_o E_c + \sum^m A_{s,i} E_{s,i}) \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4l & 6l^2 & 8l^3 & 10l^4 \\ 0 & 0 & 6l^2 & 12l^3 & 18l^4 & 24l^5 \\ 0 & 0 & 8l^3 & 18l^4 & 144l^5/5 & 40l^6 \\ 0 & 0 & 10l^4 & 24l^5 & 40l^6 & 400l^7/7 \end{bmatrix}$$

また、(3-56)式中の残りの部分マトリックス $[K_{us}]$, $[K_{ws}]$, $[K_{ss}]$ は、以下に掲げるこれらを構成する任意の i 層の鉄筋に関する部分マトリックス $[k_{usi}]$, $[k_{wsi}]$, $[k_{ssi}]$ を全鉄筋層の節点すべり変位ベクトルの並び順に従って再構成することにより、容易に求められる。

$$[k_{usi}] = [C_3^{-1}]^T \left\{ A_{s,i} E_{s,i} \int_0^l [f_3']^T [f_3'] dx \right\} [C_3^{-1}]$$

$$= [C_3^{-1}]^T [\bar{K}_{usi}] [C_3^{-1}] \quad (3-60)$$

ここに、

$$[\bar{K}_{usi}] = A_{s,i} E_{s,i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & l^2 & 4l^3/3 & 3l^4/2 \\ 0 & l^3 & 3l^4/2 & 9l^5/5 \end{bmatrix}$$

$$[k_{wsi}] = -[C_5^{-1}]^T \left\{ A_{s,i} E_{s,i} \int_0^l [f_5'']^T [f_3'] dx \right\} [C_3^{-1}]$$

$$= -[C_5^{-1}]^T [\bar{K}_{wsi}] [C_3^{-1}] \quad (3-61)$$

ここに、

$$[\bar{K}_{wsi}] = A_{s,i} E_{s,i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2l & 2l^2 & 2l^3 \\ 0 & 3l^2 & 4l^3 & 9l^4/2 \\ 0 & 4l^3 & 6l^4 & 36l^5/5 \\ 0 & 5l^4 & 8l^5 & 10l^6 \end{bmatrix}$$

$$[k_{ssi}] = [C_3^{-1}]^T \left[A_{s,i} E_{s,i} \int_0^l [f_3']^T [f_3'] dx + A_{b,i} K_{b,i} \int_0^l [f_3]^T [f_3] dx \right] [C_3^{-1}]$$

$$= [C_3^{-1}]^T \{ [\bar{K}_{ssi1}] + [\bar{K}_{ssi2}] \} [C_3^{-1}] \quad (3-62)$$

ここに、

$$[\bar{k}_{ss11}] = [\bar{k}_{uu}]$$

$$[\bar{k}_{ss12}] = \begin{bmatrix} l & l^2/2 & l^3/3 & l^4/4 \\ l^2/2 & l^3/3 & l^4/4 & l^5/5 \\ l^3/3 & l^4/4 & l^5/5 & l^6/6 \\ l^4/4 & l^5/5 & l^6/6 & l^7/7 \end{bmatrix}$$

3. 4 数値計算例と考察

補強筋の付着すべりが、線形領域における R C 梁部材の力学性状に如何ような影響を及ぼすかを明らかにするため、本章で展開した 2 種の有限要素を用いて若干の検討・考察を行ってみる。

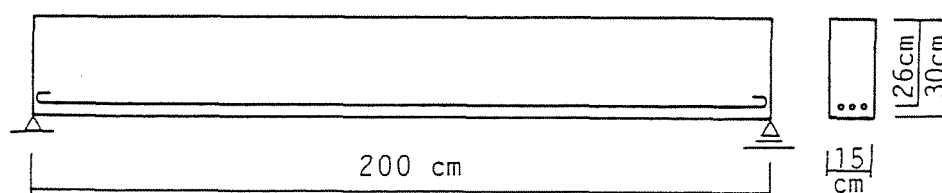
3.4.1 部材両端で鉄筋が完全に定着された R C 単純梁

線形領域における R C 梁部材内の「補強筋の付着すべり作用」を、最もシンプルな形で見ることができるのは、いうまでもなく「単配筋を有する単純梁」である。ここでは、図 3-4 に示すように、部材両端において、鉄筋のすべり変位が完全に拘束（定着）されている単配筋の R C 単純梁を設定して解析を行うこととする。

(1) 等分布荷重時の解析結果

まず最初に、この梁が図 3-5 に示すような等分布荷重 $q_z = 10 \text{ kgf/cm}$ を受ける場合を対象として、鉄筋の付着係数 K_b （単位： kgf/cm^3 ）の値が R C 梁の力学性状に及ぼす効果について調べてみる。ただし、 K_b 以外の構成材料の物理性状は、図 3-4 に掲げた一定値を保つものとする。

図 3-6 と図 3-7 は、前節の高次関数要素を用い、付着係数 K_b の値のみを 7 段階 ($K_b = 1.0, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6 \text{ kgf/cm}^3$) に変化させた場合の解析結果を掲げたものである。



CONCRETE: $E_c = 210000 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}$

STEEL(D19x3): $E_s = 2100000 \text{ (kgf/cm}^2\text{)}, A_s = 8.55 \text{ cm}^2, A_{sb} = 18.0 \text{ cm}$

図 3-4 モデル R C 梁の概要と仮定材料性状

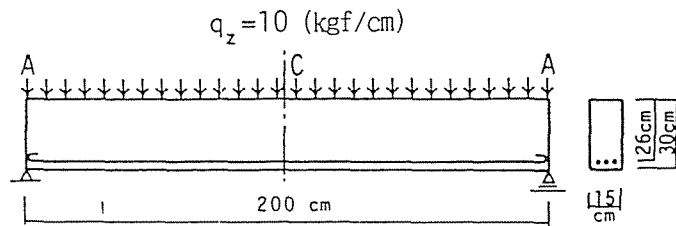


図3-5 部材端で鉄筋が完全定着された等分布荷重を受ける R C 梁

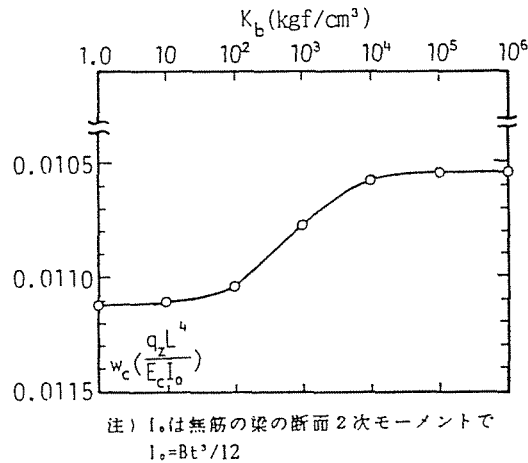


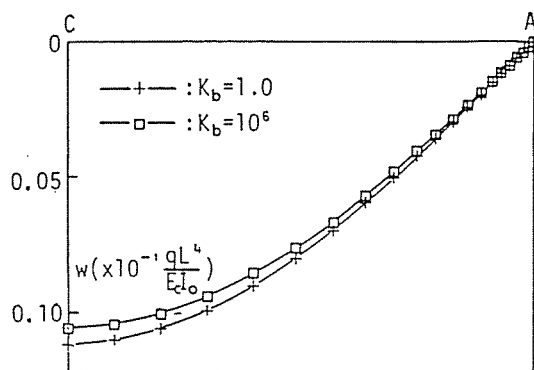
図3-6 梁の中央点撓み w_c に及ぼす付着係数の影響

なお、図中のプロット位置をみると明らかなように、この計算例では、支持端近傍で急変する付着応力分布の詳細を知るため、梁の半部材長を支持端に近づくにつれて要素長が短くなる計20個の不等間隔要素に分割して解析を行った。

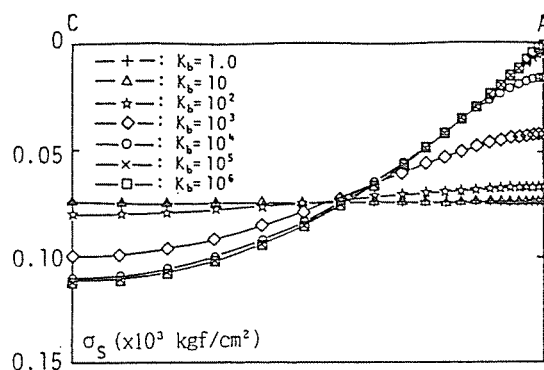
図3-6は、梁の中央点の鉛直変位 w_c が付着係数 K_b の値に対応して変化する様相を図示したものである。この図は明らかに、「 K_b の値が10以下と 10^4 (kgf/cm²) 以上の領域では、付着性状はほぼ両極の極限状態に近い」ことを示している。ここにおける両極とは、完全アンボンド状態に対応する「すべり自由」と、完全付着に対応する「すべり固定」の2つの極限状態を意味している。

既往の実験結果を通観すると、通常の異形鉄筋では、付着係数 K_b が 10^4 kg/cm² 以上の値となることは確かなようであるから^{18)~22)}、この結果は、従来暗黙裡に使用されてきた線形弾性域にある R C 梁に対する“完全付着の仮定”に理論的な根拠を与えるものである。

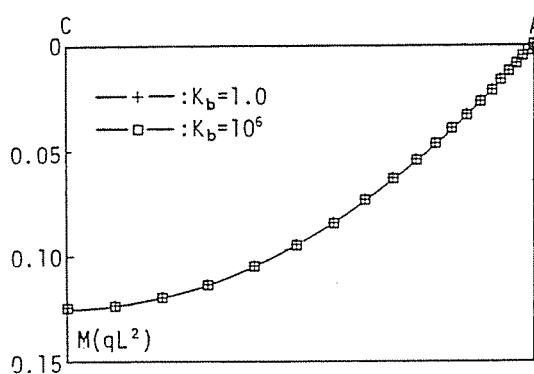
図3-7の(a)~(c)には、ここで設定した付着係数のうちの、両極の値を例にとり、材軸に沿う鉛直変位曲線、曲げモーメント、および剪断力の分布曲線を、それぞれ無次元化して例示した。図(a)の結果は、「アンボンドと完全付着にほぼ対応する両極の状態において、付着係数の違いが梁の鉛直変位に及ぼす影響量は、この例では部材中央点で、梁の全



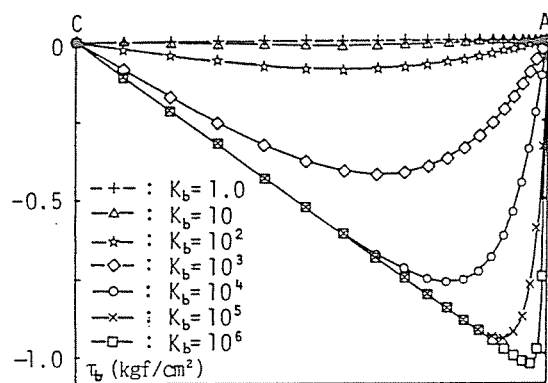
(a) 鉛直変位曲線の比較



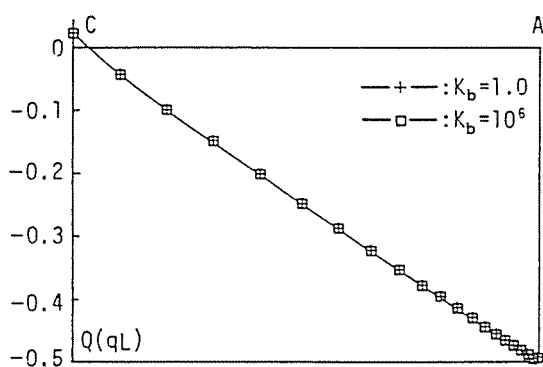
(d) 鉄筋応力曲線の推移



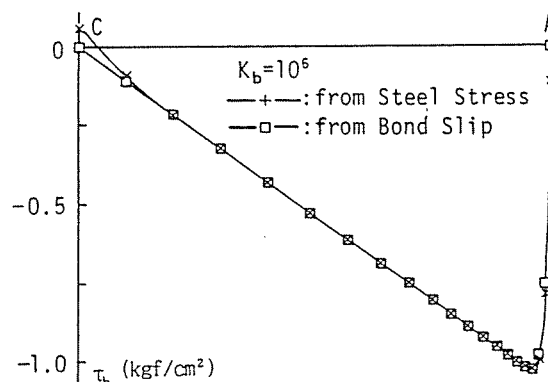
(b) 曲げモーメント曲線の比較



(e) 付着応力曲線の推移



(c) 剪断力曲線の比較

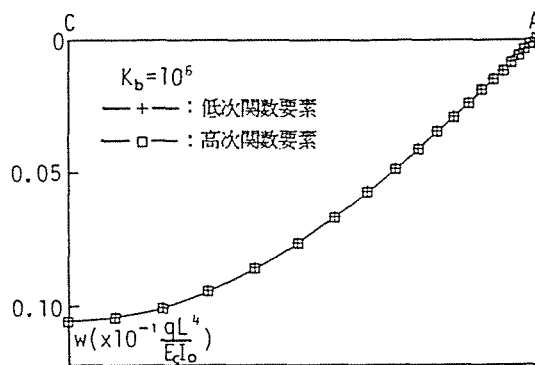


(f) 付着応力曲線の比較

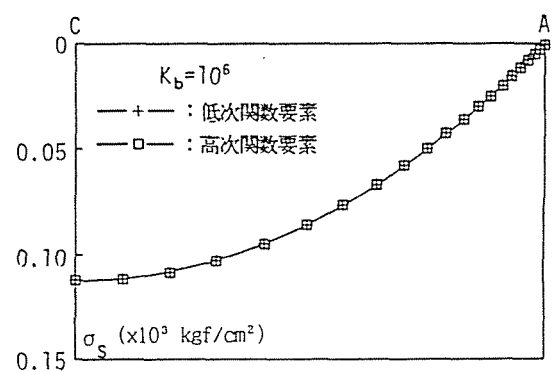
図3-7 部材端で鉄筋が完全定着された等分布荷重を受けるRC梁の高次関数要素による解析結果

変位量のほぼ1割弱に留まっており、それほど大きなものではない」ことを示している。また、図(b)と(c)からは、当然のことではあるが、「付着係数の値は、梁の曲げモーメントと剪断力には何らの影響も及ぼさないこと」を読み取ることができる。一方、同図の(d)、(e)には、材軸に沿う鉄筋応力分布曲線と付着応力分布曲線が K_b の変化とともに、如何よ

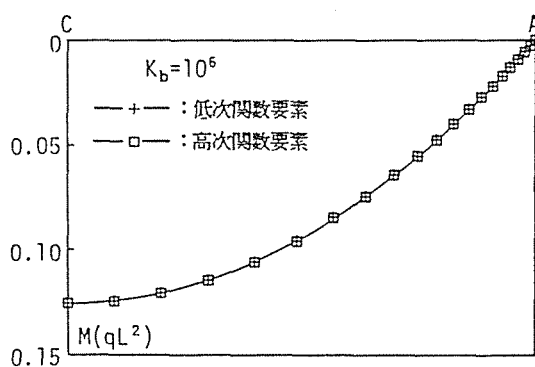
うに推移するかを調べるため、7段階すべての K_b の値に対する解析結果を一覧して掲げたが、この図の結果は、先の図3-6での考察の妥当性を明瞭に裏づけている。また、同図(e)の付着応力分布曲線を見ると明らかなように、 K_b の値が大きくなり完全付着の状態に近づくにつれて、その分布形状は剪断力分布に近似して行くことを示している。このような結果は、既往の完全付着の梁理論に基づく「曲げ付着に関する慣用式¹⁷⁾」が既に指し示している事実、即ち、「付着応力分布は剪断力分布と相似形となる」と言う事実、矛盾なく合致するものである。なお、図(e)に示した付着応力 τ_b は、前述の(3-14)式により鉄筋のすべり変位から求めたものであるが、この高次要素では(3-23)式を用いて鉄筋応力 σ_s からも得ることが可能である。また、この両者の差は、前掲の基礎微分方程式の解が得られていない現在、近似解である本有限要素解の精度を類推する際の一つの目安ともなり得るものと考えられるので、同図3-7の(f)には、参考のため $K_b=10^6 \text{ kgf/cm}^2$ の場合を例にとり、この2種の付着応力値を対比して示した。両者の値は、良好な近似度をみせており、本解析



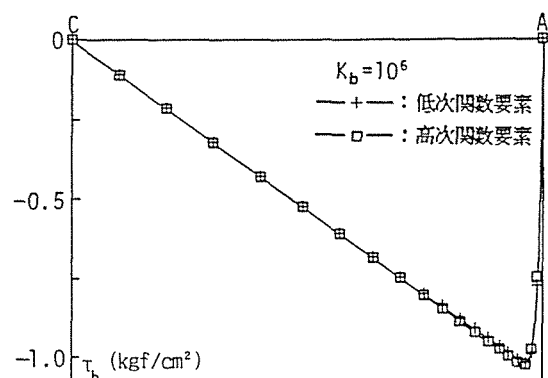
(a) 鉛直変位曲線の比較



(c) 鉄筋応力曲線の比較



(b) 曲げモーメント曲線の比較



(d) 付着応力曲線の比較

図3-8 部材端で鉄筋が完全定着された等分布荷重を受けるRC梁の
低次関数要素と高次関数要素による解の比較

値が満足し得る十分な精度を有していることを示唆している。

以上は高次関数要素による計算結果であるが、コンクリートの亀裂や補強筋の付着破壊等を伴う材料非線形領域に置けるRC梁の曲げのような、より複雑な問題をも取り扱う場合には、この高次関数要素よりも先に展開した低次関数要素の方が、定式化の手順や計算時間などの点で遥かに有利となることは明らかである。

図3-8の(a)~(d)には、 $K_b=10^6$ の場合を例にとり、低次関数要素による、鉛直変位、曲げモーメント、鉄筋応力、及び付着応力の各分布曲線を前掲の高次関数要素による解と比

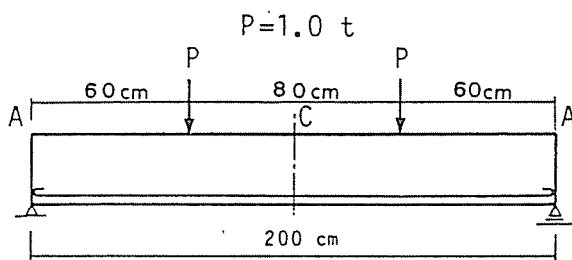
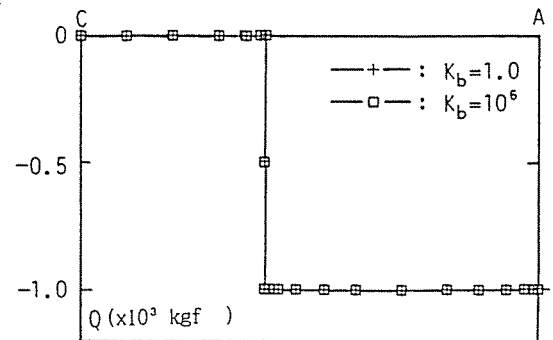
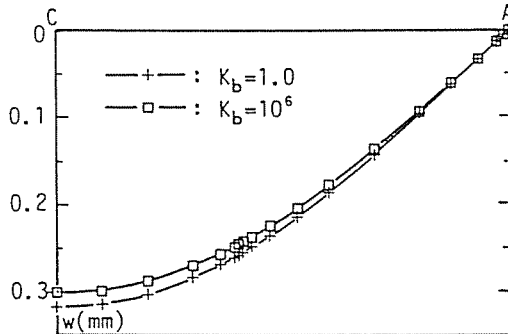


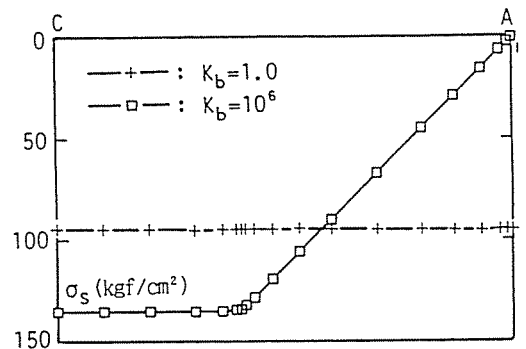
図3-9 2点集中荷重を受けるRC梁
(鉄筋は部材両端で完全定着)



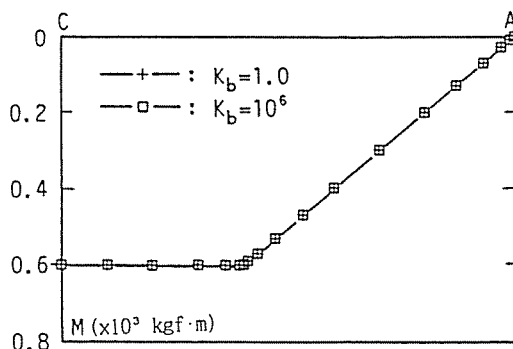
(c) 剪断力曲線



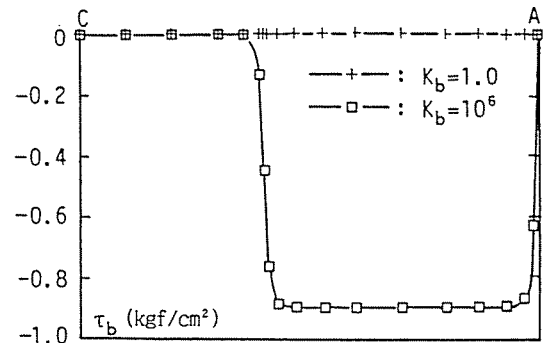
(a) 鉛直変位曲線



(d) 鉄筋応力曲線



(b) 曲げモーメント曲線



(e) 付着応力曲線

図3-10 部材端で鉄筋が完全定着されたRC梁が2点集中荷重を受ける場合の高次関数要素による解析結果

較して掲げた。これらの各図は、両解析値が極めてよく一致することを示しており、低次関数要素でも十分な精度が得られることを示している。

(2) 2点集中荷重時の解析結果

部材両端で鉄筋が完全に定着された R C 単純梁の今一つの計算例として、図3-9に示すように、曲げモーメントが一定となる区間をもつ「2点集中荷重を受ける場合」を取り上げてみる。

図3-10の(a)～(d)には、先の計算例において“完全アンボンド状態”と“完全付着状態”に対応することが示された2種の K_b の値、即ち、 $K_b=1.0$ と 10^6 のときの、高次関数要素による解析結果をそれぞれ対比して掲げた。これらの解析結果からも、「 $K_b=1.0$ では R C 梁の“完全アンボンドの状態”を、また、 $K_b=10^6$ では、鉄筋の付着応力分布が剪断力にほぼ相似の分布形を呈しており、殆ど“完全付着に近い状態”を具現し得ること」を見て取ることができる。

3.4.2 部材両端で鉄筋のすべりが自由な R C 単純梁

前項3.4.1の図3-4で既に見たように通常の R C 単純梁では、「鉄筋は、部材端部においてフック等を設けて定着する」のが普通であるが、ここでは、等分布荷重を受ける先の図3-4と同一の梁が、図3-11に示すように、部材両端において鉄筋を定着せずにそのまま埋め込んだ場合、「材端部に生じる鉄筋のすべりが、梁全体の力学性状に如何ような影響を及ぼすか」を、高次関数要素を用いて調べてみる。

図3-12は、前項3.4.1の(1)の計算例と同様、付着係数 K_b のみを7段階($K_b=1.0, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6 \text{ kgf/cm}^3$)に変化させた場合の解析結果を掲げたものである。図(a)～(c)には、 $K_b=1.0$ と 10^6 の両極の付着係数値に対する、材軸に沿う鉛直変位曲線、曲げモーメント、および剪断力の分布曲線をそれぞれ無次元化して、また、同図(d)と(e)には、それぞれ7段階全ての付着係数値に対応する鉄筋応力分布と付着応力分布曲線を図示して掲げた。これらの図(a)～(e)の内の $K_b=10^6$ の各解析曲線を、先の図3-7の(a)～(e)の対応する曲線と対比し相互に比較すると、両者はほぼ完全に対応しており、「 $K_b=10^6$ では、部材両端で鉄筋を定着せずに“すべり自由”の状態においても、弾性的には完全定着の場合と殆ど同じ効果が得られる」ことが判る。また、同図中の付着応力分布に関する図(e)の結果は、「 K_b の値が10以下ではほぼアンボンド状態に、一方、 $K_b=10^4$ 以上では殆ど完全付着状態に近くなる」ことを再度明示している。更にまた、これらのうちの図(a)を今一度みても

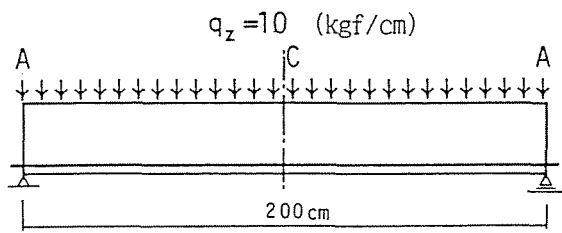
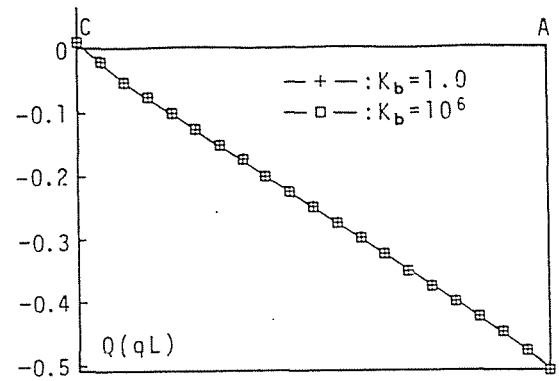
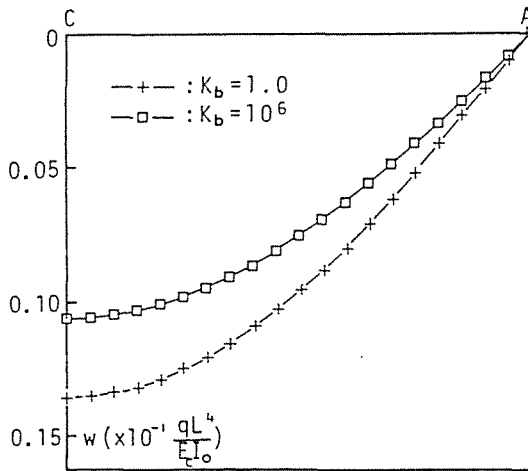


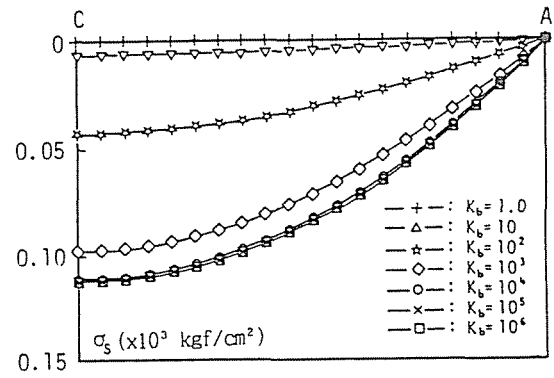
図3-11 部材両端で鉄筋のすべりが自由な R C 単純梁



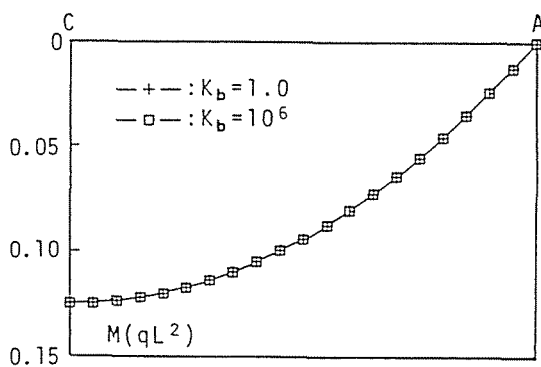
(c) 剪断力曲線の比較



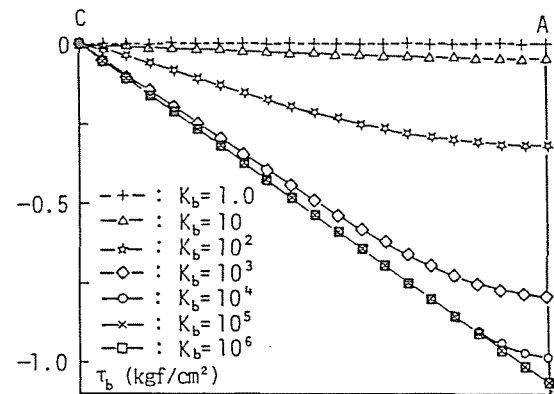
(a) 鉛直変位曲線の比較



(d) 鉄筋応力曲線の比較



(b) 曲げモーメント曲線の比較



(e) 付着応力曲線の比較

図3-12 部材端で鉄筋のすべりが自由な等分布荷重を受ける R C 梁の高次関数要素による解析結果

と、 $K_b=1.0$ と 10^6 の変位曲線の差は、鉄筋を材端で完全に定着した場合の先の図3-7の(a)の場合の両者の差より遥かに大きくなっている。この理由は、先の図3-7の(a)の計算例に

おける $K_b=1.0$ の解は、ほぼ完全アンボンド状態の“有筋梁の剛性”を表わしているのに対して、図3-12のこの計算例における $K_b=1.0$ の解は、理論的には、鉄筋位置に鉄筋径に等しい径を有する棒状の空隙を、配筋本数に等しい数だけもつ“無筋梁の剛性($E_s=0, A_s \neq 0$)”を表現する」はずのものだからである。従って、この場合($E_c=0, A_s \neq 0$)の $K_b=1.0$ の梁の剛性は、空隙を持たない“単なる無筋梁の剛性($A_s=0$)”より小さくなり、結果として変形は逆にこれよりも大きくなければならないことになる。

図3-13は、梁の中央点の鉛直変位 w_c に着目し、 w_c が付着係数 K_b の値の変化と共に如何ように推移するかを調べたもので、この図の縦軸は、比較のため前述の図3-6のそれと同一スケールの目盛りを用いて表記されている。図中には参考のため、“空隙を持たない単なる無筋梁”と“鉄筋断面積

に等しい空隙をもつ無筋梁”の場合の w_c を各々一点鎖線と破線で、また、鉄筋を材端位置で完全に定着した前掲の図3-6中の $K_b=10^6$ に対応する w_c の値をも点線で、それぞれ併記して掲げた。この結果を一覧すると知り得るように、この一つの図中には、ここで述べた考察の正当性の全てが凝縮されて明示されている。

3. 5 本章のまとめ

第3章では、2章で展開した「鉄筋とコンクリート間の付着すべり現象」を取り扱うための基本的な考え方を、曲げを受けるRC梁の問題に拡張し、適用することを試みた。即ち、本章では、補強筋に付着すべりを許し、コンクリート部分には平面保持の仮定を用いた場合のRC梁の曲げについて論じた。

本章の内容を要約し列挙すると以下のとおりである。

(1) 理論展開に当たっての基本仮定事項を列挙し、軸力と曲げを受けるRC梁部材のため

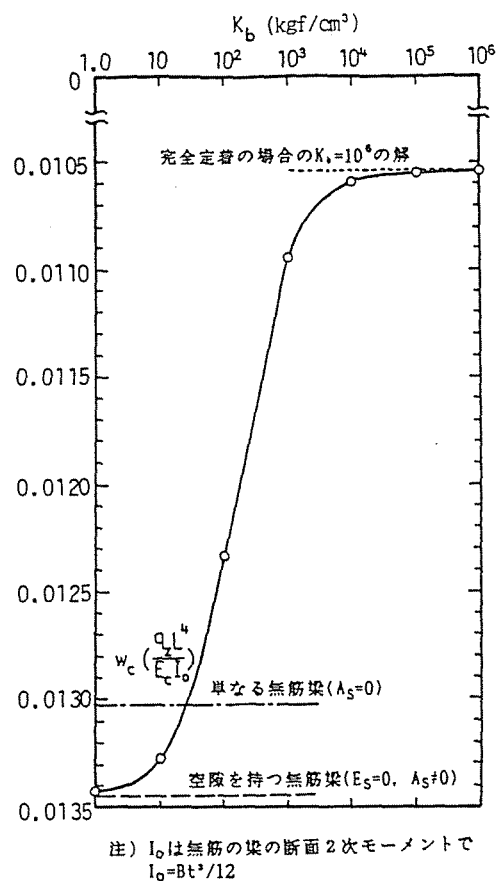


図3-13 梁の中央点撓み w_c に及ぼす付着係数の影響

の全ポテンシャル・エネルギー汎関数を導いた。

(2) 前項で得たエネルギー汎関数を用いて、従来明らかにされていなかった“補強筋の付着すべりを厳密に考慮した場合のRC梁”の基礎微分方程式を導いた。

(3) この理論に基づき、高次と低次の2種の変位関数要素を用いて有限要素法への定式化を行った。

(4) 前項で展開した2種の有限要素解析法を用いて、単配筋を有する数種のモデル単純支持RC梁の数値計算例を掲げ、次のような結論を得た。

即ち、高次関数要素による解析結果から、① 付着係数 K_b の値は、内力として計算される梁の曲げモーメントと剪断力には全く影響を与えないが、鉛直変位と、鉄筋の応力および付着応力の各分布形状に大きな影響を及ぼし、 K_b が 10kgf/cm^3 より小さくなると実質的には付着なしの“アンボンド状態”に対応し、また、 K_b の値が 10^4kgf/cm^3 以上ではほぼ付着すべり固定の“完全付着状態”と見做すことができること、従って、② 梁の補強筋に通常の異形鉄筋(K_b が 10^4kgf/cm^3 より大きな値をとることは実験的に周知の事実である)を用いる限り、弾性領域にあるRC梁に対する従来の“完全付着の仮定”は十分妥当なものであること、また、高次関数要素と低次関数要素による解との比較から、③ 低次関数要素を用いても十分な精度が得られること、などを明らかにした。

第3章の参考文献

- 1) 鬼沢浩司、林 静雄、黒正清治：付着剛性を考慮した鉄筋コンクリート部材の変形解析
日本建築学会大会学術講演会梗概集、1979, 10.
- 2) 小坂義雄、谷川恭雄、山田和夫：エンドクロニック理論による鉄筋コンクリートの非線形解析、第1, 2報、日本建築学会論文報告集、第326, 330号, 1983, 4, 8.
- 3) 児島孝之、阪 正行、前岡隆顕：鋼繊維補強コンクリート使用RC部材の曲げ性状に関する基礎的研究、コンクリート工学年次講演論文集、第3巻, 1981.
- 4) 多田利正、武田寿一：鉄筋コンクリート部材における付着劣化過程の解析的研究、大林組技術研究所報、No. 22, 1981.
- 5) 多田利正、武田寿一：鉄筋コンクリート部材における付着劣化過程の解析的研究、その1, その2, 日本建築学会構造系論文報告集、第351, 360号, 1985, 5, 1986, 2.
- 6) 市之瀬敏勝：付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート骨組の非線形解析法、日本建築学会論文報告集、第327, 328号, 1983, 5, 6.
- 7) 松浦 誠、山本春行：鉄筋コンクリートはり・柱部材の非線形及び時間依存性挙動、日本建築学会論文報告集、第322号, 1982, 12.
- 8) 坂田弘安、和田 章、林 静雄、黒正清治：接合部パネルのせん断変形、鉄筋の付着すべりを考慮した分割要素法による鉄筋コンクリート骨組弾塑性解析法、日本建築学会構造系論文報告集、第386号, 1988, 4.
- 9) 坂田弘安、和田 章、林 静雄、黒正清治：曲げ降伏するはりの軸方向伸びを考慮した鉄筋コンクリート骨組みの弾塑性挙動に関する解析研究、日本建築学会構造系論文報告集、第396号, 1989, 2.
- 10) Sato, R. and Aoyagi, Y. : Studies on Deformation and Crack of Reinforced Concrete Flexural Members under Low Temperature, Proc. of JSCE, No. 329, 1983, 2.
- 11) Sato, R., Aoyagi, Y. and Kanazu, T. : Experimental and Theoretical Studies on the Behaviours of Flexurally Restrained Reinforced Concrete Members Subjected to Temperature Gradient, Proc. of JSCE, No. 348, 1984, 8.
- 12) 上田正生、土橋由造：補強筋の滑りを考慮したRC梁部材の曲げについて、土木学会北海道支部論文報告集、第41号、1985, 2.
- 13) 上田正生、土橋由造：補強筋の滑りを考慮したRC梁部材の材料非線形解析、土木学会北海道支部論文報告集、第42号、1986, 2.
- 14) 上田正生、土橋由造：補強筋の滑りを考慮したRC梁部材の曲げ変形解析、土木学会文集、第372号/V-5, 1986, 8.
- 15) Washizu, K : Variational Methods in Elasticity & Plasticity, Pergamon Press, 1980.
- 16) Dym, C. L. and Shames, I. H. (砂川 恵 訳)：材料力学と変分法, ブレイン図書出版, 1977.
- 17) 小坂義夫、森田司郎：鉄筋コンクリート構造、pp. 192~195, 丸善株式会社, 1975.

- 18) 六車 熙、森田司郎、富田孝次郎：鋼とコンクリートの付着に関する基礎的研究(Ⅰ. 付着応力分布について)－(Ⅰ)、日本建築学会論文報告集、第131号、1967,1.
- 19) 六車 熙、森田司郎、富田孝次郎：鋼とコンクリートの付着に関する基礎的研究(Ⅰ. 付着応力分布について)－(Ⅱ)、日本建築学会論文報告集、第132号、1967,2.
- 20) 六車 熙、森田司郎：鋼とコンクリートの付着に関する基礎的研究(Ⅱ. 鉄筋コンクリート引っ張り部材の変形について)、日本建築学会論文報告集、第134号、1967,4.
- 21) 六車 熙、森田司郎：鋼とコンクリートの付着に関する基礎的研究(Ⅲ. 引抜試験について)、日本建築学会論文報告集、第139号、1967,9.
- 22) 中島 亨、山本康弘：鉄筋コンクリートの付着応力度の履歴とひびわれの復元性に関する研究、土木学会論文報告集、No.219、1973,11.

第4章 補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の解析

4. 1 はじめに

鉄筋コンクリート（RC）床板において、“補強筋の付着すべり作用”が最も重要な問題となり得るのは、恐らく、床板の拘束辺に生じた引張り亀裂近傍における“鉄筋のすべり出し現象”としてであろう。このことは、「RC床板の部材丈（板厚）が梁や柱のそれと比較すると一段と小さく、結果として“亀裂位置での鉄筋のすべり出し量”が部材全体の変形に及ぼす影響もまた、梁などと比べて遥かに大きくなるであろう」ことを想起すれば、容易に了解し得る事柄である。また事実、RC建築構造物においては、周辺が梁で支持された通常の床スラブやベランダ用の片持ちスラブなどに、拘束端亀裂位置での“鉄筋のすべり出し”が、その主要な原因の一つと目される損傷事故の事例^{1)~6)}が数多く報告されており、RC床板における“補強筋の付着すべり作用”の重要性は、既に広く認識されている事柄のように思われる。

既に3章の序論においても述べたように、RC梁部材については、補強筋のすべりを考慮した場合の解析手法が幾つか報告されているが、RC床板に関しては、拘束辺に生じた引張り亀裂近傍における“拘束梁内部からの鉄筋のすべり出し”のみを考慮する近似的な手法が二、三^{7)~9)}報告されているに過ぎず、床板内部における補強筋のすべり作用をも考慮に入れた“より詳細な研究”は、著者の知る限りでは、殆ど見当たらないのが現状のように思われる。このように、RC床板に関するこの種の研究が、梁の場合と比較して遥かに遅れている原因は、梁の解析などで多用されているボンドリンクを用いた有限要素法を適用するには、必然的に膨大な要素分割を必要とする3次元解析を行わなければならないことが挙げられる。したがって、RC床板における“補強筋の付着すべり”を理論的に取り扱うには、既往の板理論に付着すべりの効果を組み入れることが特に重要となる。

本章では、以上のような研究の現状に鑑み、2章において展開した「鉄筋とコンクリート間の付着すべり問題」のための基本手法を、補強筋に付着すべりを許し、コンクリート部分には法線保持を仮定した場合の“RC床板の曲げの問題”に拡張し適用することを試みる。

即ち、まず、全ポテンシャル・エネルギー原理を用いて、既往の弾性板理論に補強筋の付着すべりを考慮に入れた、“微小変形理論”および“有限変形理論”による場合のRC

床板の支配微分方程式^{10)~19)}を導いている。次いで、これらの両理論に基づき、それぞれ場合について有限要素法への定式化を計り、さらに、二、三のモデルRC床板の数値計算例を掲げて、鉄筋の付着付着すべりが弾性域にあるRC床板の力学性状に及ぼす影響を調べ、若干の検討・考察を行うこととする。

4. 2 鉄筋コンクリート床板のための理論式の展開

4.2.1 微小変形理論による定式化^{10)~14)}

(1) 基本仮定事項

理論展開を行うに当たって用いた基本仮定事項を以下に列挙する。

1) RC床板には、面内荷重と面外荷重による曲げが作用し、微小変形の仮定が適用できるものとする。

2) コンクリートは平面応力場にある等方弾性体で、なおかつ、コンクリート断面には法線保持の仮定が成立する。

3) 鉄筋は直交する x, y 方向に、それぞれ k および m 層ずつ配筋されており、個々の鉄筋層は、平面的には平均化されているが、板厚方向には大きさを持たず、配筋位置に集中して存在するものとし、配筋方向の軸方向力のみを負担する線材層として取り扱う。

4) x, y 各方向の鉄筋とコンクリートの間には、配筋方向の付着すべりが生じ得るものとし、ある位置における鉄筋のすべり変位は、法線が保持されるコンクリート部分からの相対変位で表示でき、また、付着応力とすべり変位の間には、線形関係が成立するものとする。

(2) 変位場、および歪と応力

(a) 変位場

図4-1の(a)は実際のRC床板の断面を、また(b)は理想化した断面と記号を図示したものである。前項の仮定に基づき、この問題を定式化するために設定しなければならない変位は、図4-2に示すように、板中央面の x, y 方向の変位 u, v と、 z 方向の変位 w 、ならびに板断面内の x, y 方向にそれぞれ k および m 層配筋されている全鉄筋層のすべり変位 $S_{x1}, S_{x2}, \dots, S_{xk}, S_{y1}, S_{y2}, \dots, S_{yi}, \dots, S_{ym}$ の計 $(3+k+m)$ 個からなっている。

(b) コンクリートの歪と応力

板中央面から z だけ離れた任意点 (x, y, z) のコンクリートの歪 $\{\epsilon_c\}$ は、次式で表示さ

れる。

$$\{z \varepsilon_c\} = \{z \varepsilon_{cx} \quad z \varepsilon_{cy} \quad z \gamma_{cxy}\}^T = \{\varepsilon_o\} + z\{\phi\} \quad (4-1)$$

ここに、 $\{\varepsilon_o\}$ と $\{\phi\}$ は、それぞれ板中央面の面内歪と、梁の場合の曲率に相当する一般化歪（以下では単に板の曲率と呼称する）であり、下式で表わされる。

$$\{\varepsilon_o\} = \{\varepsilon_{ox} \quad \varepsilon_{oy} \quad \gamma_{oxy}\}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^T \quad (4-2)$$

$$\{\phi\} = \{\phi_x \quad \phi_y \quad \phi_{xy}\}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (4-3)$$

同位置のコンクリートの応力 $\{z \sigma_c\}$ は、次式で与えられる。

$$\{z \sigma_c\} = \{z \sigma_{cx} \quad z \sigma_{cy} \quad z \tau_{cxy}\}^T = [D_c] \{z \varepsilon_c\} \quad (4-4)$$

ここに、 $[D_c]$ はコンクリートの応力-歪マトリックスで、

$$[D_c] = \frac{E_c}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4-5)$$

但し、 E_c ：コンクリートのヤング係数、 ν ：コンクリートのポアソン比

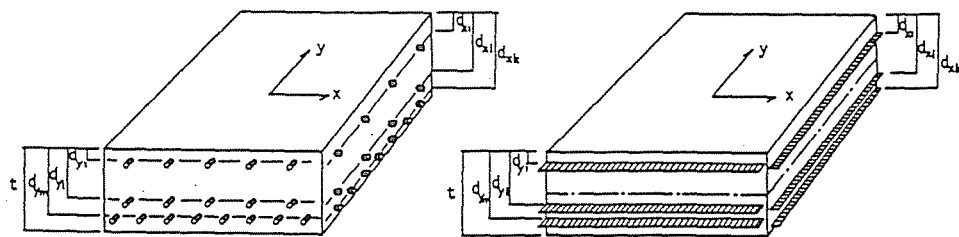
(c) 鉄筋層の歪と応力

鉄筋層の歪と応力については、板断面内の x, y 方向にそれぞれ k および m 個存在する鉄筋の全層を各個別に取り扱う必要はなく、両方向の代表的な任意の i 層について述べれば十分である。

[x 方向の任意の鉄筋層 i]：この層の鉄筋の配筋方向の歪 ε_{sxi} は次式で表示することができる。

$$\varepsilon_{sxi} = \varepsilon_{ox} + h_{xi} \phi_x + \varepsilon_{ssxi} \quad (4-6)$$

但し、 h_{xi} ： x 方向の鉄筋層 i の板中央面からの距離で図4-1を参照すると $h_{xi} = d_{xi} - t/2$ 。
また、(4-6)式中の ε_{ssxi} は、この鉄筋層の x 方向のすべり率であり、次式で表わされる。



(a) 実際断面

(b) 理想化断面

図4-1 R C床板の断面記号

$$\epsilon_{sxi} = \frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \quad (4-7)$$

従って、この層の鉄筋のx方向の分担応力 σ_{sxi} は、

$$\sigma_{sxi} = E_{sxi} \epsilon_{sxi} \quad (4-8)$$

但し、 E_{sxi} : x方向のi層の鉄筋のヤング係数

[y方向の任意の鉄筋層i] : y方向の任意の鉄筋層iのための(4-6)～(4-8)式に対応する式は、同様にして求められ次のようになる。

$$\epsilon_{sxi} = \epsilon_{oy} + h_{yi} \phi_y + \epsilon_{ssxi} \quad (4-9)$$

$$\epsilon_{ssxi} = \frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \quad (4-10)$$

$$\sigma_{sxi} = E_{sxi} \epsilon_{sxi} \quad (4-11)$$

但し、 h_{yi} : y方向の鉄筋層iの板中央面からの距離で図4-1を参照すると $h_{yi} = d_{yi} - t/2$ 。

ϵ_{ssxi} : y方向の鉄筋層iのすべり率、 E_{sxi} : y方向の鉄筋層iのヤング係数。

(d) 鉄筋層のすべり変位と付着応力

前項の仮定4)より、xおよびy方向の任意のi層の、ある位置における鉄筋とコンクリートの付着境界に生ずる付着応力と、すべり変位の関係は、それぞれ以下のように定義される。

[x方向の任意の鉄筋層i] :

$$\tau_{bxi} = K_{bxi} S_{xi} \quad (4-12)$$

但し、 τ_{bxi} : x方向のi層の鉄筋の付着境界に生ずる付着応力、 K_{bxi} : x方向のi層の鉄筋の付着係数

[y方向の任意の鉄筋層i] :

$$\tau_{byi} = K_{byi} S_{yi} \quad (4-13)$$

但し、 τ_{byi} : y方向のi層の鉄筋の付着境界に生ずる付着応力、 K_{byi} : y方向のi層の鉄筋の付着係数

(3) 膜力とモーメント

床板断面の膜力 $\{N_x \ N_y \ N_{xy}\}^T$ とモーメント $\{M_x \ M_y \ M_{xy}\}^T$ は、それぞれ次のように表示することができる。

$$N_x = \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{cx} dz + \sum_k A_{sxi} (\sigma_{sxi} - h_{xi} \sigma_{cx})$$

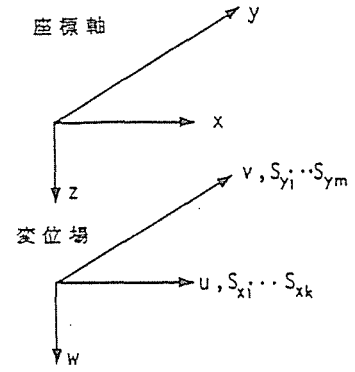


図4-2 座標軸と変位場

$$N_y = \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{cy} dz + \sum^m A_{syi} (\sigma_{syi} - h_{xi} \sigma_{cy}) \right\} \quad (4-14)$$

$$N_{xy} = \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{cxy} dz \right\}$$

$$M_x = \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{cx} z dz + \sum^k A_{sxi} h_{xi} (\sigma_{sxi} - h_{xi} \sigma_{cx}) \right\}$$

$$M_y = \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{cy} z dz + \sum^m A_{syi} h_{yi} (\sigma_{syi} - h_{xi} \sigma_{cy}) \right\} \quad (4-15)$$

$$M_{xy} = \left\{ \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{cxy} z dz \right\}$$

但し、 A_{sxi} 、 A_{syi} ：床板単位面積当りの x および y 方向の任意の i 層の鉄筋断面積。
上式中の $h_{xi} \sigma_{cx}$ と $h_{yi} \sigma_{cy}$ は、 x 及び y 方向の任意の i 層の鉄筋と同じ位置における鉄筋に対応する方向のコンクリートの応力で、鉄筋によるコンクリート断面の欠損を考慮するために必要となるものである。

上の(4-14)と(4-15)式に(4-1)～(4-4)式、(4-6)～(4-11)式の関係代入して整理すると、 $\{N\}$ と $\{M\}$ は変位で表示され、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \left(\frac{E_c}{1-\nu^2} + \sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} \right) \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{E_c t \nu}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial y} - \left(\sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &\quad + \sum^k A_{sxi} E_{sxi} \frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \\ N_y &= \left(\frac{E_c}{1-\nu^2} + \sum^m A_{syi}^* E_{syi} \right) \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{E_c t \nu}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial x} - \left(\sum^m A_{syi}^* E_{syi} h_{yi} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ &\quad + \sum^m A_{syi} E_{syi} \frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \\ N_{xy} &= \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-16)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \left(\sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi} \right) \frac{\partial u}{\partial x} - \left[\frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &\quad - \frac{E_c t^3 \nu}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sum^k A_{sxi} E_{sxi} h_{xi} \frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \\ M_y &= \left(\sum^m A_{syi}^* E_{syi} h_{yi} \right) \frac{\partial v}{\partial y} - \left[\frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum^m A_{syi}^* E_{syi} h_{yi} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ &\quad - \frac{E_c t^3 \nu}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sum^m A_{syi} E_{syi} h_{yi} \frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \\ M_{xy} &= - \frac{E_c t^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4-17)$$

但し、 $A_{sxi}^* = A_{sxi} (1 - E_c / E_{sxi})$ 、 $A_{syi}^* = A_{syi} (1 - E_c / E_{syi})$

(4) 全ポテンシャル・エネルギー汎関数

補強筋の付着すべりを考慮した場合のRC床板の全ポテンシャル・エネルギー Π もまた次のように表示される。

$$\Pi = U - V = (U_{c,n} + U_{s,t} + U_{b,s}) - V \quad (4-18)$$

上式中のコンクリート部分と全鉄筋層に関する内部エネルギー $U_{c,n}$ と $U_{s,t}$ は、前項(2)で求めたコンクリートと鉄筋層の歪を用いて、それぞれ下式のように表わすことができる。

$$U_{c,n} = \frac{1}{2} \iint_R \int_{-t/2}^{t/2} \{ \varepsilon_c \}^T [D_c] \{ \varepsilon_c \} dz \, dx \, dy - \frac{1}{2} \iint_R \left(\sum_k A_{s,x,i} E_{s,x,i} \varepsilon_{c,x}^2 + \sum_m A_{s,y,i} E_{s,y,i} \varepsilon_{c,y}^2 \right) dx \, dy \quad (4-19)$$

$$U_{s,t} = \frac{1}{2} \iint_R \left(\sum_k A_{s,x,i} E_{s,x,i} \varepsilon_{s,x,i}^2 + \sum_m A_{s,y,i} E_{s,y,i} \varepsilon_{s,y,i}^2 \right) dx \, dy \quad (4-20)$$

また、全鉄筋層の付着すべりに関する内部エネルギー $U_{b,s}$ は、(4-12)、(4-13)式の関係を用いると容易に求められ下式となる。

$$U_{b,s} = \frac{1}{2} \iint_R \left[\sum_k \Omega_{x,i} K_{b,x,i} S_{x,i}^2 + \sum_m \Omega_{y,i} K_{b,y,i} S_{y,i}^2 \right] dx \, dy \quad (4-21)$$

但し、 $\Omega_{x,i}$ 、 $\Omega_{y,i}$ ：x及びy方向のi層の鉄筋の、床板単位面積当りの付着表面積
次に、負荷ポテンシャル・エネルギー V を考える。当然のことながら、 V は載荷条件によって異なったものとなるが、ここではz方向の分布荷重 q_z のほかに、板の境界に沿って面内外荷重が作用する場合を考える。即ち、図4-3の C_1 で表わされる板境界の側面に、図4-4に

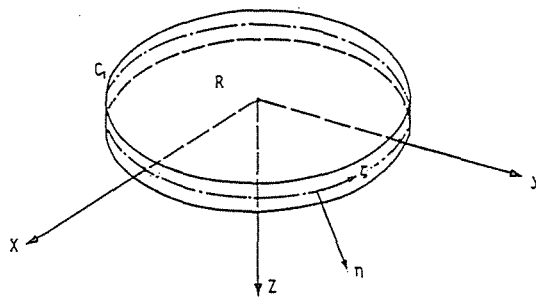


図4-3 板の境界と座標系

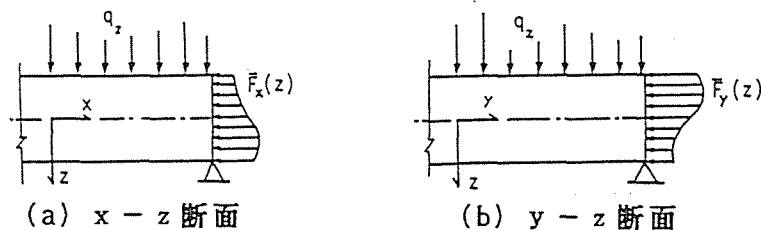


図4-4 境界に作用する分布外荷重 $\bar{F}_x$ と $\bar{F}_y$

図4-4に示すような単位面積当りの量で定義される x および y 方向の分布荷重 $\bar{F}_x$ および $\bar{F}_y$ が作用しているものとする、このときの負荷ポテンシャル・エネルギー V は、下式で表される。

$$V = \iint_R q_z w \, dx dy + \int_{C_1} [\bar{N}_{x\eta} u + \bar{N}_{y\eta} v + \bar{M}_{x\eta} \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{M}_{y\eta} \frac{\partial w}{\partial x}] d\zeta \quad (4-22)$$

但し、

$$\begin{aligned} \bar{N}_{x\eta} &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{F}_x \, dz, & \bar{N}_{y\eta} &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{F}_y \, dz \\ \bar{M}_{x\eta} &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{F}_x z \, dz, & \bar{M}_{y\eta} &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{F}_y z \, dz \end{aligned}$$

以上で得た(4-18)～(4-22)式と前項(2)～(3)で記述した諸式の間係を用いると、全ポテンシャルエネルギー汎関数は、最終的に次のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \iint_R & \left[\left\{ \frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} \right\} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2\nu E_c t}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \right. \\ & + \left\{ \frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum^m A_{s yi}^* E_{s yi} \right\} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ & + \left\{ \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum^k A_{s xi}^* E_{s xi} h_{xi}^2 \right\} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{E_c \nu t^3}{6(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ & + \left\{ \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum^m A_{s yi}^* E_{s yi} h_{yi}^2 \right\} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{E_c t^3}{6(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \\ & + \sum^k \left\{ A_{s xi} E_{s xi} \left(\frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \right)^2 + \Omega_{xi} K_{bxi} S_{xi}^2 \right\} \\ & + \sum^m \left\{ A_{s yi} E_{s yi} \left(\frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \right)^2 + \Omega_{yi} K_{byi} S_{yi}^2 \right\} \\ & - 2 \left\{ \sum^k A_{s xi} E_{s xi} h_{xi} \right\} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - 2 \left\{ \sum^m A_{s yi} E_{s yi} h_{yi} \right\} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ & - 2 \left\{ \sum^k A_{s xi} E_{s xi} h_{xi} \left(\frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \right) \right\} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) - 2 \left\{ \sum^m A_{s yi} E_{s yi} h_{yi} \left(\frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \right) \right\} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \\ & + 2 \left\{ \sum^k A_{s xi} E_{s xi} \left(\frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \right) \right\} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + 2 \left\{ \sum^m A_{s yi} E_{s yi} \left(\frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \right) \right\} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \\ & \left. - 2q_z w \right] dx dy - \int_{C_1} [\bar{N}_{x\eta} u + \bar{N}_{y\eta} v + \bar{M}_{x\eta} \frac{\partial w}{\partial y} + \bar{M}_{y\eta} \frac{\partial w}{\partial x}] d\zeta \quad (4-23) \end{aligned}$$

(5) 支配微分方程式と平衡方程式

微小変形領域における、補強筋の付着すべりを考慮した場合のRC床板の曲げを支配する基礎微分方程式は、前項で得たエネルギー汎関数(4-23)式の変分をとり、極値化することによって求められる。すなわち、変位 u, v, w および x, y 両方向の代表的なすべり変位 S_{xi} と S_{yi} について、Euler-Lagrange方程式を構成すると、図4-3の境界曲線 C_1 で囲まれたすべての領域において成立する以下に示す一連の支配微分方程式を得る。

変位 u に関して：

$$\left(\frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum^k A_{sxi}^* E_{sxi}\right) \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{E_c t}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - \left(\sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \sum^k A_{sxi} E_{sxi} \frac{\partial^2 S_{xi}}{\partial x^2} = 0 \quad (4-24)$$

変位 v に関して：

$$\left(\frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum^m A_{syi}^* E_{syi}\right) \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{E_c t}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \left(\sum^m A_{syi}^* E_{syi} h_{yi}\right) \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \sum^m A_{syi} E_{syi} \frac{\partial^2 S_{yi}}{\partial y^2} = 0 \quad (4-25)$$

変位 w に関して：

$$-\left(\sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi}\right) \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - \left(\sum^m A_{syi}^* E_{syi} h_{yi}\right) \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} + \left\{\frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi}\right\} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + \left\{\frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum^m A_{syi}^* E_{syi} h_{yi}\right\} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} + \frac{E_c t^3}{6(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} - \sum^k A_{sxi} E_{sxi} h_{xi} \frac{\partial^3 S_{xi}}{\partial x^3} - \sum^m A_{syi} E_{syi} h_{yi} \frac{\partial^3 S_{yi}}{\partial y^3} = q_z \quad (4-26)$$

変位 S_{xi} について：

$$A_{sxi} E_{sxi} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h_{xi} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^2 S_{xi}}{\partial x^2}\right) = \Omega_{xi} K_{bxi} S_{xi} \quad (4-27)$$

但し、 $i=1 \sim k$

変位 S_{yi} について：

$$A_{syi} E_{syi} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - h_{yi} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 S_{yi}}{\partial y^2}\right) = \Omega_{yi} K_{byi} S_{yi} \quad (4-28)$$

但し、 $i=1 \sim m$

上式中の、最後の(4-27)と(4-28)の2式は、言うまでもなく、 x および y 方向の各鉄筋層ごとに成立するから、両式と相似な式は、それぞれの方向に配筋されている鉄筋層の数だけ存在することになる。

以上で得た(4-24)～(4-28)の各式は、前述の(4-8),(4-11)～(4-17)式の関係を用いて整理すると、以下に示すような一連の平衡方程式に変換することができ、各式がもつ力学的な意味はより明確となる。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (4-29)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (4-30)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -q_z \quad (4-31)$$

$$A_{sxi} E_{sxi} \frac{\partial \sigma_{sxi}}{\partial x} = \Omega_{xi} \tau_{bxi} \quad (4-32)$$

但し、 $i=1 \sim k$

$$A_{syi} E_{syi} \frac{\partial \sigma_{syi}}{\partial y} = \Omega_{yi} \tau_{byi} \quad (4-33)$$

但し、 $i=1 \sim m$

4.2.2 有限変形理論による定式化^{15)~19)}

前節4.2.1においては、微小変形の仮定が成立する領域におけるRC床板の、補強筋の付着すべりを考慮した場合の曲げについて論じたが、荷重の増加とともに変形が進み、鉛直変位が板厚に比して無視できなくなる程大きくなると、前節で使用した微小変形理論の仮定のみでは実際の現象を追跡することが困難となり、幾何学的非線形を考慮した有限変形理論に基づいて解析することが必要になる。

周知のように、通常のRC梁などでは幾何学的非線形が問題となることは殆どないが、梁に比べると部材丈（板厚）が一段と小さいRC床板にあつては、この幾何学的非線形が重要となる場合が生じ得る²⁰⁾。ここでは、有限変形理論に基づき、補強筋の付着すべりを考慮した場合のRC床板の曲げについて論ずることとする。

(1) 追加基本仮定事項

幾何学的非線形領域での理論展開の際に用いる基本仮定事項のうち、前節の4.2.1の(1)の微小変形領域において設定した事項と本質的に異なるのは、以下に掲げる1項目のみであり、他は微小変形領域で用いた仮定事項がそのまま有効である。

1) RC床板の鉛直変位が板中央面の面内歪に及ぼす寄与は、Von Kármánの式²¹⁾に従うものとする。

(2) 面内歪

定式化に際して設定される変位置量は先の微小変形の場合と同じであり、コンクリート部分と鉄筋層に関する歪と応力についての表示式も、板中央面の面内歪の表示を除いて前述の(4-1)~(4-13)式がそのまま適用可能である。

Von Kármánに従えば、幾何学的非線形領域における板中央面の面内歪 $\{\epsilon_o\}$ は次式で表示される。

$$\{\epsilon_o\} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{ox} \\ \epsilon_{oy} \\ \gamma_{oxy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ -\frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \{\epsilon_{oL}\} + \{\epsilon_{oNL}\} \quad (4-34)$$

上式から明らかなように、 $\{\epsilon_{oL}\}$ は(4-2)式と同じ微小変形（線形）領域における板の面

内歪であり、 $\{\varepsilon_{NL}\}$ は幾何学的非線形を考慮したことによる非線形面内歪である。

(3) 膜力とモーメント

補強筋の付着すべりを考慮した場合の幾何学的非線形領域における R C 床板の膜力 $\{N\}$ とモーメント $\{M\}$ は、先の(4-14), (4-15)式に、(4-1)~(4-13)式と上の(4-34)式の間係を代入し整理することによって得られ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_x &= \left(\frac{E_c}{1-\nu^2} + \sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} \right) \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} + \frac{E_c t \nu}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ &\quad - \left(\sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sum^k A_{sxi} E_{sxi} \frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \\ N_y &= \left(\frac{E_c}{1-\nu^2} + \sum^m A_{syi}^* E_{syi} \right) \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} + \frac{E_c t \nu}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} \\ &\quad - \left(\sum^m A_{syi}^* E_{syi} h_{yi} \right) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sum^m A_{syi} E_{syi} \frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \\ N_{xy} &= \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \right) \end{aligned} \right\} \quad (4-35)$$

$$\left. \begin{aligned} M_x &= \left(\sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi} \right) \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} - \left[\frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\ &\quad - \frac{E_c t^3 \nu}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sum^k A_{sxi} E_{sxi} h_{xi} \frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \\ M_y &= \left(\sum^m A_{syi}^* E_{syi} h_{yi} \right) \left\{ \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} - \left[\frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum^m A_{syi}^* E_{syi} h_{yi} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\ &\quad - \frac{E_c t^3 \nu}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sum^m A_{syi} E_{syi} h_{yi} \frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \\ M_{xy} &= - \frac{E_c t^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \end{aligned} \right\} \quad (4-36)$$

(4) 全ポテンシャル・エネルギー汎関数

補強筋の付着すべりを考慮した場合の、幾何学的非線形領域における R C 床板のための全ポテンシャル・エネルギー汎関数 Π は、(4-18)~(4-22)式に、(4-1)~(4-13)式と(4-34)式の間係を代入することによって求められ、最終的に下式となる。

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \iint_R & \left[\left\{ \frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} \right\} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^4 \right\} \right. \\ & + \left\{ \frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum^m A_{syi}^* E_{syi} \right\} \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^4 \right\} \\ & + \frac{2\nu E_c t}{1-\nu^2} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{4} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ & + \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + 2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) \right. \\ & \quad \left. + 2 \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \left\{ \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi}^2 \right\} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right)^2 + \frac{E_c \nu t^3}{6(1-\nu^2)} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) \left(\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) \\
& + \left\{ \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum^m A_{s yi}^* E_{s yi} h_{yi}^2 \right\} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right)^2 + \frac{E_c t^3}{6(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \right)^2 \\
& + \sum^k \left\{ A_{sxi} E_{sxi} \left(\frac{\partial S_{xi}}{\partial X} \right)^2 + \Omega_{xi} K_{bxi} S_{xi}^2 \right\} \\
& + \sum^m \left\{ A_{s yi} E_{s yi} \left(\frac{\partial S_{yi}}{\partial Y} \right)^2 + \Omega_{yi} K_{byi} S_{yi}^2 \right\} \\
& - 2 \left\{ \sum^k A_{sxi} E_{sxi} h_{xi} \right\} \left\{ \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial X} \right)^2 \right\} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) \\
& - 2 \left\{ \sum^m A_{s yi} E_{s yi} h_{yi} \right\} \left\{ \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial Y} \right)^2 \right\} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) \\
& - 2 \left\{ \sum^k A_{sxi} E_{sxi} h_{xi} \left(\frac{\partial S_{xi}}{\partial X} \right) \right\} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) \\
& - 2 \left\{ \sum^m A_{s yi} E_{s yi} h_{yi} \left(\frac{\partial S_{yi}}{\partial Y} \right) \right\} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) \\
& + 2 \left\{ \sum^k A_{sxi} E_{sxi} \left(\frac{\partial S_{xi}}{\partial X} \right) \right\} \left\{ \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial X} \right)^2 \right\} \\
& + 2 \left\{ \sum^m A_{s yi} E_{s yi} \left(\frac{\partial S_{yi}}{\partial Y} \right) \right\} \left\{ \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial Y} \right)^2 \right\} - 2q_z w \Big] dx dy \\
& - \int_{C1} [\bar{N}_{xn} u + \bar{N}_{yn} v + \bar{M}_{xn} \frac{\partial w}{\partial Y} + \bar{M}_{yn} \frac{\partial w}{\partial X}] d\xi
\end{aligned} \tag{4-37}$$

(5) 支配微分方程式と平衡方程式

前項で得た(4-37)式のエネルギー汎関数 Π を用いると、補強筋の付着すべりを考慮したRC床板の幾何学的非線形曲げを支配する一連の基礎微分方程式が得られ、以下のようになる。

変位 u に関して：

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} \right) \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) + \frac{E_c t}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \right) \\
& + \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial Y^2} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) - \left(\sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi} \right) \frac{\partial^3 W}{\partial X^3} + \sum^k A_{sxi} E_{sxi} \frac{\partial^2 S_{xi}}{\partial X^2} = 0
\end{aligned} \tag{4-38}$$

変位 v に関して：

$$\begin{aligned}
& \left(\frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum^m A_{s yi}^* E_{s yi} \right) \left(\frac{\partial^2 v}{\partial Y^2} + \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right) + \frac{E_c t}{2(1-\nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial X \partial Y} + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial Y} \right) \\
& + \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial X^2} + \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right) - \left(\sum^m A_{s yi}^* E_{s yi} h_{yi} \right) \frac{\partial^3 W}{\partial Y^3} + \sum^m A_{s yi} E_{s yi} \frac{\partial^2 S_{yi}}{\partial Y^2} = 0
\end{aligned} \tag{4-39}$$

変位 w に関して：

$$\begin{aligned}
& - \left(\sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi} \right) \left\{ \frac{\partial^3 u}{\partial X^3} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial X^2} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial X} \frac{\partial^3 W}{\partial X^3} \right\} - \left(\sum^m A_{s yi}^* E_{s yi} h_{yi} \right) \left\{ \frac{\partial^3 v}{\partial Y^3} + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial Y^2} \right)^2 + \frac{\partial w}{\partial Y} \frac{\partial^3 W}{\partial Y^3} \right\} \\
& - \left\{ \frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} \right\} \left\{ \frac{\partial u}{\partial X} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial X} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - \frac{E_c \nu t}{1-\nu^2} \left\{ \frac{\partial v}{\partial Y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial W}{\partial Y} \right)^2 \right\} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +(\sum^k A_{sxi} E_{sxi} h_{xi}) (\frac{\partial^2 W}{\partial X^2})^2 \\
& -\{\frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum^m A_{syi}^* E_{syi}\} \{\frac{\partial V}{\partial y} + \frac{1}{2}(\frac{\partial W}{\partial y})^2\} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \frac{E_c \nu t}{1-\nu^2} \{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}(\frac{\partial W}{\partial x})^2\} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\
& +(\sum^m A_{syi} E_{syi} h_{yi}) (\frac{\partial^2 W}{\partial y^2})^2 \\
& +\{\frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi}\} \frac{\partial^4 W}{\partial X^4} + \{\frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum^m A_{syi}^* E_{syi} h_{yi}\} \frac{\partial^4 W}{\partial y^4} \\
& + \frac{E_c t^3}{6(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 W}{\partial X^2 \partial y^2} - \sum^k A_{sxi} E_{sxi} h_{xi} \frac{\partial^3 S_{xi}}{\partial X^3} - \sum^m A_{syi} E_{syi} h_{yi} \frac{\partial^3 S_{yi}}{\partial y^3} \\
& -(\sum^k A_{sxi} E_{sxi} \frac{\partial S_{xi}}{\partial X}) \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} - (\sum^m A_{syi} E_{syi} \frac{\partial S_{yi}}{\partial y}) \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = q_z \quad (4-40)
\end{aligned}$$

変位 S_{xi} について：

$$A_{sxi} E_{sxi} \{(\frac{\partial^2 u}{\partial X^2} + \frac{\partial W}{\partial X} \frac{\partial^2 W}{\partial X^2}) - h_{xi} \frac{\partial^3 W}{\partial X^3} + \frac{\partial^2 S_{xi}}{\partial X^2}\} = \Omega_{xi} K_{bxi} S_{xi} \quad (4-41)$$

但し、 $i=1 \sim k$

変位 S_{yi} について：

$$A_{syi} E_{syi} \{(\frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial^2 W}{\partial y^2}) - h_{yi} \frac{\partial^3 W}{\partial y^3} + \frac{\partial^2 S_{yi}}{\partial y^2}\} = \Omega_{yi} K_{byi} S_{yi} \quad (4-42)$$

但し、 $i=1 \sim m$

以上で得た(4-38)～(4-42)式を、膜力とモーメントに関する(4-35)，(4-36)式の関係を用いて変位の代わりに応力で表示すると，これらの式は，それぞれ次のような平衡方程式に変換することができる。

$$\frac{\partial N_x}{\partial X} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (4-43)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial X} = 0 \quad (4-44)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial X^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial X \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + N_x \frac{\partial^2 W}{\partial X^2} + 2 N_{xy} \frac{\partial^2 W}{\partial X \partial y} + N_y \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + q_z = 0 \quad (4-45)$$

$$A_{sxi} \frac{\partial \sigma_{sxi}}{\partial X} = \Omega_{xi} \tau_{bxi} \quad (4-46)$$

但し、 $i=1 \sim k$

$$A_{syi} \frac{\partial \sigma_{syi}}{\partial y} = \Omega_{yi} \tau_{byi} \quad (4-47)$$

但し、 $i=1 \sim m$

言うまでもなく，上式中の(4-43)～(4-45)式は，有限変形理論による通常の弾性平板の平衡方程式と全く同一の式であり，(4-46)式と(4-47)式が，それぞれ x 方向と y 方向の任意の鉄筋層 i の力の釣り合い式である。

4. 3 各鉄筋層が任意の配筋方向をもつ R C 床板を対象とした有限要素解析

この問題の微小変形理論および有限変形理論による有限要素法への定式化については、前節4.2で求めたそれぞれの全ポテンシャル・エネルギー汎関数式に基づいて展開することが可能であるが、これらの汎関数は、両者とも基礎微分方程式を簡潔な形で表示するために、補強筋の配筋方向が x , y の 2 方向のみに限定されている。勿論、実際の R C 床板においても、補強筋は x , y の 2 方向に配筋する場合が殆どであるが、構造解析手法としての汎用性を考えると、「板内に配置される各鉄筋層が、それぞれ任意の配筋方向をもつ場合をも取り扱い得る方がより好都合である」ことは明らかである。従って、この問題を有限要素法を用いて解析するに際しては、前述の基本仮定事項の他に、「鉄筋層は板内に n 層配筋されているものとし、さらに各鉄筋層はそれぞれ任意の方向を有しているもの」として定式化を行うことにする。

4.3.1 微小変形理論による定式化^{10)~14)}

(1) 変位場、および歪と応力

(a) 変位場

微小変形理論に基づき、この問題を有限要素展開するために設定しなければならない変位場は、図4-5に示すように、板中央面における x, y, z 方向の変位 u, v, w と、板内に配置されている全鉄筋層の n 個のすべり変位 $S_1, S_2 \cdots S_i \cdots S_n$ の計 $(3+n)$ 個の変位である。

(b) 鉄筋層の歪と応力

コンクリート部分の歪と応力は、(4-1)~(4-5)式の関係がそのまま有効であるから、ここでは鉄筋層だけが問題となる。任意の鉄筋層 i の配筋方向 l_i (図4-5と図4-6を参照) の歪 ϵ_{si} は次のように表わされる。

$$\epsilon_{si} = \epsilon_{osi} + \epsilon_{bsi} + \epsilon_{ssi} \quad (4-48)$$

但し、 ϵ_{osi} : 配筋方向の板中央面の面内歪、

ϵ_{bsi} : 配筋位置における鉄筋層 i の配筋方向の曲

げ歪、 ϵ_{ssi} : 鉄筋層 i の配筋方向のすべり率

上式の右辺の各歪成分は、それぞれ以下のように表示さ

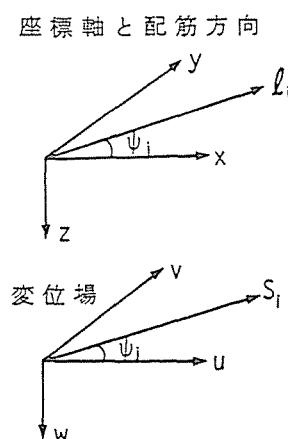


図4-5 座標系と変位場

れる。

$$\varepsilon_{osi} = [H_{si}] \{\varepsilon_o\} \quad (4-49)$$

$$\varepsilon_{bsi} = h_{si} [H_{si}] \{\phi\} \quad (4-50)$$

$$\varepsilon_{ssi} = \frac{\partial S_i}{\partial l_i} = [T_{si}] \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial S_i}{\partial x} \\ \frac{\partial S_i}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (4-51)$$

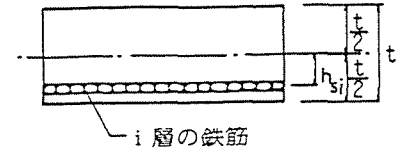


図4-6 RC床板の断面記号

但し, h_{si} : 板中央面から鉄筋層 i までの距離

上式中の $\{\varepsilon_o\}$ と $\{\phi\}$ は, それぞれ(4-2)式と(4-3)式で定義した板の面内歪と曲率であり, また, $[H_{si}]$ と $[T_{si}]$ は次式で与えられる。

$$[H_{si}] = [\cos^2 \psi_i \quad \sin^2 \psi_i \quad (\cos \psi_i \cdot \sin \psi_i)] \quad (4-52)$$

$$[T_{si}] = [\cos \psi_i \quad \sin \psi_i] \quad (4-53)$$

但し, ψ_i : 配筋方向 l_i と x 軸のなす角 (図4-5参照)

従って, 任意の i 層の鉄筋層の応力 σ_{si} は,

$$\sigma_{si} = E_{si} \varepsilon_{si} \quad (4-54)$$

但し, E_{si} : i 層の鉄筋のヤング係数

(2) 有限要素解析のための全ポテンシャル・エネルギー汎関数

各鉄筋層が任意の配筋方向を有する場合のRC床板の全ポテンシャル・エネルギー汎関数は, 次式で表示される。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \iint_{Re} \left[\int_{-t/2}^{t/2} \{z \varepsilon_c\}^T [D_c] \{z \varepsilon_c\} dz + \sum_{i=1}^n A_{si}^* E_{si} \varepsilon_{si}^2 \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n \Omega_{si} K_{bi} S_i^2 - 2q_z w \right] dx dy \\ & - \int_{c1} [\bar{N}_{x,\eta} u + \bar{N}_{y,\eta} v + \bar{M}_{x,\eta} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{M}_{y,\eta} \frac{\partial w}{\partial y}] d\zeta \end{aligned} \quad (4-55)$$

但し, Re : 矩形要素の面積領域, $\{z \varepsilon_c\}$: 板中央面から z だけ離れた任意位置におけるコンクリート部分の歪であり $\{z \varepsilon_c\} = \{\varepsilon_o\} + z\{\phi\}$, A_{si} : i 層の鉄筋の板単位面積当りの断面積, A_{si}^* : i 層の鉄筋の板単位面積当りの換算断面積で $A_{si}^* = A_{si}(1 - E_c/E_{si})$, Ω_{si} : i 層の鉄筋の板単位面積当りの付着表面積, K_{bi} : i 層の鉄筋の付着係数,

(3) 変位関数と歪の有限要素表示

ここでは, 前項で得た汎関数(4-55)式に基づき, 図4-7に掲げる矩形要素を用いて定式化を行うことにする。ここで導入しなければならない基本独立変数は, 前述の変位 u, v, w

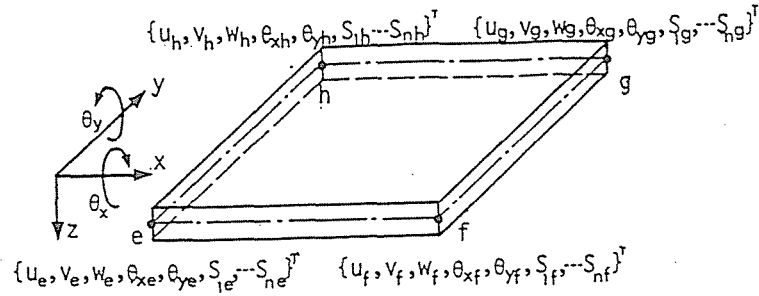


図4-7 矩形要素と節点変位

と、全鉄筋層 n 個のすべり変位 $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_n$ である。

〔面内変形〕： 面内変形 u, v に対しては、次の変位関数を用いる。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \{ \alpha_o \} = [f_o] \{ \alpha_o \} \quad (4-56)$$

但し、 $\{ \alpha_o \}$ ：面内変位に関する一般化変位で、 $\{ \alpha_o \} = \{ \alpha_{o0}, \alpha_{o1}, \alpha_{o2}, \dots, \alpha_{o7} \}^T$ 。

従って、各節点の面内変位ベクトル $\{ \Delta_o \}$ は、上式の右辺の $[f_o]$ に要素の各節点の座標値を代入して整理することによって容易にもとめられ、次のように表示される。

$$\begin{aligned} \{ \Delta_o \} = \begin{Bmatrix} u_e \\ v_e \\ u_f \\ v_f \\ u_g \\ v_g \\ u_h \\ v_h \end{Bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 & x_e & y_e & x_e y_e & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_e & y_e & x_e y_e \\ 1 & x_f & y_f & x_f y_f & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_f & y_f & x_f y_f \\ 1 & x_g & y_g & x_g y_g & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_g & y_g & x_g y_g \\ 1 & x_h & y_h & x_h y_h & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x_h & y_h & x_h y_h \end{bmatrix} \{ \alpha_o \} \\ &= [C_o] \{ \alpha_o \} \end{aligned} \quad (4-57)$$

上式より、一般化変位 $\{ \alpha_o \}$ は、

$$\{ \alpha_o \} = [C_o^{-1}] \{ \Delta_o \} \quad (4-58)$$

また、要素内の面内歪 $\{ \epsilon_o \}$ は(4-56)式を微分することによって得られ下式となる。

$$\begin{aligned} \{ \epsilon_o \} = \begin{Bmatrix} \epsilon_{ox} \\ \epsilon_{oy} \\ \gamma_{oxy} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & y & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 & x & 0 & 1 & 0 & y \end{bmatrix} \{ \alpha_o \} \\ &= [b_o] \{ \alpha_o \} = [b_o] [C_o^{-1}] \{ \Delta_o \} \end{aligned} \quad (4-59)$$

〔曲げ変形〕： 曲げによる床板の鉛直変位 w の変位関数は、次式で表示する。

$$w = [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2 y \ xy^2 \ y^3 \ x^3 y \ xy^3] \{ \alpha_b \} = [f_b] \{ \alpha_b \} \quad (4-60)$$

但し、 $\{ \alpha_b \}$ ：曲げ変形に関する一般化変位で、 $\{ \alpha_b \} = \{ \alpha_{b0}, \alpha_{b1}, \alpha_{b2}, \dots, \alpha_{b11} \}^T$ 。

回転角 θ_x, θ_y は、

$$\theta_x = \frac{\partial W}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} [f_b] \{\alpha_b\} \quad (4-61)$$

$$\theta_y = -\frac{\partial W}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} [f_b] \{\alpha_b\} \quad (4-62)$$

従って、変位成分 w , θ_x , θ_y に対応する節点変位ベクトル $\{\Delta_b\}$ は、(4-60)～(4-62)式の関係を用いて求められ下式となる。

$$\begin{aligned} \{\Delta_b\} &= \{w_e \ \theta_{x_e} \ \theta_{y_e} \ w_f \ \theta_{x_f} \ \theta_{y_f} \ w_g \ \theta_{x_g} \ \theta_{y_g} \ w_h \ \theta_{x_h} \ \theta_{y_h}\}^T \\ &= [C_b] \{\alpha_b\} \end{aligned} \quad (4-63)$$

ここに、 $[C_b]$ は、

$$[C_b] = \begin{bmatrix} 1 & x_e & y_e & x_e^2 & x_e y_e & y_e^2 & x_e^3 & x_e^2 y_e & x_e y_e^2 & y_e^3 & x_e^3 y_e & x_e y_e^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_e & 2y_e & 0 & x_e^2 & 2x_e y_e & 3y_e^2 & x_e^3 & 3x_e y_e^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_e & -y_e & 0 & -3x_e^2 & -2x_e y_e & -y_e^2 & 0 & -3x_e^2 y_e & -y_e^3 \\ 1 & x_f & y_f & x_f^2 & x_f y_f & y_f^2 & x_f^3 & x_f^2 y_f & x_f y_f^2 & y_f^3 & x_f^3 y_f & x_f y_f^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_f & 2y_f & 0 & x_f^2 & 2x_f y_f & 3y_f^2 & x_f^3 & 3x_f y_f^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_f & -y_f & 0 & -3x_f^2 & -2x_f y_f & -y_f^2 & 0 & -3x_f^2 y_f & -y_f^3 \\ 1 & x_g & y_g & x_g^2 & x_g y_g & y_g^2 & x_g^3 & x_g^2 y_g & x_g y_g^2 & y_g^3 & x_g^3 y_g & x_g y_g^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_g & 2y_g & 0 & x_g^2 & 2x_g y_g & 3y_g^2 & x_g^3 & 3x_g y_g^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_g & -y_g & 0 & -3x_g^2 & -2x_g y_g & -y_g^2 & 0 & -3x_g^2 y_g & -y_g^3 \\ 1 & x_h & y_h & x_h^2 & x_h y_h & y_h^2 & x_h^3 & x_h^2 y_h & x_h y_h^2 & y_h^3 & x_h^3 y_h & x_h y_h^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_h & 2y_h & 0 & x_h^2 & 2x_h y_h & 3y_h^2 & x_h^3 & 3x_h y_h^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_h & -y_h & 0 & -3x_h^2 & -2x_h y_h & -y_h^2 & 0 & -3x_h^2 y_h & -y_h^3 \end{bmatrix} \quad (4-64)$$

従って、上式より一般化変位 $\{\alpha_b\}$ は、

$$\{\alpha_b\} = [C_b^{-1}] \{\Delta_b\} \quad (4-65)$$

また、板の曲率 $\{\phi\}$ は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} \{\phi\} &= \begin{Bmatrix} \phi_x \\ \phi_y \\ \phi_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} \\ -\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \\ -2\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{\partial^2}{\partial x^2} \{f_b\} \\ -\frac{\partial^2}{\partial y^2} \{f_b\} \\ -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \{f_b\} \end{Bmatrix} \{\alpha_b\} = [b_b] \{\alpha_b\} \\ &= [b_b] [C_b^{-1}] \{\Delta_b\} \end{aligned} \quad (4-66)$$

ここに、 $[b_b]$ は次式で与えられる。

$$[b_b] = - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 & 0 & 6xy & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 2x & 6y & 0 & 6xy \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x & 4y & 0 & 6x^2 & 6y^2 \end{bmatrix} \quad (4-67)$$

従って、板内の中央面から z だけ離れた任意点の曲げのみによる歪 $\{\varepsilon_b\}$ は、下式で表示される。

$$\{\varepsilon_b\} = \{\varepsilon_{bx} \ \varepsilon_{by} \ \gamma_{bxy}\}^T = z [b_b] [C_b^{-1}] \{\Delta_b\} \quad (4-68)$$

[すべり変形] : 鉄筋層のすべり変位については、すべて典型的に取り扱うことがで

きるので、任意の鉄筋層 i についてのみ示すこととする。

鉄筋層 i の配筋方向のすべり変位 S_i を、次の変位関数で表示する。

$$S_i = [1 \quad x \quad y \quad xy] \{ \alpha_{si} \} = [f_s] \{ \alpha_{si} \} \quad (4-69)$$

但し、 $[f_s]$: すべての鉄筋層に共通の形状関数、 $\{ \alpha_{si} \}$: すべり変位 S_i に関する一般

化変位で、 $\{ \alpha_{si} \} = \{ \alpha_{sio} \quad \alpha_{si1} \quad \alpha_{si2} \quad \alpha_{si3} \}^T$ 。

このすべり変位 S_i に対応する要素節点変位ベクトル $\{ \Delta_{si} \}$ は、上式に各節点の座標値を代入することによって得られ下式となる。

$$\{ \Delta_{si} \} = \{ S_{ie} \quad S_{if} \quad S_{ig} \quad S_{ih} \}^T = [C_s] \{ \alpha_{si} \} \quad (4-70)$$

ここに、 $[C_s]$ はすべての鉄筋層に共通の係数マトリックスで、

$$[C_s] = \begin{bmatrix} 1 & x_e & y_e & x_e y_e \\ 1 & x_f & y_f & x_f y_f \\ 1 & x_g & y_g & x_g y_g \\ 1 & x_h & y_h & x_h y_h \end{bmatrix} \quad (4-71)$$

従って、一般化変位 $\{ \alpha_{si} \}$ は次式で求められる。

$$\{ \alpha_{si} \} = [C_s^{-1}] \{ \Delta_{si} \} \quad (4-72)$$

また、鉄筋層 i の配筋方向のすべり率 ϵ_{ssi} は、上の(4-70)～(4-72)式および(4-51)式の関係より得られ、

$$\begin{aligned} \epsilon_{ssi} &= [0 \quad \cos \psi_i \quad \sin \psi_i \quad (y \cos \psi_i + x \sin \psi_i)] [C_s^{-1}] \{ \Delta_{si} \} \\ &= [b_{si}] [C_s^{-1}] \{ \Delta_{si} \} \end{aligned} \quad (4-73)$$

〔コンクリート部分の歪と鉄筋層の歪〕： 以上の関係より、定式化に必要なコンクリート部分の歪 $\{ \epsilon_c \}$ と鉄筋層の歪 ϵ_{si} の有限要素表示は、次のようになる。

$$\{ \epsilon_c \} = \{ \epsilon_o \} + \{ \epsilon_b \} = [b_o] [C_o^{-1}] \{ \Delta_o \} + z [b_b] [C_b^{-1}] \{ \Delta_b \} \quad (4-74)$$

$$\begin{aligned} \epsilon_{si} &= \epsilon_{osi} + \epsilon_{bsi} + \epsilon_{ssi} \\ &= [H_{si}] [b_o] [C_o^{-1}] \{ \Delta_o \} + h_{si} [H_{si}] [b_b] [C_b^{-1}] \{ \Delta_b \} + [b_{si}] [C_s^{-1}] \{ \Delta_{si} \} \end{aligned} \quad (4-75)$$

(4) 有限要素方程式

前項(3)で得た各式を先の汎関数(4-55)式に代入し、各節点変位について変分をとり整理すると、補強筋の付着すべりを考慮したRC床板の解析のための有限要素方程式がえられ、下式となる。

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{ob} & K_{os} \\ K_{ob}^T & K_{bb} & K_{bs} \\ K_{os}^T & K_{bs}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_o \\ \Delta_b \\ \Delta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_o \\ P_b \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4-76)$$

但し, $\{\Delta_s\}$: 各層のすべり変位ベクトルから構成される全鉄筋層に関する節点変位ベクトル,

上式中の右辺の部分マトリックスのうちの $[K_{oo}]$, $[K_{ob}]$, $[K_{bb}]$ は, それぞれ次のように表示される。

$$\begin{aligned} [K_{oo}] &= [C_o^{-1}]^T \left\{ \iint_{Re} [b_o]^T \{ t[D_c] + \sum^n A_{s,i}^* E_{s,i} [H_{s,i}]^T [H_{s,i}] \} [b_o] dx dy \right\} [C_o^{-1}] \\ &= [C_o^{-1}]^T [\bar{K}_{oo}] [C_o^{-1}] \end{aligned} \quad (4-77)$$

$$\begin{aligned} [K_{ob}] &= [C_o^{-1}]^T \left\{ \iint_{Re} [b_o]^T \left\{ \sum^n A_{s,i} E_{s,i} h_{s,i} [H_{s,i}]^T [H_{s,i}] \right\} [b_b] dx dy \right\} [C_b^{-1}] \\ &= [C_o^{-1}]^T [\bar{K}_{ob}] [C_b^{-1}] \end{aligned} \quad (4-78)$$

$$\begin{aligned} [K_{bb}] &= [C_b^{-1}]^T \left\{ \iint_{Re} [b_b]^T \left\{ \frac{t^3}{12} [D_c] + \sum^n A_{s,i}^* E_{s,i} h_{s,i}^2 [H_{s,i}]^T [H_{s,i}] \right\} [b_b] dx dy \right\} [C_b^{-1}] \\ &= [C_b^{-1}]^T [\bar{K}_{bb}] [C_b^{-1}] \end{aligned} \quad (4-79)$$

但し, Re: 矩形要素の面積領域

上の3式中の $[\bar{K}_{oo}]$, $[\bar{K}_{ob}]$, $[\bar{K}_{bb}]$ の各成分については, 本章の Appendix [4A-1] に一覧して掲げてある。

また, (4-76)式の他の部分マトリックス $[K_{os}]$, $[K_{bs}]$, $[K_{ss}]$ は, 以下に掲げる任意の i 層の鉄筋に関する部分マトリックス $[k_{osi}]$, $[k_{bsi}]$, $[k_{ssi}]$ を, 全鉄筋層の節点すべり変位ベクトル $\{\Delta_s\}$ のならび順にしたがって再構成することにより, 容易に求められる。

$$\begin{aligned} [k_{osi}] &= [C_o^{-1}]^T \left\{ \iint_{Re} A_{s,i} E_{s,i} [b_o]^T [H_{s,i}]^T [b_{si}] dx dy \right\} [C_s^{-1}] \\ &= [C_o^{-1}]^T [\bar{k}_{osi}] [C_s^{-1}] \end{aligned} \quad (4-80)$$

ここに,

$$[\bar{k}_{osi}] = A_E A_{s,i} E_{s,i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cs^3 & cs^2 \cdot sn & 0 \\ 0 & sn \cdot cs^2 & sn^2 \cdot cs & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{a_y^2}{3} cs^3 + \frac{a_x^2}{3} sn^2 \cdot cs) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & sn \cdot cs^2 & sn^2 \cdot cs & 0 \\ 0 & sn^2 \cdot cs & sn^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (\frac{a_y^2}{3} sn \cdot cs^2 + \frac{a_x^2}{3} sn^3) \end{bmatrix}$$

但し, a_x, a_y : 要素の x, y 方向の1/2辺長, A_E : 矩形要素の面積 ($A_E = 4a_x a_y$),

$sn = \sin \psi_i$, $cs = \cos \psi_i$

$$\begin{aligned} [k_{bsi}] &= [C_b^{-1}]^T \left\{ \iint_{Re} A_{s,i} E_{s,i} h_{s,i} [b_b]^T [H_{s,i}]^T [b_{si}] dx dy \right\} [C_s^{-1}] \\ &= [C_b^{-1}]^T [\bar{k}_{bsi}] [C_s^{-1}] \end{aligned} \quad (4-81)$$

ここに,

$$[\bar{k}_{b_{s i}}] = A_E A_{s i} E_{s i} h_{s i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2cs^3 & -2sn \cdot cs^2 & 0 \\ 0 & -2sn \cdot cs^2 & -2sn^2 \cdot cs & 0 \\ 0 & -2sn^2 \cdot cs & -2sn^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_x^2 sn \cdot cs^2 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{2}{3}a_y^2 cs^3 - \frac{4}{3}a_x^2 sn^2 \cdot cs \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{4}{3}a_y^2 sn \cdot cs^2 - \frac{2}{3}a_x^2 sn^3 \\ 0 & 0 & 0 & -2a_y^2 sn^2 \cdot cs \\ 0 & -2a_y^2 sn \cdot cs^2 & -2a_y^2 sn^2 \cdot cs & 0 \end{bmatrix}$$

$$[k_{s s i}] = [C_s^{-1}]^T \left(\iint_{R_e} \{ \Omega_{s i} K_{b i} [f_s]^T [f_s] + A_{s i} E_{s i} [b_{s i}]^T [b_{s i}] \} dx dy \right) [C_s^{-1}]$$

$$= [C_o^{-1}]^T \{ [{}_1\bar{k}_{s s i}] + [{}_2\bar{k}_{s s i}] \} [C_b^{-1}] \quad (4-82)$$

ここに,

$$[{}_1\bar{k}_{s s i}] = A_E \Omega_{s i} K_{b i} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{a_x^2}{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{a_y^2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4a_x^2 a_y^2}{9} \end{bmatrix}$$

$$[{}_2\bar{k}_{s s i}] = A_E A_{s i} E_{s i} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & cs^2 & sn \cdot cs & 0 \\ 0 & sn \cdot cs & sn^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_x^2}{3} sn^2 + \frac{a_y^2}{3} cs^2 \end{bmatrix}$$

但し, a_x, a_y : 要素のx,y方向の1/2辺長, A_E : 矩形要素の面積 ($A_E = 4a_x a_y$), $sn = \sin \psi$;
 $cs = \cos \psi$;

4.3.2 有限変形理論による定式化^{12)~15)}

(1) 変位関数と歪の有限要素表示

(a) 変位関数

ここでは, 4.3.1節の微小変形理論で用いた図4-7の矩形要素と同じ要素を使用するものとする。従って, 変位 u, v, w および S_i ($i=1 \sim n$) に関する変位関数は, 前述の微小変形理論による場合と全く同一である。

(b) 歪の有限要素表示

定式化の際に必要な「要素内の歪の有限要素表示」も, 面内歪 $\{\epsilon_o\}$ 以外の一般化歪 $\{\phi\}$ と鉄筋のすべり率 $\epsilon_{s s i}$ については, 既に微小変形理論のところで展開した表示式

がそのまま有効である。従ってここでは、面内歪 $\{\varepsilon_o\}$ （なかでも、非線形面内歪）の有限要素表示が対象となる。また、前項4.2.2の(2)で述べたように、有限変形理論による板中央面の面内歪 $\{\varepsilon_o\}$ は、微小変形理論による線形歪 $\{\varepsilon_{oL}\}$ と幾何学的非線形に起因する非線形歪 $\{\varepsilon_{oNL}\}$ との和の形、 $\{\varepsilon_o\}=\{\varepsilon_{oL}\}+\{\varepsilon_{oNL}\}$ で表示される。これらの面内歪のうちの線形歪 $\{\varepsilon_{oL}\}$ については、前述の(4-59)式が適用可能であるから、結果としてここでは、非線形面内歪 $\{\varepsilon_{oNL}\}$ の有限要素表示のみが問題となる。

以後の定式化を容易にするため、(4-34)式で与えられる $\{\varepsilon_{oNL}\}$ を下式のように表示し直しておく²²⁾。

$$\{\varepsilon_{oNL}\} = \begin{Bmatrix} \varepsilon_{ox}^{NL} \\ \varepsilon_{oy}^{NL} \\ \gamma_{oxy}^{NL} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ \frac{\partial w}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} \\ \frac{\partial w}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} [R][\theta^N] \quad (4-83)$$

上式の最右辺の第2項と第3項の $[R]$ と $[\theta^N]$ は、変位 w に関する前掲の(4-60)～(4-65)式の関係を用いて、次のように表示することができる。

即ち、 $[R]$ は、

$$\begin{aligned} [R] &= \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial w}{\partial y} \\ \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \{f_b\} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \{f_b\} \\ \frac{\partial}{\partial y} \{f_b\} & \frac{\partial}{\partial x} \{f_b\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{12} \\ I_{12} \end{bmatrix} [C_b^{-1}] \{\Delta_b\} \\ &= [\bar{b}_{oNL}] \begin{bmatrix} I_{12} \\ I_{12} \end{bmatrix} [C_b^{-1}] \{\Delta_b\} \end{aligned} \quad (4-84)$$

但し、 $\{\Delta_b\}$ 、 $[C_b]$ ：(4-63)～(4-65)式に前出、 $[I_{12}]$ ：要素の曲げ自由度幅12×12の単位マトリックス。

ここに、

$$[\bar{b}_{oNL}] =$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2xy & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 & 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 \end{bmatrix} \quad (4-85)$$

また、 $[\theta^N]$ は、

$$[\theta^N] = \begin{Bmatrix} \frac{\partial W}{\partial X} \\ \frac{\partial W}{\partial Y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial X} \{f_b\} \\ \frac{\partial}{\partial Y} \{f_b\} \end{Bmatrix} = [b_{oNL}] [C_b^{-1}] \{\Delta_b\} \quad (4-86)$$

ここに,

$$[b_{oNL}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2x & y & 0 & 3x^2 & 2xy & y^2 & 0 & 3x^2y & y^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x & 2y & 0 & x^2 & 2xy & 3y^2 & x^3 & 3xy^2 \end{bmatrix} \quad (4-87)$$

(2) 接線剛性マトリックスの誘導

構成材料がすべて弾性領域にある RC 床板の幾何学的非線形解析のみを目的とする場合には、与えられた一つの外荷重に対する板の変形状態は、その都度 Newton-Raphson 法のような通常の繰返し計算手法によって別個に求めることができる。しかしながら、板の座屈のような分岐不安定問題や、荷重の増加と共に徐々に変化していく床板の変形挙動の、全体的な様相を知りたい場合には、接線剛性を用いた増分解析手法が有用である。また、この種の手法は、基本的な計算手順に何らの変更を加えることなく、材料非線形領域をも容易に取り扱い得るという点で、遥かに優れている。従ってここでは、増分解析法を用いることとし、そのために必要となる接線剛性マトリックスを導くことにする。

増分解析のための接線剛性は、内部エネルギー U の第 2 変分から導かれるので²³⁾、以後の式の展開を容易にするために、コンクリートと鉄筋、および付着に係る各合応力を以下に示すように、それぞれの対応歪成分を用いて表示しておく。

コンクリートに係る合応力としての膜力 $\{N_c\}$ とモーメント $\{M_c\}$:

$$\{N_c\} = \{N_{cx} \ N_{cy} \ N_{cxy}\}^T = t [D_c] \{\epsilon_o\} = t [D_c] (\{\epsilon_{oL}\} + \{\epsilon_{oNL}\}) \quad (4-88)$$

$$\{M_c\} = \{M_{cx} \ M_{cy} \ M_{cxy}\}^T = \frac{t^3}{12} [D_c] \{\phi\} \quad (4-89)$$

鉄筋層 i の合応力としての配筋方向の軸 (膜) 力 N_{si} :

$$N_{si} = A_{si} \sigma_{si} = A_{si} E_{si} \{ [H_{si}] (\{\epsilon_{oL}\} + \{\epsilon_{oNL}\} + h_{si} \{\phi\}) + \epsilon_{ssi} \} \quad (4-90)$$

鉄筋層 i の配筋方向の付着合応力 P_{bsi} :

$$P_{bsi} = \Omega_{si} K_{bi} S_i \quad (4-91)$$

これらの関係を用いて、RC 床板の内部エネルギー U を表示すると、

$$U = \iint_{Re} \left[(\{N_c\}^T + \sum_{i=1}^n N_{si} [H_{si}]) \{\epsilon_{oL}\} + (\{N_c\}^T + \sum_{i=1}^n N_{si} [H_{si}]) \{\epsilon_{oNL}\} \right. \\ \left. + (\sum_{i=1}^n N_{si} h_{si} [H_{si}]) \{\phi\} + \sum_{i=1}^n N_{si} \epsilon_{ssi} \right. \\ \left. + \{M_c\}^T \{\phi\} + \sum_{i=1}^n P_{bsi} S_i \right] dx dy \quad (4-92)$$

したがって、内部エネルギー U の第 1 変分 δU は、次のようになる。

$$\delta U = \iint_{Re} \left[(\{N_c\}^T + \sum^n N_{si} [H_{si}]) \delta\{\epsilon_{oL}\} + (\{N_c\}^T + \sum^n N_{si} [H_{si}]) \delta\{\epsilon_{oNL}\} \right. \\ \left. + (\sum^n N_{si} h_{si} [H_{si}]) \delta\{\phi\} + \sum^n N_{si} \delta\epsilon_{ssi} \right. \\ \left. + \{M_c\}^T \delta\{\phi\} + \sum^n P_{bsi} \delta S_i \right] dx dy \quad (4-93)$$

上式よりUの第2変分 $\delta^2 U$ は、下式のように求められる。

$$\delta^2 U = \delta(\delta U) = \\ = \iint_{Re} \left[(\{N_c\}^T + \sum^n N_{si} [H_{si}]) \delta^2\{\epsilon_{oL}\} + (\delta\{N_c\}^T + \sum^n \delta N_{si} [H_{si}]) \delta\{\epsilon_{oL}\} \right. \\ \left. + (\{N_c\}^T + \sum^n N_{si} [H_{si}]) \delta^2\{\epsilon_{oNL}\} + (\delta\{N_c\}^T + \sum^n \delta N_{si} [H_{si}]) \delta\{\epsilon_{oNL}\} \right. \\ \left. + (\sum^n N_{si} h_{si} [H_{si}]) \delta^2\{\phi\} + (\sum^n \delta N_{si} h_{si} [H_{si}]) \delta\{\phi\} \right. \\ \left. + \sum^n N_{si} \delta^2\epsilon_{ssi} + \sum^n \delta N_{si} \delta\epsilon_{ssi} + \{M_c\}^T \delta^2\{\phi\} + \delta\{M_c\}^T \delta\{\phi\} \right. \\ \left. + \sum^n P_{bsi} \delta^2 S_i + \sum^n \delta P_{bsi} \delta S_i \right] dx dy \quad (4-94)$$

ここに、(4-94)式中における $\delta^2\{\epsilon_{oNL}\}$ 以外の第2変分の項、即ち、 $\delta^2\{\epsilon_{oL}\}$ 、 $\delta^2\{\phi\}$ 、 $\delta^2\epsilon_{ssi}$ および $\delta^2 S_i$ は、全てゼロとなって消失することになる。また周知のように、この $\delta^2\{\epsilon_{oNL}\}$ に関する非線形項から、通常、初期応力（幾何剛性）マトリックスと称される重要な項が導かれることになる。

膜力を次式で表示すると、

$$\{N\}^T = \{N_x \ N_y \ N_{xy}\} = (\{N_c\}^T + \sum^n N_{si} [H_{si}]) \quad (4-95)$$

(4-94)式の右辺の被積分項の第3番目の項は、(4-83)式の関係から、

$$\{N_x \ N_y \ N_{xy}\} \delta^2\{\epsilon_{oNL}\} = N_x \left\{ \delta\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right) \right\}^2 + N_y \left\{ \delta\left(\frac{\partial W}{\partial Y}\right) \right\}^2 + 2N_{xy} \left\{ \delta\left(\frac{\partial W}{\partial X}\right) \right\} \left\{ \delta\left(\frac{\partial W}{\partial Y}\right) \right\} \quad (4-96)$$

ここで、次のマトリックス $[N^*]$ を導入すると、

$$[N^*] = \begin{bmatrix} N_x & N_{xy} \\ N_{xy} & N_y \end{bmatrix} \quad (4-97)$$

従って、先の(4-96)式は、(4-86)式の関係より次のように表示される。

$$\{N_x \ N_y \ N_{xy}\} \delta^2\{\epsilon_{oNL}\} = \delta\{\Delta_b\}^T [C_b^{-1}]^T [b_{oNL}]^T [N^*] [b_{oNL}] [C_b^{-1}] \{\Delta_b\} \quad (4-98)$$

上で得た(4-98)式と前掲の(4-56)～(4-75)式の間係を、Uの第2変分に関する先の(4-94)式に代入し、さらに簡略化して整理すると、RC床板の増分解析のための接線剛性マトリックスが得られ下式となる。

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{ob} & K_{os} \\ K_{ob}^T & K_{bb} & K_{bs} \\ K_{os}^T & K_{bs}^T & K_{ss} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & K_{bb} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & {}_NK_{ob} & 0 \\ {}_NK_{ob}^T & {}_NK_{bb} & {}_NK_{bs} \\ 0 & {}_NK_{bs}^T & 0 \end{bmatrix} \\ = [K_L] + [K_\sigma] + [K_{NL}] \quad (4-99)$$

但し、 $[K_L]$ ：前項4.3.1で既に求めた微小変形理論に基づく剛性マトリックス、

$[K_\sigma]$ ：(4-94)式の右辺の被積分項の第3番目の項から導かれる初期応力マトリ

ックス, $[K_{NL}]$: 幾何学的非線形性に起因する非線形接線剛性マトリックス。
 上式中の $[K_L]$ は, 微小変形理論に基づく剛性マトリックスで, 既に前項4.3.1において求めた(4-76)~(4-82)式と同じものがある。従ってここでは, $[K_o]$ と $[K_{NL}]$ を構成する各部分剛性マトリックスについてのみ記述する。

即ち, 初期応力マトリックス $[K_o]$ の唯一の構成部分マトリックス $[{}_oK_{bb}]$ は,

$$\begin{aligned} [{}_oK_{bb}] &= [C_b^{-1}]^T \left\{ \iint_{Re} [b_{oNL}]^T [N^*] [b_{oNL}] \, dx dy \right\} [C_b^{-1}] \\ &= [C_b^{-1}]^T [{}_o\bar{K}_{bb}] [C_b^{-1}] \end{aligned} \quad (4-100)$$

次に, (4-99)式中の幾何学的非線形マトリックス $[K_{NL}]$ の構成成分である部分マトリックスのうち, $[NK_{ob}]$ と $[NK_{bb}]$ は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} [NK_{ob}] &= [C_o^{-1}]^T \left\{ \iint_{Re} [b_o]^T ([D_c] + \sum^n A_{si} E_{si} [H_{si}]^T [H_{si}]) [R] [b_{oNL}] \, dx dy \right\} [C_o^{-1}] \\ &= [C_o^{-1}]^T [N\bar{K}_{ob}] [C_o^{-1}] \end{aligned} \quad (4-101)$$

$$\begin{aligned} [NK_{bb}] &= [C_b^{-1}]^T \left\{ \iint_{Re} [b_{oNL}]^T [R]^T ([D_c] + \sum^n A_{si} E_{si} [H_{si}]^T [H_{si}]) [R] [b_{oNL}] \, dx dy \right. \\ &\quad + \iint_{Re} [b_b]^T (\sum^n A_{si} E_{si} h_{si} [H_{si}]^T [H_{si}]) [R] [b_{oNL}] \, dx dy \\ &\quad \left. + \iint_{Re} [b_{oNL}]^T [R]^T (\sum^n A_{si} E_{si} h_{si} [H_{si}]^T [H_{si}]) [b_b] \, dx dy \right\} [C_b^{-1}] \\ &= [C_b^{-1}]^T [N\bar{K}_{bb}] [C_b^{-1}] \end{aligned} \quad (4-102)$$

また, $[K_{NL}]$ の構成成分のうちの残りの部分マトリックス $[NK_{bs}]$ は, 以下に示す「任意の鉄筋層 i のすべり変位と曲げのカップリング (連成)」に関する部分マトリックス $[nk_{bsi}]$ を, 全層にわたって再構成することによって容易に求められる。

$$\begin{aligned} [nk_{bsi}] &= [C_b^{-1}]^T \left\{ \iint_{Re} [b_{oNL}]^T [R]^T (A_{si} E_{si} [H_{si}]^T [H_{si}]) \, dx dy \right\} [C_s^{-1}] \\ &= [C_b^{-1}]^T [N\bar{k}_{bsi}] [C_s^{-1}] \end{aligned} \quad (4-103)$$

以上の(4-100)~(4-103)式における $[{}_o\bar{K}_{bb}]$, $[N\bar{K}_{ob}]$, $[N\bar{K}_{bb}]$, $[N\bar{k}_{bsi}]$ の各成分については, Appendix [4A-II] に一覧して掲げてある。

(3) 非線形解析手法と収束条件

今, RC床板が漸増荷重を受ける途上にあつて, 或る釣り合い状態にある場合を考えてみる。この釣り合い状態から, さらに任意の荷重増分 $\{dP\}$ を受けたときの, このRC床板の節点変位増分 $\{d\Delta\}$ を求めるための有限要素方程式は, 前項(2)で導いた(4-99)式の接線

剛性マトリックスを用いると、通常の弾性板の場合と同様^{2,2)~2,3)}、次式で表示することができる。

$$\left\{ [K_L] + [K_\sigma] + [K_{NL}] \right\} \{d\Delta\} = \{dP\} + \{P_R\} \quad (4-104)$$

ここに、 $\{P_R\}$ はよく知られているように、解析途上にある構造系の非釣り合いに起因する残差節点力ベクトルであり、計算は各荷重増分段階ごとに、上式中の $[K_\sigma]$ と $[K_{NL}]$ を、現時点の全変位量を用いて評価し修正しながら繰り返され、この残差ベクトルの値が、實際上、 $\{P_R\}=0$ と見做し得る時点をもって解とするのが基本である。しかしながら、本論文では、解の収束の判定条件としての、設定量の物理的な意味の不明確なこの残差節点ベクトル $\{P_R\}$ そのものではなく、既往の研究^{2,3)}にならい、節点変位増分ベクトル $\{d\Delta\}$ を用いた次式をもって、その解の収束条件とした。

$$\frac{\sqrt{\{d\Delta_j\}^T \{d\Delta_j\} - \{d\Delta_{j-1}\}^T \{d\Delta_{j-1}\}}}{\sqrt{\{d\Delta_{j-1}\}^T \{d\Delta_{j-1}\}}} \leq 0.01 \quad (4-105)$$

但し、 $\{d\Delta_j\}$ 、 $\{d\Delta_{j-1}\}$ ：各荷重増分段階での繰り返し計算ステップjおよびj-1での節点変位増分。

4. 4 数値計算例と考察

4.4.1 微小変形理論による計算例

補強筋のすべりが、微小変形領域におけるRC床板の力学性状に如何ような影響をおよぼすかを調べるため、モデル床板を設定して数値計算を行い、若干の検討・考察を試みることにする^{1,4)}。

(1) x、y直交配筋を有する単純支持RC床板

ここで解析の対象とするモデル床板は、等分布荷重を

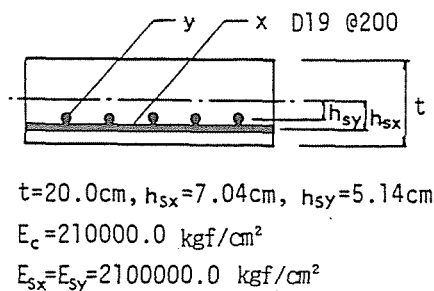


図4-8 モデル床板の断面及び仮定材料性状

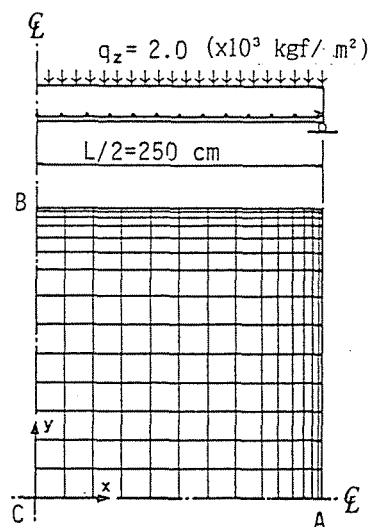


図4-9 要素分割形状

うける板厚20cm、スパン5mの正方形単純支持RC床板で、鉄筋はxおよびy方向に各1層ずつ配筋されており、両鉄筋層はまた、支持端で完全に定着されているものとする。

図4-8には、このモデルRC床板の断面寸度と配筋状況、ならびに鉄筋とコンクリートの材料性状を掲げたが、この図からも明らかなように、板の仮定断面を、より実際に近いものとするため、両鉄筋層は板厚方向の配筋位置を違えて設定してある。また、解析に当っては、支持端近傍で急変する付着応力分布の詳細を知るため、支持端に近づくに連れて要素幅が狭くなる図4-9に示すような要素分割を用い、荷重強度 ($q_z = 2 \text{ t/m}^2$) や他の材料性状を一定とし、付着係数 K_b (x、y 両方向とも同一とする) のみを変化させ、これがRC床板の力学性状におよぼす影響を調べることにする。

数値計算は、付着係数 $K_b = 10^{-1}$ から 10^6 (単位: kgf/cm^3) までの8段階 ($K_b = 10^{-1}, 1.0, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6$) について行った。

図4-10と図4-11は、鉛直変位 w 、および x、y 方向の曲げモーメント M_x, M_y の、板中央におけるそれぞれの値が、付着係数の変化と共に推移する様相を示したもので、両図には8段階すべての K_b に対応する値を、縦軸のスケールを特に拡大・強調して図示した。これらの図中の各曲線のうち、 w と M_x の曲線は、付着係数 K_b の値が10から 10^4 の間で大きく変化しており、10以下と 10^4 以上の領域においては、ほぼ両極の極限状態に等しいことを示している。ここにおける両極とは、言うまでもなく、 $K_b = 0$ の完全アンボンド状態に対応する“すべり自由”と、 $K_b = \infty$ の完全付着に対応する“すべり固定”の2つの極限状態である。図4-10の変位曲線からも明らかなように、付着係数 K_b の大きさがRC床板の変形剛性におよぼす効果は、既に(第3章で)みたRC梁部材における場合とほぼ同様な傾向を示して

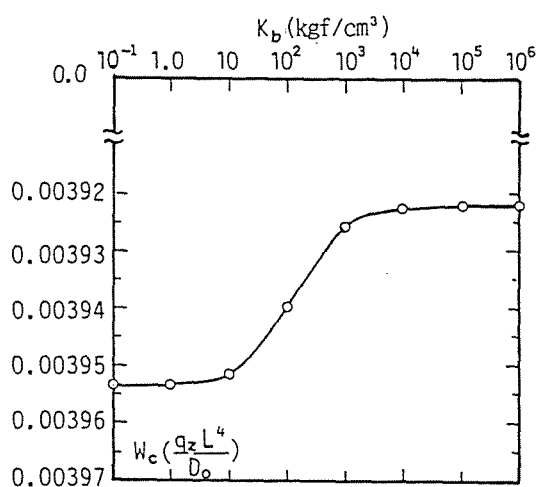


図4-10 K_b の変化に伴う板中央点撓み w_c の推移

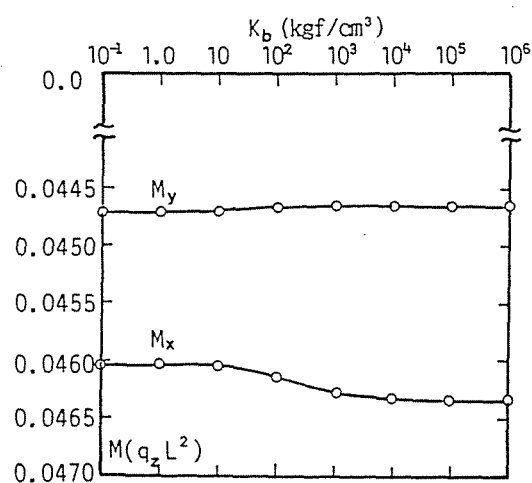
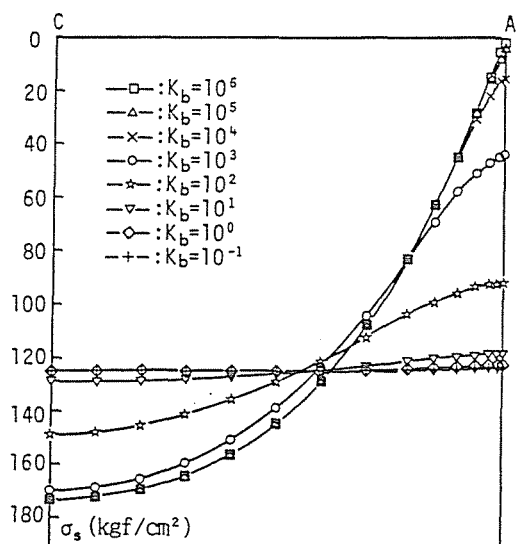
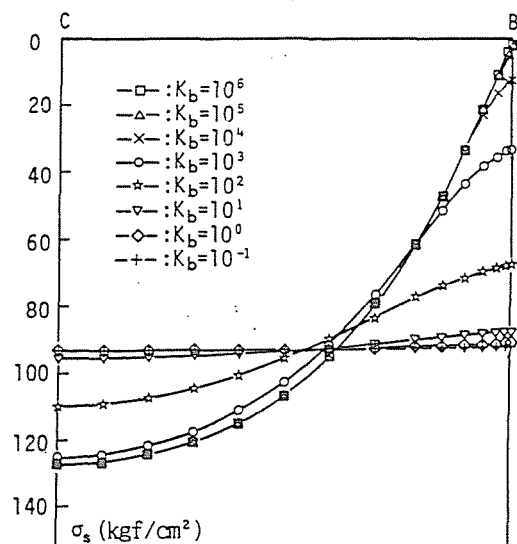


図4-11 K_b の変化に伴う板中央点の曲げモーメント M_x, M_y の推移

いるのに対して、曲げモーメントは、梁部材の場合には不変であったが、図4-11では K_b の値の変化とともに変動しており、「RC床板の場合、その変動の幅は僅かではあるが曲げモーメントの値も付着係数の影響を受けて変化する」ことが判る。この理由としては、RC床板では、「鉄筋の配筋方向の違いに起因する板の異方性（この例では直交異方性）の度合いが、付着係数の変化とともに微妙に変化する」ためである、と考えられる。なお図4-11

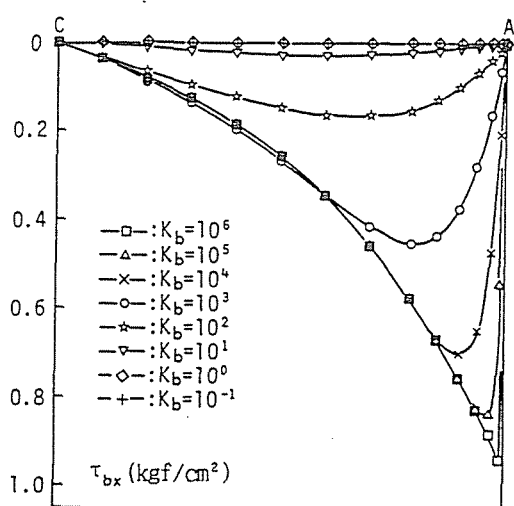


(a) x 方向の鉄筋応力分布

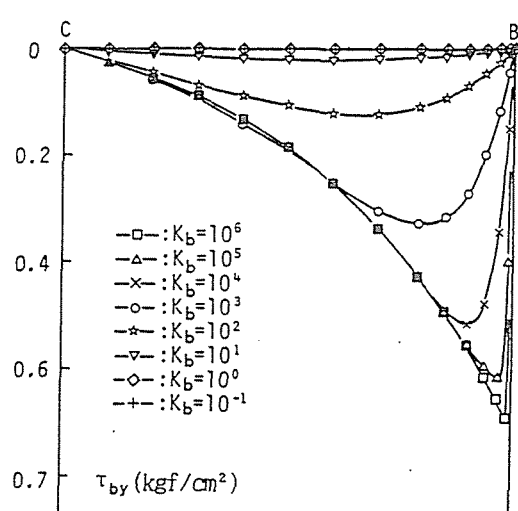


(b) y 方向の鉄筋応力分布

図4-12 K_b の変化に伴う鉄筋応力分布の推移



(a) x 方向の鉄筋付着応力分布



(b) y 方向の鉄筋付着応力分布

図4-13 K_b の変化に伴う付着応力分布の推移

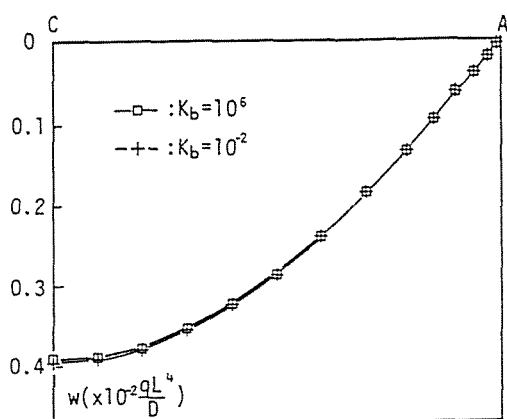


図4-14 $K_b=10^{-1}$ と 10^6 の場合の
撓み曲線の比較

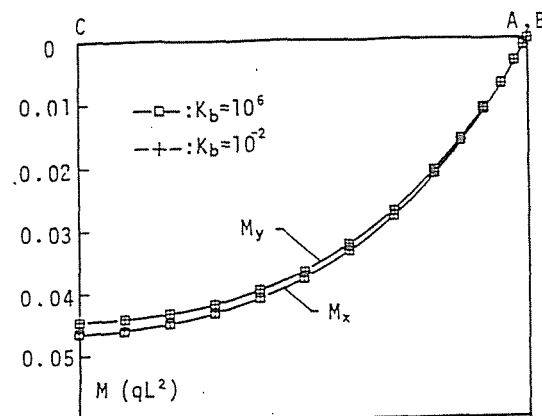


図4-15 $K_b=10^{-1}$ と 10^6 の場合の曲げ
モーメント曲線の比較

中の曲げモーメントのうち、 M_y の変動幅は極めて小さく殆ど一定値を保っており、一見 K_b の値には影響されないように見えるが、これは K_b の変化に伴う M_y の増～減が、(y方向よりも有効丈の大きな鉄筋を有するx方向の)モーメント M_x の増～減に起因する M_y の対応する減～増量と相殺された結果と考えられ、 M_y が K_b の値の変化と無関係であることを意味するものではない。

図4-12と図4-13は、 K_b の変化に伴う、同モデル床板の中央線(図4-9のC-A線およびC-B線)に沿うxおよびy方向の鉄筋応力と付着応力の分布曲線の推移状況を、それぞれ対比して図示したものである。両図には、8種類の付着係数に対応する各対応値を掲げたが、これらの結果は、先の図4-10と図4-11での考察の妥当性を裏付けており、また、この床板が弾性域としては可成りの高荷重であるにも拘わらず、付着応力の絶対値は、鉄筋応力に比して極めて小さな値となることを示している。

また、図4-14と図4-15には、付着係数 K_b の増減によって、床板の中央線に沿う鉛直変位と曲げモーメントの各曲線が、どの程度の幅で変化するかを、ここで設定した K_b の両極の場合について図示したが、これらの図は、「 K_b の変動に起因する各曲線の変化は、対応する全体量と比較すると、差ほど大きなものではない」ことを示している。

(2) 斜め45度直交配筋を有する単純支持床板

斜め方向配筋を持つRC床板の解析例を示すために、前項(1)のモデル床板のx、y両鉄筋層の配筋方向のみを、板の中央点回りの反時計方向に45度回転させて斜め直交配筋床板に変更し、付着係数 $K_b=10^4 \text{ kgf/cm}^2$ の場合について計算を行ってみる。

図4-16は、板中央線に沿う鉛直変位曲線を、先のx、y直交配筋の場合と比較したものである。この図は、斜め45度直交配筋の曲線の方が、x、y直交配筋のそれより小さな値

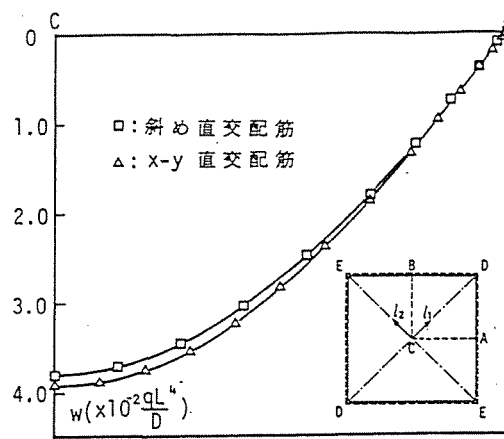
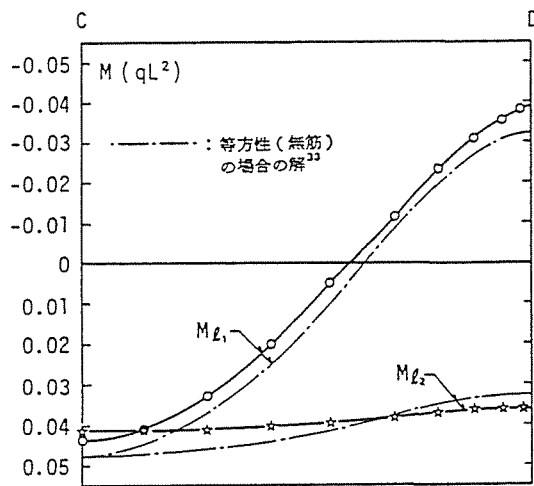
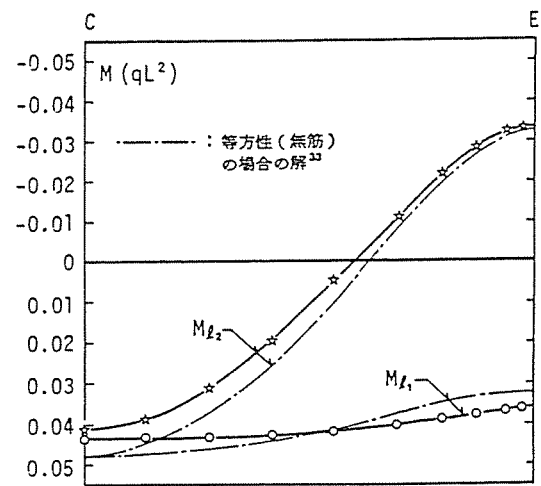


図4-16 撓み曲線の比較

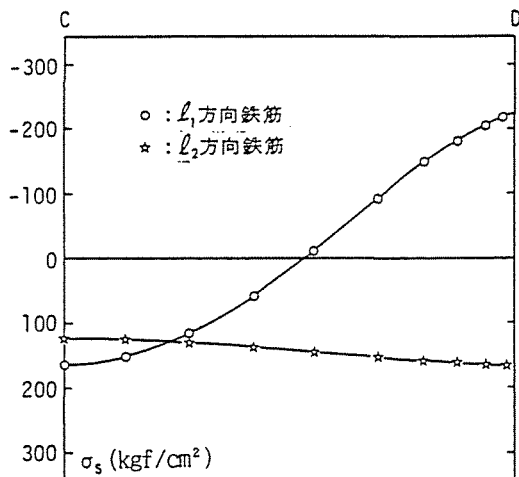


(a) C-D線上

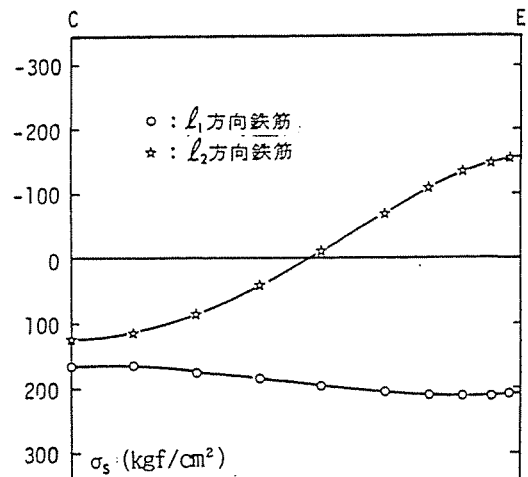


(b) C-E線上

図4-17 床板の対角線に沿う各配筋方向の曲げモーメント曲線



(a) C-D線上



(b) C-E線上

図4-18 床板の対角線に沿う各配筋方向の鉄筋応力曲線

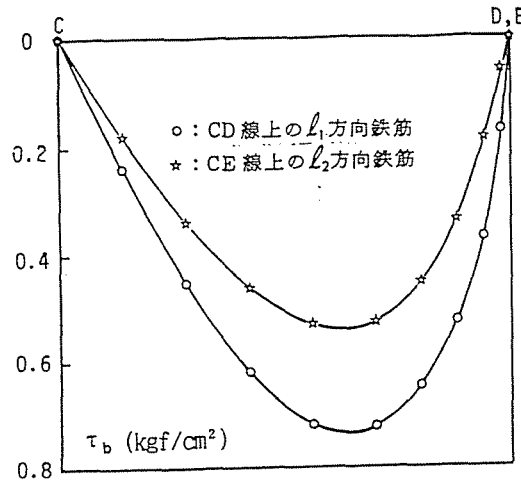


図4-19 床板の対角線床板の対角線に沿う各配筋方向の付着応力曲線

を示しており、 x 、 y 直交配筋に対する斜め配筋の優位性を示唆している。

図4-17の(a)と(b)には、板の対角線に沿う各配筋方向の曲げモーメントを、既往の等方性板の解とそれぞれ対比して掲げ、また図4-18の(a)と(b)には、同じく板の対角線に沿う各配筋方向の鉄筋応力分布曲線を示した。これらの両図の(a)、(b)を、各対角線ごとにそれぞれ比較すると、「曲げモーメント」と「鉄筋応力」の全体的な曲線形状は可成りよく類似しているが、図4-17の対角線と同一方向の曲げモーメントの絶対値は、中央点の方が隅角点の値より大きくなっているのに対して、対応する方向の図4-18の鉄筋応力曲線では両点の絶対値の大小関係が逆転している。これは、鉄筋の付着すべり作用がその主因であるためではなく、本解析では定式化に際して、鉄筋を「材軸方向の応力のみを負担する線材」として取り扱っていることにより、鉄筋にはポアソン効果が含まれないためである。すなわち、C-D線上の l_1 方向の鉄筋応力 σ_s を例にとれば、この σ_s に関係するのは l_1 方向の鉄筋の歪 ϵ_{s, l_1} のみであり、C-D線に直交する l_2 方向の歪が何らの寄与もしない（これに対して曲げモーメントの場合、コンクリート部分がその量の大部分を占めるので、考慮中のモーメントに直交する方向の歪からのポアソン効果が有効に寄与することになる）からである。また、図4-19には参考のため、板の対角線C-DおよびC-E線に沿う、これと同一配筋方向を有する鉄筋の付着応力分布曲線（言うまでもなく各対角線上の、これと直交する方向の鉄筋の付着応力は、すべてゼロとなる）を対比して掲げた。

4.4.2 有限変形理論による計算例

補強筋の付着すべりを考慮した場合のRC床板の、有限変形理論による計算例を示す

め、モデル床板を設定して解析を行い、若干の検討・考察を試みることにする¹⁹⁾。

(1) 既往の等方性板の解との比較

有限変形理論による本解析法は、言うまでもなくRC床板を対象としたものであるが、鉄筋の断面積と付着表面積（または、鉄筋のヤング係数と付着係数）を、数値的にゼロに近づけることによって、等方性板をも容易に取り扱うことが可能である。

図4-20に示す要素分割を用いて（後のRC床板の解析で使用する要素分割形状を考慮し

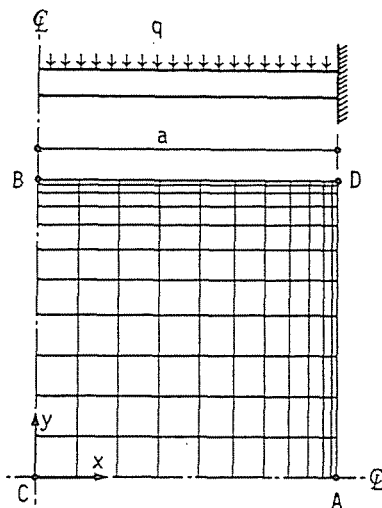


図4-20 等方性板の計算に用いた要素分割形状

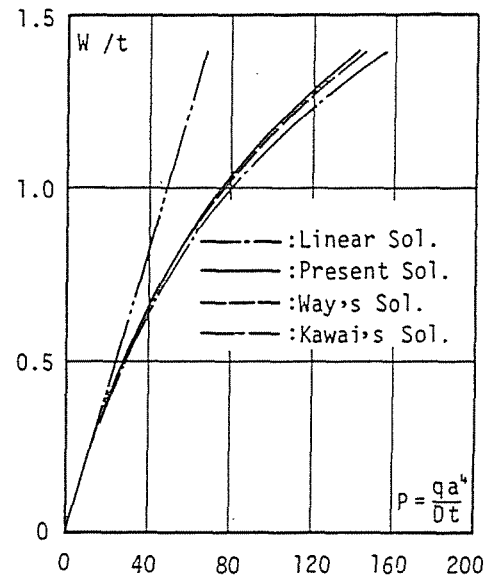


図4-21 等方性板の中央点における変位－荷重曲線の比較

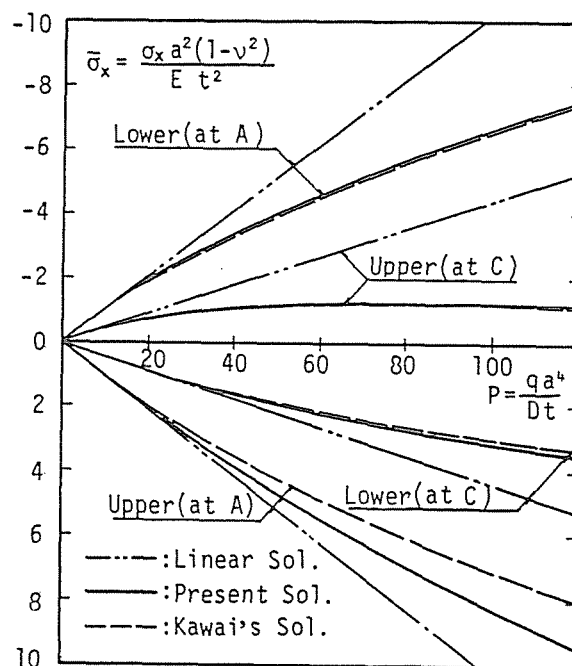


図4-22 主要点における板上・下面の縁応力－荷重曲線

て)行った周辺固定の正方形等方性板の本解析法による計算結果を、図4-21と図4-22に掲げる。これらのうち図4-21は、板中央点の無次元化変位－荷重曲線を、また、図4-22は荷重の増加に伴う主要点における板上・下面の無次元化縁応力の推移状況を、それぞれ既往の解^{2,4)}と比較して図示したものである。両図の結果は明らかに本解析値が許容し得る十分な精度を有していることを示している。

(2) 周辺拘束 R C 床板の解析

図4-23に示すような断面・材料性状を有する周辺拘束・正方形 R C 床板が、x、y 両方向の上・下筋ともに与長40cmをもって、強固な拘束梁に定着されている場合を取り扱ってみる。図4-24には、このモデル床板の計算に用いた要素分割形状と境界条件を掲げる。また、この種の R C 床板を解析する際には、前項4.4.1において既にみたように、付着係数 K_b の大きさとしてどの程度の値を用いるかが問題となるが、既往の実験によれば、通常の異

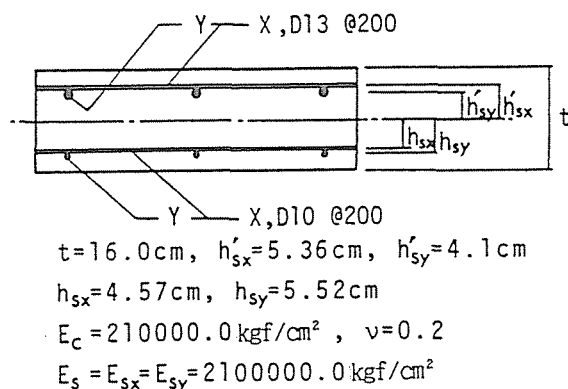


図4-23 周辺拘束モデル R C 床板の断面性状および仮定材料性状

BOUNDARY CONDITIONS

- A : $u=v=w=\theta_x=\theta_y=S_{yU}=S_{yL}=0$
- B : $u=v=w=\theta_x=\theta_y=S_{xU}=S_{xL}=0$
- C : $u=v=\theta_x=\theta_y=S_{xU}=S_{xL}=S_{yU}=S_{yL}=0$
- C-A : $v=\theta_x=S_{yU}=S_{yL}=0$
- C-B : $u=\theta_y=S_{xU}=S_{xL}=0$
- A-D : $\left. \begin{array}{l} u=v=w=\theta_x=\theta_y=0 \end{array} \right\}$
- B-D : $\left. \begin{array}{l} u=v=w=\theta_x=\theta_y=0 \end{array} \right\}$
- A-D' : $\left. \begin{array}{l} u=v=w=\theta_x=\theta_y=S_{xU}=S_{xL}=S_{yU}=S_{yL}=0 \end{array} \right\}$
- B-D' : $\left. \begin{array}{l} u=v=w=\theta_x=\theta_y=S_{xU}=S_{xL}=S_{yU}=S_{yL}=0 \end{array} \right\}$

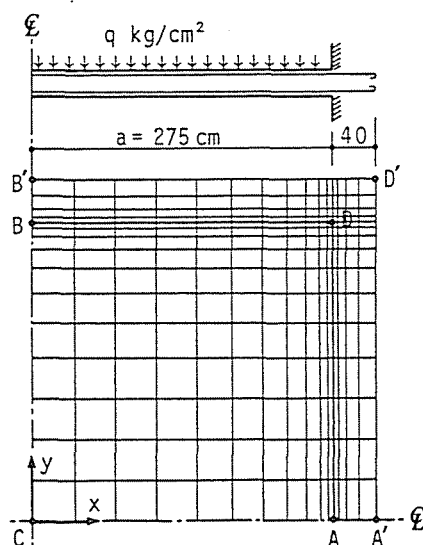


図4-24 R C 床板の計算に用いた要素分割形状と境界条件

形鉄筋の場合、付着係数 K_b の値は、 $10^4 \sim 10^5 \text{ kgf/cm}^2$ の間の値をとるのが極く普通のものであるから、ここでは、この両者の値について計算を行うこととする。ただし、各鉄筋層は鉄筋の付着すべりの影響のみをみるため上・下筋とも板全体に渡って一様な通し配筋（勿論、実際の配筋状態も容易に解析可能である）とした。

図4-25は、ここで設定したモデルR C床板の解析結果を、板中央点の無次元化変位－荷重曲線で、また、図4-26は主要点（図4-24参照）における板上・下面のコンクリートの無次元化応力－荷重曲線で、それぞれ図示したものである。両図には、付着係数 $K_b=10^4, 10^5$

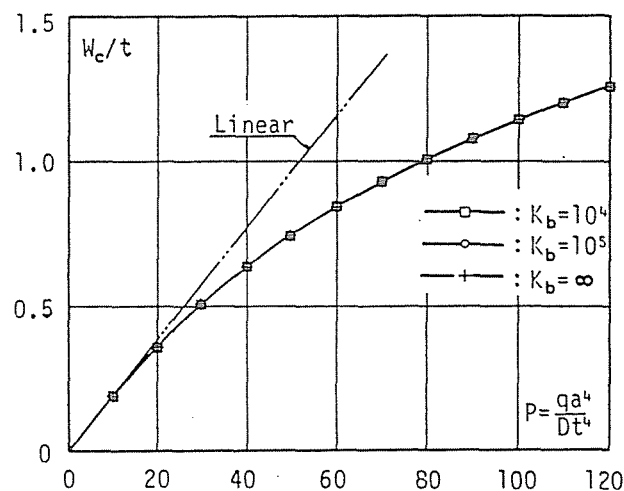


図4-25 R C床板の中央点における変位－荷重曲線の比較

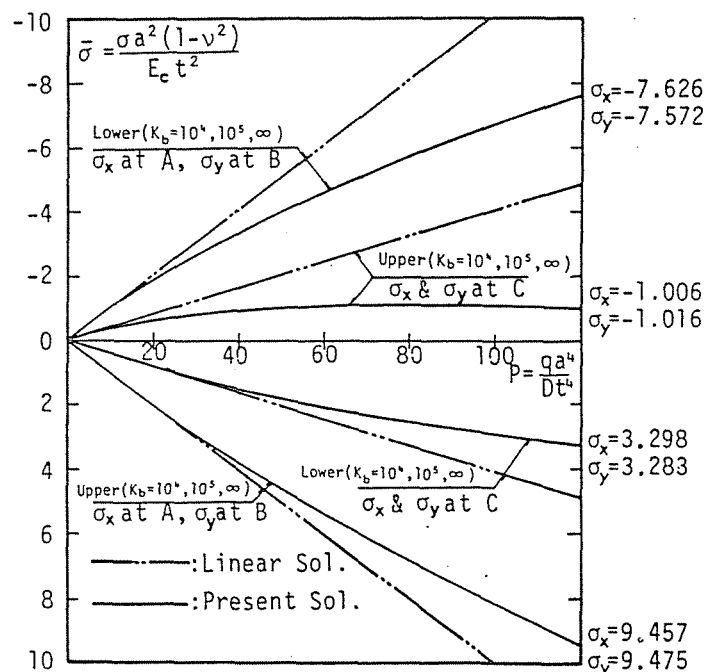
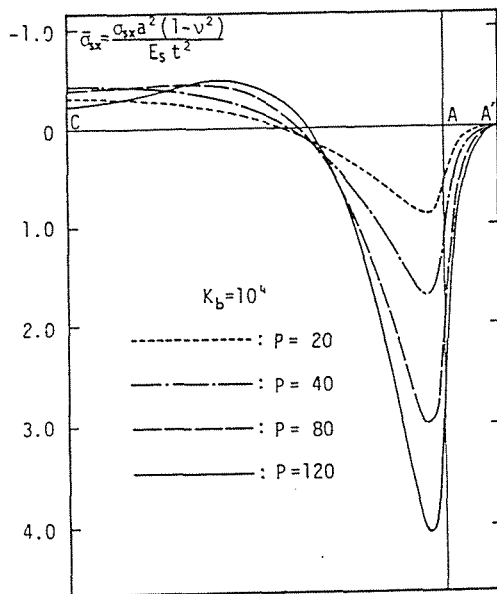
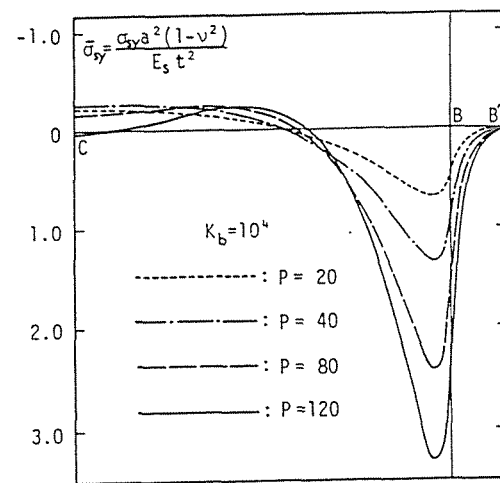


図4-26 主要点における板上・下面の繰応力－荷重曲線の比較

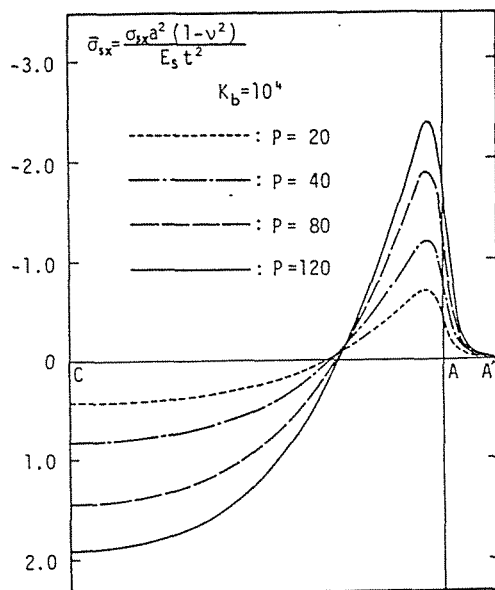
の解の他に $K_b=\infty$ の完全付着の場合の解（通常の完全付着の仮定に基づき、別個にプログラミングしたもの）をも併記したが、これらの図中の $K_b=10^4, 10^5, \infty$ の3種の解はほとんど重なっており、「床板の全体的な力学性状は、有限変形領域においても、付着係数の値 K_b が 10^4 以上の値をとると、ほぼ“完全付着”と見做し得る」ことを示している。また、特に図4-26では、各解のコンクリート部分の応力、即ち、「A点の σ_x とB点の σ_y 」および「C点の σ_x と σ_y 」ともに、図のスケールではその差の識別は殆ど不可能であり、このモデル床板程度の上・下各x、y方向筋の配筋位置の違いでは、明確な直交異方性は生じな



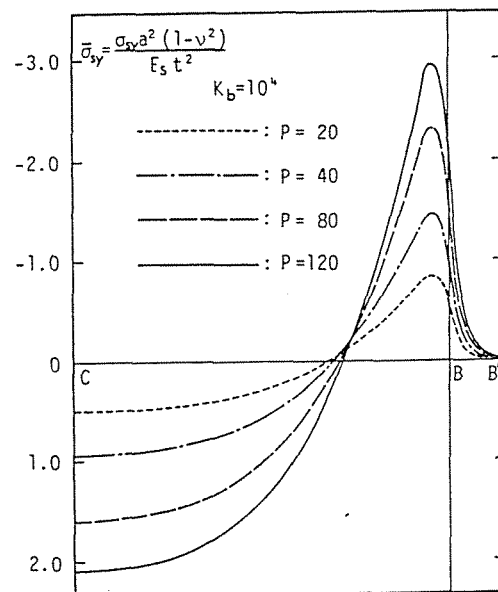
(a) x 方向上端筋の応力分布



(b) y 方向上端筋の応力分布



(c) x 方向下端筋の応力分布

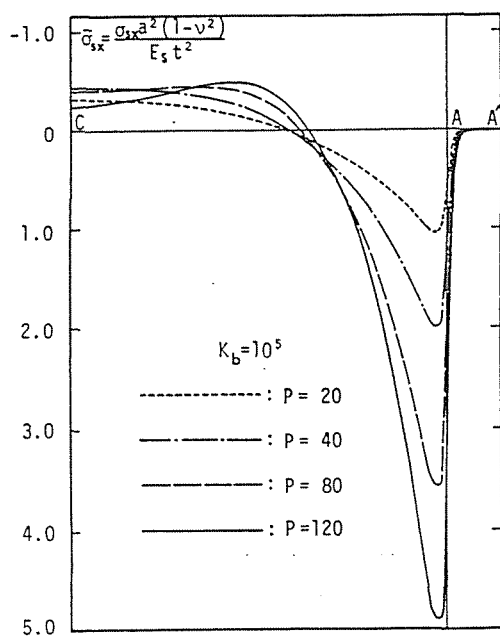


(d) y 方向下端筋の応力分布

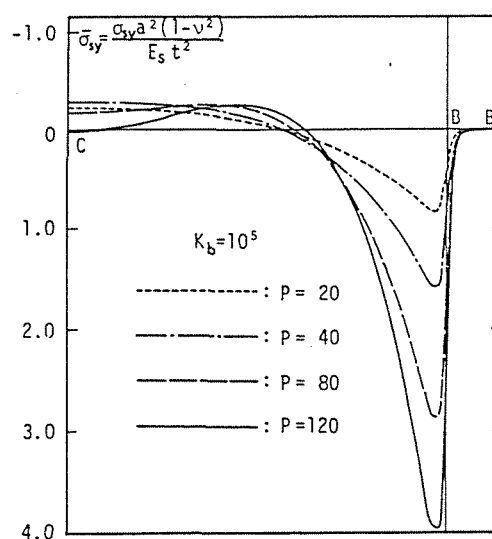
図4-27 $K_b=10^4$ の解の板中央線に沿う鉄筋応力分布曲線の推移

いことが判る。

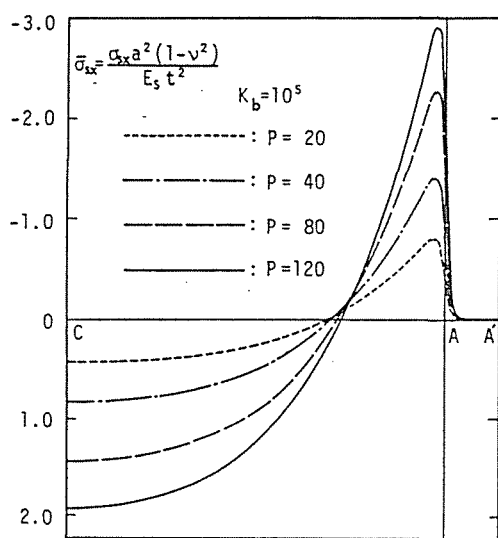
図4-27の(a)～(d)、図4-28の(a)～(d)および図4-29の(a)～(d)には、それぞれ $K_b=10^4$, 10^5 , ∞ の各場合の、荷重の増加に伴う板の中央線に沿う各鉄筋応力分布曲線の推移状況を対比して掲げた。これら3種の図の各曲線を相互に比較すると明らかなように、「板中央部の鉄筋の応力状態には、付着係数の違いによる差はほとんど認められぬが、拘束端のA, B点(図4-24参照)近傍では、 $K_b=10^4$ と 10^5 のときの拘束辺に直交する方向の鉄筋応力



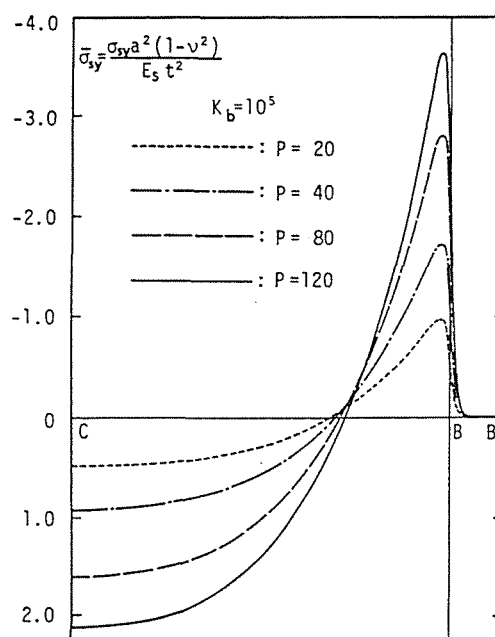
(a) x 方向上端筋の応力分布



(b) y 方向上端筋の応力分布

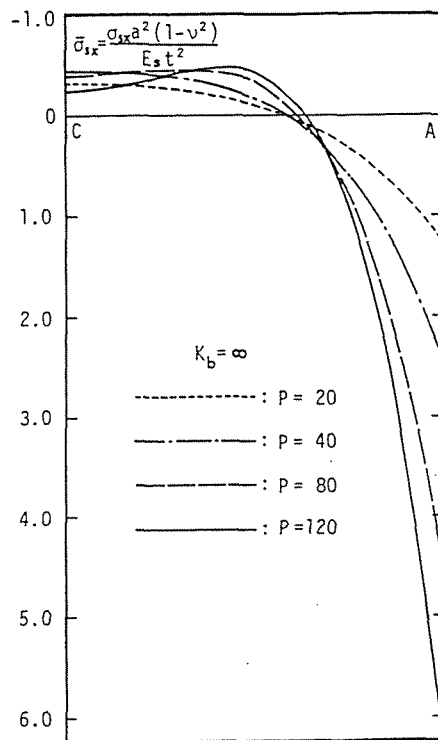


(c) x 方向下端筋の応力分布

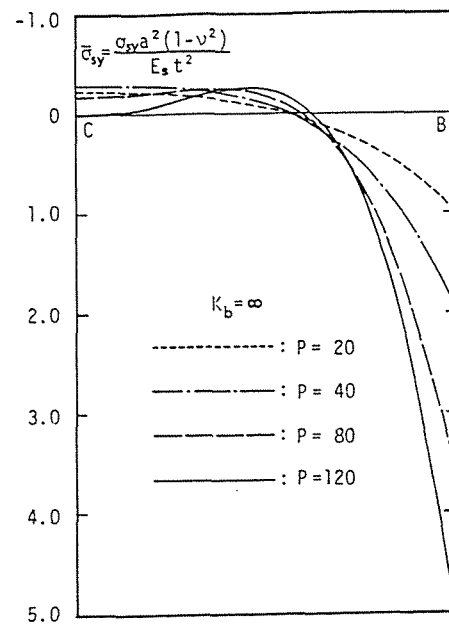


(d) y 方向下端筋の応力分布

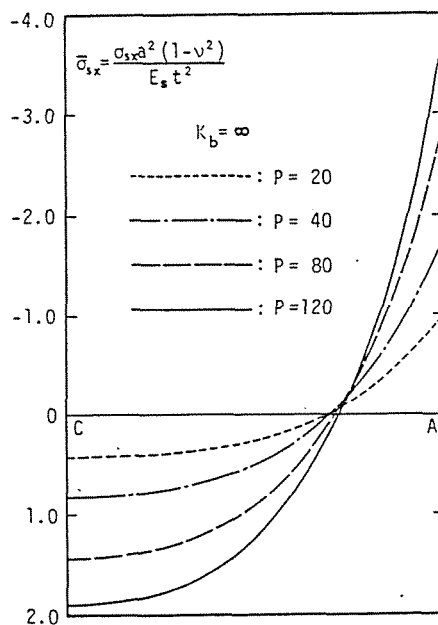
図4-28 $K_b=10^5$ の解の板中央線に沿う鉄筋応力分布曲線の推移



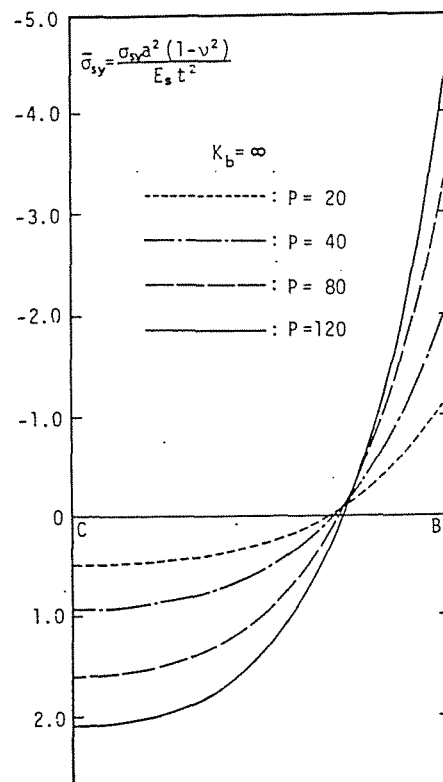
(a) x 方向上端筋の応力分布



(b) y 方向上端筋の応力分布

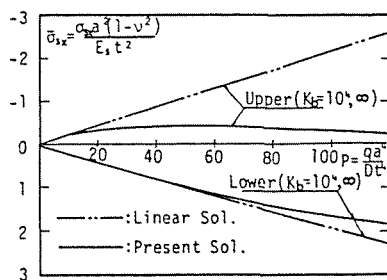


(c) x 方向下端筋の応力分布

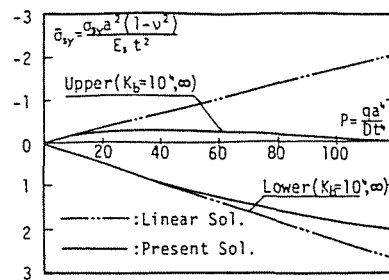


(d) y 方向下端筋の応力分布

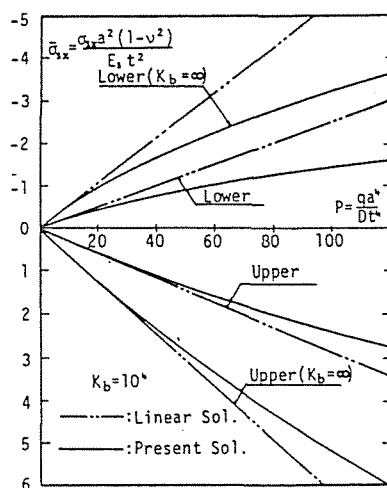
図4-29 完全付着 ($K_b=\infty$) の解の板中央線に沿う鉄筋応力分布曲線の推移



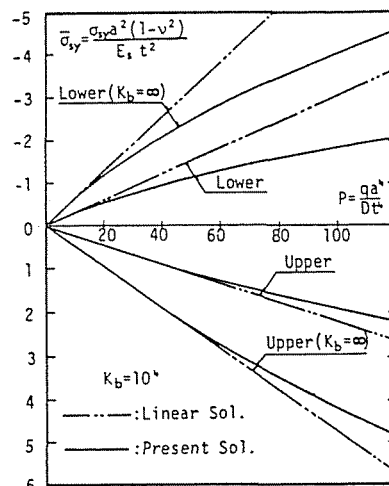
(a) C点のx方向筋の応力



(b) C点のy方向筋の応力

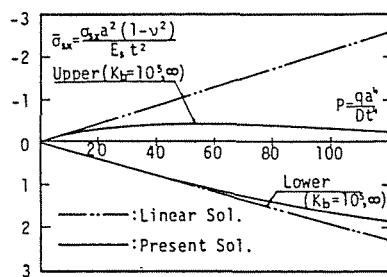


(c) A点のx方向筋の応力

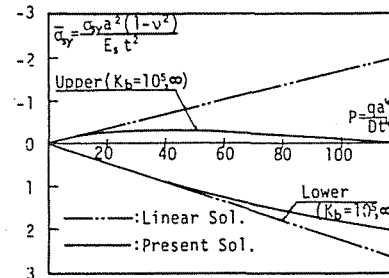


(d) b点のy方向筋の応力

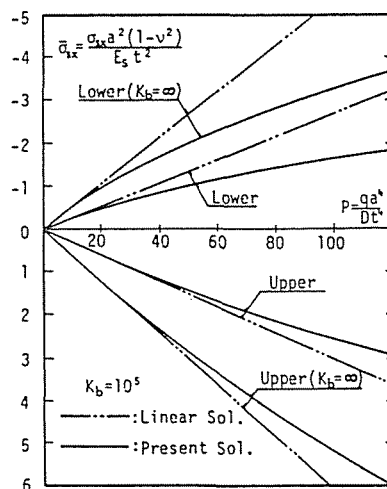
図4-30 $K_b=10^4$ の解の板主要点における各鉄筋応力の推移



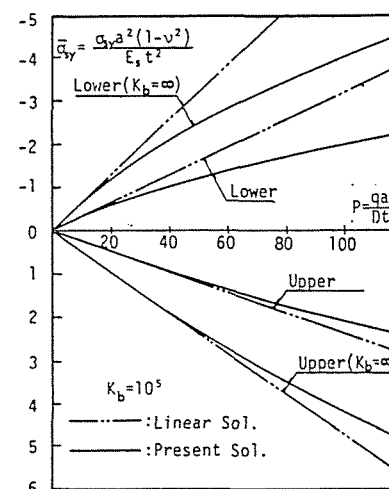
(a) C点のx方向筋の応力



(b) C点のy方向筋の応力



(c) A点のx方向筋の応力

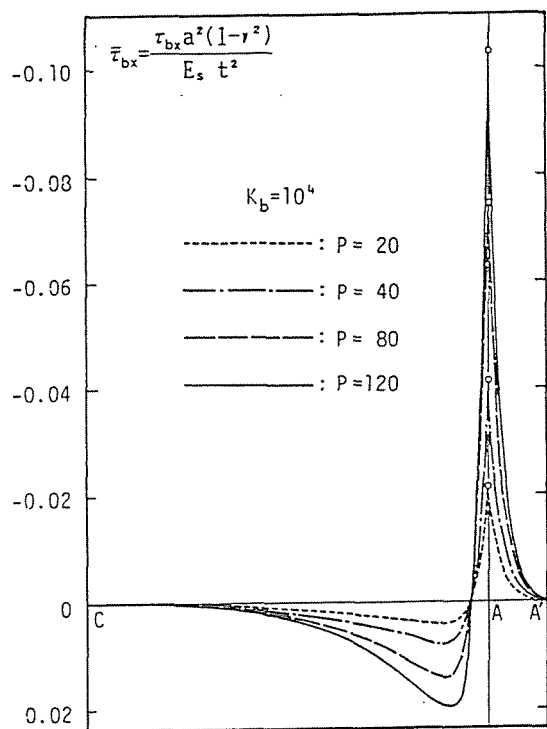


(d) b点のy方向筋の応力

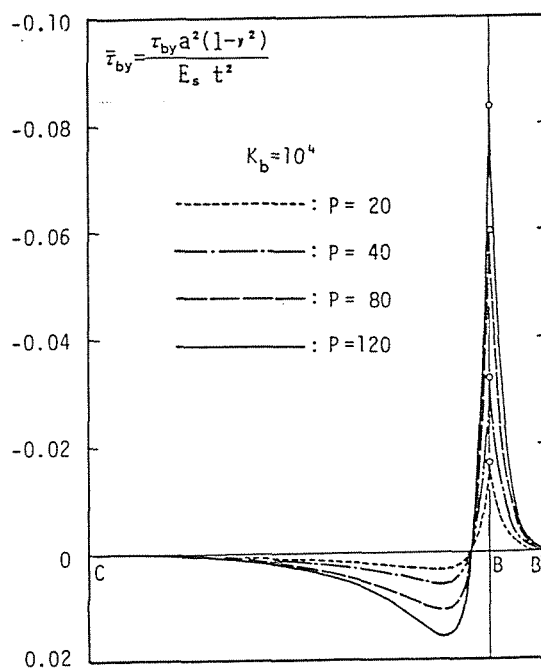
図4-31 $K_b=10^5$ の解の板主要点における各鉄筋応力の推移

は、定着部分での鉄筋のすべりの影響によって、 K_b の値が小さいほど著しく緩和される」ことを示している。図4-30の(a)~(d)と図4-31の(a)~(d)は、これらの鉄筋応力を $K_b=10^4$ と 10^5 の場合の板の主要点の鉄筋応力の変遷の形で表示し、それぞれ完全付着の解と比較したものである。各図の曲線は、先に述べた考察の妥当性を明瞭に裏づけている。

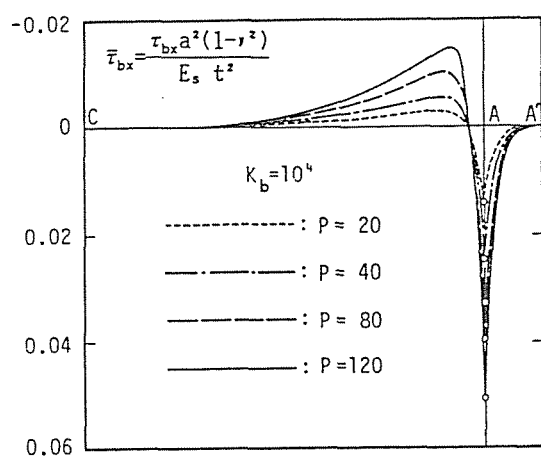
また、図4-32の(a)~(d)と図4-33の(a)~(d)には、 $K_b=10^4$ と 10^5 の場合の、板の中央線に沿う各鉄筋の付着応力分布曲線の推移状況をそれぞれ対比して掲げた。これらの図の結



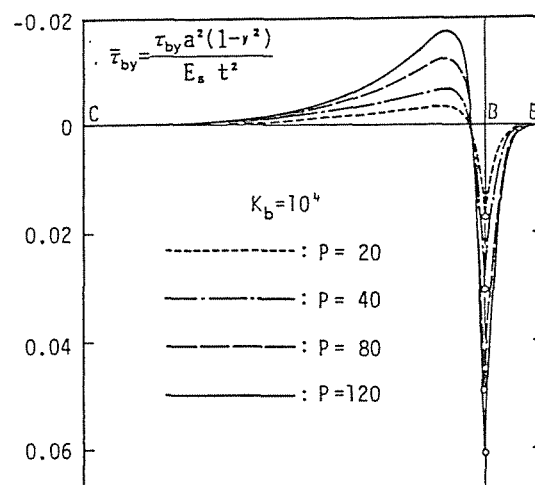
(a) x方向上端筋の付着応力分布



(b) y方向上端筋の付着応力分布



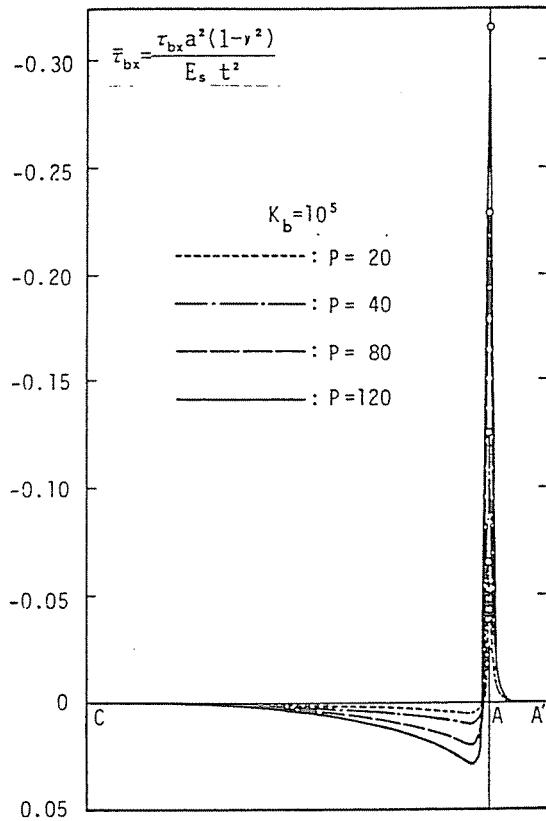
(c) x方向下端筋の付着応力分布



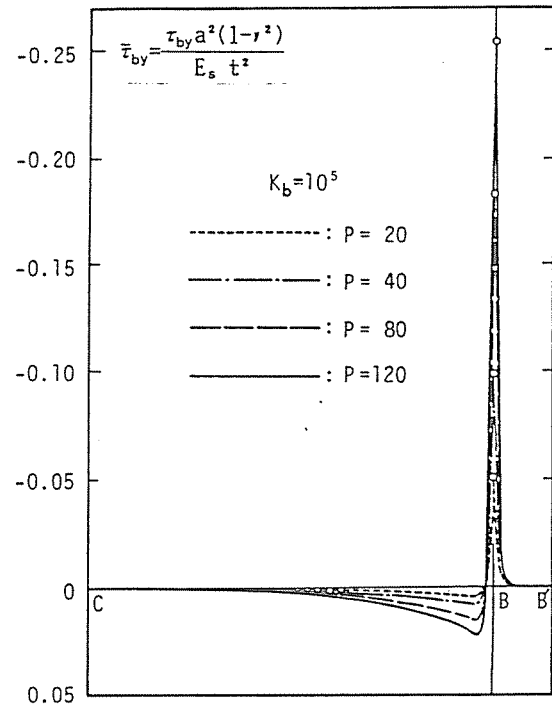
(d) y方向下端筋の付着応力分布

図4-32 $K_b=10^4$ の解の板中央線に沿う各鉄筋の付着応力分布曲線の推移

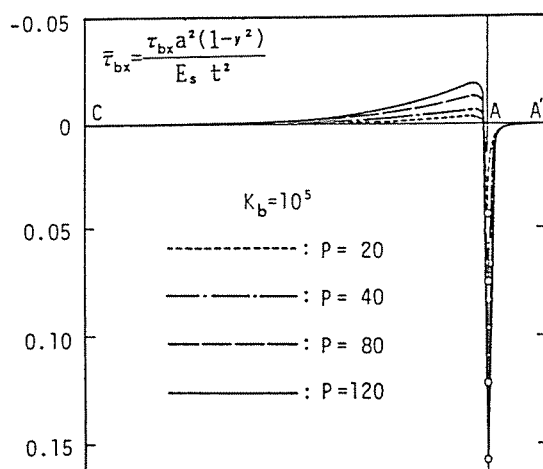
果は、「付着応力は拘束端近傍で急変し、付着係数が大きいほど、また、荷重が増加すればするほど端点A、Bにおいて先鋭化し、尚且つその値も大きくなる」ことを示しており、その分布形状も、完全付着の場合に予期される付図4-1のそれとは全く異なったものとな



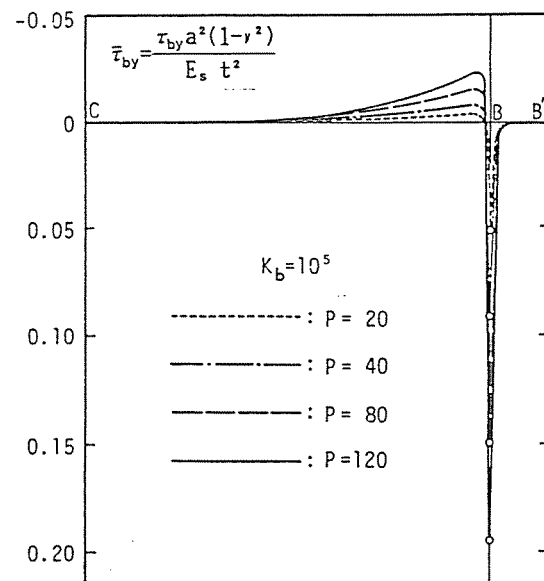
(a) x方向上端筋の付着応力分布



(b) y方向上端筋の付着応力分布

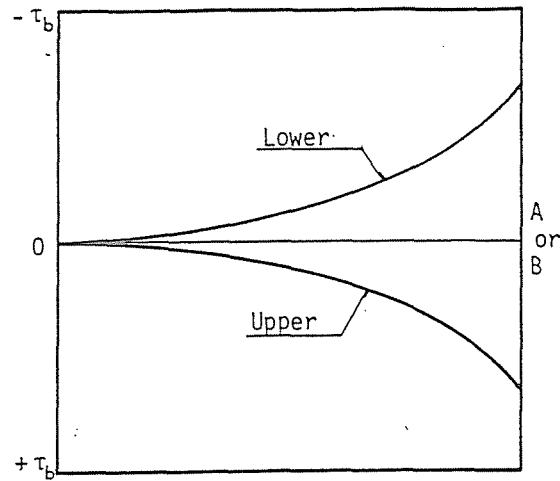


(c) x方向下端筋の付着応力分布



(d) y方向下端筋の付着応力分布

図4-33 $K_b=10^5$ の解の板中央線に沿う各鉄筋の付着応力分布曲線の推移



付図 4-1 完全付着の場合にとり得る一般的な付着応力分布

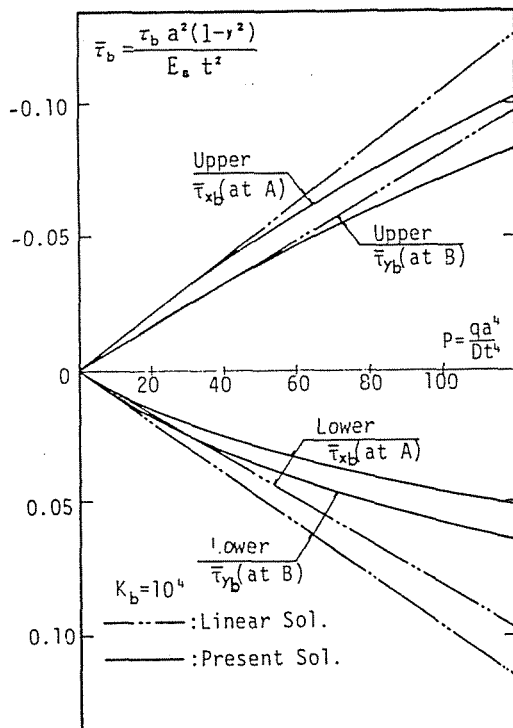


図4-34 $K_b=10^4$ の解の拘束端A,Bにおける各鉄筋の付着応力分布の推移

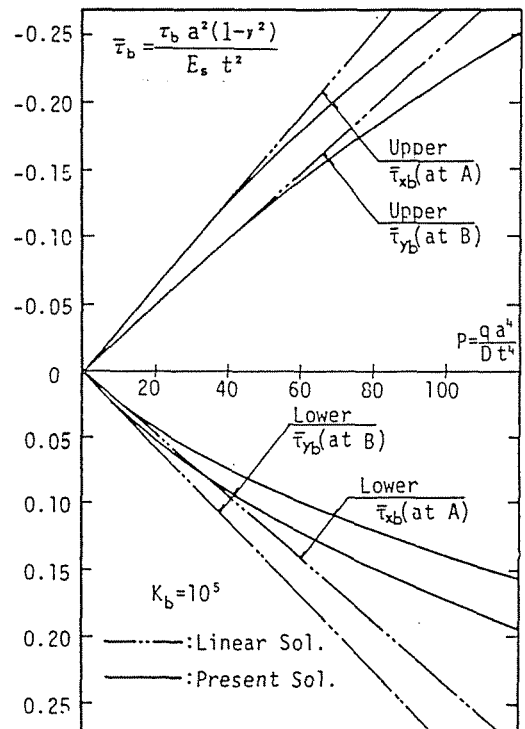


図4-35 $K_b=10^5$ の解の拘束端A,Bにおける各鉄筋の付着応力分布の推移

ることが分かる。図4-34と図4-35には、参考のため、それぞれ $K_b=10^4$ と $K_b=10^5$ に対する拘束端点A、Bにおける上・下筋の付着応力－無次元化荷重曲線を図示したが、これらの図中の各付着応力曲線は、鉄筋応力の場合と同様、荷重の増加とともに線形解（微小変形理論解）から離れて行き、次第に緩和されていくことを示している。

4. 5 本章のまとめ

第4章では、補強筋に付着すべりを許し、コンクリート部分には法線保持を仮定した場合のRC床板の曲げについて論じた。

本章の内容を要約し列挙すると以下のようなになる。

(1) 理論展開に当たっての基本仮定事項を列挙し、微小変形理論によるRC床板のための全ポテンシャル・エネルギー汎関数を求め、これを用いて補強筋の付着すべりを考慮した場合のRC床板の曲げを支配する基礎微分方程式を導いた。

(2) 理論の対象範囲を微小変形領域から幾何学的非線形領域にまで拡張するため、(1)と同様、エネルギー原理を用いて理論展開を行い、有限変形理論に基づくRC床板のための基礎微分方程式を導いた。

(3) 前項(1)と(2)の理論に基づき、有限要素法を用いて新たに定式化を行い、それぞれ微小変形理論、および有限変形理論によるRC床板のための有限要素方程式を誘導した。

(4) 前項(3)で展開した微小変形理論、および有限変形理論による有限要素解析法を用いて、二、三のモデルRC床板の数値計算を行い、次のような結論を得た。

即ち、微小変形理論による“x, y直交配筋を有する単純支持正方形RC床板”の解析結果から、①付着係数 K_b のRC床板の力学性状におよぼす効果は、第3章で取り扱ったRC梁部材の場合と同程度であり、 K_b の値が 10 kgf/cm^3 より小さくなると事実上付着なしのアンボンド状態に対応し、また、 10^4 kgf/cm^3 より大きくなると、ほぼ完全付着状態と見做すことができる。しかし、曲げモーメントについては、梁の場合とは異なり、その変動幅は曲げモーメントの全体量からすれば極く僅かではあるが、 K_b の値の変化に伴って変動すること。②配筋方向のみを「x, y直交配筋」から「斜め45度直交配筋」に変更した場合、鉄筋による補剛の効果は、「x, y直交配筋」のそれより優れており、床板全体の剛性も斜め45度直交配筋の方が大きくなること、等を明らかにした。

また、有限変形理論による“x, y直交配筋を有する周辺拘束正方形RC床板”の解析結果から、①通常の付着係数($K_b=10^4 \sim 10^5 \text{ kgf/cm}^3$)をもつ異形鉄筋の場合、拘束端近傍における鉄筋の応力と付着応力の分布形状は、完全付着のそれとは著しく異なったものとなること、②拘束梁内部での鉄筋の付着すべりの床板全体におよぼす影響は無視しうるほど小さいこと、等を明らかにした。

第4章のAPPENDIX

[4A - I] 微小変形理論による剛性マトリックスを構成する(4-77)~(4-79)式の部分
剛性マトリックスの各成分

(1) $[\bar{K}_{o.o}]$ の構成成分

(4-77)式より、

$$[\bar{K}_{o.o}] = \iint_{Re} [b_o]^T \{ t[D_c] + \sum^n A_{s,i}^* E_{s,i} [H_{s,i}]^T [H_{s,i}] \} [b_o] dx dy \quad (4A-1)$$

上式中に於て、

$$[E] = \{ t[D_c] + \sum^n A_{s,i}^* E_{s,i} [H_{s,i}]^T [H_{s,i}] \} \quad (4A-2)$$

と置き、3行3列のマトリックスである $[E]$ の成分を E_{ij} で表記すると、対称マトリックスである $[\bar{K}_{o.o}]$ の各構成成分 $\bar{K}_{o.o}^{ij}$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{o.o}^{11} &= \bar{K}_{o.o}^{12} = \bar{K}_{o.o}^{13} = \bar{K}_{o.o}^{14} = \bar{K}_{o.o}^{15} = \bar{K}_{o.o}^{16} = \bar{K}_{o.o}^{17} = \bar{K}_{o.o}^{18} = 0, \quad \bar{K}_{o.o}^{22} = A_E E_{11}, \\ \bar{K}_{o.o}^{23} &= A_E E_{13}, \quad \bar{K}_{o.o}^{24} = \bar{K}_{o.o}^{25} = 0, \quad \bar{K}_{o.o}^{26} = A_E E_{13}, \quad \bar{K}_{o.o}^{27} = A_E E_{12}, \quad \bar{K}_{o.o}^{28} = 0 \\ \bar{K}_{o.o}^{33} &= A_E E_{33}, \quad \bar{K}_{o.o}^{34} = \bar{K}_{o.o}^{35} = 0, \quad \bar{K}_{o.o}^{36} = A_E E_{33}, \quad \bar{K}_{o.o}^{37} = A_E E_{32}, \quad \bar{K}_{o.o}^{38} = 0 \\ \bar{K}_{o.o}^{44} &= A_E (E_{11} a_y^2 / 3 + E_{33} a_x^2 / 3), \quad \bar{K}_{o.o}^{45} = \bar{K}_{o.o}^{46} = \bar{K}_{o.o}^{47} = 0, \\ \bar{K}_{o.o}^{48} &= A_E (E_{13} a_y^2 / 3 + E_{23} a_x^2 / 3), \quad \bar{K}_{o.o}^{55} = \bar{K}_{o.o}^{56} = \bar{K}_{o.o}^{57} = \bar{K}_{o.o}^{58} = 0, \\ \bar{K}_{o.o}^{66} &= A_E E_{33}, \quad \bar{K}_{o.o}^{67} = A_E E_{23}, \quad \bar{K}_{o.o}^{68} = 0, \quad \bar{K}_{o.o}^{77} = A_E E_{22}, \quad \bar{K}_{o.o}^{78} = 0, \\ \bar{K}_{o.o}^{88} &= A_E (E_{22} a_x^2 / 3 + E_{33} a_y^2 / 3), \end{aligned} \right\} \quad (4A-3)$$

但し、 a_x, a_y ：矩形要素のxおよびy方向の1/2辺長、 A_E ：矩形要素の面積 ($A_E = 4a_x a_y$)。
尚、上記以外の成分 $\bar{K}_{o.o}^{ij}$ はマトリックスの対称性から、 $\bar{K}_{o.o}^{ij} = \bar{K}_{o.o}^{ji}$ となる。

(2) $[\bar{K}_{o.b}]$ の構成成分

(4-78)式より、

$$[\bar{K}_{o.b}] = \iint_{Re} [b_o]^T \{ \sum^n A_{s,i}^* E_{s,i} h_{s,i} [H_{s,i}]^T [H_{s,i}] \} [b_b] dx dy \quad (4A-4)$$

上式中に於て、

$$[F] = \sum^n A_{s,i}^* E_{s,i} h_{s,i} [H_{s,i}]^T [H_{s,i}] \quad (4A-5)$$

と置き、3行3列の係数マトリックスである $[F]$ の成分を F_{ij} で表記すると、 $[\bar{K}_{o.b}]$ の各構成成分 $\bar{K}_{o.b}^{ij}$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{o.b}^{11} &= \bar{K}_{o.b}^{12} = \bar{K}_{o.b}^{13} = \bar{K}_{o.b}^{14} = \bar{K}_{o.b}^{15} = \bar{K}_{o.b}^{16} = \bar{K}_{o.b}^{17} = \bar{K}_{o.b}^{18} = \bar{K}_{o.b}^{19} = \bar{K}_{o.b}^{10} = \bar{K}_{o.b}^{11} = \bar{K}_{o.b}^{12} = 0, \\ \bar{K}_{o.b}^{21} &= \bar{K}_{o.b}^{22} = \bar{K}_{o.b}^{23} = 0, \quad \bar{K}_{o.b}^{24} = -2A_E F_{11}, \quad \bar{K}_{o.b}^{25} = -2A_E F_{13}, \quad \bar{K}_{o.b}^{26} = -2A_E F_{12}, \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{ob}^{27} &= \bar{K}_{ob}^{28} = \bar{K}_{ob}^{29} = \bar{K}_{ob}^{210} = 0, \quad \bar{K}_{ob}^{211} = -2A_E F_{13} a_x^2, \quad \bar{K}_{ob}^{212} = -2A_E F_{13} a_y^2, \\
\bar{K}_{ob}^{31} &= \bar{K}_{ob}^{32} = \bar{K}_{ob}^{33} = 0, \quad \bar{K}_{ob}^{34} = -2A_E F_{13}, \quad \bar{K}_{ob}^{35} = -2A_E F_{33}, \quad \bar{K}_{ob}^{36} = -2A_E F_{23}, \\
\bar{K}_{ob}^{37} &= \bar{K}_{ob}^{38} = \bar{K}_{ob}^{39} = \bar{K}_{ob}^{310} = 0, \quad \bar{K}_{ob}^{311} = -2A_E F_{33} a_x^2, \quad \bar{K}_{ob}^{312} = -2A_E F_{33} a_y^2, \\
\bar{K}_{ob}^{41} &= \bar{K}_{ob}^{42} = \bar{K}_{ob}^{43} = \bar{K}_{ob}^{44} = \bar{K}_{ob}^{45} = \bar{K}_{ob}^{46} = 0, \quad \bar{K}_{ob}^{47} = -2A_E F_{13} a_x^2, \\
\bar{K}_{ob}^{48} &= -A_E (2F_{11} a_y^2 + 4F_{33} a_x^2)/3, \quad \bar{K}_{ob}^{49} = -A_E (2F_{23} a_x^2 + 4F_{13} a_y^2)/3, \\
\bar{K}_{ob}^{410} &= -2A_E F_{12} a_y^2, \quad \bar{K}_{ob}^{411} = \bar{K}_{ob}^{412} = 0, \\
\bar{K}_{ob}^{51} &= \bar{K}_{ob}^{52} = \bar{K}_{ob}^{53} = \bar{K}_{ob}^{54} = \bar{K}_{ob}^{55} = \bar{K}_{ob}^{56} = \bar{K}_{ob}^{57} = \bar{K}_{ob}^{58} = \bar{K}_{ob}^{59} = \bar{K}_{ob}^{510} = \bar{K}_{ob}^{511} = \bar{K}_{ob}^{512} = 0, \\
\bar{K}_{ob}^{61} &= \bar{K}_{ob}^{62} = \bar{K}_{ob}^{63} = 0, \quad \bar{K}_{ob}^{64} = -2A_E F_{13}, \quad \bar{K}_{ob}^{65} = -2A_E F_{33}, \quad \bar{K}_{ob}^{66} = -2A_E F_{23}, \\
\bar{K}_{ob}^{67} &= \bar{K}_{ob}^{68} = \bar{K}_{ob}^{69} = \bar{K}_{ob}^{610} = 0, \quad \bar{K}_{ob}^{611} = -2A_E F_{33} a_x^2, \quad \bar{K}_{ob}^{612} = -2A_E F_{33} a_y^2, \\
\bar{K}_{ob}^{71} &= \bar{K}_{ob}^{72} = \bar{K}_{ob}^{73} = 0, \quad \bar{K}_{ob}^{74} = -2A_E F_{12}, \quad \bar{K}_{ob}^{75} = -2A_E F_{23}, \quad \bar{K}_{ob}^{76} = -2A_E F_{22}, \\
\bar{K}_{ob}^{77} &= \bar{K}_{ob}^{78} = \bar{K}_{ob}^{79} = \bar{K}_{ob}^{710} = 0, \quad \bar{K}_{ob}^{711} = -2A_E F_{23} a_x^2, \quad \bar{K}_{ob}^{712} = -2A_E F_{23} a_y^2, \\
\bar{K}_{ob}^{81} &= \bar{K}_{ob}^{82} = \bar{K}_{ob}^{83} = \bar{K}_{ob}^{84} = \bar{K}_{ob}^{85} = \bar{K}_{ob}^{86} = 0, \quad \bar{K}_{ob}^{87} = -2A_E F_{12} a_x^2, \\
\bar{K}_{ob}^{88} &= -A_E (2F_{13} a_y^2 + 4F_{23} a_x^2)/3, \quad \bar{K}_{ob}^{89} = -A_E (2F_{22} a_x^2 + 4F_{33} a_y^2)/3, \\
\bar{K}_{ob}^{810} &= -2A_E F_{23} a_y^2, \quad \bar{K}_{ob}^{811} = \bar{K}_{ob}^{812} = 0,
\end{aligned} \tag{4A-6}$$

但し、 a_x, a_y : 矩形要素の x および y 方向の $1/2$ 辺長, A_E : 矩形要素の面積 ($A_E = 4a_x a_y$).

(3) $[\bar{K}_{bb}]$ の構成成分

(4-79)式より、

$$[\bar{K}_{bb}] = \iint_{R_e} [b_b]^T \left\{ \frac{t^3}{12} [D_c] + \sum_{i=1}^n A_{si}^* E_{si} h_{si}^2 [H_{si}]^T [H_{si}] \right\} [b_b] dx dy \tag{4A-7}$$

上式中に於て、

$$[G] = \left\{ \frac{t^3}{12} [D_c] + \sum_{i=1}^n A_{si}^* E_{si} h_{si}^2 [H_{si}]^T [H_{si}] \right\} \tag{4A-8}$$

と置き、3行3列の係数マトリックスである $[G]$ の成分を G_{ij} で表記すると、 $[\bar{K}_{bb}]$ の各構成成分 $\bar{K}_{bb}^{ij}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
\bar{K}_{bb}^{11} &= \bar{K}_{bb}^{12} = \bar{K}_{bb}^{13} = \bar{K}_{bb}^{14} = \bar{K}_{bb}^{15} = \bar{K}_{bb}^{16} = \bar{K}_{bb}^{17} = \bar{K}_{bb}^{18} = \bar{K}_{bb}^{19} = \bar{K}_{bb}^{110} = \bar{K}_{bb}^{111} = \bar{K}_{bb}^{112} = 0, \\
\bar{K}_{bb}^{22} &= \bar{K}_{bb}^{23} = \bar{K}_{bb}^{24} = \bar{K}_{bb}^{25} = \bar{K}_{bb}^{26} = \bar{K}_{bb}^{27} = \bar{K}_{bb}^{28} = \bar{K}_{bb}^{29} = \bar{K}_{bb}^{210} = \bar{K}_{bb}^{211} = \bar{K}_{bb}^{212} = 0, \\
\bar{K}_{bb}^{33} &= \bar{K}_{bb}^{34} = \bar{K}_{bb}^{35} = \bar{K}_{bb}^{36} = \bar{K}_{bb}^{37} = \bar{K}_{bb}^{38} = \bar{K}_{bb}^{39} = \bar{K}_{bb}^{310} = \bar{K}_{bb}^{311} = \bar{K}_{bb}^{312} = 0, \\
\bar{K}_{bb}^{44} &= 4A_E G_{11}, \quad \bar{K}_{bb}^{45} = 4A_E G_{13}, \quad \bar{K}_{bb}^{46} = 4A_E G_{12}, \quad \bar{K}_{bb}^{47} = \bar{K}_{bb}^{48} = \bar{K}_{bb}^{49} = \bar{K}_{bb}^{410} = 0, \\
\bar{K}_{bb}^{411} &= 4A_E G_{13} a_x^2, \quad \bar{K}_{bb}^{412} = 4A_E G_{13} a_y^2, \quad \bar{K}_{bb}^{55} = 4A_E G_{33}, \quad \bar{K}_{bb}^{56} = 4A_E G_{23}, \\
\bar{K}_{bb}^{57} &= \bar{K}_{bb}^{58} = \bar{K}_{bb}^{59} = \bar{K}_{bb}^{510} = 0, \quad \bar{K}_{bb}^{511} = 4A_E G_{33} a_x^2, \quad \bar{K}_{bb}^{512} = 4A_E G_{33} a_y^2, \\
\bar{K}_{bb}^{66} &= 4A_E G_{22}, \quad \bar{K}_{bb}^{67} = \bar{K}_{bb}^{68} = \bar{K}_{bb}^{69} = \bar{K}_{bb}^{610} = 0, \quad \bar{K}_{bb}^{611} = 4A_E G_{23} a_x^2, \\
\bar{K}_{bb}^{612} &= 4A_E G_{23} a_y^2, \quad \bar{K}_{bb}^{77} = 12A_E G_{11} a_x^2, \quad \bar{K}_{bb}^{78} = 8A_E G_{13} a_x^2, \quad \bar{K}_{bb}^{79} = 4A_E G_{12} a_x^2, \\
\bar{K}_{bb}^{710} &= \bar{K}_{bb}^{711} = \bar{K}_{bb}^{712} = 0, \quad \bar{K}_{bb}^{88} = A_E (4G_{11} a_y^2 + 16G_{33} a_x^2)/3,
\end{aligned} \tag{4A-9}$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{bb}^{89} &= A_E(8G_{23}a_x^2 + 8G_{13}a_y^2)/3, \quad \bar{K}_{bb}^{810} = 4A_E G_{12}a_y^2, \quad \bar{K}_{bb}^{811} = \bar{K}_{bb}^{812} = 0, \\ \bar{K}_{bb}^{99} &= A_E(4G_{22}a_x^2 + 16G_{33}a_y^2)/3, \quad \bar{K}_{bb}^{910} = 8A_E G_{23}a_y^2, \quad \bar{K}_{bb}^{911} = \bar{K}_{bb}^{912} = 0, \\ \bar{K}_{bb}^{1010} &= 12A_E G_{22}a_y^2, \quad \bar{K}_{bb}^{1011} = \bar{K}_{bb}^{1012} = 0, \quad \bar{K}_{bb}^{1111} = A_E^3 G_{11}/4 + 36A_E G_{33}a_x^4/5, \\ \bar{K}_{bb}^{1112} &= A_E^3(G_{12} + G_{33})/4, \quad \bar{K}_{bb}^{1212} = A_E^3 G_{22}/4 + 36A_E G_{33}a_y^4/5 \end{aligned} \right\}$$

但し、 a_x, a_y ：矩形要素の x および y 方向の $1/2$ 辺長， A_E ：矩形要素の面積 ($A_E = 4a_x a_y$)。
尚、上記以外の成分 $\bar{K}_{bb}^{iji}$ はマトリックスの対称性から、 $\bar{K}_{bb}^{iji} = \bar{K}_{bb}^{jii}$ となる。

[4A - II] 有限変形理論による接線剛性マトリックスを構成する(4-100)～(4-103)式の部分剛性マトリックスの $[_o\bar{K}_{bb}]$, $[_N\bar{K}_{ob}]$, $[_N\bar{K}_{bb}]$, $[_N\bar{K}_{bsi}]$ の各成分

(1) $[_o\bar{K}_{bb}]$ の構成成分

(4-100)式より、

$$[_o\bar{K}_{bb}] = \iint_{R_e} [b_{oNL}]^T [N^*] [b_{oNL}] \, dx dy \quad (4A-10)$$

上式中の $[N^*]$ の表示式を得るために、膜力 $\{N\}$ を次のように 4 つの成分に分離しておく。

$$\{N\} = \begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \{LN_o\} + \{NN_o\} + \{N_b\} + \{N_s\} \quad (4A-11)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \{LN_o\} &= (t[D_c] + \sum^n A_{si} E_{si} [H_{si}]^T [H_{si}]) [b_o] [C_o^{-1}] \{\Delta_o\} \\ &= [E] [b_o] [C_o^{-1}] \{\Delta_o\} \\ \{NN_o\} &= \frac{1}{2} (t[D_c] + \sum^n A_{si} E_{si} [H_{si}]^T [H_{si}]) [R] [b_{oNL}] [C_b^{-1}] \{\Delta_b\} \\ &= \frac{1}{2} [E] [R] [b_{oNL}] [C_b^{-1}] \{\Delta_b\} \\ \{N_b\} &= (\sum^n A_{si} E_{si} h_{si} [H_{si}]^T [H_{si}]) [b_o] [C_b^{-1}] \{\Delta_b\} \\ &= [\bar{E}] [b_o] [C_b^{-1}] \{\Delta_b\} \\ \{N_s\} &= \sum^n (A_{si} E_{si} [H_{si}] [b_{si}] [C_s^{-1}] \{\Delta_{si}\}) \end{aligned} \right\} \quad (4A-12)$$

但し、 $\{\Delta_o\}, \{\Delta_b\}, \{\Delta_{si}\}$ ：各々面内変位、曲げ変位、および i 層の鉄筋のすべり変位に関する、その解析時点におけるトータル節点変位ベクトルで、それぞれの増分変位量 $\{d\Delta_o\}, \{d\Delta_b\}, \{d\Delta_{si}\}$ とは異なる、 $[R]$ ：(4-84)式に従って $\{\Delta_b\}$ と要素中心点の座標値を用いて評価される係数マトリックス。

故に、 $[N^*]$ は次のように表わされる。

$$[N^*] = [LN_o^*] + [NN_o^*] + [N_b^*] + [N_s^*] \quad (4A-13)$$

この関係を用いると、(4A-10)式の $[\bar{K}_{bb}]$ は次式で表示することができる。

$$[\bar{K}_{bb}] = [{}_L\bar{K}_{oo}] + [{}_N\bar{K}_{oo}] + [{}_o\bar{K}_{ob}] + [{}_o\bar{K}_{os}] \quad (4A-14)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} [{}_L\bar{K}_{oo}] &= \iint_{Re} [b_{oNL}]^T [{}_LN_o^*] [b_{oNL}] \, dx dy \\ [{}_N\bar{K}_{oo}] &= \iint_{Re} [b_{oNL}]^T [{}_NN_o^*] [b_{oNL}] \, dx dy \\ [{}_o\bar{K}_{ob}] &= \iint_{Re} [b_{oNL}]^T [{}_N_b^*] [b_{oNL}] \, dx dy \\ [{}_o\bar{K}_{os}] &= \iint_{Re} [b_{oNL}]^T [{}_N_s^*] [b_{oNL}] \, dx dy \end{aligned} \right\} \quad (4A-15)$$

従って、 $[\bar{K}_{bb}]$ を評価するためには、(4A-15)式の $[{}_L\bar{K}_{oo}]$, $[{}_N\bar{K}_{oo}]$, $[{}_o\bar{K}_{ob}]$, $[{}_o\bar{K}_{os}]$ を求め
る必要となる。

a) $[{}_L\bar{K}_{oo}]$ の評価

(4A-15)式中の $[{}_L\bar{K}_{oo}]$ を評価するための $\{{}_LN_o\}$ は(4A-12)式から、次のようになる。

$$\{{}_LN_o\} = \begin{Bmatrix} {}_LN_{ox} \\ {}_LN_{oy} \\ {}_LN_{oxy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Gamma_{11} + \Gamma_{12}Y + \Gamma_{13}X \\ \Gamma_{21} + \Gamma_{22}Y + \Gamma_{23}X \\ \Gamma_{31} + \Gamma_{32}Y + \Gamma_{33}X \end{Bmatrix} \quad (4A-16)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11} &= E_{11} \alpha_{o2} + E_{12} \alpha_{o8}, \quad \Gamma_{12} = E_{11} \alpha_{o4}, \quad \Gamma_{13} = E_{12} \alpha_{o9}, \\ \Gamma_{21} &= E_{12} \alpha_{o2} + E_{22} \alpha_{o8}, \quad \Gamma_{22} = E_{12} \alpha_{o4}, \quad \Gamma_{23} = E_{22} \alpha_{o9}, \\ \Gamma_{31} &= E_{33} (\alpha_{o3} + \alpha_{o6}), \quad \Gamma_{32} = E_{33} \alpha_{o9}, \quad \Gamma_{33} = E_{33} \alpha_{o4}, \end{aligned} \right\} \quad (4A-17)$$

但し、 E_{ij} : (4A-2)式の $[E]$ の成分、 α_{oi} : その解析時点でのトータル変位 $\{\Delta_o\}$ を用
い(4-58)式で評価される一般化変位 $\{\alpha_o\}$ の成分、

従って、 $[{}_LN_o^*]$ は、

$$[{}_LN_o^*] = \begin{bmatrix} {}_LN_{ox} & {}_LN_{oxy} \\ {}_LN_{oxy} & {}_LN_{oy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Gamma_{11} + \Gamma_{12}Y + \Gamma_{13}X) & (\Gamma_{31} + \Gamma_{32}Y + \Gamma_{33}X) \\ (\Gamma_{31} + \Gamma_{32}Y + \Gamma_{33}X) & (\Gamma_{21} + \Gamma_{22}Y + \Gamma_{23}X) \end{bmatrix} \quad (4A-18)$$

(4A-16), (4A-17)式の関係を用いて(4A-15)式の $[{}_L\bar{K}_{oo}]$ の表示式に代入して整理すると、 $[{}_L\bar{K}_{oo}]$
の各成分が得られ次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} {}_L\bar{K}_{ooo}^{11} &= {}_L\bar{K}_{ooo}^{12} = {}_L\bar{K}_{ooo}^{13} = {}_L\bar{K}_{ooo}^{14} = {}_L\bar{K}_{ooo}^{15} = {}_L\bar{K}_{ooo}^{16} = {}_L\bar{K}_{ooo}^{17} = {}_L\bar{K}_{ooo}^{18} = {}_L\bar{K}_{ooo}^{19} = \\ {}_L\bar{K}_{ooo}^{110} &= {}_L\bar{K}_{ooo}^{111} = {}_L\bar{K}_{ooo}^{112} = 0, \quad {}_L\bar{K}_{ooo}^{22} = A_E \Gamma_{11}, \quad {}_L\bar{K}_{ooo}^{23} = A_E \Gamma_{31}, \quad {}_L\bar{K}_{ooo}^{24} = 8\Gamma_{13}a_x^3a_y, \\ {}_L\bar{K}_{ooo}^{25} &= 4\Gamma_{12}a_x^3a_y/3 + 4\Gamma_{33}a_x^3a_y/3, \quad {}_L\bar{K}_{ooo}^{26} = 8\Gamma_{32}a_x^3a_y, \quad {}_L\bar{K}_{ooo}^{27} = 4\Gamma_{11}a_x^3a_y, \\ {}_L\bar{K}_{ooo}^{28} &= 4\Gamma_{31}a_x^3a_y/3, \quad {}_L\bar{K}_{ooo}^{29} = 4\Gamma_{11}a_x^3a_y/3, \quad {}_L\bar{K}_{ooo}^{210} = 4\Gamma_{31}a_x^3a_y, \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{2,11}=4\Gamma_{12}a_x^3a_y^3/3+4\Gamma_{33}a_x^5a_y/5, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{2,12}=4\Gamma_{12}a_xa_y^5/5+4\Gamma_{33}a_x^3a_y^3/3, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{3,3}=A_E\Gamma_{21}, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{3,4}=8\Gamma_{33}a_x^3a_y/3, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{3,5}=4\Gamma_{32}a_xa_y^3/3+4\Gamma_{23}a_x^3a_y/3, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{3,6}=8\Gamma_{22}a_xa_y^3/3, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{3,7}=4\Gamma_{31}a_x^3a_y, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{3,8}=4\Gamma_{21}a_x^3a_y/3, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{3,9}=4\Gamma_{31}a_xa_y^3/3, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{3,10}=4\Gamma_{21}a_xa_y^3, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{3,11}=4\Gamma_{32}a_x^3a_y^3/3+4\Gamma_{23}a_x^5a_y/5, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{3,12}=4\Gamma_{32}a_xa_y^5/5+4\Gamma_{23}a_x^3a_y^3/3, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{4,4}=16\Gamma_{11}a_x^3a_y/3, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{4,5}=8\Gamma_{31}a_x^3a_y/3, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{4,6}=0, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{4,7}=24\Gamma_{13}a_x^5a_y/5, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{4,8}=16\Gamma_{12}a_x^3a_y^3/9+8\Gamma_{33}a_x^5a_y/5, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{4,9}=8(\Gamma_{13}+2\Gamma_{32})a_x^3a_y^3, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{4,10}=8\Gamma_{33}a_x^3a_y^3/3, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{4,11}=8\Gamma_{31}a_x^5a_y/5, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{4,12}=8\Gamma_{31}a_x^3a_y^3/3, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{5,1}=0, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{5,2}=4\Gamma_{12}a_xa_y^3/3+4\Gamma_{33}a_x^3a_y/3, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{5,5}=4\Gamma_{11}a_xa_y^3/3+4\Gamma_{12}a_x^3a_y/3, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{5,6}=8\Gamma_{31}a_xa_y^3/3, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{5,7}=4\Gamma_{12}a_x^3a_y^3/3+12\Gamma_{33}a_x^5a_y/5, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{5,8}=4(2\Gamma_{13}+3\Gamma_{32})a_x^3a_y^3/9+4\Gamma_{23}a_x^5a_y/5, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{5,9}=4\Gamma_{12}a_xa_y^5/5+4(3\Gamma_{33}+2\Gamma_{22})a_x^3a_y^3/9, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{5,10}=12\Gamma_{32}a_xa_y^5/5+4\Gamma_{23}a_x^3a_y^3/3, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{5,11}=4\Gamma_{11}a_x^3a_y^3/3+4\Gamma_{21}a_x^5a_y/5, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{5,12}=4\Gamma_{11}a_xa_y^5/5+4\Gamma_{21}a_x^3a_y^3/3, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{6,6}=16\Gamma_{21}a_xa_y^3/3, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{6,7}=8\Gamma_{32}a_x^3a_y^3/3, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{6,8}=8(2\Gamma_{33}+\Gamma_{22})a_x^3a_y^3/9, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{6,9}=8\Gamma_{32}a_xa_y^5/5+16\Gamma_{23}a_x^3a_y^3/9, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{6,10}=24\Gamma_{22}a_xa_y^5/5, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{6,11}=8\Gamma_{31}a_x^3a_y^3/3, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{6,12}=8\Gamma_{31}a_xa_y^5/5, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{7,7}=36\Gamma_{11}a_x^5a_y/5, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{7,8}=12\Gamma_{31}a_x^5a_y/5, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{7,9}=4\Gamma_{11}a_x^3a_y^3/3, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{7,10}=4\Gamma_{31}a_x^3a_y^3, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{7,11}=12\Gamma_{12}a_x^5a_y^3/5+12\Gamma_{33}a_x^7a_y/7, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{7,12}=4\Gamma_{12}a_x^3a_y^5/5+12\Gamma_{33}a_x^5a_y^3/5, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{8,8}=16\Gamma_{11}a_x^3a_y^3/9+4\Gamma_{21}a_x^5a_y/5, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{8,9}=20\Gamma_{31}a_x^3a_y^3/9, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{8,10}=4\Gamma_{21}a_x^3a_y^3/3, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{8,11}=4(6\Gamma_{13}+5\Gamma_{32})a_x^5a_y^3/15+4\Gamma_{23}a_x^7a_y/7, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{8,12}=4(2\Gamma_{13}+7\Gamma_{32})a_x^3a_y^5/15+4\Gamma_{23}a_x^5a_y^3/5, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{9,9}=4\Gamma_{11}a_xa_y^5/5+16\Gamma_{21}a_x^3a_y^3/9, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{9,10}=12\Gamma_{31}a_xa_y^5/5, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{9,11}=4\Gamma_{12}a_x^3a_y^5/15+4(7\Gamma_{33}+2\Gamma_{22})a_x^5a_y^3/15, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{9,12}=4\Gamma_{12}a_x^3a_y^5/7+4(5\Gamma_{33}+6\Gamma_{22})a_x^5a_y^3/15, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{10,10}=36\Gamma_{21}a_xa_y^5/5, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{10,11}=12\Gamma_{32}a_x^3a_y^5/5+4\Gamma_{23}a_x^5a_y^3/5, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{10,12}=12\Gamma_{32}a_xa_y^7/7+12\Gamma_{23}a_x^3a_y^5/5, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{11,11}=12\Gamma_{11}a_x^5a_y^3/5+4\Gamma_{21}a_x^7a_y/7, \quad {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{11,12}=4\Gamma_{11}a_x^3a_y^5/5+4\Gamma_{21}a_x^5a_y^3/5, \\
& {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{12,12}=4\Gamma_{11}a_xa_y^7/7+12\Gamma_{21}a_x^3a_y^5/5,
\end{aligned} \tag{4A-19}$$

但し、 a_x, a_y : 矩形要素の x および y 方向の $1/2$ 辺長、 A_E : 矩形要素の面積 ($A_E=4a_xa_y$)。尚、上記以外の成分 ${}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{i,j}$ はマトリックスの対称性から、 ${}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{i,j} = {}_{L\sigma}\bar{K}_{00}^{j,i}$ となる。

b) $[{}_{N\sigma}\bar{K}_{00}]$ の評価

(4A-15) 式中の $[{}_{N\sigma}\bar{K}_{00}]$ を得るための $[{}_{NN}\bar{K}_{00}^*]$ を評価するため、(4A-12) 式に基づき、要素の中央点の座標値を用いたマトリックス $[R]$ と $[b_{0NL}]$ によって求めると^{7), 8)}、 $\{{}_{NN}\bar{K}_{00}^*\}$ は下

式で表示される。

$$\{N N_o\} = \begin{Bmatrix} N N_{ox} \\ N N_{oy} \\ N N_{oxy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} N E_{11} \alpha_{b2} + N E_{12} \alpha_{b3} \\ N E_{21} \alpha_{b2} + N E_{22} \alpha_{b3} \\ N E_{31} \alpha_{b2} + N E_{32} \alpha_{b3} \end{Bmatrix} \quad (4A-20)$$

但し、 α_{bi} ：トータル変位 $\{\Delta_b\}$ を用い(4-65)式で評価される一般化変位 $\{\alpha_b\}$ の成分、
また、上式中の $N E_{ij}$ は、次式で定義される係数マトリックス $[N E]$ の構成成分である。

$$[N E] = \frac{1}{2} [E] [R] = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (E_{11} R_{11} + E_{13} R_{31}) & (E_{12} R_{22} + E_{13} R_{32}) \\ (E_{21} R_{11} + E_{23} R_{31}) & (E_{22} R_{22} + E_{23} R_{32}) \\ (E_{31} R_{11} + E_{33} R_{31}) & (E_{32} R_{22} + E_{33} R_{32}) \end{bmatrix} \quad (4A-21)$$

但し、 $[E]$ ：(4A-2)式のマトリックス、 $[R]$ ：(4-84)式に従い、その時点のトータル
節点変位 $\{\Delta_b\}$ と要素の中心点座標値を用いて評価される係数マトリックス。

(4A-20)式を用いると、 $[N_o \bar{K}_{oo}]$ は(4A-15)式の関係より求められ、各成分はそれぞれ次の
ようになる。

$$\left. \begin{aligned} N_o \bar{K}_{ooo}^{11} &= N_o \bar{K}_{ooo}^{12} = N_o \bar{K}_{ooo}^{13} = N_o \bar{K}_{ooo}^{14} = N_o \bar{K}_{ooo}^{15} = N_o \bar{K}_{ooo}^{16} = N_o \bar{K}_{ooo}^{17} = N_o \bar{K}_{ooo}^{18} = N_o \bar{K}_{ooo}^{19} = 0, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{110} &= N_o \bar{K}_{ooo}^{111} = N_o \bar{K}_{ooo}^{112} = 0, N_o \bar{K}_{ooo}^{22} = N N_x A_E, N_o \bar{K}_{ooo}^{23} = N N_{xy} A_E, N_o \bar{K}_{ooo}^{24} = 0, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{25} &= N_o \bar{K}_{ooo}^{26} = 0, N_o \bar{K}_{ooo}^{27} = 4 N N_x a_x^3 a_y, N_o \bar{K}_{ooo}^{28} = 4 N N_{xy} a_x^3 a_y / 3, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{29} &= 4 N N_x a_x a_y^3 / 3, N_o \bar{K}_{ooo}^{210} = 4 N N_{xy} a_x a_y^3 / 3, N_o \bar{K}_{ooo}^{211} = N_o \bar{K}_{ooo}^{212} = 0, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{33} &= N N_y A_E, N_o \bar{K}_{ooo}^{34} = N_o \bar{K}_{ooo}^{35} = N_o \bar{K}_{ooo}^{36} = 0, N_o \bar{K}_{ooo}^{37} = 4 N N_{xy} a_x^3 a_y, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{38} &= 4 N N_y a_x^3 a_y / 3, N_o \bar{K}_{ooo}^{39} = 4 N N_{xy} a_x a_y^3 / 3, N_o \bar{K}_{ooo}^{310} = 4 N N_y a_x a_y^3, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{311} &= N_o \bar{K}_{ooo}^{312} = 0, N_o \bar{K}_{ooo}^{44} = 16 N N_x a_x^3 a_y / 3, N_o \bar{K}_{ooo}^{45} = 8 N N_{xy} a_x^3 a_y / 3, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{46} &= N_o \bar{K}_{ooo}^{47} = N_o \bar{K}_{ooo}^{48} = N_o \bar{K}_{ooo}^{49} = N_o \bar{K}_{ooo}^{410} = 0, N_o \bar{K}_{ooo}^{411} = 8 N N_{xy} a_x^5 a_y / 5, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{412} &= 8 N N_{xy} a_x^3 a_y^3 / 3, N_o \bar{K}_{ooo}^{55} = 4 (N N_x a_x a_y^3 + N N_y a_x^3 a_y) / 3, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{56} &= 8 N N_{xy} a_x^3 a_y / 3, N_o \bar{K}_{ooo}^{57} = N_o \bar{K}_{ooo}^{58} = N_o \bar{K}_{ooo}^{59} = N_o \bar{K}_{ooo}^{510} = 0, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{511} &= 4 N N_x a_x^3 a_y^3 / 3 + 4 N N_y a_x^5 a_y / 5, N_o \bar{K}_{ooo}^{512} = 4 N N_x a_x a_y^5 / 5 + 4 N N_y a_x^3 a_y^3 / 3, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{66} &= 16 N N_y a_x a_y^3 / 3, N_o \bar{K}_{ooo}^{67} = N_o \bar{K}_{ooo}^{68} = N_o \bar{K}_{ooo}^{69} = N_o \bar{K}_{ooo}^{610} = 0, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{611} &= 8 N N_{xy} a_x^3 a_y^3 / 3, N_o \bar{K}_{ooo}^{612} = 8 N N_{xy} a_x a_y^5 / 5, N_o \bar{K}_{ooo}^{77} = 36 N N_x a_x^5 a_y / 5, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{78} &= 12 N N_{xy} a_x^5 a_y / 5, N_o \bar{K}_{ooo}^{79} = 4 N N_x a_x^3 a_y^3 / 3, N_o \bar{K}_{ooo}^{710} = 4 N N_x a_x^3 a_y^3, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{711} &= N_o \bar{K}_{ooo}^{712} = 0, N_o \bar{K}_{ooo}^{88} = 16 N N_x a_x^3 a_y^3 / 9 + 4 N N_y a_x^5 a_y / 5, N_o \bar{K}_{ooo}^{89} = 20 N N_x a_x a_y^3 / 9, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{810} &= 4 N N_y a_x^3 a_y^3 / 3, N_o \bar{K}_{ooo}^{811} = N_o \bar{K}_{ooo}^{812} = 0, N_o \bar{K}_{ooo}^{99} = 4 N N_x a_x a_y^5 / 5 + 16 N N_y a_x^3 a_y^3 / 9, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{910} &= 12 N N_{xy} a_x a_y^5 / 5, N_o \bar{K}_{ooo}^{911} = N_o \bar{K}_{ooo}^{912} = 0, N_o \bar{K}_{ooo}^{1010} = 36 N N_y a_x a_y^5 / 5, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{1011} &= N_o \bar{K}_{ooo}^{1012} = 0, N_o \bar{K}_{ooo}^{1111} = 12 N N_x a_x^5 a_y^3 / 5 + 4 N N_y a_x^7 a_y / 7, \\ N_o \bar{K}_{ooo}^{1112} &= 4 N N_x a_x^3 a_y^5 / 5 + 4 N N_y a_x^5 a_y^3 / 5, N_o \bar{K}_{ooo}^{1212} = 4 N N_x a_x a_y^7 / 7 + 12 N N_y a_x^3 a_y^3 / 5, \end{aligned} \right\} \quad (4A-22)$$

但し、 a_x, a_y ：矩形要素の x および y 方向の 1/2 辺長、 A_E ：矩形要素の面積 ($A_E = 4a_x a_y$)。

尚、上記以外の成分 ${}_N\bar{K}_{00}^{ij}$ はマトリックスの対称性から、 ${}_N\bar{K}_{00}^{ji} = {}_N\bar{K}_{00}^{ij}$ となる。

c) $[_0\bar{K}_{0b}]$ の評価

(4A-15)式中の $[_0\bar{K}_{0b}]$ を得るため、(4A-12)式に基づき $\{N_b\}$ を展開すると下式で表示することができる。

$$\{N_b\} = \begin{Bmatrix} N_{bx} \\ N_{by} \\ N_{bxy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Gamma_{11} + \Gamma_{12}Y + \Gamma_{13}X + \Gamma_{14}XY \\ \Gamma_{21} + \Gamma_{22}Y + \Gamma_{23}X + \Gamma_{24}XY \\ \Gamma_{31} + \Gamma_{32}Y + \Gamma_{33}X + \Gamma_{34}XY \end{Bmatrix} \quad (4A-23)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11} &= -2(\bar{E}_{11}\alpha_{b4} + \bar{E}_{12}\alpha_{b6}), & \Gamma_{12} &= -2(\bar{E}_{11}\alpha_{b8} + 3\bar{E}_{12}\alpha_{b10}), \\ \Gamma_{13} &= -2(3\bar{E}_{11}\alpha_{b7} + \bar{E}_{12}\alpha_{b9}), & \Gamma_{14} &= -6(\bar{E}_{11}\alpha_{b11} + \bar{E}_{12}\alpha_{b12}), \\ \Gamma_{21} &= -2(\bar{E}_{12}\alpha_{b4} + \bar{E}_{22}\alpha_{b6}), & \Gamma_{22} &= -2(\bar{E}_{12}\alpha_{b8} + 3\bar{E}_{22}\alpha_{b10}), \\ \Gamma_{23} &= -2(3\bar{E}_{12}\alpha_{b7} + \bar{E}_{22}\alpha_{b9}), & \Gamma_{24} &= -6(\bar{E}_{12}\alpha_{b11} + \bar{E}_{22}\alpha_{b12}), \\ \Gamma_{31} &= -2\bar{E}_{33}\alpha_{b5}, & \Gamma_{32} &= -4\bar{E}_{33}\alpha_{b9}, & \Gamma_{33} &= -6\bar{E}_{33}\alpha_{b8}, \\ \Gamma_{34} &= -6\bar{E}_{33}\alpha_{b12} \end{aligned} \right\} \quad (4A-24)$$

但し、 α_{bi} ：トータル変位 $\{\Delta_b\}$ を用い(4-65)式で評価される一般化変位 $\{\alpha_b\}$ の成分、

$\bar{E}_{ij}$ ：(4A-12)式で定義した係数マトリックス $[\bar{E}]$ の成分、

上の関係を用いると、(4A-13)式で定義した $[N_b^*]$ は、次のように分離して表記することができる。

$$\begin{aligned} [N_b^*] &= \begin{bmatrix} N_{bx} & N_{bxy} \\ N_{bxy} & N_{by} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Gamma_{11} + \Gamma_{12}Y + \Gamma_{13}X) & (\Gamma_{31} + \Gamma_{32}Y + \Gamma_{33}X) \\ (\Gamma_{31} + \Gamma_{32}Y + \Gamma_{33}X) & (\Gamma_{21} + \Gamma_{22}Y + \Gamma_{23}X) \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} (\Gamma_{14}XY) & (\Gamma_{34}Y^2 + \Gamma_{35}X^2) \\ (\Gamma_{34}Y^2 + \Gamma_{35}X^2) & (\Gamma_{24}XY) \end{bmatrix} = [N_{b1}^*] + [N_{b2}^*] \end{aligned} \quad (4A-25)$$

上式中の $[N_{b1}^*]$ は、先に求めた(4A-18)式の $[{}_LN_b^*]$ とその表示が同一である。勿論、両式の中の係数 Γ_{ij} の値は、(4A-25)式と先の(4A-19)式を比較すると明らかなように、全く違うものであるから、 $[N_{b1}^*]$ と $[{}_LN_b^*]$ は本質的には異なるものである。しかし、この表式上の同一性は、ここで求めている $[_0K_{0b}]$ の各成分の値を簡潔に表示する際には極めて好都合となる。即ち、(4A-15)式と(4A-25)式より、 $[_0K_{0b}]$ は下式のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} [_0\bar{K}_{0b}] &= \iint_{Re} [b_{oNL}]^T [N_b^*] [b_{oNL}] dx dy \\ &= \iint_{Re} [b_{oNL}]^T [N_{b1}^*] [b_{oNL}] dx dy + \iint_{Re} [b_{oNL}]^T [N_{b2}^*] [b_{oNL}] dx dy \end{aligned}$$

$$= [\bar{K}_{ob1}] + [\bar{K}_{ob2}] \quad (4A-26)$$

従って、 $[\bar{K}_{ob}]$ は上式の $[\bar{K}_{ob1}]$ と $[\bar{K}_{ob2}]$ 評価することによって得られることになる。

$[\bar{K}_{ob1}]$ の各構成成分：

上述したように、 $[N_{b1}^*]$ と $[LN_{b1}^*]$ の表記の同一性と、(4A-26)式の $[\bar{K}_{ob1}]$ と(4A-15)式の $[\bar{K}_{ob}]$ との表示式の同一性から、 $[\bar{K}_{ob1}]$ の各成分 $\bar{K}_{ob1}^{ij}$ には、 $[\bar{K}_{ob}]$ の各成分に関する(4A-19)式がそのままの形で適用できることになる。

$[\bar{K}_{ob2}]$ の各構成成分：

(4A-25)式と(4A-26)式の関係より $[\bar{K}_{ob2}]$ の各構成成分 $\bar{K}_{ob2}^{ij}$ は、次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{ob2}^{11} &= \bar{K}_{ob2}^{12} = \bar{K}_{ob2}^{22} = \bar{K}_{ob2}^{14} = \bar{K}_{ob2}^{15} = \bar{K}_{ob2}^{16} = \bar{K}_{ob2}^{17} = \bar{K}_{ob2}^{18} = \bar{K}_{ob2}^{19} = 0, \\ \bar{K}_{ob2}^{10} &= \bar{K}_{ob2}^{11} = \bar{K}_{ob2}^{12} = \bar{K}_{ob2}^{22} = 0, \quad \bar{K}_{ob2}^{23} = 4\Gamma_{34}a_x a_y^3/3 + 4\Gamma_{35}a_x^3 a_y/3, \\ \bar{K}_{ob2}^{24} &= \bar{K}_{ob2}^{25} = \bar{K}_{ob2}^{26} = \bar{K}_{ob2}^{27} = 0, \quad \bar{K}_{ob2}^{28} = 4(2\Gamma_{14} + \Gamma_{34})a_x^3 a_y^3/9 + 4\Gamma_{35}a_x^5 a_y/5, \\ \bar{K}_{ob2}^{29} &= 0, \quad \bar{K}_{ob2}^{30} = 12\Gamma_{34}a_x a_y^5/5 + 4\Gamma_{35}a_x^3 a_y^3/3, \quad \bar{K}_{ob2}^{31} = \bar{K}_{ob2}^{32} = 0, \\ \bar{K}_{ob2}^{33} &= \bar{K}_{ob2}^{34} = \bar{K}_{ob2}^{35} = \bar{K}_{ob2}^{36} = 0, \quad \bar{K}_{ob2}^{37} = 4\Gamma_{34}a_x^3 a_y^3/3 + 12\Gamma_{35}a_x^5 a_y/5, \\ \bar{K}_{ob2}^{38} &= 0, \quad \bar{K}_{ob2}^{39} = 4\Gamma_{34}a_x a_y^5/5 + 4(\Gamma_{35} + 2\Gamma_{24})a_x^3 a_y^3/9, \quad \bar{K}_{ob2}^{40} = \bar{K}_{ob2}^{41} = 0, \\ \bar{K}_{ob2}^{42} &= \bar{K}_{ob2}^{44} = 0, \quad \bar{K}_{ob2}^{45} = 8(2\Gamma_{14} + \Gamma_{34})a_x^3 a_y^3/9 + 8\Gamma_{35}a_x^5 a_y/5, \\ \bar{K}_{ob2}^{46} &= \bar{K}_{ob2}^{47} = \bar{K}_{ob2}^{48} = \bar{K}_{ob2}^{49} = \bar{K}_{ob2}^{50} = 0, \\ \bar{K}_{ob2}^{51} &= 8(3\Gamma_{14} + \Gamma_{34})a_x^5 a_y^3/15 + 8\Gamma_{35}a_x^7 a_y/7, \\ \bar{K}_{ob2}^{52} &= 8(\Gamma_{14} + 3\Gamma_{34})a_x^3 a_y^5/15 + 8\Gamma_{35}a_x^5 a_y^3/5, \quad \bar{K}_{ob2}^{55} = 0, \\ \bar{K}_{ob2}^{56} &= 8\Gamma_{34}a_x a_y^5/5 + 8(\Gamma_{35} + \Gamma_{24})a_x^3 a_y^3/9, \quad \bar{K}_{ob2}^{57} = \bar{K}_{ob2}^{58} = \bar{K}_{ob2}^{59} = \bar{K}_{ob2}^{50} = 0, \\ \bar{K}_{ob2}^{60} &= \bar{K}_{ob2}^{61} = 0, \quad \bar{K}_{ob2}^{62} = \bar{K}_{ob2}^{67} = \bar{K}_{ob2}^{68} = \bar{K}_{ob2}^{69} = \bar{K}_{ob2}^{70} = 0, \\ \bar{K}_{ob2}^{71} &= 8\Gamma_{34}a_x^3 a_y^5/5 + 8(3\Gamma_{35} + \Gamma_{24})a_x^5 a_y^3/15, \\ \bar{K}_{ob2}^{72} &= 8\Gamma_{34}a_x a_y^7/7 + 8(\Gamma_{35} + 3\Gamma_{24})a_x^3 a_y^5/15, \\ \bar{K}_{ob2}^{78} &= 4(2\Gamma_{14} + \Gamma_{34})a_x^5 a_y^3/5 + 12\Gamma_{35}a_x^7 a_y/7, \quad \bar{K}_{ob2}^{79} = 0, \\ \bar{K}_{ob2}^{80} &= 12\Gamma_{34}a_x^3 a_y^5/5 + 12\Gamma_{35}a_x^5 a_y^3/5, \quad \bar{K}_{ob2}^{81} = \bar{K}_{ob2}^{82} = \bar{K}_{ob2}^{88} = 0, \\ \bar{K}_{ob2}^{89} &= 4(2\Gamma_{14} + 5\Gamma_{34})a_x^3 a_y^5/15 + 4(5\Gamma_{35} + 2\Gamma_{24})a_x^5 a_y^3/15, \\ \bar{K}_{ob2}^{90} &= \bar{K}_{ob2}^{91} = \bar{K}_{ob2}^{92} = \bar{K}_{ob2}^{99} = 0, \quad \bar{K}_{ob2}^{90} = 12\Gamma_{34}a_x a_y^7/7 + 4(\Gamma_{35} + 2\Gamma_{24})a_x^3 a_y^5/5, \\ \bar{K}_{ob2}^{91} &= \bar{K}_{ob2}^{92} = \bar{K}_{ob2}^{90} = \bar{K}_{ob2}^{91} = \bar{K}_{ob2}^{92} = \bar{K}_{ob2}^{91} = \bar{K}_{ob2}^{92} = \bar{K}_{ob2}^{92} = 0, \end{aligned} \right\} \quad (4A-27)$$

但し、 a_x, a_y ：矩形要素のxおよびy方向の1/2辺長。

尚、上記以外の成分 $\bar{K}_{ob2}^{ij}$ はマトリックスの対称性から、 $\bar{K}_{ob2}^{ij} = \bar{K}_{ob2}^{ji}$ となる。

d) $[\bar{K}_{os}]$ の評価

(4A-15)式の $[\bar{K}_{os}]$ を評価するために必要な $\{N_s\}$ は、(4A-12)式の関係より次のようになる。

$$\{N_s\} = \begin{Bmatrix} N_{sx} \\ N_{sy} \\ N_{sxy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Gamma_{11} + \Gamma_{12}Y + \Gamma_{13}X \\ \Gamma_{21} + \Gamma_{22}Y + \Gamma_{23}X \\ \Gamma_{31} + \Gamma_{32}Y + \Gamma_{33}X \end{Bmatrix} \quad (4A-28)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11} &= \sum^n A_{si} E_{si} (CS^3 \alpha_{si2} + CS^2 SN \alpha_{si3}), \quad \Gamma_{12} = \sum^n A_{si} E_{si} CS^3 \alpha_{si4}, \\ \Gamma_{13} &= \sum^n A_{si} E_{si} CS^2 SN \alpha_{si4}, \quad \Gamma_{21} = \sum^n A_{si} E_{si} (SN^2 CS \alpha_{si2} + SN^3 \alpha_{si3}), \\ \Gamma_{22} &= \sum^n A_{si} E_{si} SN^2 CS \alpha_{si4}, \quad \Gamma_{23} = \sum^n A_{si} E_{si} SN^3 \alpha_{si4}, \\ \Gamma_{31} &= \sum^n A_{si} E_{si} (SN CS^2 \alpha_{si2} + SN^2 CS \alpha_{si3}), \\ \Gamma_{32} &= \sum^n A_{si} E_{si} CS^2 SN \alpha_{si4}, \quad \Gamma_{33} = \sum^n A_{si} E_{si} CS SN^2 \alpha_{si4}, \end{aligned} \right\} \quad (4A-29)$$

但し、 α_{sij} ：その解析時点におけるトータル変位 $\{\Delta_{si}\}$ を用い(4-70)式で評価される一般化変位 $\{\alpha_{si}\}$ の成分，sn，cs：i層の鉄筋のx軸とのなす角 ψ_i に関する $\sin\psi_i$ と $\cos\psi_i$ ，

従って、 $[N_s^*]$ は、

$$[N_s^*] = \begin{bmatrix} N_{sx} & N_{sxy} \\ N_{sxy} & N_{sy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\Gamma_{11} + \Gamma_{12}Y + \Gamma_{13}X) & (\Gamma_{31} + \Gamma_{32}Y + \Gamma_{33}X) \\ (\Gamma_{31} + \Gamma_{32}Y + \Gamma_{33}X) & (\Gamma_{21} + \Gamma_{22}Y + \Gamma_{23}X) \end{bmatrix} \quad (4A-30)$$

この $[N_s^*]$ は、先に求めた(4A-18)式の $[LN_s^*]$ とその表示が同一である。従ってこの場合も $[N_s^*]$ と $[LN_s^*]$ の表記の同一性と、(4A-15)式中の $[\bar{K}_{oo}]$ と $[\bar{K}_{os}]$ の相似性から、 $[\bar{K}_{os}]$ の各成分 $\bar{K}_{os}^{ij}$ には、 $[\bar{K}_{oo}]$ の各成分に関する(4A-19)式の値がそのままの形で適用されることになる。但し、当然のことながら、 $\bar{K}_{os}^{ij}$ と $\bar{K}_{oo}^{ij}$ とでは Γ_{ij} の内容は異なっている。

(2) $[\bar{K}_{ob}]$ の構成成分

(4-101)式と(4A-2)式より、

$$[\bar{K}_{ob}] = \iint_{Re} [b_{oNL}]^T [E] [R] [b_{oNL}] dx dy \quad (4A-31)$$

前述の $[\bar{K}_{oo}]$ の場合と同様、(4A-12)式に基づき、要素の中央点の座標値を用いてマトリックス $[R]$ と $[b_{oNL}]$ を評価し、 $[\bar{K}_{ob}]$ の各構成成分 $\bar{K}_{ob}^{ij}$ を求めると以下ようになる。

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}_{ob}^{11} &= \bar{K}_{ob}^{12} = \bar{K}_{ob}^{13} = \bar{K}_{ob}^{14} = \bar{K}_{ob}^{15} = \bar{K}_{ob}^{16} = \bar{K}_{ob}^{17} = \bar{K}_{ob}^{18} = \bar{K}_{ob}^{19} = \bar{K}_{ob}^{110} = 0, \\ \bar{K}_{ob}^{111} &= \bar{K}_{ob}^{112} = \bar{K}_{ob}^{21} = 0, \quad \bar{K}_{ob}^{22} = A_E(E_{11}R_{11} + E_{13}R_{31}), \\ \bar{K}_{ob}^{23} &= A_E(E_{12}R_{22} + E_{13}R_{32}), \quad \bar{K}_{ob}^{24} = \bar{K}_{ob}^{25} = \bar{K}_{ob}^{26} = 0, \\ \bar{K}_{ob}^{27} &= 4a_x^3 a_y (E_{11}R_{11} + E_{13}R_{31}), \quad \bar{K}_{ob}^{28} = 4a_x^3 a_y (E_{12}R_{22} + E_{13}R_{32})/3, \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{N}K_{ob}^{29} = 4a_x a_y^3 (E_{11}R_{11} + E_{13}R_{31})/3, \quad \bar{N}K_{ob}^{210} = 4a_x a_y^3 (E_{12}R_{22} + E_{13}R_{32}), \\
& \bar{N}K_{ob}^{211} = \bar{N}K_{ob}^{212} = \bar{N}K_{ob}^{31} = 0, \quad \bar{N}K_{ob}^{32} = A_E (E_{13}R_{11} + E_{33}R_{31}), \\
& \bar{N}K_{ob}^{33} = A_E (E_{23}R_{22} + E_{33}R_{32}), \quad \bar{N}K_{ob}^{34} = \bar{N}K_{ob}^{35} = \bar{N}K_{ob}^{36} = 0, \\
& \bar{N}K_{ob}^{37} = 4a_x^3 a_y (E_{13}R_{11} + E_{33}R_{31}), \quad \bar{N}K_{ob}^{38} = 4a_x^3 a_y (E_{23}R_{22} + E_{33}R_{32})/3, \\
& \bar{N}K_{ob}^{39} = 4a_x a_y^3 (E_{13}R_{11} + E_{33}R_{31})/3, \quad \bar{N}K_{ob}^{310} = 4a_x a_y^3 (E_{23}R_{22} + E_{33}R_{32}), \\
& \bar{N}K_{ob}^{311} = \bar{N}K_{ob}^{312} = \bar{N}K_{ob}^{41} = \bar{N}K_{ob}^{42} = \bar{N}K_{ob}^{43} = 0, \quad \bar{N}K_{ob}^{44} = 8a_x^3 a_y (E_{13}R_{11} + E_{33}R_{31})/3, \\
& \bar{N}K_{ob}^{45} = 4a_x a_y^3 (E_{11}R_{11} + E_{13}R_{31})/3 + 4a_x^3 a_y (E_{23}R_{22} + E_{33}R_{32})/3, \\
& \bar{N}K_{ob}^{46} = 8a_x a_y^3 (E_{12}R_{22} + E_{13}R_{32})/3, \quad \bar{N}K_{ob}^{47} = \bar{N}K_{ob}^{48} = \bar{N}K_{ob}^{49} = \bar{N}K_{ob}^{410} = 0, \\
& \bar{N}K_{ob}^{411} = 4a_x^3 a_y^3 (E_{11}R_{11} + E_{13}R_{31})/3 + 4a_x^5 a_y (E_{23}R_{22} + E_{33}R_{32})/5, \\
& \bar{N}K_{ob}^{412} = 4a_x^3 a_y^3 (E_{23}R_{22} + E_{33}R_{32})/3 + 4a_x a_y^5 (E_{11}R_{11} + E_{13}R_{31})/5, \\
& \bar{N}K_{ob}^{51} = \bar{N}K_{ob}^{52} = \bar{N}K_{ob}^{53} = \bar{N}K_{ob}^{54} = \bar{N}K_{ob}^{55} = \bar{N}K_{ob}^{56} = \bar{N}K_{ob}^{57} = \bar{N}K_{ob}^{58} = \bar{N}K_{ob}^{59} = \bar{N}K_{ob}^{510} = 0, \\
& \bar{N}K_{ob}^{511} = \bar{N}K_{ob}^{512} = \bar{N}K_{ob}^{61} = 0, \quad \bar{N}K_{ob}^{62} = A_E (E_{13}R_{11} + E_{33}R_{31}), \\
& \bar{N}K_{ob}^{63} = A_E (E_{23}R_{22} + E_{33}R_{32}), \quad \bar{N}K_{ob}^{64} = \bar{N}K_{ob}^{65} = \bar{N}K_{ob}^{66} = 0, \\
& \bar{N}K_{ob}^{67} = 4a_x^3 a_y (E_{31}R_{11} + E_{33}R_{31}), \quad \bar{N}K_{ob}^{68} = 4a_x^3 a_y (E_{32}R_{22} + E_{33}R_{32})/3, \\
& \bar{N}K_{ob}^{69} = 4a_x a_y^3 (E_{31}R_{11} + E_{33}R_{31})/3, \quad \bar{N}K_{ob}^{610} = 4a_x a_y^3 (E_{32}R_{22} + E_{33}R_{32}), \\
& \bar{N}K_{ob}^{611} = \bar{N}K_{ob}^{612} = \bar{N}K_{ob}^{71} = 0, \quad \bar{N}K_{ob}^{72} = A_E (E_{12}R_{11} + E_{23}R_{31}), \\
& \bar{N}K_{ob}^{73} = A_E (E_{22}R_{22} + E_{23}R_{32}), \quad \bar{N}K_{ob}^{74} = \bar{N}K_{ob}^{75} = \bar{N}K_{ob}^{76} = 0, \\
& \bar{N}K_{ob}^{77} = 4a_x^3 a_y (E_{12}R_{11} + E_{23}R_{31}), \quad \bar{N}K_{ob}^{78} = 4a_x^3 a_y (E_{22}R_{22} + E_{23}R_{32})/3, \\
& \bar{N}K_{ob}^{79} = 4a_x a_y^3 (E_{12}R_{11} + E_{23}R_{31})/3, \quad \bar{N}K_{ob}^{710} = 4a_x a_y^3 (E_{22}R_{22} + E_{23}R_{32}), \\
& \bar{N}K_{ob}^{711} = \bar{N}K_{ob}^{712} = \bar{N}K_{ob}^{81} = \bar{N}K_{ob}^{82} = \bar{N}K_{ob}^{83} = 0, \quad \bar{N}K_{ob}^{84} = 8a_x^3 a_y (E_{12}R_{11} + E_{23}R_{31})/3, \\
& \bar{N}K_{ob}^{85} = 4a_x^3 a_y (E_{22}R_{22} + E_{23}R_{32})/3 + 4a_x a_y^3 (E_{13}R_{11} + E_{33}R_{31})/3, \\
& \bar{N}K_{ob}^{86} = 8a_x a_y^3 (E_{32}R_{22} + E_{33}R_{32})/3, \quad \bar{N}K_{ob}^{87} = \bar{N}K_{ob}^{88} = \bar{N}K_{ob}^{89} = \bar{N}K_{ob}^{810} = 0, \\
& \bar{N}K_{ob}^{811} = 4a_x^3 a_y^3 (E_{31}R_{11} + E_{33}R_{31})/3 + 4a_x^5 a_y (E_{22}R_{22} + E_{23}R_{32})/5, \\
& \bar{N}K_{ob}^{812} = 4a_x^3 a_y^3 (E_{22}R_{22} + E_{23}R_{32})/3 + 4a_x a_y^5 (E_{13}R_{11} + E_{33}R_{31})/5,
\end{aligned}$$

(4A-32)

但し、 a_x, a_y : 矩形要素の x および y 方向の $1/2$ 辺長, A_E : 矩形要素の面積 ($A_E = 4a_x a_y$).

(3) $[\bar{N}K_{bb}]$ の構成成分

(4-102)式より、 $[\bar{N}K_{bb}]$ は式で表示される。

$$[\bar{N}K_{bb}] = [\bar{N}K_{bb1}] + [\bar{N}K_{bb2}] + [\bar{N}K_{bb2}]^T \quad (4A-33)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned}
[\bar{N}K_{bb1}] &= \iint_{Re} [b_{oNL}]^T [R]^T [E] [R] [b_{oNL}] dx dy \\
[\bar{N}K_{bb2}] &= \iint_{Re} [b_b]^T [\bar{E}] [R] [b_{oNL}] dx dy
\end{aligned} \right\} \quad (4A-34)$$

但し、 $[E], [\bar{E}]$: (4A-2) 及び (4A-12) で定義される係数マトリックス。

a) $[\bar{N}K_{bbb}]$ の評価

前項(2)の $[\bar{N}K_{ob}]$ と同様にして求めた $[R]$, $[b_{oNL}]$ と(4A-34)式の関係より、 $[\bar{N}K_{bbb}]$ の各構成成分 $\bar{N}K_{bbb}^{ij}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned}
 &\bar{N}K_{bbb}^{11}=\bar{N}K_{bbb}^{12}=\bar{N}K_{bbb}^{13}=\bar{N}K_{bbb}^{14}=\bar{N}K_{bbb}^{15}=\bar{N}K_{bbb}^{16}=\bar{N}K_{bbb}^{17}=\bar{N}K_{bbb}^{18}=\bar{N}K_{bbb}^{19}=0, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{10}=\bar{N}K_{bbb}^{11}=\bar{N}K_{bbb}^{12}=0, \quad \bar{N}K_{bbb}^{22}=A_E(E_{11}R_{11}^2+2E_{13}R_{11}R_{31}+E_{33}R_{31}^2), \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{23}=A_E(E_{12}R_{11}R_{22}+E_{13}R_{11}R_{32}+E_{23}R_{22}R_{31}+E_{33}R_{32}R_{31}), \quad \bar{N}K_{bbb}^{24}=\bar{N}K_{bbb}^{25}=0, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{26}=0, \quad \bar{N}K_{bbb}^{27}=4a_x^3a_y(E_{11}R_{11}^2+2E_{13}R_{11}R_{31}+E_{33}R_{31}^2), \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{28}=4a_x^3a_y(E_{12}R_{11}R_{22}+E_{13}R_{11}R_{32}+E_{23}R_{22}R_{31}+E_{33}R_{32}R_{31})/3, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{29}=4a_xa_y^3(E_{11}R_{11}^2+2E_{13}R_{11}R_{31}+E_{33}R_{31}^2)/3, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{30}=4a_xa_y^3(E_{12}R_{11}R_{22}+E_{13}R_{11}R_{32}+E_{23}R_{22}R_{31}+E_{33}R_{32}R_{31}), \quad \bar{N}K_{bbb}^{31}^1=0, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{32}^1=0, \quad \bar{N}K_{bbb}^{33}=A_E(E_{22}R_{22}^2+2E_{23}R_{22}R_{32}+E_{33}R_{32}^2), \quad \bar{N}K_{bbb}^{34}=\bar{N}K_{bbb}^{35}=\bar{N}K_{bbb}^{36}=0, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{37}=4a_x^3a_y(E_{12}R_{11}R_{22}+E_{23}R_{22}R_{31}+E_{13}R_{11}R_{32}+E_{33}R_{31}R_{32}), \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{38}=4a_x^3a_y(E_{22}R_{22}^2+2E_{23}R_{22}R_{32}+E_{33}R_{32}^2)/3, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{39}=4a_xa_y^3(E_{12}R_{11}R_{22}+E_{23}R_{22}R_{31}+E_{13}R_{11}R_{32}+E_{33}R_{31}R_{32})/3, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{40}=4a_xa_y^3(E_{22}R_{22}^2+2E_{23}R_{22}R_{32}+E_{33}R_{32}^2), \quad \bar{N}K_{bbb}^{41}^1=\bar{N}K_{bbb}^{42}^1=0, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{44}=16a_x^3a_y(E_{11}R_{11}^2+2E_{13}R_{11}R_{31}+E_{33}R_{31}^2)/3, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{45}=8a_x^3a_y(E_{12}R_{11}R_{22}+E_{23}R_{22}R_{31}+E_{13}R_{11}R_{32}+E_{33}R_{31}R_{32})/3, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{46}=\bar{N}K_{bbb}^{47}=\bar{N}K_{bbb}^{48}=\bar{N}K_{bbb}^{49}=\bar{N}K_{bbb}^{40}=0, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{41}^1=8a_x^5a_y(E_{12}R_{11}R_{22}+E_{23}R_{22}R_{31}+E_{13}R_{11}R_{32}+E_{33}R_{31}R_{32})/5, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{42}^1=24a_x^3a_y^3(E_{12}R_{11}R_{22}+E_{23}R_{22}R_{31}+E_{13}R_{11}R_{32}+E_{33}R_{31}R_{32})/9, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{55}=4a_xa_y^3(E_{11}R_{11}^2+2E_{13}R_{11}R_{31}+E_{33}R_{31}^2)/3 \\
 &\quad +4a_x^3a_y(E_{22}R_{22}^2+2E_{23}R_{22}R_{32}+E_{33}R_{32}^2)/3, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{56}=8a_xa_y^3(E_{12}R_{11}R_{22}+E_{23}R_{22}R_{31}+E_{13}R_{11}R_{32}+E_{33}R_{31}R_{32})/5, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{57}=\bar{N}K_{bbb}^{58}=\bar{N}K_{bbb}^{59}=\bar{N}K_{bbb}^{50}=0, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{51}^1=4a_x^3a_y^3(E_{11}R_{11}^2+2E_{13}R_{11}R_{31}+E_{33}R_{31}^2)/3 \\
 &\quad +4a_x^5a_y(E_{22}R_{22}^2+2E_{23}R_{22}R_{32}+E_{33}R_{32}^2)/5, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{52}^1=4a_xa_y^5(E_{11}R_{11}^2+2E_{13}R_{11}R_{31}+E_{33}R_{31}^2)/5 \\
 &\quad +4a_x^3a_y^3(E_{22}R_{22}^2+2E_{23}R_{22}R_{32}+E_{33}R_{32}^2)/3, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{66}=16a_xa_y^3(E_{22}R_{22}^2+2E_{23}R_{22}R_{32}+E_{33}R_{32}^2)/3, \quad \bar{N}K_{bbb}^{67}=\bar{N}K_{bbb}^{68}=\bar{N}K_{bbb}^{69}=0, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{60}^1=0, \quad \bar{N}K_{bbb}^{61}^1=8a_x^3a_y^3(E_{12}R_{11}R_{22}+E_{23}R_{22}R_{31}+E_{13}R_{11}R_{32}+E_{33}R_{31}R_{32})/3, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{62}^1=8a_xa_y^5(E_{12}R_{11}R_{22}+E_{23}R_{22}R_{31}+E_{13}R_{11}R_{32}+E_{33}R_{31}R_{32})/3, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{77}=36a_x^5a_y(E_{11}R_{11}^2+2E_{13}R_{11}R_{31}+E_{33}R_{31}^2)/5, \\
 &\bar{N}K_{bbb}^{78}=12a_x^5a_y(E_{12}R_{11}R_{22}+E_{23}R_{22}R_{31}+E_{13}R_{11}R_{32}+E_{33}R_{31}R_{32})/5,
 \end{aligned}
 \tag{4A-35}$$

$$\begin{aligned}
\bar{N}_{bbb1}^{79} &= 4a_x^3 a_y^3 (E_{11} R_{11}^2 + 2E_{13} R_{11} R_{31} + E_{33} R_{31}^2) / 3, \\
\bar{N}_{bbb1}^{70} &= 4a_x^3 a_y^3 (E_{12} R_{11} R_{22} + E_{23} R_{22} R_{31} + E_{13} R_{11} R_{32} + E_{33} R_{31} R_{32}), \\
\bar{N}_{bbb1}^{71} &= \bar{N}_{bbb1}^{72} = 0, \quad \bar{N}_{bbb1}^{88} = 16a_x^3 a_y^3 (E_{11} R_{11}^2 + 2E_{13} R_{11} R_{31} + E_{33} R_{31}^2) / 9 \\
&\quad + 4a_x^5 a_y (E_{22} R_{22}^2 + 2E_{23} R_{22} R_{32} + E_{33} R_{32}^2) / 5, \\
\bar{N}_{bbb1}^{89} &= 20a_x^3 a_y^3 (E_{12} R_{11} R_{22} + E_{13} R_{11} R_{32} + E_{23} R_{22} R_{31} + E_{33} R_{32} R_{31}) / 9, \\
\bar{N}_{bbb1}^{80} &= 4a_x^3 a_y^3 (E_{22} R_{22}^2 + 2E_{23} R_{22} R_{32} + E_{33} R_{32}^2) / 3, \quad \bar{N}_{bbb1}^{81} = \bar{N}_{bbb1}^{82} = 0, \\
\bar{N}_{bbb1}^{99} &= 4a_x a_y^5 (E_{11} R_{11}^2 + 2E_{13} R_{11} R_{31} + E_{33} R_{31}^2) / 5 \\
&\quad + 16a_x^3 a_y^3 (E_{22} R_{22}^2 + 2E_{23} R_{22} R_{32} + E_{33} R_{32}^2) / 9, \\
\bar{N}_{bbb1}^{90} &= 12a_x a_y^5 (E_{12} R_{11} R_{22} + E_{23} R_{22} R_{31} + E_{13} R_{11} R_{32} + E_{33} R_{31} R_{32}) / 5, \\
\bar{N}_{bbb1}^{91} &= \bar{N}_{bbb1}^{92} = 0, \quad \bar{N}_{bbb1}^{100} = 36a_x a_y^5 (E_{22} R_{22}^2 + 2E_{23} R_{22} R_{32} + E_{33} R_{32}^2) / 5, \\
\bar{N}_{bbb1}^{101} &= \bar{N}_{bbb1}^{102} = 0, \quad \bar{N}_{bbb1}^{111} = 12a_x^5 a_y^3 (E_{11} R_{11}^2 + 2E_{13} R_{11} R_{31} + E_{33} R_{31}^2) / 5 \\
&\quad + 4a_x^7 a_y (E_{22} R_{22}^2 + 2E_{23} R_{22} R_{32} + E_{33} R_{32}^2) / 7, \\
\bar{N}_{bbb1}^{112} &= 4a_x^3 a_y^5 (E_{11} R_{11}^2 + 2E_{13} R_{11} R_{31} + E_{33} R_{31}^2) / 5 \\
&\quad + 4a_x^5 a_y^3 (E_{22} R_{22}^2 + 2E_{23} R_{22} R_{32} + E_{33} R_{32}^2) / 5, \\
\bar{N}_{bbb1}^{122} &= 4a_x a_y^7 (E_{11} R_{11}^2 + 2E_{13} R_{11} R_{31} + E_{33} R_{31}^2) / 7 \\
&\quad + 12a_x^3 a_y^5 (E_{22} R_{22}^2 + 2E_{23} R_{22} R_{32} + E_{33} R_{32}^2) / 5,
\end{aligned}$$

但し、 a_x, a_y : 矩形要素の x および y 方向の $1/2$ 辺長, A_E : 矩形要素の面積 ($A_E = 4a_x a_y$).

尚、上記以外の成分 $\bar{N}_{bbi1}^i$ はマトリックスの対称性から $\bar{N}_{bbi1}^i = \bar{N}_{bb1i}^i$ となる。

b) $[\bar{N}_{bb2}]$ の評価

$[\bar{N}_{bb1}]$ の場合と同様にして、(4A-34)式より $[\bar{N}_{bb2}]$ 各構成成分 $\bar{N}_{bb2}^i$ は次のように求められる。

$$\begin{aligned}
\bar{N}_{bb2}^{11} &= \bar{N}_{bb2}^{12} = \bar{N}_{bb2}^{13} = \bar{N}_{bb2}^{14} = \bar{N}_{bb2}^{15} = \bar{N}_{bb2}^{16} = \bar{N}_{bb2}^{17} = \bar{N}_{bb2}^{18} = \bar{N}_{bb2}^{19} = \bar{N}_{bb2}^{10} = 0, \\
\bar{N}_{bb2}^{111} &= \bar{N}_{bb2}^{112} = \bar{N}_{bb2}^{21} = \bar{N}_{bb2}^{22} = \bar{N}_{bb2}^{23} = \bar{N}_{bb2}^{24} = \bar{N}_{bb2}^{25} = \bar{N}_{bb2}^{26} = \bar{N}_{bb2}^{27} = 0, \\
\bar{N}_{bb2}^{28} &= \bar{N}_{bb2}^{29} = \bar{N}_{bb2}^{30} = \bar{N}_{bb2}^{31} = \bar{N}_{bb2}^{32} = \bar{N}_{bb2}^{33} = \bar{N}_{bb2}^{34} = \bar{N}_{bb2}^{35} = 0, \\
\bar{N}_{bb2}^{36} &= \bar{N}_{bb2}^{37} = \bar{N}_{bb2}^{38} = \bar{N}_{bb2}^{39} = \bar{N}_{bb2}^{40} = \bar{N}_{bb2}^{41} = \bar{N}_{bb2}^{42} = \bar{N}_{bb2}^{43} = 0, \\
\bar{N}_{bb2}^{44} &= 2A_E (\bar{E}_{11} R_{11} + \bar{E}_{13} R_{31}), \quad \bar{N}_{bb2}^{45} = 2A_E (\bar{E}_{12} R_{22} + \bar{E}_{13} R_{32}), \quad \bar{N}_{bb2}^{44} = \bar{N}_{bb2}^{45} = 0, \\
\bar{N}_{bb2}^{46} &= 0, \quad \bar{N}_{bb2}^{47} = 8A_E a_x^3 a_y (\bar{E}_{11} R_{11} + \bar{E}_{13} R_{31}), \\
\bar{N}_{bb2}^{48} &= 8A_E a_x^3 a_y (\bar{E}_{12} R_{22} + \bar{E}_{13} R_{32}) / 3, \quad \bar{N}_{bb2}^{49} = 8A_E a_x a_y^3 (\bar{E}_{11} R_{11} + \bar{E}_{13} R_{31}) / 3, \\
\bar{N}_{bb2}^{40} &= 8A_E a_x a_y^3 (\bar{E}_{12} R_{22} + \bar{E}_{13} R_{32}), \quad \bar{N}_{bb2}^{41} = \bar{N}_{bb2}^{42} = \bar{N}_{bb2}^{51} = 0, \\
\bar{N}_{bb2}^{52} &= 2A_E (\bar{E}_{13} R_{11} + \bar{E}_{33} R_{31}), \quad \bar{N}_{bb2}^{53} = 2A_E (\bar{E}_{32} R_{22} + \bar{E}_{33} R_{32}), \quad \bar{N}_{bb2}^{54} = \bar{N}_{bb2}^{55} = 0, \\
\bar{N}_{bb2}^{56} &= 0, \quad \bar{N}_{bb2}^{57} = 8A_E a_x^3 a_y (\bar{E}_{13} R_{11} + \bar{E}_{33} R_{31}), \\
\bar{N}_{bb2}^{58} &= 8A_E a_x^3 a_y (\bar{E}_{23} R_{22} + \bar{E}_{33} R_{32}) / 3, \quad \bar{N}_{bb2}^{59} = 8A_E a_x a_y^3 (\bar{E}_{13} R_{11} + \bar{E}_{33} R_{31}) / 3,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \bar{N}K_{bbz}^{510} = 8A_E a_x a_y (\bar{E}_{23} R_{22} + \bar{E}_{33} R_{32}), \quad \bar{N}K_{bbz}^{511} = \bar{N}K_{bbz}^{512} = \bar{N}K_{bbz}^{612} = 0, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{622} = 2A_E (\bar{E}_{12} R_{11} + \bar{E}_{23} R_{31}), \quad \bar{N}K_{bbz}^{632} = 2A_E (\bar{E}_{22} R_{22} + \bar{E}_{23} R_{32}), \quad \bar{N}K_{bbz}^{642} = \bar{N}K_{bbz}^{652} = 0, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{662} = 0, \quad \bar{N}K_{bbz}^{672} = 8A_E a_x^3 a_y (\bar{E}_{12} R_{11} + \bar{E}_{23} R_{31}), \\
& \bar{N}K_{bbz}^{682} = 8A_E a_x^3 a_y (\bar{E}_{22} R_{22} + \bar{E}_{23} R_{32})/3, \quad \bar{N}K_{bbz}^{692} = 4A_E a_x a_y^3 (\bar{E}_{21} R_{11} + \bar{E}_{23} R_{31})/3, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{610} = 8A_E a_x a_y^3 (\bar{E}_{22} R_{22} + \bar{E}_{23} R_{32}), \quad \bar{N}K_{bbz}^{611} = \bar{N}K_{bbz}^{612} = \bar{N}K_{bbz}^{712} = \bar{N}K_{bbz}^{722} = \bar{N}K_{bbz}^{732} = 0, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{742} = 16A_E a_x^3 a_y (\bar{E}_{11} R_{11} + \bar{E}_{13} R_{31}), \quad \bar{N}K_{bbz}^{752} = 8A_E a_x^3 a_y (\bar{E}_{12} R_{22} + \bar{E}_{13} R_{32}), \\
& \bar{N}K_{bbz}^{762} = \bar{N}K_{bbz}^{772} = \bar{N}K_{bbz}^{782} = \bar{N}K_{bbz}^{792} = \bar{N}K_{bbz}^{710} = 0, \quad \bar{N}K_{bbz}^{711} = 24A_E a_x^5 a_y (\bar{E}_{12} R_{22} + \bar{E}_{13} R_{32})/5, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{712} = 8A_E a_x^3 a_y^3 (\bar{E}_{12} R_{22} + \bar{E}_{13} R_{32}), \quad \bar{N}K_{bbz}^{812} = \bar{N}K_{bbz}^{822} = \bar{N}K_{bbz}^{832} = 0, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{842} = 32A_E a_x^3 a_y (\bar{E}_{13} R_{11} + \bar{E}_{33} R_{31})/3, \quad \bar{N}K_{bbz}^{852} = 8A_E a_x a_y^3 (\bar{E}_{11} R_{11} + \bar{E}_{13} R_{31})/3 \\
& \quad + 16A_E a_x^3 a_y (\bar{E}_{23} R_{22} + \bar{E}_{33} R_{32})/3, \quad \bar{N}K_{bbz}^{862} = 16A_E a_x a_y^3 (\bar{E}_{12} R_{22} + \bar{E}_{13} R_{32})/3, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{872} = \bar{N}K_{bbz}^{882} = \bar{N}K_{bbz}^{892} = \bar{N}K_{bbz}^{810} = 0, \quad \bar{N}K_{bbz}^{811} = 8A_E a_x^3 a_y^3 (\bar{E}_{11} R_{11} + \bar{E}_{13} R_{31})/3 \\
& \quad + 16A_E a_x^5 a_y (\bar{E}_{23} R_{22} + \bar{E}_{33} R_{32})/5, \quad \bar{N}K_{bbz}^{812} = 8A_E a_x a_y^5 (\bar{E}_{11} R_{11} + \bar{E}_{13} R_{31})/5 \\
& \quad + 16A_E a_x^3 a_y^3 (\bar{E}_{23} R_{22} + \bar{E}_{33} R_{32})/3, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{912} = \bar{N}K_{bbz}^{922} = \bar{N}K_{bbz}^{932} = 0, \quad \bar{N}K_{bbz}^{942} = 16A_E a_x^3 a_y (\bar{E}_{12} R_{11} + \bar{E}_{23} R_{31})/3, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{952} = 8A_E a_x^3 a_y (\bar{E}_{22} R_{22} + \bar{E}_{23} R_{32})/3 + 16A_E a_x a_y^3 (\bar{E}_{13} R_{11} + \bar{E}_{33} R_{31})/3, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{962} = 32A_E a_x a_y^3 (\bar{E}_{23} R_{22} + \bar{E}_{33} R_{32})/3, \quad \bar{N}K_{bbz}^{972} = \bar{N}K_{bbz}^{982} = \bar{N}K_{bbz}^{992} = \bar{N}K_{bbz}^{910} = 0, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{911} = 8A_E a_x^5 a_y (\bar{E}_{22} R_{22} + \bar{E}_{23} R_{32})/5 + 16A_E a_x^3 a_y^3 (\bar{E}_{13} R_{11} + \bar{E}_{33} R_{31})/3, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{912} = 8A_E a_x^3 a_y^3 (\bar{E}_{22} R_{22} + \bar{E}_{23} R_{32})/3 + 16A_E a_x a_y^5 (\bar{E}_{13} R_{11} + \bar{E}_{33} R_{31})/5, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{1011} = \bar{N}K_{bbz}^{1012} = \bar{N}K_{bbz}^{1013} = \bar{N}K_{bbz}^{1014} = 0, \quad \bar{N}K_{bbz}^{1015} = 8A_E a_x a_y^3 (\bar{E}_{12} R_{11} + \bar{E}_{21} R_{31}), \\
& \bar{N}K_{bbz}^{1016} = 16A_E a_x a_y^3 (\bar{E}_{22} R_{22} + \bar{E}_{23} R_{32}), \quad \bar{N}K_{bbz}^{1017} = \bar{N}K_{bbz}^{1018} = \bar{N}K_{bbz}^{1019} = \bar{N}K_{bbz}^{1010} = 0, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{1011} = 8A_E a_x^3 a_y^3 (\bar{E}_{12} R_{11} + \bar{E}_{23} R_{31}), \quad \bar{N}K_{bbz}^{1012} = 24A_E a_x a_y^5 (\bar{E}_{12} R_{11} + \bar{E}_{23} R_{31})/5, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{1111} = 0, \quad \bar{N}K_{bbz}^{1112} = 8A_E a_x^3 a_y (\bar{E}_{13} R_{11} + \bar{E}_{33} R_{31}), \\
& \bar{N}K_{bbz}^{1113} = 8A_E a_x^3 a_y (\bar{E}_{23} R_{22} + \bar{E}_{33} R_{32}), \quad \bar{N}K_{bbz}^{1114} = \bar{N}K_{bbz}^{1115} = \bar{N}K_{bbz}^{1116} = 0, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{1117} = 72A_E a_x^5 a_y (\bar{E}_{13} R_{11} + \bar{E}_{33} R_{31})/5, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{1118} = 16A_E a_x^3 a_y^3 (\bar{E}_{11} R_{11} + \bar{E}_{13} R_{31})/3 + 24A_E a_x^5 a_y (\bar{E}_{23} R_{22} + \bar{E}_{33} R_{32})/5, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{1119} = 8a_x^3 a_y^3 (\bar{E}_{13} R_{11} + \bar{E}_{33} R_{31} + 2\bar{E}_{12} R_{22} + 2\bar{E}_{13} R_{32})/3, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{1110} = 8A_E a_x^3 a_y^3 (\bar{E}_{32} R_{22} + \bar{E}_{33} R_{32}), \quad \bar{N}K_{bbz}^{1111} = \bar{N}K_{bbz}^{1112} = \bar{N}K_{bbz}^{1211} = 0, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{1212} = 8A_E a_x a_y^3 (\bar{E}_{13} R_{11} + \bar{E}_{33} R_{31}), \quad \bar{N}K_{bbz}^{1213} = 8A_E a_x a_y^3 (\bar{E}_{23} R_{22} + \bar{E}_{33} R_{32}), \\
& \bar{N}K_{bbz}^{1214} = \bar{N}K_{bbz}^{1215} = \bar{N}K_{bbz}^{1216} = 0, \quad \bar{N}K_{bbz}^{1217} = 8A_E a_x^3 a_y^3 (\bar{E}_{13} R_{11} + \bar{E}_{33} R_{31}), \\
& \bar{N}K_{bbz}^{1218} = 8a_x^3 a_y^3 (2\bar{E}_{12} R_{11} + 2\bar{E}_{23} R_{31} + \bar{E}_{23} R_{22} + \bar{E}_{33} R_{32})/3, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{1219} = 16A_E a_x^3 a_y^3 (\bar{E}_{22} R_{22} + \bar{E}_{23} R_{32})/3 + 24A_E a_x a_y^5 (\bar{E}_{13} R_{11} + \bar{E}_{33} R_{31})/5, \\
& \bar{N}K_{bbz}^{1210} = 72A_E a_x a_y^5 (\bar{E}_{23} R_{22} + \bar{E}_{33} R_{32})/5, \quad \bar{N}K_{bbz}^{1211} = \bar{N}K_{bbz}^{1212} = 0,
\end{aligned} \tag{4A-36}$$

但し、 a_x, a_y : 矩形要素の x および y 方向の $1/2$ 辺長, A_E : 矩形要素の面積 ($A_E = 4a_x a_y$).

(4) $[\bar{N}k_{bsi}]$ の構成成分

(4-103)式より、

$$[\bar{N}k_{bsi}] = \iint_{Re} [b_{oNL}]^T [R]^T [B_{si}] dx dy \quad (4A-37)$$

但し、

$$[B_{si}] = A_{si} \begin{bmatrix} 0 & cs^2 & cs^2 sn & cs^2 sn & (cs^3 y + cs^2 sn x) \\ 0 & sn^2 cs & cs^2 & sn^2 & (cs sn^2 y + sn^3 x) \\ 0 & sn cs^2 & sn^2 cs & sn^2 cs & (sn cs^2 y + sn^2 cs x) \end{bmatrix} \quad (4A-38)$$

但し、 $sn = \sin \psi_i$, $cs = \cos \psi_i$

従って、 $[\bar{N}k_{bsi}]$ の各構成成分 $\bar{N}k_{bsi}^{ij}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} \bar{N}k_{bsi}^{11} &= \bar{N}k_{bsi}^{12} = \bar{N}k_{bsi}^{13} = \bar{N}k_{bsi}^{14} = \bar{N}k_{bsi}^{21} = 0, \quad \bar{N}k_{bsi}^{22} = A_E(cs^3 R_{11} + sn cs^2 R_{31}), \\ \bar{N}k_{bsi}^{23} &= A_E(cs^2 sn R_{11} + sn^2 cs R_{31}), \quad \bar{N}k_{bsi}^{24} = 0, \\ \bar{N}k_{bsi}^{32} &= A_E(sn^2 cs R_{22} + sn cs^2 R_{32}), \quad \bar{N}k_{bsi}^{33} = A_E(sn^3 R_{22} + sn^2 cs R_{32}), \\ \bar{N}k_{bsi}^{34} &= \bar{N}k_{bsi}^{41} = \bar{N}k_{bsi}^{42} = \bar{N}k_{bsi}^{43} = 0, \quad \bar{N}k_{bsi}^{44} = 8a_x^3 a_y (cs^2 sn R_{11} + sn^2 cs R_{31})/3, \\ \bar{N}k_{bsi}^{51} &= \bar{N}k_{bsi}^{52} = \bar{N}k_{bsi}^{53} = 0, \quad \bar{N}k_{bsi}^{54} = 4a_x a_y^3 (cs^3 R_{11} + sn cs^2 R_{31})/3 \\ &\quad + 4a_x^3 a_y (sn^3 R_{22} + sn^2 cs R_{32})/3, \quad \bar{N}k_{bsi}^{61} = \bar{N}k_{bsi}^{62} = \bar{N}k_{bsi}^{63} = 0, \\ \bar{N}k_{bsi}^{64} &= 8a_x a_y^3 (cs sn^2 R_{22} + sn cs^2 R_{32})/3, \quad \bar{N}k_{bsi}^{71} = 0, \\ \bar{N}k_{bsi}^{72} &= 4a_x^3 a_y (cs^3 R_{11} + sn cs^2 R_{31}), \quad \bar{N}k_{bsi}^{73} = 4a_x^3 a_y (cs^2 sn R_{11} + sn^2 cs R_{31}), \\ \bar{N}k_{bsi}^{74} &= 0, \quad \bar{N}k_{bsi}^{81} = 0, \quad \bar{N}k_{bsi}^{82} = 4a_x^3 a_y (sn^2 cs R_{22} + sn cs^2 R_{32})/3, \\ \bar{N}k_{bsi}^{83} &= 4a_x^3 a_y (sn^3 R_{22} + sn^2 cs R_{32})/3, \quad \bar{N}k_{bsi}^{84} = \bar{N}k_{bsi}^{91} = 0, \\ \bar{N}k_{bsi}^{92} &= 4a_x a_y^3 (cs^3 R_{11} + sn cs^2 R_{31})/3, \quad \bar{N}k_{bsi}^{93} = 4a_x a_y^3 (cs^2 sn R_{11} + sn^2 cs R_{31})/3, \\ \bar{N}k_{bsi}^{94} &= \bar{N}k_{bsi}^{101} = 0, \quad \bar{N}k_{bsi}^{102} = 4a_x a_y^3 (sn^2 cs R_{22} + sn cs^2 R_{32}), \\ \bar{N}k_{bsi}^{103} &= 4a_x a_y^3 (sn^3 R_{22} + sn^2 cs R_{32}), \quad \bar{N}k_{bsi}^{114} = \bar{N}k_{bsi}^{121} = \bar{N}k_{bsi}^{122} = \bar{N}k_{bsi}^{131} = 0, \\ \bar{N}k_{bsi}^{114} &= 4a_x^3 a_y^3 (cs^3 R_{11} + sn cs^2 R_{31})/3 + 4a_x^5 a_y (sn^3 R_{22} + sn^2 cs R_{32})/5, \\ \bar{N}k_{bsi}^{121} &= \bar{N}k_{bsi}^{122} = \bar{N}k_{bsi}^{123} = 0, \\ \bar{N}k_{bsi}^{124} &= 4a_x a_y^5 (cs^3 R_{11} + sn cs^2 R_{31})/5 + 4a_x^3 a_y^3 (sn^3 R_{22} + sn^2 cs R_{32})/3, \end{aligned} \quad (4A-39)$$

但し、 a_x, a_y : 矩形要素の x および y 方向の1/2辺長, A_E : 矩形要素の面積 ($A_E = 4a_x a_y$).

第4章の参考文献

- 1) 土橋由造、斎藤満智子：被害を受けた中央部薄肉版の調査報告、日本建築学会北海道支部研究報告、No.16, 1961,3.
- 2) 大野和男、土橋由造：最近散見される鉄筋コンクリート床スラブの大きな撓み、建築材料、1963,6.
- 3) 磯畑 修：大スパンスラブの沈下事故と振動障害について、清水建設研究所報、No.6, 1965.
- 4) 土橋由造、井野 智：大撓みをもつ鉄筋コンクリート障害スラブの実態調査とその対策、日本建築学会論文報告集、第272号、1978,10.
- 5) 土橋由造、井野 智：コンクリートスラブのひびわれと大たわみ、コンクリート工学、Vol.16, No.10, 1978,10.
- 6) 土橋由造、上田正生：ひびわれ障害の発生した出隅を有するRC片持スラブの調査と模型床板の実験、日本建築学会論文報告集、第297号、1980,11.
- 7) 高橋久雄、武田寿一、小柳光生：拘束スラブの長期たわみに関する研究、コンクリート工学、Vol.23, No.1, 1985,1.
- 8) 杉野目 章、井野 智、土橋由造：使用荷重下における鉄筋コンクリート床スラブのたわみ予測計算、日本建築学会構造系論文報告集、第372号、1987,2.
- 9) 岩原昭二：使用荷重下における鉄筋コンクリート床スラブの長期曲げ問題に対する解析法に関する研究、日本建築学会構造系論文報告集、第415号、1990,9.
- 10) 上田正生、土橋由造他：鉄筋の付着すべりを考慮したRC床板の弾性解析、日本建築学会北海道支部研究報告集、No.57, 1984,3.
- 11) 上田正生、土橋由造：鉄筋の付着すべりを考慮したRC床板の弾性解析、日本建築学会大会（関東）学術講演会講演梗概集、1984,10.
- 12) 上田正生、土橋由造：補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の曲げについて、日本建築学会北海道支部研究報告集、No.58, 1985,3.
- 13) 上田正生、土橋由造：補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の曲げについて（基礎微分方程式の誘導）、日本建築学会大会（東海）学術講演会講演梗概集、1985,10.
- 14) 上田正生、土橋由造：補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の変形解析 その1 線形領域における基礎微分方程式と数値計算例、日本建築学会構造系論文報告集、第371号、1987,1.
- 15) 上田正生、土橋由造：補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の幾何学的非線形曲げについて、土木学会北海道支部論文報告集、第42号、1986,2.
- 16) 上田正生、土橋由造他：補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の幾何学的非線形解析、日本建築学会北海道支部研究報告集、No.59, 1986,3.
- 17) 上田正生、土橋由造：補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の曲げについて（第2報 幾何学的非線形領域における支配微分方程式）、日本建築学会大会（北海道）学術講演会講演梗概集、1986,8.

- 18) 上田正生、松倉満智子、土橋由造：補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の曲げについて（第3報 有限要素法による幾何学的非線形解析）、日本建築学会大会（北海道）学術講演会講演梗概集、1986, 8.
- 19) 上田正生：補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の変形解析 その2 幾何学的非線形領域における基礎微分方程式と数値計算例、日本建築学会構造系論文報告集、第385号、1988. 3.
- 20) 皆川洋一：鉄筋コンクリート造床スラブの弾塑性挙動へおよぼす幾何学的非線形挙動の影響、日本建築学会構造系論文報告集、第361号、1986. 3.
- 21) Timoshenko, S and Woinowsky-Krieger, S. : Theory of Plates and Shells, McGraw-Hill, 1959.
- 22) Zienkiewicz, O.C. 著, 吉識雅夫・山田嘉昭 監訳：マトリックス有限要素法(3訂版)、培風館、1984.
- 23) Brebbia, D. and Conner, J. : Geometrically Nonlinear Finite-Element Analysis, Proc. of ASCE, Vol. 95, No. EM2, 1969, 4.
- 24) Kawai, T. and Yoshimura, N. : Analysis of large deflection of plates by the finite element method, International Journal for numerical method in engineering, Vol. 1, 1969, 3.

第5章 曲線テンドンをもつプレストレストコンクリート梁部材の解析

5.1 はじめに

周知のように、曲線テンドンをもつポストテンションタイプのプレストレストコンクリート（以下P Cと略記）梁部材は、「テンドンによる補剛の効果を、材軸に沿って自由に制御し得る」と言う優れた構造特性を有しているため、今日では、土木・建築を問わず多くのコンクリート構造の重要な構成要素として多用されている。この形式のP C梁部材は、テンドンが曲線形をもつがため、その構造計算も直線テンドンをもつP C梁に比べると遥かに煩雑になるが、既往の豊富な実用例の存在が示すように、その設計手法は、既に“設計規準”と言う形で確立されており、また構造解析のための有限要素法による実用的で高度なコンピュータプログラムも幾つか開発されている。^{1)~4)}

ポストテンションP C梁を取り巻くこの極めてよく整備された設計環境は、「この種構造に関する“梁部材としての理論的な研究”は尽くされており、最早、新たになすべきことは残されていない」との感さえ抱かせるが、P C構造に関する高度な専門書と目される著名な文献^{5)~10)}を幾つか紐解いてみると、この分野にも基本的な点で未だ探求さるべき余地のあることに気が付く。即ち、曲線形状テンドンをもつP C梁の設計の基本理念は、テンドンをコンクリート部材の補強のための別の構造部材として取り扱うところにあり、その解析に用いられる“慣用の近似理論”は、あくまでも別個の部材であるコンクリート梁を補強するためのものとなっている。このことは、「既往の文献には、一体構造としてのP C梁のための基礎微分方程式が見当らない」と言う事実が端的に物語っているように思われる。

勿論、“構造設計”の観点からすれば、慣用の解析理論は極めて有用であり、実設計において必要となる「弾性領域にあるP C梁」の力学情報の殆どを得ることができる。しかしながら、コンクリートの亀裂や、テンドンの付着破壊を伴うP C梁部材の、繰返し載荷を含む、より詳細な変形挙動の追跡を行おうとすると、これらの既往の解析手法のみでは限界があることは明らかである。

以上のような研究の現状を踏まえ、本章では、曲線テンドンをもつP C梁部材のための、より適用性の優れた解析手法を確立することを試みる。

即ち、本章では、まず、エネルギー原理を用いてテンドンとコンクリートの間に付着す

べりを許し、コンクリート部分には平面保持を仮定した場合の、弾性領域における“一体構造としてのP C梁部材”のための支配微分方程式を導いている。次いで、この理論に基づき有限要素法への定式化を行って2種の新しいP C梁要素を開発し、更に、数種のモデルP C梁の数値計算例を掲げて本解析手法の有用性を明らかにし、併せて、慣用の近似理論による解の妥当性について検討・考察を加えることとする。

5.2 曲線テンドンをもつP C梁部材のための理論式の展開^{11)~30)}

テンドンが曲線形をもつのは、言うまでもなくポストテンショニング・タイプのP C梁である。従って、本章で対象としているのも、この種のP C梁である。

ここでは、テンダンの緊張時から定着完了後のP C梁の挙動までを、一貫して取り扱うことが可能な基本式を導くことにする。

5.2.1 基本仮定事項

理論展開を行うに際して用いた基本仮定事項は、以下のとおりである。

- 1) 梁は材軸に沿って一様の外形断面を有し、微小変形の仮定が適用できるものとする。また、梁には軸力（テンダンの緊張荷重も含む）と曲げが作用するものとする。
- 2) コンクリートは等方弾性体であり、コンクリート断面には変形後も平面保持の仮定が成立する。
- 3) 梁断面内には、 m 層のテンドンが存在しており、各層のテンドンは、材軸に沿って鉛直方向に滑らかな曲線を描いて設置されている。
- 4) 弾性線材である個々のテンドン層は、設置曲線に沿う軸方向の力のみを負担するものとする。
- 5) 各層のテンドンとコンクリートの間には、個々の設置曲線に沿ってすべりが生じ、或る位置におけるテンダンのすべり変位は、平面が保持されるコンクリート部分からのテンドン曲線に沿う相対的なズレ変位で表示され、また、付着応力とすべり変位の間には線形関係が成り立つものとする。
- 6) テンドンケーブルを通すために、梁内部に付設されているシースの剛性は無視できるものとする。

5.2.2 変位場、および歪と応力

(1) 変位場

図5-1はP C梁の断面記号と梁の内部に配置されている任意の i 層のテンドンの設置状況を図示したものである。前項の仮定より、この問題を定式化するために設定しなければならない変位場は、梁のコンクリート断面の図心にとられた x 軸（材軸）方向の変位 u と、 z 方向の変位 w 、および断面内に m 層存在する各層のテンドンの設置曲線 ζ_i に沿う m 個のすべり変位 $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_m$ の計 $(2+m)$ 個の変位である。

(2) コンクリートの歪と応力

x 軸から z だけ離れた任意位置 (x, z) のコンクリート部分の歪 ${}_z \varepsilon_c$ は、次式で表される。

$${}_z \varepsilon_c = \varepsilon_o + z\phi \quad (5-1)$$

ここに、 ε_o と ϕ は、それぞれ梁の軸歪と曲率であり、次のように与えられる。

$$\varepsilon_o = \frac{du}{dx} \quad (5-2)$$

$$\phi = -\frac{d^2w}{dx^2} \quad (5-3)$$

従って、同位置のコンクリートの応力 ${}_z \sigma_c$ は、

$${}_z \sigma_c = E_c \cdot {}_z \varepsilon_c \quad (5-4)$$

但し、 E_c : コンクリートのヤング係数

(3) テンドンの歪と応力

梁断面内に m 層存在するテンドンのうちの任意の i 層を考える。ある位置におけるこのテンドンの設置曲線に沿う歪 ε_{si} は、次のように表示することができる。

$$\varepsilon_{si} = \varepsilon_o + h_{si}\phi + \varepsilon_{ssi} \quad (5-5)$$

但し、 ε_{ssi} : i 層のテンドンの設置曲線に沿うすべり率、 h_{si} : i 層のテンドンの x 軸か

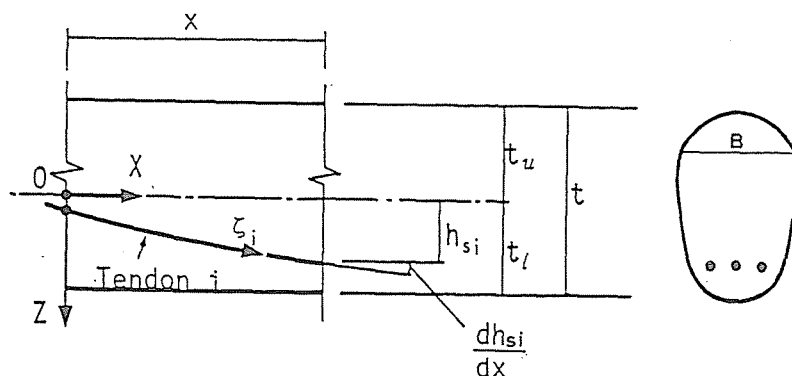


図5-1 曲線テンドンを有するP C梁の座標と断面記号

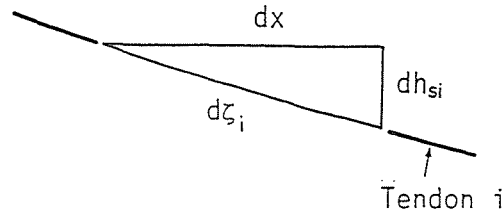


図5-2 $d\zeta_i$, dh_{si} , dx の関係

らの鉛直距離,

上式中の h_{si} は、図5-1に示すように i 層のテンダンの x 軸からの鉛直距離であるから、先の仮定より x の関数として下式で与えられる。

$$h_{si} = h_{si}(x) \quad (5-6)$$

また、(5-5)式のテンダンのすべり率 ε_{ssi} は次式で表される。

$$\varepsilon_{ssi} = \frac{dS_i}{d\zeta_i} = \left(\frac{dS_i}{dx} \right) / \left(\frac{d\zeta_i}{dx} \right) \quad (5-7)$$

ここに、上式中の右辺中の微分 $d\zeta_i/dx$ は、図5-2を参照することにより直ちに求められ、下式となる。

$$\frac{d\zeta_i}{dx} = \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2} \quad (5-8)$$

また、同じ位置の i 層のテンダンの応力 σ_{si} は、

$$\sigma_{si} = E_{si} \varepsilon_{si} \quad (5-9)$$

但し、 E_{si} ： i 層のテンダンのヤング係数

(4) 付着応力

任意の i 層のテンダンの或る位置 ζ_i における、コンクリートとの付着境界に生ずる付着応力 τ_{bi} は、前掲の仮定5)より次式で表される。

$$\tau_{bi} = K_{bi} S_i \quad (5-10)$$

但し、 K_{bi} ： i 層のテンダンの付着係数で、緊張解析時には $K_{bi} \equiv 0$ を、グラウチング完了後においては、グラウトと緊張材間の実際の付着係数値を用いる。

5.2.3 全ポテンシャル・エネルギー汎関数

テンダンの付着すべりを考慮した場合の、PC梁部材の全ポテンシャル・エネルギー汎関数 Π を求めるために必要な内部エネルギーは、コンクリート、テンドン、および付着すべりに掛かるエネルギー U_{cn} , U_{st} , U_{bs} の3種であり、これらはそれぞれ次のように表すことができる。

$$U_{cn} = \frac{1}{2} \int_0^L \int_{-t_u}^{t_l} B E_c \varepsilon_c^2 dz dx - \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \sum_{i=1}^m A_{s,i} E_c \sqrt{1 + (dh_{s,i}/dx)^2} \varepsilon_{s,i}^2 \right\} dx \quad (5-11)$$

$$U_{st} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left\{ \int_0^{L_{s,i}} A_{s,i} E_{s,i} \varepsilon_{s,i}^2 d\zeta_i \right\} \quad (5-12)$$

$$U_{bs} = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m \left\{ \int_0^{L_{s,i}} A_{b,s,i} K_{b,i} S_{s,i}^2 d\zeta_i \right\} \quad (5-13)$$

但し、 B ： z 方向に変化する梁幅で $B=B(z)$ 、 L ：梁の部材長、 $L_{s,i}$ ： i 層のテンダンの全長、
 $A_{s,i}$ ： i 層のテンダンの断面積、 $A_{b,s,i}$ ： i 層のテンダンの付着表面積、 $K_{b,i}$ ： i 層のテンダンの付着係数

上の3式のうち U_{st} と U_{bs} は、各テンダンの設置曲線に沿ってとられた ζ_i に関する積分の形で表示されているので、これを図5-2を参照して x に関する積分の形に変換すると(5-12)式と(5-13)式は次のようになる。

$$U_{st} = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \sum_{i=1}^m A_{s,i} E_{s,i} \varepsilon_{s,i}^2 \sqrt{1 + (dh_{s,i}/dx)^2} \right\} dx \quad (5-14)$$

$$U_{bs} = \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ \sum_{i=1}^m A_{b,s,i} K_{b,i} S_i^2 \sqrt{1 + (dh_{s,i}/dx)^2} \right\} dx \quad (5-15)$$

また、梁には鉛直方向の分布荷重 q_z と、材端において、軸荷重 P_u および各テンダンの緊張荷重 $P_{s,i}$ が作用するものとする、外部ポテンシャル・エネルギー V は下式で表される。

$$V = \int_0^L \left\{ P_u \left(\frac{du}{dx} \right) + q_z w + \sum_{i=1}^m P_{s,i} \left(\frac{dS_i}{dx} \right) \right\} dx \quad (5-16)$$

従って、(5-11)、(5-14)～(5-16)式に(5-1)～(5-10)式の関係を入れて整理すると、PC梁部材の全ポテンシャル・エネルギー汎関数 Π ($= U_{cn} + U_{st} + U_{bs} - V$) は、次のように求められる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \int_0^L \left\{ [A_0 E_c + \sum_{i=1}^m A_{s,i}^* E_{s,i} \sqrt{1 + (dh_{s,i}/dx)^2}] \left(\frac{du}{dx} \right)^2 \right. \\ & - 2 \left[\sum_{i=1}^m A_{s,i}^* E_{s,i} h_{s,i} \sqrt{1 + (dh_{s,i}/dx)^2} \right] \frac{du}{dx} \frac{d^2 w}{dx^2} + 2 \sum_{i=1}^m A_{s,i} E_{s,i} \left(\frac{du}{dx} \frac{dS_i}{dx} \right. \\ & \left. \left. - h_{s,i} \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{dS_i}{dx} \right) + [I_0 E_c + \sum_{i=1}^m A_{s,i}^* E_{s,i} h_{s,i} \sqrt{1 + (dh_{s,i}/dx)^2}] \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \right)^2 \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^m \frac{A_{s,i} E_{s,i}}{\sqrt{1 + (dh_{s,i}/dx)^2}} \left(\frac{dS_i}{dx} \right)^2 + \sum_{i=1}^m A_{b,s,i} K_{b,i} \sqrt{1 + (dh_{s,i}/dx)^2} S_i^2 \right\} dx \\ & - \int_0^L \left\{ P_u \left(\frac{du}{dx} \right) + q_z w + \sum_{i=1}^m P_{s,i} \left(\frac{dS_i}{dx} \right) \right\} dx \end{aligned} \quad (5-17)$$

但し、 A_0 ：無筋梁の断面積、 I_0 ：無筋梁の断面2次モーメント、 $A_{s,i}^*$ ： i 層のテンダンの

換算断面積で $A_{si}^* = A_{si}(1 - E_c/E_{si})$

5.2.4 支配微分方程式

曲線テンドンを有する P C 梁部材を支配する基礎微分方程式は、前項で得た全ポテンシャル・エネルギー汎関数(5-17)式に変分原理を適用することによって求められ、次のようになる。

変位 u に関して：

$$\begin{aligned} & [A_o E_c + \sum A_{si}^* E_{si} \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}] \frac{d^2 u}{dx^2} + [\sum \frac{A_{si}^* E_{si}}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2}] \frac{du}{dx} \\ & - [\sum A_{si}^* E_{si} h_{si} \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}] \frac{d^3 w}{dx^3} \\ & - [\sum \{ A_{si}^* E_{si} \frac{dh_{si}}{dx} \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2} + \frac{A_{si}^* E_{si} h_{si}}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \}] \frac{d^2 w}{dx^2} \\ & + \sum A_{si}^* E_{si} \frac{d^2 S_i}{dx^2} = 0 \end{aligned} \quad (5-18)$$

変位 w に関して：

$$\begin{aligned} & - [\sum A_{si}^* E_{si} h_{si} \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}] \frac{d^3 u}{dx^3} \\ & - 2 [\sum A_{si}^* E_{si} \{ \frac{dh_{si}}{dx} \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2} + \frac{h_{si}}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \}] \frac{d^2 u}{dx^2} \\ & - [\sum A_{si}^* E_{si} \{ \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2} + \frac{2h_{si}}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} (\frac{dh_{si}}{dx})^2 \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \\ & + \frac{h_{si}}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} \{ (\frac{d^2 h_{si}}{dx^2})^2 + \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^3 h_{si}}{dx^3} \} \\ & - \frac{h_{si}}{\{1 + (dh_{si}/dx)^2\}^{3/2}} (\frac{dh_{si}}{dx})^2 (\frac{d^2 h_{si}}{dx^2})^2 \}] \frac{du}{dx} \\ & - \sum A_{si} E_{si} (h_{si} \frac{d^3 S_i}{dx^3} + 2 \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^2 S_i}{dx^2} + \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \frac{dS_i}{dx}) \\ & + [I_o E_c + \sum A_{si}^* E_{si} h_{si} \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}] \frac{d^4 w}{dx^4} \\ & + 2 [\sum A_{si}^* E_{si} \{ 2h_{si} \frac{dh_{si}}{dx} \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2} + \frac{h_{si}^2}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \}] \frac{d^3 w}{dx^3} \\ & + [\sum A_{si}^* E_{si} \{ 2(\frac{dh_{si}}{dx})^2 \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2} + 2h_{si} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2} \\ & + \frac{4h_{si}}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} (\frac{dh_{si}}{dx})^2 \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} + \frac{2h_{si}^2}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} \{ (\frac{d^2 h_{si}}{dx^2})^2 + \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^3 h_{si}}{dx^3} \} \\ & - \frac{h_{si}^2}{\{1 + (dh_{si}/dx)^2\}^{3/2}} (\frac{dh_{si}}{dx})^2 (\frac{d^2 h_{si}}{dx^2})^2 \}] \frac{d^2 w}{dx^2} = q_z \end{aligned} \quad (5-19)$$

変位 S_i に関して：

$$\begin{aligned} & A_{si} E_{si} \{ \frac{d^2 u}{dx^2} - h_{si} \frac{d^3 w}{dx^3} - \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2}} \frac{d^2 S_i}{dx^2} \\ & - \frac{1}{\{1 + (dh_{si}/dx)^2\}^{3/2}} \frac{dh_{si}}{dx} \frac{d^2 h_{si}}{dx^2} \frac{dS_i}{dx} \} = A_{bsi} K_{bi} S_i \sqrt{1 + (dh_{si}/dx)^2} \end{aligned} \quad (5-20)$$

但し、 $i = 1 \sim m$

上の(5-18)～(5-20)式は、それぞれ u , w , S_i に関する変位曲線の基礎微分方程式である。

5.2.5 等価軸力および等価曲げモーメントの導入と平衡方程式

前項で得た基礎微分方程式を平衡方程式に変換するために、次に示す等価軸力と等価曲げモーメント（記号については、図5-1を参照）を導入する。

$$N = \int_{-t_u}^{t_t} B_z \sigma_c dz + \sum_{i=1}^m A_{s,i} \sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2} (\sigma_{s,i} - h_{s,i} \sigma_c) \quad (5-21)$$

$$M = \int_{-t_u}^{t_t} B_z \sigma_c z dz + \sum_{i=1}^m A_{s,i} h_{s,i} \sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2} (\sigma_{s,i} - h_{s,i} \sigma_c) \quad (5-22)$$

上の2式からも明らかなように、ここで導入された軸力と曲げモーメントは、「テンドンの断面積 $A_{s,i}$ が、テンドン自身の傾斜によって $\sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}$ 倍に増えた」ものとして取り扱われた場合に相当している。しかしながら、この両式中に $\sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}$ が含まれるのは、後で Appendix [5-1] に示すように、これらをエネルギー的に等価な量として定義したことに起因するものである。また、上2式中の右辺に含まれる $-h_{s,i} \sigma_c$ なる項は、対応するテンドン位置のコンクリートの応力で、テンドンによるコンクリートの断面欠損を考慮するために必要となるものである。

(5-21), (5-22)式は、(5-1)～(5-9)式の関係を用いると下式となる。

$$N = [A_o E_c + \sum_{i=1}^m A_{s,i}^* E_{s,i} \sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}] \frac{du}{dx} - [\sum_{i=1}^m A_{s,i}^* E_{s,i} h_{s,i} \sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}] \frac{d^2 w}{dx^2} + \sum_{i=1}^m A_{s,i} E_{s,i} \frac{dS_i}{dx} \quad (5-23)$$

$$M = [\sum_{i=1}^m A_{s,i}^* E_{s,i} h_{s,i} \sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}] \frac{du}{dx} - [I_o E_c + \sum_{i=1}^m A_{s,i}^* E_{s,i} h_{s,i} \sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}] \frac{d^2 w}{dx^2} + \sum_{i=1}^m A_{s,i} E_{s,i} h_{s,i} \frac{dS_i}{dx} \quad (5-24)$$

但し、 A_o ：無筋梁の断面積、 I_o ：無筋梁の断面2次モーメント、 $A_{s,i}^*$ ： i 層のテンドンの換算断面積で $A_{s,i}^* = A_{s,i} (1 - E_c/E_{s,i})$

以上で定義した等価軸力と等価曲げモーメントを用いると、前項で導いた(5-18)～(5-20)式の基礎微分方程式は、第3章で述べた直線配筋を有するRC梁の場合と同じ形の以下の平衡方程式に変換することができる。

$$\frac{dN}{dx} = 0 \quad (5-25)$$

$$\frac{d^2 M}{dx^2} + q_z = 0 \quad (5-26)$$

$$A_{s i} \frac{d \sigma_{s i}}{d x} = A_{b s i} \tau_{b i} \sqrt{1+(d h_{s i} / d x)^2} \quad (5-27)$$

但し、 $i = 1 \sim m$

5.3 有限要素法への定式化

曲線テンドンを有するP C梁部材の荷重－変形応答（テンドンの緊張力導入時を含む）は、前項5.2で導いた基礎微分方程式を解くことによって解決することができるが、ここでは有限要素法を用いて定式化を行うこととする。

尚、周知のように、曲線テンドンを有するP C梁のための、既往の著名な有限要素“梁”モデル（第1章の序論で述べた2次元平面応力問題としての解析手法は対象外とする）としては、Bond¹⁾、Kang²⁾、田辺ら³⁾の研究がある。これらのうち、BondとKangのモデルでは、「テンドンによる梁の補剛の効果は、要素の剛性マトリックスには含まれておらず、あとから間接的に算入する」方法を用いており、また、「テンドンの剛性を要素の剛性マトリックスに直接含める」田辺らのモデルの定式化も、ここで述べる有限要素とは全く異なるものであることを付記する。

5.3.1 テンドンの2次曲線近似

P C梁の有限要素展開を行う場合にまず問題になるのは、「梁の内部に設置される各テンドンの曲線形をどのように仮定するか」である。通常、ポストテンションP C梁に採用されるテンドンの曲線形は、2次曲線が多いとは言え、実際には「円弧と直線の組み合わせ」等、様々な形状が用いられている。しかしながら、有限要素法では、個々の要素ごとに異なった曲線形を設定することが可能であるから、テンドン曲線を近似するのに最も都合のよい一つの曲線形を選んで定式化しておく、実際には、あらゆるテンドン形状を表

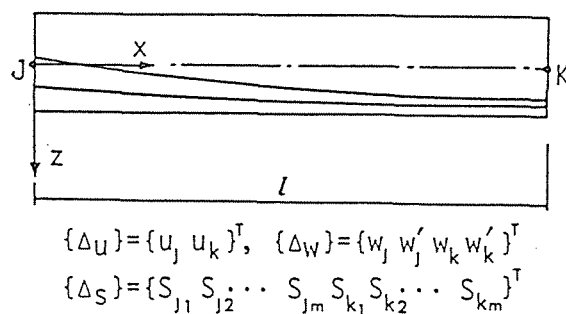


図5-3 テンドンの付着すべりを考慮した曲線テンドンを有するP C梁要素

示することが可能となる。ここでは、テンドン曲線形を下に示す2次曲線と仮定して解析を進めることとする。

$$h_{s,i} = a_i + b_i x + c_i x^2 \quad (5-28)$$

但し、 a_i, b_i, c_i : i 層のテンドンの曲線形を定義する定数。

5.3.2 P C梁要素の変位関数と歪

図5-3は本章で使用するP C梁要素を示したものである。この要素の設定変位 u, w, S_i (但し、 $i = 1 \sim m$) の各変位関数は、次のようである。

$$u = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \alpha_{u0} \\ \alpha_{u1} \end{Bmatrix} = [f_u] \{\alpha_u\} \quad (5-29)$$

$$w = [1 \quad x \quad x^2 \quad x^3] \begin{Bmatrix} \alpha_{w0} \\ \alpha_{w1} \\ \alpha_{w2} \\ \alpha_{w3} \end{Bmatrix} = [f_w] \{\alpha_w\} \quad (5-30)$$

$$S_i = [1 \quad x] \begin{Bmatrix} \alpha_{sio} \\ \alpha_{sii} \end{Bmatrix} = [f_s] \{\alpha_{si}\} \quad (5-31)$$

但し、 $\{\alpha_u\}, \{\alpha_w\}, \{\alpha_{si}\}$: それぞれ変位 u, w, S_i に関する一般化変位。

以上で明らかなように、このP C梁要素の変位関数そのものは、第3章で論じたR C梁の低次関数要素 (3.3.1) と同じものである。

次に、これらの各変位 u, w, S_i の導関数を求めると、それぞれ次のようになる。

$$u' = \frac{du}{dx} = [f'_u] \{\alpha_u\} = [0 \quad 1] \{\alpha_u\} \quad (5-32)$$

$$w' = \frac{dw}{dx} = [f'_w] \{\alpha_w\} = [0 \quad 1 \quad 2x \quad 3x^2] \{\alpha_w\} \quad (5-33)$$

$$w'' = \frac{d^2w}{dx^2} = [f''_w] \{\alpha_w\} = [0 \quad 0 \quad 2 \quad 6x] \{\alpha_w\} \quad (5-34)$$

$$S'_i = \frac{dS_i}{dx} = [f'_s] \{\alpha_{si}\} = [0 \quad 1] \{\alpha_{si}\} \quad (5-35)$$

また、図5-3に示すこの要素の節点変位ベクトル $\{\Delta_u\}, \{\Delta_w\}, \{\Delta_{si}\}$ は、次式によって各一般化変位ベクトル $\{\alpha_u\}, \{\alpha_w\}, \{\alpha_{si}\}$ と関係づけられる。

$$\{\Delta_u\} = \begin{Bmatrix} u_J \\ u_K \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \{\alpha_u\} = [C_u] \{\alpha_u\} \quad (5-36)$$

$$\{\Delta_w\} = \begin{Bmatrix} w_J \\ w'_J \\ w_K \\ w'_K \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & l & l^2 & l^3 \\ 0 & 1 & 2l & 3l^2 \end{bmatrix} \{\alpha_w\} = [C_w] \{\alpha_w\} \quad (5-37)$$

$$\{\Delta_{si}\} = \begin{Bmatrix} S_{ij} \\ S_{ik} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & l \end{bmatrix} \{\alpha_{si}\} = [C_s] \{\alpha_{si}\} \quad (5-38)$$

但し、 l ：要素長

従って、先の一般化変位 $\{\alpha_u\}$ 、 $\{\alpha_w\}$ 、 $\{\alpha_{si}\}$ は上式より次のようになる。

$$\{\alpha_u\} = [C_u^{-1}] \{\Delta_u\} \quad (5-39)$$

$$\{\alpha_w\} = [C_w^{-1}] \{\Delta_w\} \quad (5-40)$$

$$\{\alpha_{si}\} = [C_s^{-1}] \{\Delta_{si}\} \quad (5-41)$$

5.3.3 2種の有限要素方程式

(1) 原汎関数に忠実に従う厳密な有限要素方程式

前項で得た(5-28)～(5-41)式の関係をも、先に導いた汎関数(5-17)式に忠実にそのまゝ代入して整理すると次式を得る。

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^l & \left\{ \{\Delta_u\}^T [C_u^{-1}]^T [f'_u]^T (A_0 E_c + \sum A_{si}^* E_{si} \sqrt{1+b_i^2+4b_i c_i x+4c_i^2 x^2}) [f'_u] [C_u^{-1}] \{\Delta_u\} \right. \\ & - 2\{\Delta_u\}^T [C_u^{-1}]^T [f'_u]^T (\sum A_{si}^* E_{si} (a_i+b_i x+c_i x^2) \sqrt{1+b_i^2+4b_i c_i x+4c_i^2 x^2}) [f'_w] [C_w^{-1}] \{\Delta_w\} \\ & + \{\Delta_w\}^T [C_w^{-1}]^T [f'_w]^T (I_0 E_c \\ & \quad + \sum A_{si}^* E_{si} (a_i+b_i x+c_i x^2)^2 \sqrt{1+b_i^2+4b_i c_i x+4c_i^2 x^2}) [f'_w] [C_w^{-1}] \{\Delta_w\} \\ & - 2\{\Delta_u\}^T [C_u^{-1}]^T [f'_u]^T (\sum A_{si} E_{si} [f'_s] [C_s^{-1}] \{\Delta_{si}\}) \\ & - 2\{\Delta_w\}^T [C_w^{-1}]^T [f'_w]^T (\sum A_{si} E_{si} (a_i+b_i x+c_i x^2) [f'_s] [C_s^{-1}] \{\Delta_{si}\}) \\ & + \sum \{\Delta_{si}\}^T [C_s^{-1}]^T [f'_s]^T \left(\frac{A_{si} E_{si}}{\sqrt{1+b_i^2+4b_i c_i x+4c_i^2 x^2}} \right) [f'_s] [C_s^{-1}] \{\Delta_{si}\} \\ & \left. + \sum \{\Delta_{si}\}^T [C_s^{-1}]^T [f_s]^T (A_{b,si} K_{b,i} \sqrt{1+b_i^2+4b_i c_i x+4c_i^2 x^2}) [f_s] [C_s^{-1}] \{\Delta_{si}\} \right\} dx \\ & - \{\Delta_w\}^T \{P_w\} + \{\Delta_u\}^T \{P_u\} - \sum \{\Delta_{si}\}^T \{P_{sio}\} \end{aligned} \quad (5-42)$$

但し、 a_i 、 b_i 、 c_i ：既に(5-28)式で定義した任意のテンドン層 i k 曲線形を規定する定数、 $\{P_u\}$ ：軸 (x) 方向の節点外荷重ベクトル、 $\{P_w\}$ ：鉛直 (z) 方向の節点外荷重ベクトル、 $\{P_{sio}\}$ ： i 層のテンドンの節点緊張外荷重ベクトル

周知のように、曲線テンドンを有する PC 梁部材の有限要素方程式は、上式の汎関数を各節点変位 $\{\Delta_u\}$ 、 $\{\Delta_w\}$ 、 $\{\Delta_{si}\}$ について (但し、 $i = 1 \sim m$) それぞれ変分をとり、各々について独自に積分を実行することによって得られ、次のようになる。

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} & K_{us} \\ K_{uw}^T & K_{ww} & K_{ws} \\ K_{us}^T & K_{ws}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_u \\ \Delta_w \\ \Delta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_u \\ P_w \\ P_{so} \end{Bmatrix} \quad (5-43)$$

但し、 $\{\Delta_s\}$ ：テンドン全層に関する節点すべり変位ベクトルで、各層の対応成分から構成され、 $\{\Delta_s\} = \{\Delta_{s1} \ \Delta_{s2} \ \cdots \ \Delta_{si} \ \cdots \ \Delta_{sm}\}^T$ 。

上式中の部分剛性マトリックス $[K_{uu}]$ 、 $[K_{uw}]$ 、 $[K_{ww}]$ は、以下に示す(5-44)～(5-46)式で表示される。

$$\begin{aligned} [K_{uu}] &= [C_u^{-1}]^T \left\{ A_o E_c \int_0^L [f_u']^T [f_u'] dx + \sum_{i=1}^m \int_0^L [f_u']^T \{ A_{si} E_{si} \sqrt{1+b_i^2+4b_i c_i x+4c_i^2 x^2} \} [f_u'] dx \right\} [C_u^{-1}] \\ &= [C_u^{-1}]^T \{ [{}_1\bar{K}_{uu}] + [{}_2\bar{K}_{uu}] \} [C_u^{-1}] \end{aligned} \quad (5-44)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [{}_1\bar{K}_{uu}] &= A_o E_c \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \\ [{}_2\bar{K}_{uu}] &= \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \psi_{i0} \end{aligned}$$

注) 以後の諸式中には記号 ψ_{i0} 、 ψ_{i1} 、 ψ_{i2} 、 ψ_{i3} で表示される項が頻出するが、その内容については後で (5-50) 式にまとめて一覧する。

$$\begin{aligned} [K_{uw}] &= -[C_u^{-1}]^T \left\{ \sum_{i=1}^m \int_0^L [f_u']^T \{ A_{si}^* E_{si} (a_i + b_i x + c_i x^2) \sqrt{1+b_i^2+4b_i c_i x+4c_i^2 x^2} \}^T [f_w'] dx \right\} [C_w^{-1}] \\ &= -[C_u^{-1}]^T [{}_1\bar{K}_{uw}] [C_w^{-1}] \end{aligned} \quad (5-45)$$

ここに

$$[{}_1\bar{K}_{uw}] = \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Gamma_1 & 3\Gamma_2 \end{bmatrix}$$

但し、

$$\Gamma_1 = 2(a_i \psi_{i0} + b_i \psi_{i1} + c_i \psi_{i2}), \quad \Gamma_2 = 2(a_i \psi_{i1} + b_i \psi_{i2} + c_i \psi_{i3})$$

$$\begin{aligned} [K_{ww}] &= [C_w^{-1}]^T \left\{ I_o E_c \int_0^L [f_w']^T [f_w'] dx + \sum_{i=1}^m \int_0^L [f_w']^T \{ A_{si}^* E_{si} (a_i + b_i x + c_i x^2)^2 \sqrt{1+b_i^2+4b_i c_i x+4c_i^2 x^2} \} [f_w'] dx \right\} [C_w^{-1}] \\ &= [C_w^{-1}]^T \{ [{}_1\bar{K}_{ww}] + [{}_2\bar{K}_{ww}] \} [C_w^{-1}] \end{aligned} \quad (5-46)$$

ここに、

$$[{}_1\bar{K}_{ww}] = I_o E_c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4l & 6l^2 \\ 0 & 0 & 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix}$$

$$[_2\bar{K}_{ww}] = \sum^m A_{si} E_{si} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \Lambda_1 & \Lambda_2 \\ 0 & 0 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \end{bmatrix}$$

但し、

$$\Lambda_1 = 4(\bar{a}_i \psi_{i0} + \bar{b}_i \psi_{i1} + \bar{c}_i \psi_{i2} + \bar{d}_i \psi_{i3} + \bar{e}_i \psi_{i4})$$

$$\Lambda_2 = 12(\bar{a}_i \psi_{i1} + \bar{b}_i \psi_{i2} + \bar{c}_i \psi_{i3} + \bar{d}_i \psi_{i4} + \bar{e}_i \psi_{i5})$$

$$\Lambda_3 = 36(\bar{a}_i \psi_{i2} + \bar{b}_i \psi_{i3} + \bar{c}_i \psi_{i4} + \bar{d}_i \psi_{i5} + \bar{e}_i \psi_{i6})$$

$$\bar{a}_i = a_i^2, \quad \bar{b}_i = 2a_i b_i, \quad \bar{c}_i = b_i^2 + 2a_i c_i, \quad \bar{d}_i = 2b_i c_i, \quad \bar{e}_i = c_i^2,$$

また、(5-43)式の剛性マトリックス中の残りの部分剛性マトリックス $[K_{us}]$, $[K_{ws}]$, $[K_{ssi}]$ は、それぞれ以下の(5-47)~(5-49)式に掲げる、任意のテンドン層 i に関する部分マトリックス $[k_{usi}]$, $[k_{wsi}]$, $[k_{ssii}]$ を、全テンドン層の節点すべり変位ベクトルの並び順にしたがい、機械的に再構成 (assemble) することによって容易に求めることができる。

$$[k_{usi}] = [C_u^{-1}]^T \left\{ A_{si} E_{si} \int_0^l [f'_u]^T [f'_s] dx \right\} [C_s^{-1}] = [C_s^{-1}]^T [\bar{k}_{usi}] [C_s^{-1}] \quad (5-47)$$

ここに、

$$[\bar{k}_{usi}] = A_{si} E_{si} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} [k_{wsi}] &= -[C_w^{-1}]^T \left\{ \int_0^l [f'_w]^T \{ A_{si} E_{si} (a_i + b_i x + c_i x^2) \} [f'_s] dx \right\} [C_s^{-1}] \\ &= -[C_w^{-1}]^T [\bar{k}_{wsi}] [C_w^{-1}] \end{aligned} \quad (5-48)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [\bar{k}_{wsi}] &= A_{si} E_{si} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & (2a_i l + b_i l^2 + 2c_i l^3/3) \\ 0 & (3a_i l^2 + 2b_i l^3 + 3c_i l^4/2) \end{bmatrix} \\ [k_{ssii}] &= [C_s^{-1}]^T \left\{ \int_0^l [f'_s]^T \left\{ \frac{A_{si} E_{si}}{\sqrt{1+b_i^2+4b_i c_i x+4c_i^2 x^2}} \right\} [f'_s] dx \right. \\ &\quad \left. + \int_0^l [f_s]^T \{ A_{bi} K_{bi} \sqrt{1+b_i^2+4b_i c_i x+4c_i^2 x^2} \} [f_s] dx \right\} [C_s^{-1}] \\ &= [C_s^{-1}]^T \{ [_1\bar{k}_{ssii}] + [_2\bar{k}_{ssii}] \} [C_s^{-1}] \end{aligned} \quad (5-49)$$

ここに、

$$[_1\bar{k}_{ssii}] = A_{si} E_{si} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \psi_{-i0} \end{bmatrix}$$

$$[{}_2\bar{K}_{s_i s_i}] = A_{b s_i} K_{b i} \begin{bmatrix} \psi_{i0} & \psi_{i1} \\ \psi_{i1} & \psi_{i2} \end{bmatrix}$$

以上に掲げた(5-44)～(5-49)式の部分マトリックス中に含まれる、記号 ψ_{i0} , $\psi_{i0} \sim \psi_{i6}$ の内容を以下に一覧する。

$$\left. \begin{aligned} \psi_{i0} &= \int_0^L \frac{1}{\sqrt{A_i + B_i x + C_i x^2}} dx, & \psi_{i0} &= \int_0^L \sqrt{A_i + B_i x + C_i x^2} dx \\ \psi_{i1} &= \int_0^L x \sqrt{A_i + B_i x + C_i x^2} dx, & \psi_{i2} &= \int_0^L x^2 \sqrt{A_i + B_i x + C_i x^2} dx \\ \psi_{i3} &= \int_0^L x^3 \sqrt{A_i + B_i x + C_i x^2} dx, & \psi_{i4} &= \int_0^L x^4 \sqrt{A_i + B_i x + C_i x^2} dx \\ \psi_{i5} &= \int_0^L x^5 \sqrt{A_i + B_i x + C_i x^2} dx, & \psi_{i6} &= \int_0^L x^6 \sqrt{A_i + B_i x + C_i x^2} dx \end{aligned} \right\} \quad (5-50)$$

ここに、 $A_i = 1 + b_i^2$, $B_i = 4b_i c_i$, $C_i = 4c_i^2$,

上の記号 ψ_{i0} , $\psi_{i0} \sim \psi_{i6}$ に関する広く知られた一連の積分は、公式集³⁾¹⁾等を参照することによって直ちに求められる。

(2) 簡略化有限要素方程式

前項(1)では、汎関数の原式(5-17)に忠実に従った場合の有限要素方程式を導いたが、曲線テンドンを有するP C梁の場合には、「容認可能な或る種の近似仮定」を導入することによって、使用要素の形状関数は全く同一であるにも拘わらず、前項(1)で求めたそれよりも遥かに簡略化された形の“新たな有限要素方程式”を得ることができる。

即ち、ここで言う近似はテンドンの曲線形に関するものであり、次式で表示することができる。

$$\sqrt{1 + (dh_{s_i}/dx)^2} = 1 \quad (5-51)$$

但し、 $i = 1 \sim m$

上式は明らかに、「各テンドンの曲線座標 ξ_i (図5-1と図5-2を参照)に沿ってとられたテンドン長を、材軸に設定された x 座標値で代替え近似する」ことを意味している。この近似は、以下で明らかとなるように剛性マトリックスの誘導を著しく容易にし、また、当然のことながらコンピュータへのプログラミングも遥かに簡略化されることになる。

(5-51)式の近似仮定を導入した場合の、汎関数は容易に書き下され次のようになる。

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \int_0^L & \left\{ \{ \Delta_u \}^T [C_u^{-1}]^T [f'_u]^T (A_0 E_c + \sum_{i=1}^m A_{s_i}^* E_{s_i}) [f'_u] [C_u^{-1}] \{ \Delta_u \} \right. \\ & - 2 \{ \Delta_u \}^T [C_u^{-1}]^T [f'_u]^T \left(\sum_{i=1}^m A_{s_i}^* E_{s_i} (a_i + b_i x + c_i x^2) \right) [f''_w] [C_w^{-1}] \\ & \left. + \{ \Delta_w \}^T [C_w^{-1}]^T [f''_w]^T (I_0 E_c + \sum_{i=1}^m A_{s_i}^* E_{s_i} (a_i + b_i x + c_i x^2)^2) [f''_w] [C_w^{-1}] \{ \Delta_w \} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -2\{\Delta_u\}^T [C_u^{-1}]^T [f'_u]^T \left\{ \sum_{s=1}^m A_{si} E_{si} [f'_s] [C_s^{-1}] \{\Delta_{si}\} \right\} \\
& -2\{\Delta_w\}^T [C_w^{-1}]^T [f''_w]^T \left\{ \sum_{s=1}^m A_{si} E_{si} (a_i + b_i x + c_i x^2) [f'_s] [C_s^{-1}] \{\Delta_{si}\} \right\} \\
& + \sum_{s=1}^m A_{si} E_{si} \{\Delta_{si}\}^T [C_s^{-1}]^T [f'_s]^T [f'_s] [C_s^{-1}] \{\Delta_{si}\} \\
& + \sum_{s=1}^m A_{bsi} K_{bsi} \{\Delta_{si}\}^T [C_s^{-1}]^T [f_s]^T [f_s] [C_s^{-1}] \{\Delta_{si}\} \} dx \\
& - \{\Delta_w\}^T \{P_w\} + \{\Delta_u\}^T \{P_u\} - \sum_{s=1}^m \{\Delta_{si}\}^T \{P_{sio}\}
\end{aligned} \tag{5-52}$$

従って、この場合の有限要素方程式は、上式の汎関数を用いて求められ下式となる。

$$\begin{bmatrix} K_{uu} & K_{uw} & K_{us} \\ K_{uw}^T & K_{ww} & K_{ws} \\ K_{us}^T & K_{ws}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_u \\ \Delta_w \\ \Delta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_u \\ P_w \\ P_{so} \end{Bmatrix} \tag{5-53}$$

この簡略化有限要素方程式の表示は、見掛け上(5-42)式と相似であるが、以下に示すようにその内容は全く異なったものとなる。

(5-53)式の左辺の剛性マトリックスを構成する個々の部分マトリックスの内の $[K_{uu}]$, $[K_{uw}]$, $[K_{ww}]$ は、それぞれ次のようである。

$$\begin{aligned}
[K_{uu}] &= [C_u^{-1}]^T \left\{ (A_o E_c + \sum_{s=1}^m A_{si}^* E_{si}) \int_0^l [f'_u]^T [f'_u] dx \right\} [C_u^{-1}] \\
&= [C_u^{-1}]^T [\bar{K}_{uu}] [C_u^{-1}]
\end{aligned} \tag{5-54}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
[\bar{K}_{uu}] &= (A_o E_c + \sum_{s=1}^m A_{si}^* E_{si}) \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \\
[K_{uw}] &= -[C_u^{-1}]^T \left\{ \sum_{s=1}^m A_{si}^* E_{si} \int_0^l (a_i + b_i x + c_i x^2) [f'_u]^T [f''_w] dx \right\} [C_w^{-1}] \\
&= -[C_u^{-1}]^T [\bar{K}_{uw}] [C_w^{-1}]
\end{aligned} \tag{5-55}$$

ここに、

$$\begin{aligned}
[\bar{K}_{uw}] &= \sum_{s=1}^m A_{si}^* E_{si} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & (2a_i l + b_i l^2 + 2c_i l^3/3) & (3a_i l^2 + 2b_i l^3 + 3c_i l^4/2) \end{bmatrix} \\
[K_{ww}] &= [C_w^{-1}]^T \left\{ I_o E_c \int_0^l [f''_w]^T [f''_w] dx \right. \\
&\quad \left. + \sum_{s=1}^m A_{si} E_{si} \int_0^l (a_i + b_i x + c_i x^2)^2 [f''_w]^T [f''_w] dx \right\} [C_w^{-1}] \\
&= [C_w^{-1}]^T \{ [\bar{K}_{ww}] + [{}_2\bar{K}_{ww}] \} [C_w^{-1}]
\end{aligned} \tag{5-56}$$

ここに、

$$[{}_1\bar{K}_{ww}] = I_o E_c \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4l & 6l^2 \\ 0 & 0 & 6l^2 & 12l^3 \end{bmatrix}$$

$$[_2\bar{K}_{ww}] = \sum^m A_{si} E_{si} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \psi_1 & \psi_2 \\ 0 & 0 & \psi_2 & \psi_3 \end{bmatrix}$$

但し、

$$\psi_1 = 4a_i^2 l + 4a_i b_i l^2 + 4(b_i^2 + 2a_i c_i) l^3 / 3 + 2b_i c_i l^4 + 4c_i^2 l^5 / 5$$

$$\psi_2 = 6a_i^2 l^2 + 8a_i b_i l^3 + 3(b_i^2 + 2a_i c_i) l^4 + 24b_i c_i l^5 / 5 + 2c_i^2 l^6$$

$$\psi_3 = 12a_i^2 l^3 + 18a_i b_i l^4 + 36(b_i^2 + 2a_i c_i) l^5 / 5 + 12b_i c_i l^6 + 36c_i^2 l^7 / 7$$

更にまた、(5-52)式の他の部分剛性マトリックス $[K_{us}]$, $[K_{ws}]$, $[K_{ssi}]$ は、それぞれこれらのマトリックスを構成する任意の i 層のテンドンに関する、以下に示す(5-57)~(5-59)式の部分マトリックス $[k_{usi}]$, $[k_{wsi}]$, $[k_{ssii}]$ を、全テンドン層の節点すべり変位について再構成することによって容易に得ることができる。

$$[k_{usi}] = [C_u^{-1}]^T \left\{ A_{si} E_{si} \int_0^l [f'_u]^T [f'_s] dx \right\} [C_s^{-1}] = [C_u^{-1}]^T [\bar{k}_{usi}] [C_u^{-1}]^T \quad (5-57)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [\bar{k}_{usi}] &= A_{si} E_{si} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & l \end{bmatrix} \\ [k_{wsi}] &= -[C_w^{-1}]^T \left\{ A_{si} E_{si} \int_0^l (a_i + b_i x + c_i x^2) [f''_w]^T [f'_s] dx \right\} [C_s^{-1}] \\ &= -[C_w^{-1}]^T [\bar{k}_{wsi}] [C_w^{-1}] \end{aligned} \quad (5-58)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [\bar{k}_{wsi}] &= A_{si} E_{si} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & (2a_i l + b_i l^2 + 2c_i l^3 / 3) \\ 0 & (3a_i l^2 + 2b_i l^3 + 3c_i l^4 / 2) \end{bmatrix} \\ [k_{ssii}] &= [C_s^{-1}]^T \left\{ A_{si} E_{si} \int_0^l [f'_s]^T [f'_s] dx + A_{bsi} K_{bi} \int_0^l [f_s]^T [f_s] dx \right\} [C_s^{-1}] \\ &= [C_s^{-1}]^T \{ [_1\bar{k}_{ssii}] + [_2\bar{k}_{ssii}] \} [C_s^{-1}] \end{aligned} \quad (5-59)$$

ここに、

$$\begin{aligned} [_1\bar{k}_{ssii}] &= [\bar{k}_{usi}] \\ [_2\bar{k}_{ssii}] &= A_{bsi} E_{si} \begin{bmatrix} l & l^2 / 2 \\ l^2 / 2 & l^3 / 3 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

5.4 テンドンのプレストレス力の減少量の評価とその算入法

前節5.3で得た2種の有限要素方程式は、両者とも、後に掲げる数値計算例でも明らかとなるように、付着係数の値のみを調整することによって、アンボンドから完全付着状態までのP C梁を一貫して取り扱うことが可能である。また、テンドンとシース間に摩擦作用なしのアンボンド状態を仮定し得るならば、テンドンへの緊張力導入時の梁の挙動も、同式の荷重ベクトル P_s に、対応する緊張力値を等値することによって容易に解析することができる。しかしながら、実際のP C梁においては、テンドンとシース間の摩擦と施工時に生ずるシース自身の波打ちによって、導入されたプレストレス力は緊張端から離れるにしたがって徐々に減少していくことになる。

ここでは、通常の弾性変形とは全く異質な現象である“摩擦によるテンドンのプレストレス力の減少”の評価と、それが梁全体の変形挙動におよぼす影響を算入する手法について記述することにする。

5.4.1 テンドンに沿うプレストレス力と摩擦力分布の評価

(1) 緊張力導入時

テンドン層はすべて典型的に取り扱うことが可能なので、ここでは任意の i 層のみを考える。周知のように、緊張端からテンドン曲線に沿って ζ_i （従って、材軸に沿って x ）だけ離れた或る位置の i 層のテンドンのプレストレス力 P_{si} は、次式で表示される³²⁾。

$$P_{si} = P_{sio} \cdot e^{(-\mu_i \theta_{xi} - \lambda_i \zeta_i)} \quad (5-60)$$

但し、 P_{sio} ： i 層のテンドンの緊張端位置の導入緊張力、 μ_i ： i 層のテンドンの単位角（rad）変化当りの摩擦係数、 θ_{xi} ： i 層のテンドンの緊張端位置から材軸に沿って x （従って、テンドン曲線に沿って ζ_i ）までの累積角変化、 λ_i ：シースの波打ちに起因する i 層のテンドンの単位長さ当りの摩擦係数。

上式中の ζ_i は、図5-4に示すように i 層のテンドンの緊張端から x 点までの曲線長である

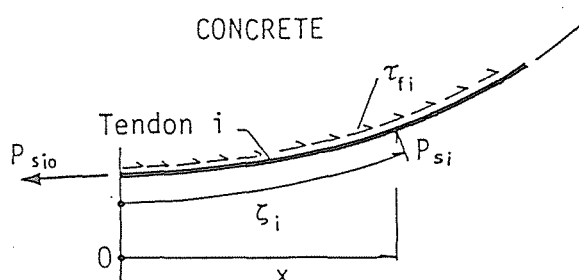


図5-4 テンドン曲線に沿って働く接線方向摩擦力

から、下式で求められる。

$$\zeta_i = \int_0^L \sqrt{1 + (dh_{s,i}/dx)^2} dx \quad (5-61)$$

また、この位置における、 i 層のテンドン曲線の接線方向（図5-4参照）に働く単位長さ当りの摩擦力 τ_{fi} は、曲線 ζ_i に沿うプレストレス力 $P_{s,i}$ の変化率であるから、次のように表される。

$$\tau_{fi} = \frac{dP_{s,i}}{dx} \quad (5-62)$$

従って、テンドンに沿うプレストレス力と摩擦力分布は、全要素の各節点ごとに $P_{s,i}$ と τ_{fi} の値を計算することによって求められる。

以上の関係からも明らかなように、テンドン曲線に沿うプレストレス力と摩擦力分布はその曲線形状に依存している。しかも、PC梁の場合、緊張力の導入によって梁自身が変形することになるから、正確にはテンドン曲線におよぼす梁の撓みの影響を考慮することが必要になる。この影響は、梁の撓み曲線 w をテンドンの初期設置曲線 $h_{s,i}$ に加算し、これを新たな曲線 $h_{s,i}$ として各要素ごとにシミュレートし直し、更に、各層のテンドンのプレストレス力と摩擦力に変化が見られなくなるまで、(5-60)～(5-62)式の間係を繰返し適用することによって、容易に考慮することがでる。

(2) アンカースリップの生ずる定着時

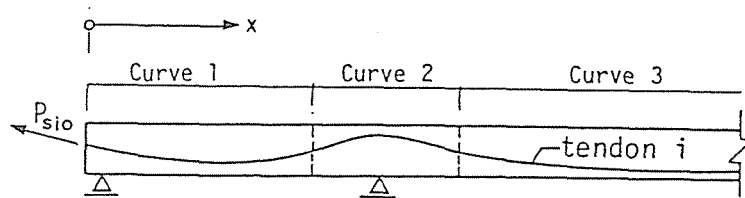
各層のテンドンに所要の緊張力が導入されると、これを緊張端において梁本体に定着する(Anchoring)ことになるが、この時アンカースリップ $dS_{i,0}$ が生ずる。この $dS_{i,0}$ の大きさ自体は、定着器具と施工方法に左右されるが、本来的に不可避のもので、このアンカースリップが、更にテンドンのプレストレス力と摩擦力分布に影響を及ぼすことになる。

図5-5の(a)、(b)は、3種の連結曲線(Curve 1, 2, 3)からなる任意の i 層のテンドンのプロフィールと、その定着前・後の同テンドンの歪分布(プレストレス力分布と相似形)を、それぞれ概念的に図示したものである。同図(b)の斜線部がアンカースリップ $dS_{i,0}$ の影響によって生じたテンドンの歪の低下分と、その区間を表しており、また周知のように、この斜線部分全体の面積が、アンカースリップ量 $dS_{i,0}$ と等価になる。換言すれば、スリップ量 $dS_{i,0}$ は、緊張端から $L_{i,R}$ までのテンドンの歪の変化によって吸収されたということである。またこの影響区間 $L_{i,R}$ における定着前・後のテンドンの歪分布曲線 $O-P-Q-R$ と $O'-P'-Q'-R$ は、言うまでもなく図中の直線 R_0-R に関して対称となる(従って、この間のアンカースリップ後の摩擦力は、定着前と正負の符号が変化するだけで、その大きさは

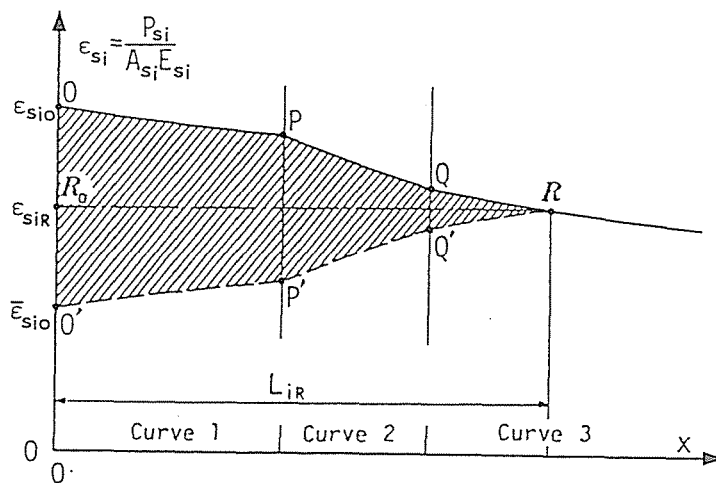
同一となる) から、ここではまず、 L_{iR} の値を求めることが問題になる。

(a) 影響区間 L_{iR} の計算

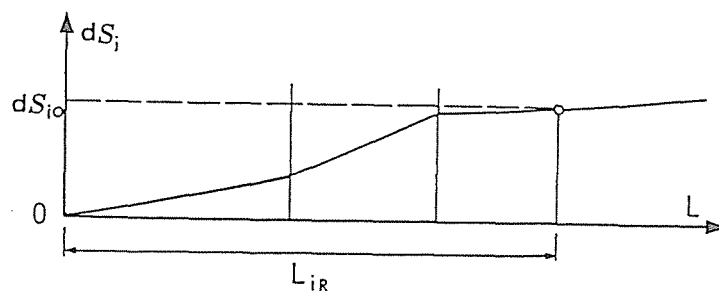
L_{iR} 区間のテンドンのプレストレス力の変化 (図5-5の(b)の例では $O'-P'$, $P'-Q'$, $Q'-R$ 部分) を直線と仮定すれば、 L_{iR} は容易に決定できるが³³⁾、本来の曲線分布として L_{iR} をより正確に求めようとする、事はそれほど簡単ではない。例えば、Greunenら³⁴⁾は、正確には(5-60)式で与えられるテンドンの曲線長 s_i を、 x 座標値で置き替える ($s_i=x$) と言う幾分かの近似を導入し、繰り返し計算によって2次曲線形テンドンの L_{iR} を求める方法を提示している。このGreunenらの手法は有用であるが、同一テンドンが幾つかの曲線の連結によって形成されている場合には、その計算アルゴリズムは極めて煩雑なものとなる。従って本論では以下に述べるような単純な方法を用いて L_{iR} を求めることとした。



(a) テンドンプロフィール



(b) アンカースリップ前・後のテンドンの歪分布



(c) アンカースリップによる影響長 L_{iR} の算定

図5-5 テンドン定着時のアンカースリップによる影響区間長 L_{iR} 算定のための概念図

即ち、緊張端から L_J だけ離れた位置の節点をJとする。今、仮にこの位置が、或るアンカースリップ量に対応するその影響区間だとすると、このときのスリップ量 dS_{iJ} は次式で計算される。

$$dS_{iJ} = 2 \int_0^{L_J} (\epsilon_{si} - \epsilon_{sij}) dx \quad (5-63)$$

但し、 ϵ_{si} : i 層のテンドンの x 点の歪で、 $\epsilon_{si} = P_{si} / (A_{si} E_{si})$ 、 ϵ_{sij} : i 層のテンドンの節点 J の位置での歪。

上式中の歪 ϵ_{si} と ϵ_{sij} は既知であるから、その積分は容易である。図5-5の(c)に示すように、全節点位置に対応する dS_{iJ} を計算しておき、最後に緊張端での実際のアンカースリップ量 dS_{ii} に相当する L_{iR} を求め、その解とする。但し、この L_{iR} が既に試みに分割されている要素の節点位置のいずれかに一致する可能性は殆ど有り得ないから、計算プログラム上では、いずれかの節点位置が L_{iR} に等しくなるように、要素分割を自動修正する手続きが必要となる。

ここで用いた L_{iR} の計算アルゴリズムは極めて単純であり、どのようなテンドン曲線形にも使用することが可能 (Greunenらの方法は2次曲線形テンドンへの適用のみに限られている) である。

(b) 区間 L_{iR} 内のテンドンのプレストレス力分布の修正

アンカースリップ後の区間 L_{iR} での摩擦力分布は、正負の符号が変わるのみでアンカースリップのない場合と同形となるから、テンドンのプレストレス力分布の修正のみが問題となる。 L_{iR} が限界区間長 L_{iLM} (片引きの場合は、対応するテンドンの緊張端から固定端まで、また両引きの場合は、その対称軸位置までの距離)より小さい場合には、先の図5-5 (b)で

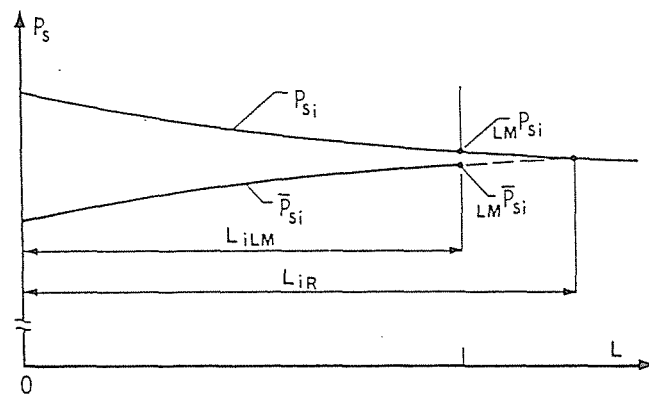


図5-6 影響区間長 L_{iR} が限界区間長 L_{iLM} より大きい場合のアンカースリップ前・後のテンドンのプレストレス力分布

みたように、その分布形は容易に求められるので、 L_{iR} が L_{iLM} より大きい場合がここでの関心事となる。

図5-6は、このときの i 層のテンドンのプレストレス力分布の変化を例示したものである。区間 L_{iLM} 内で吸収されるスリップ分を dS_{iLM} (この値は(5-63)式から求められる) とすると、緊張端で生じた実際のスリップ量 dS_{i0} とこの dS_{iLM} の差に相当する量が吸収されずに残った分であり、これがテンドン全体のプレストレス力の低下として、区間 L_{iLM} 内に一様に配分されることになる。従って、この間のテンドンのプレストレス力 $\bar{P}_{si}$ を、 $L_{iR} < L_{iLM}$ と $L_{iR} > L_{iLM}$ の場合に分けて表示すると以下ようになる。

① $L_{iR} < L_{iLM}$:

$$\bar{P}_{si} = 2P_{siR} - P_{si} \quad (5-64)$$

② $L_{iR} > L_{iLM}$:

$$\bar{P}_{si} = (2L_{iLM}P_{si} - P_{si}) - A_{si}E_{si}(dS_{i0} - dS_{iLM})/L_{iLM} \quad (5-65)$$

但し、 P_{si} : 注目点のアンカースリップ前のプレストレス力、 P_{siR} : L_{iR} 位置のアンカースリップ前のプレストレス力、 $L_{iLM}P_{si}$: L_{iLM} 位置のアンカースリップ前のプレストレス力

5.4.2 テンドンのプレストレス力の減少およびアンカースリップの影響を考慮した

PC梁の緊張解析手法

前節5.4.1で記述した「テンドンのプレストレス力の減少の効果」をも考慮した梁の緊張解析を、本解析法を用いて行うには、大きく分けて2種の方法が考えられる。一つは、A) テンドンの緊張力を外荷重として緊張端に作用させる方法であり、他の一つは、B) 先に求めたテンドンのプレストレス力分布と摩擦力分布を初期応力として構造系に強制する方法である。このうちの前者の A)の方法については、①付着応力-すべり変位関係に完全弾塑性を仮定し、降伏応力として(5-62)式から得られる摩擦力分布を用いる手法と、②摩擦力分布 (同じく(5-62)式から得られる) のみを初期応力として強制する手法の二つが考えられるが、これらは共にテンドンの緊張力を外荷重として作用させ、結果として(5-60)式にほぼ等しいプレストレス力分布を得ると言う点で、同一の手法に分類されるものである。この①、②の両手法については、著者自身が既に報告^{18)~29)}したように、実用的には十分な精度を有しているが、「アンカースリップの影響をも考慮しようとする、両者ともその計算アルゴリズムが煩雑になる」と言う欠点をもっている。

従って、ここでは、B)の方法に属する「アンカースリップの影響をも容易に考慮する

ことが可能な“テンダンのプレストレス力分布と摩擦力分布を初期応力として取り扱う方法”」を採用することにする。

(1) テンダンのプレストレス力分布と摩擦力分布の等価節点力への変換

「緊張時および定着時における、アンカースリップ等の摩擦によるテンダンのプレストレス力と摩擦力の変化」が、P C梁の力学挙動におよぼす影響を考慮するため、前項5.4.1の(1)と(2)で評価された“テンダンのプレストレス力分布と摩擦力分布”を、これと等価な節点力に変換することを考える。

[プレストレス力分布の変換]：テンダンのプレストレス力分布 P_{si} をテンダンの初期応力分布 $\Delta\sigma_{si}$ と見做し、その応力分布を個々の要素内で線形変化するものと仮定すると、これと等価な節点力 $\{\Delta P\}$ は、仮想働の原理³⁵⁾を用いて求められ次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \{\Delta P\} &= \{\Delta P_u\} + \{\Delta P_w\} + \{\Delta P_s\} \\
 &= \sum_m \left\{ [C_u^{-1}]^T \int_0^L A_{si} \sqrt{1+b_i^2+4b_i c_i x+4c_i^2 x^2} [f_u']^T [1 \ x] dx [C_\sigma^{-1}] \{\Delta\sigma_{si}\} \right. \\
 &\quad - \sum_m \left\{ [C_w^{-1}]^T \int_0^L A_{si} (a_i+b_i x+c_i x^2) \sqrt{1+b_i^2+4b_i c_i x+4c_i^2 x^2} [f_w']^T [1 \ x] dx [C_\sigma^{-1}] \{\Delta\sigma_{si}\} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_m \left\{ [C_s^{-1}]^T \int_0^L A_{si} [f_s']^T [1 \ x] dx [C_\sigma^{-1}] \{\Delta\sigma_{si}\} \right\} \right\} \\
 &= \sum_m \left\{ A_{si} [C_u^{-1}]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ q_{i0} & q_{i1} \end{bmatrix} [C_\sigma^{-1}] \{\Delta\sigma_{si}\} \right. \\
 &\quad - \sum_m \left\{ A_{si} [C_w^{-1}]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \Gamma_1 & \Gamma_2 \\ 3\Gamma_2 & \Gamma_3 \end{bmatrix} [C_\sigma^{-1}] \{\Delta\sigma_{si}\} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_m \left\{ A_{si} [C_s^{-1}]^T \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ l & l^2/2 \end{bmatrix} [C_\sigma^{-1}] \{\Delta\sigma_{si}\} \right\} \right\} \quad (5-66)
 \end{aligned}$$

ここに、

$$\Gamma_1 = 2(a_i q_{i0} + b_i q_{i1} + c_i q_{i2}), \quad \Gamma_2 = 2(a_i q_{i1} + b_i q_{i2} + c_i q_{i3}), \quad \Gamma_3 = 6(a_i q_{i2} + b_i q_{i3} + c_i q_{i4})$$

但し、 $\{\Delta\sigma_{si}\}$ ：要素の両節点位置の*i*層のテンダンの緊張応力で、 $\Delta\sigma_{si} = P_{si}/A_{si}$ 、

q_{i0}, q_{i1} ：既出の(5-50)式を参照、 $[C_\sigma^{-1}] = [C_s^{-1}]$

[テンダンの摩擦力分布の変換]：テンドン曲線に沿う摩擦力分布 τ_{fi} を初期付着応力分布 $\Delta\tau_{fi}$ と見做し、各要素内で線形変化するものと仮定すると、これと等価な節点力 $\{\Delta P\}$ は、先の場合と同様、仮想働の原理を用いて求められ次のようになる。

$$\{\Delta P\} = \{\Delta P_s\}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_m \left\{ [C_s^{-1}]^T \int_0^L A_{s,i} \sqrt{1+b_i^2+4b_i c_i x+4c_i^2 x^2} [f_s]^T [f_s] dx [C_s^{-1}] \{\Delta \tau_{bi}\} \right\} \\
&= \sum_m \left\{ A_{s,i} [C_s^{-1}]^T \begin{bmatrix} q_{i0} & q_{i1} \\ q_{i1} & q_{i2} \end{bmatrix} [C_r] \{\Delta \tau_{bi}\} \right\} \quad (5-67)
\end{aligned}$$

但し、 $\{\Delta \sigma_{si}\}$ ：要素の両節点位置の i 層のテンドンの付着応力で、 $\Delta \tau_{si} = \tau_{fi} / A_{bsi}$ 、

q_{i0}, q_{i1}, q_{i2} ：既出の(5-50)式を参照、 $[C_r] = [C_s^{-1}]$

以上の(5-66)，(5-67)式中の記号 $\sum$ は単なるSummationではなく、各テンドン層の節点すべり変位の並び順に従って“assemble”することを意味している。

(2) 繰り返し計算手法

アンカースリップを含む“摩擦によるテンドンのプレストレス力と摩擦力の変化”を厳密に考慮して「P C梁の緊張解析」を行うには、「先に求めたテンドンのプレストレス力分布と摩擦力分布」を以上に述べたようにして、それぞれ等価節点力に変換し、更にこれを外荷重として全構造系に作用させ、前項5.4.1の(1)で記述した「梁自身の撓みのテンドン曲線形におよぼす影響」をも考慮しつつ、プレストレス力と摩擦力分布に変化が見られなくなるまで計算を繰り返し最終的な解を得ることになる。

5.5 数値計算例と考察

本章の5.3節および5.4節で展開した有限要素解析法による解析例を示すために、数種の数値計算例を掲げ若干の検討・考察を試みることにする。

なお、本有限要素解には、先に述べたように「原汎関数に忠実に従う“厳密な有限要素解”」と「 $\sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}=1$ なる近似仮定を導入した“簡略化有限要素解”」の2種があるが、以下の計算例では、特に断わらぬ限り、前者の“厳密な有限要素解”によるものとする。

5.5.1 曲線形状配筋を有するRC梁としての計算例

(1) 付着係数と補強筋の曲線形状の違いが梁の力学性状におよぼす影響

改めて言うまでもなく、テンドンへの緊張力の導入を考慮せぬ場合には、P C梁は単なる“曲線配筋を有するRC梁”として働くことになる。これは實際上、テンドンの緊張・定着完了後のP C梁の挙動と直接的に関連しており、「P C梁自体の剛性を厳密に評価する」と言う観点からすれば、また、極めて重要な問題でもある。

P C梁の力学性状のうちでも、テンダンの曲線形と付着係数がP C梁の挙動におよぼす影響は、極めて興味ひかれる問題である。通常のR C梁やR C床板の場合については、既に第3及び4章において検討したが、著者の知る限りでは、曲線テンダンを有するP C梁に関してこの種の問題を取り扱った既往の研究は見当らぬようである。

従ってここでは、図5-7に示すような、鉄筋が梁の両端で完全に定着された「等分布荷重下にある曲線配筋を有するR C梁」を対象にして、補強鉄筋の曲線形と付着係数が梁の力学性状に如何ような影響をおよぼすかを調べることにする。

なお、この計算例では、梁の外形寸法、コンクリートの物理的性質および使用鉄筋を同一とし、5種の配筋曲線（梁全長に渡って単一の2次曲線とする）形状（ $d_e = 4, 7, 11, 19, 27\text{cm}$ 、但し、 d_e は全て4cmで一定）を設定し、さらに各配筋曲線形状ごとに鉄筋の付着係数 K_b を7段階（ $K_b = 1.0, 10, 10^2, 10^3, 10^4, 10^5, 10^6 \text{ kgf/cm}^2$ ）に変化させて計算を行ってみる。また、以下の各図中の解のプロット位置をみると明らかなように、この計算例では、支持端近傍で急変する付着応力分布の詳細を知るため、梁の部材長全体を支持端に近づくにつれて要素長が短くなる計20個の不等間隔要素に分割して解析を行っている。

図5-8～図5-12に、 $d_e = 4\text{cm} \sim 27\text{cm}$ までの各梁の解析結果を掲げる。これらの内の $d_e = 4\text{cm}$ の図5-8は、直線配筋をもつ通常のR C梁であり、事実この図も第3章の図3-7の結果を比較のため再記したものである。これらの各図の(a), (b)は、ここで設定した付着係数の内の両極の値に対する梁の鉛直変位曲線と、内力として計算される曲げモーメント曲線は無次元化して、また、(c), (d)は、7段階すべての付着係数に対応する、鉄筋の応力曲線と付着応力曲線を、それぞれ対比して図示したものである。以下ではこの解析結果を、図5-8～図5-12の各図に共通の、これらの図(a)～(d)の各項目別に略述し若干の考察を行ってみる。

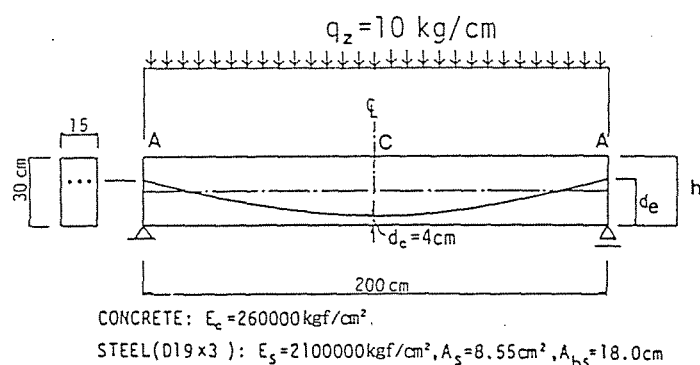
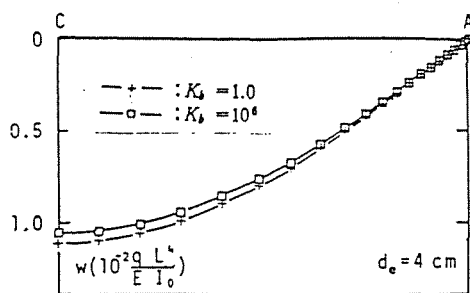
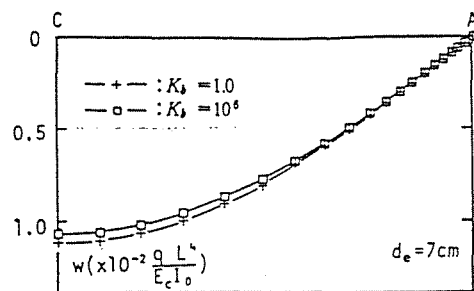


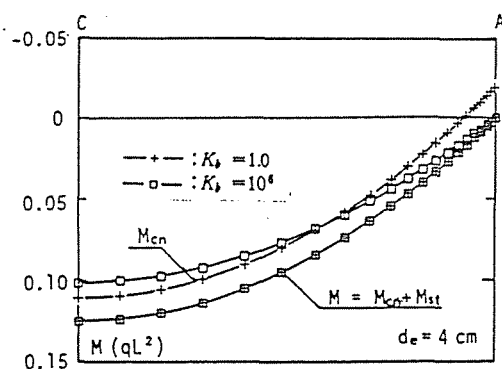
図5-7 曲線配筋を有するモデルR C梁の概要と仮定材料性状



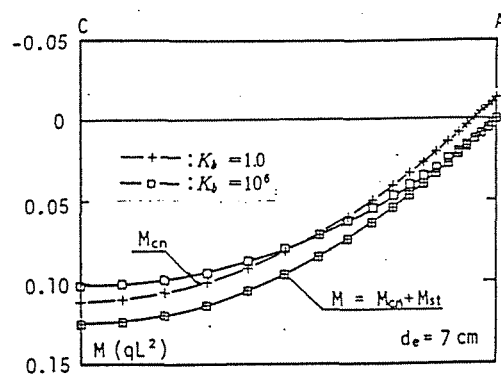
(a) 撓み曲線



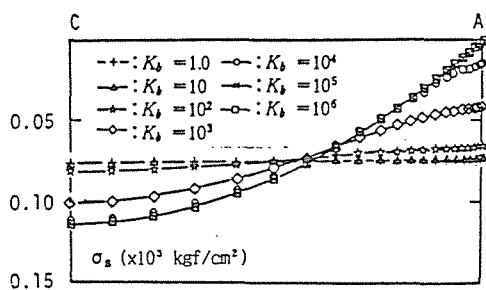
(a) 撓み曲線



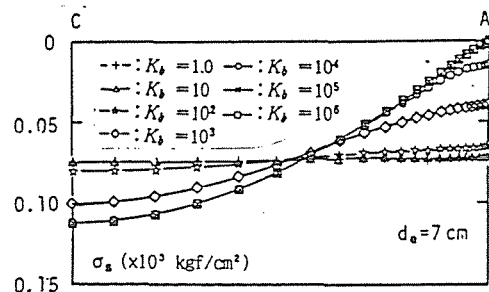
(b) 曲げモーメント曲線



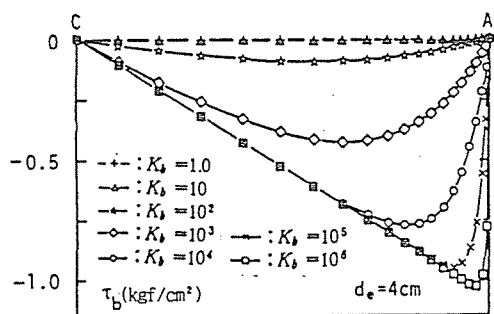
(b) 曲げモーメント曲線



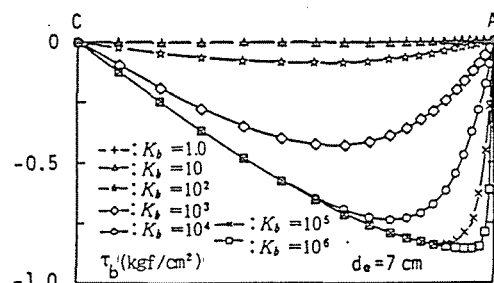
(c) 補強筋の応力曲線



(c) 補強筋の応力曲線



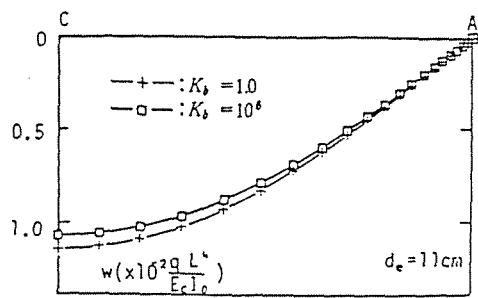
(d) 補強筋の付着応力曲線



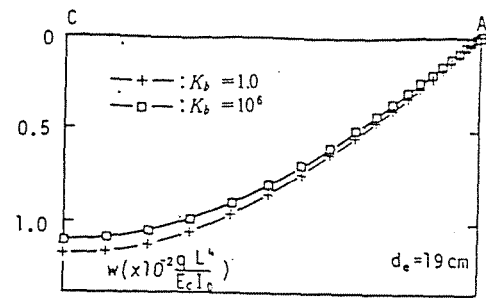
(d) 補強筋の付着応力曲線

図5-9 $d_e=4\text{cm}$ のモデル R C 梁

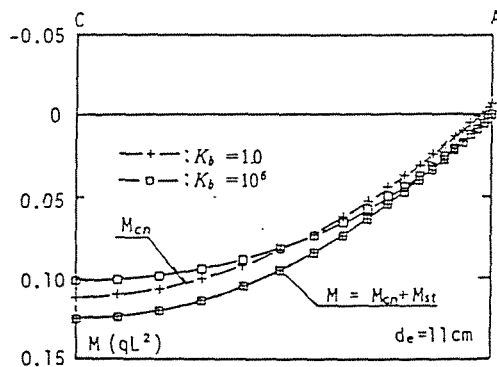
図5-10 $d_e=7\text{cm}$ のモデル R C 梁



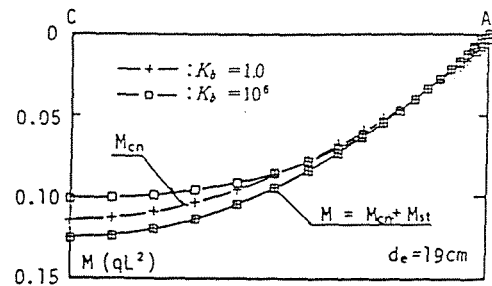
(a) 撓み曲線



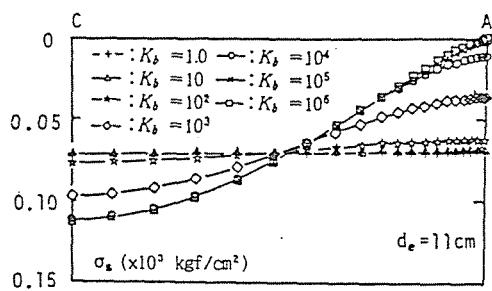
(a) 撓み曲線



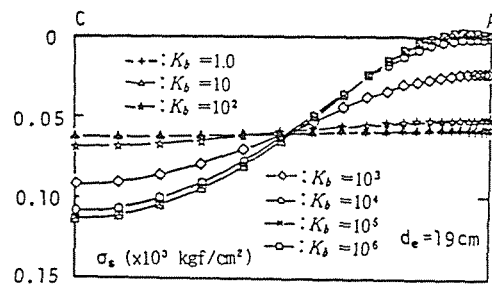
(b) 曲げモーメント曲線



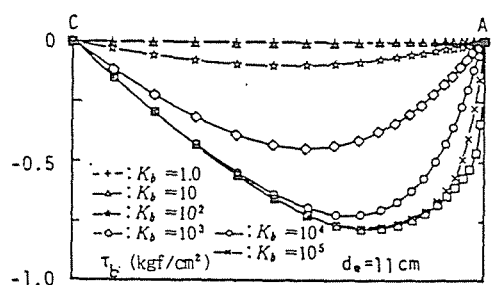
(b) 曲げモーメント曲線



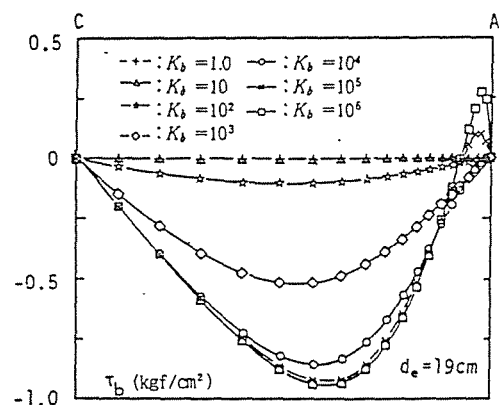
(c) 補強筋の応力曲線



(c) 補強筋の応力曲線



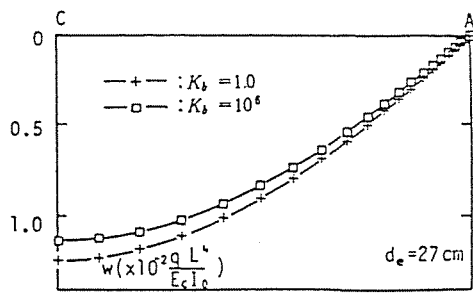
(d) 補強筋の付着応力曲線



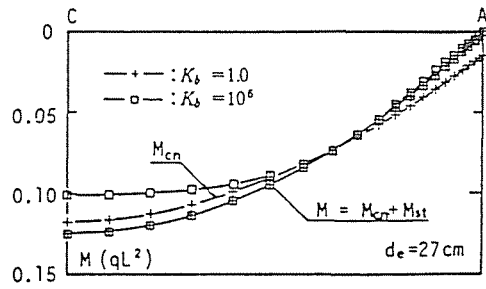
(d) 補強筋の付着応力曲線

図5-10 $d_e=11\text{cm}$ のモデルRC梁

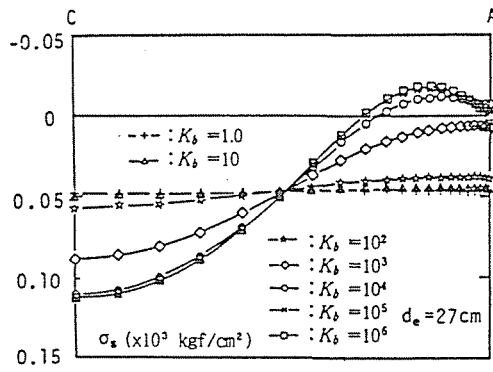
図5-11 $d_e=19\text{cm}$ のモデルRC梁



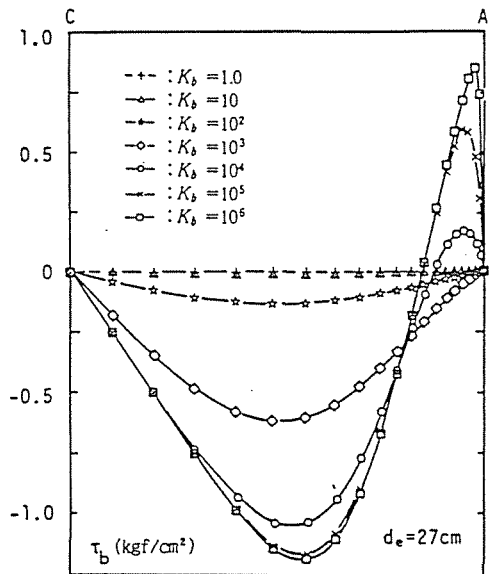
(a) 撓み曲線



(b) 曲げモーメント曲線



(c) 補強筋の応力曲線



(d) 補強筋の付着応力曲線

図5-12 $d_e=27\text{cm}$ のモデルRC梁

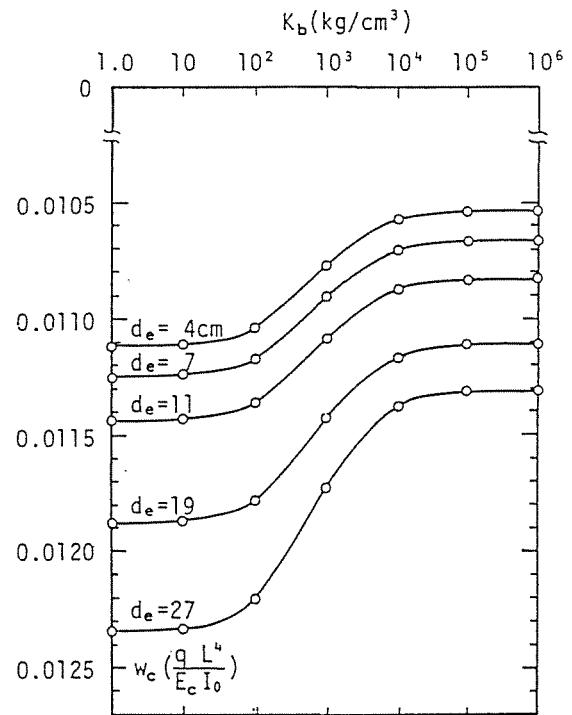


図5-13 モデルRC梁の中央点変位の推移

〔鉛直変位曲線について〕： 各図の(a)を相互に比較すると、鉛直変位曲線は、 d_e の値が4cmから27cmへと配筋曲線の湾曲の度合いが増加するに従って、次第に大きくなっており、また各図の $K_b=1.0\text{kg/cm}^3$ と $K_b=10^6\text{kg/cm}^3$ の両曲線間の差も増大している。図5-13は、この関係をより明確に表示するため、梁中央点の変位の付着係数の変動に伴う推移の状況を、各配筋曲線別に整理し直して表示したものである。これらの結果は、「梁全体の剛性を高めると言う観点からすると、湾曲度の小さな配筋曲線ほど優れているが、付着係数の増大による梁の剛性の改善のみに着目すると、湾曲度の大きな曲線形ほどその効果が大きいことを示している。

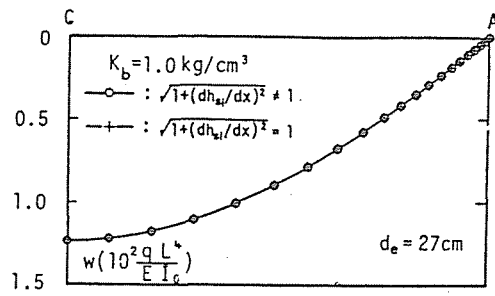
〔曲げモーメント曲線について〕： 各図(b)には、 $K_b=1.0\text{kg/cm}^3$ と $K_b=10^6\text{kg/cm}^3$ の場合に対する、内力として計算される梁のトータルモーメント M ($M = M_{c,n} + M_{s,t}$)の他に、コンクリートによる負担分 M_c と鉄筋の負担分 $M_{s,t}$ の内訳を明確にするため、コンクリートの分担モーメント $M_{c,n}$ 曲線（したがって、 M と $M_{c,n}$ の差が鉄筋の分担モーメント $M_{s,t}$ となる）も併記されている。これらの解結果より、トータルモーメント M は全ての場合について不変であること、また、 $M_{c,n}$ は（従って $M_{s,t}$ も）付着係数の値に依存し、なおかつ配筋曲線の形状の違いに対応して可成り大きく変化することが分かる。

〔鉄筋応力曲線について〕： 各図(c)には、付着係数 $K_b=1.0\sim 10^6\text{kg/cm}^2$ までの全解析曲線を掲げたが、これらの図によれば、鉄筋の応力は、それぞれの配筋曲線形に応じて付着係数 K_b の変化とともに順次変化して行くが、どの曲線形の梁も $d_e=4\text{cm}$ の図5-8の直線配筋の場合と同様、配筋曲線形の違いには殆ど関係なく、 K_b の値が 10kg/cm^3 以下では、鉄筋の応力は梁全長にわたって一定のアンボンド状態として、また $K_b=10^4\text{kg/cm}^3$ 以上では、ほぼ完全付着状態と見做し得ることが明らかである。

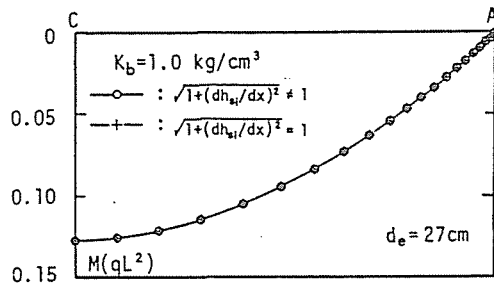
〔付着応力曲線について〕： 鉄筋応力の場合と同様、これらの図(d)にも、全ての付着係数 K_b についての解析曲線を図示したが、各図の結果は、先の鉄筋応力の項での考察の妥当性を支持するものであり、アンボンドからほぼ完全付着状態に至るまでの付着応力分布曲線の明確な推移状況が例示されている。

（２）簡略化有限要素解の精度

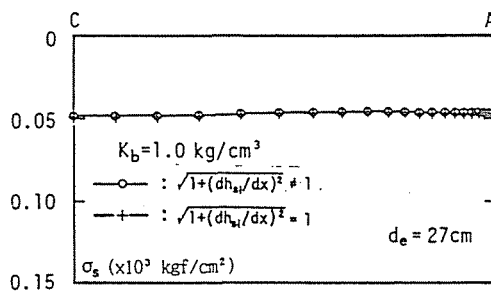
ここでは、前節5.3.2で展開した $\sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}=1$ なる近似仮定に従う“簡略化有限要素解”の精度を調べるため、前掲のモデルRC梁の内でも、この近似仮定の導入に起因する誤差が最大となり得る“テンドンの湾曲度の最も大きな $d_e=27\text{cm}$ の梁”を例にとって計算を行ってみる。



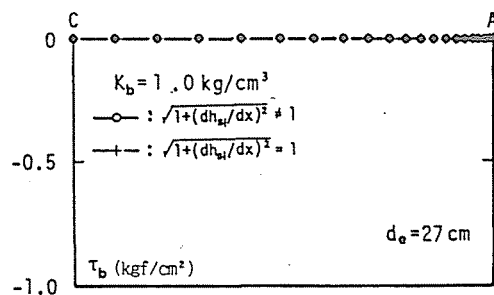
(a) 撓み曲線



(b) 曲げモーメント曲線

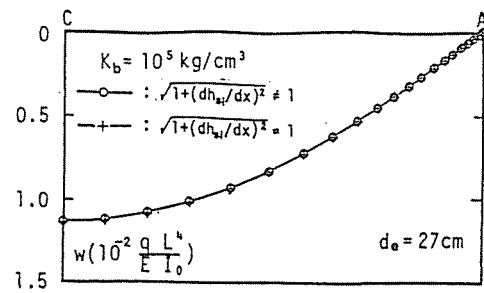


(c) 補強筋の応力曲線

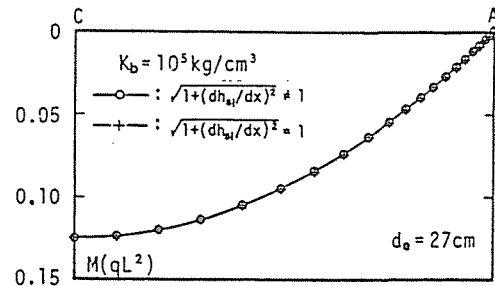


(d) 補強筋の付着応力曲線

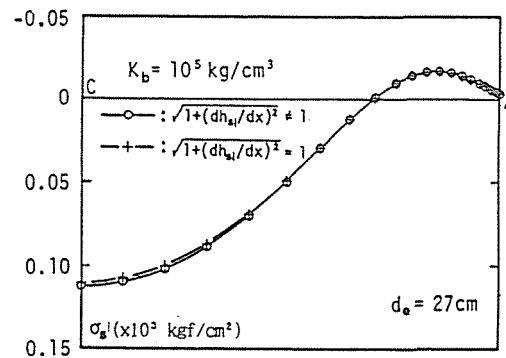
図5-14 簡略化有限要素による解析結果-1
- $d_e=27\text{cm}$, $K_b=1.0\text{kg/cm}^3$ -



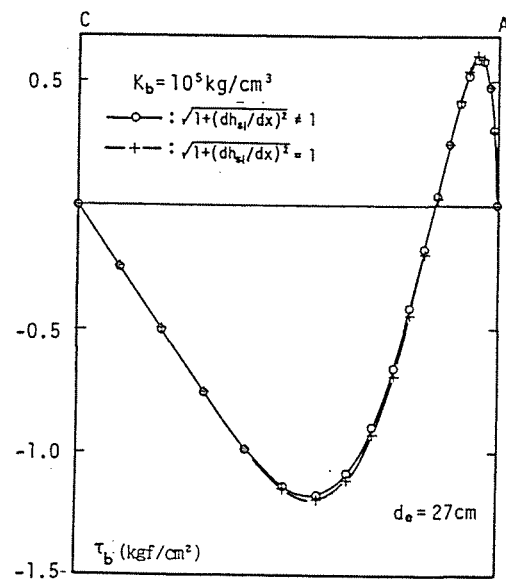
(a) 撓み曲線



(b) 曲げモーメント曲線



(c) 補強筋の応力曲線



(d) 補強筋の付着応力曲線

図5-15 簡略化有限要素による解析結果-2
- $d_e=27\text{cm}$, $K_b=10^5\text{kg/cm}^3$ -

図5-14と図5-15は、それぞれ付着係数 $K_b=1.0\text{ kgf/cm}^2$ と $K_b=10^5\text{ kgf/cm}^2$ の場合の、 $d_e=27\text{ cm}$ のこのモデルRC梁の簡略化有限要素による解析結果を、先の原汎関数に忠実な“より厳密な有限要素解”と比較して図示したものである。両図には、(a)鉛直変位分布、(b)曲げモーメント分布、(c)鉄筋応力分布、(d)付着応力分布の各曲線を掲げたが、これらの図によれば、 $K_b=10^5\text{ kgf/cm}^2$ の場合の図5-15の鉛直変位、鉄筋応力、および付着応力の各曲線の両解析値間に僅かな相違が認められるものの、その他の曲線においては、両解析値の間には殆ど差が生じていない。

即ち、以上の結果は、 $\sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}=1$ なる近似仮定を導入したPC梁部材のための“簡略化有限要素”でも、実用的には充分使用することが可能である」ことを示唆している。

5.5.2 曲線テンドンを有するPC梁の計算例

(1) モデルPC梁の解析

ここでは、実大規模のPC梁を対象にしたテンドンの緊張解析例を示し、計算可能なものについては、既往の慣用法による値との比較・検討を行うこととする。

図5-16に掲げるような3層の2次曲線形テンドンを有する単純支持モデルPC梁⁸⁾(使用テンドンの種類のみ変更)を対象とし計算を行ってみる。但し、この梁の各テンドンは

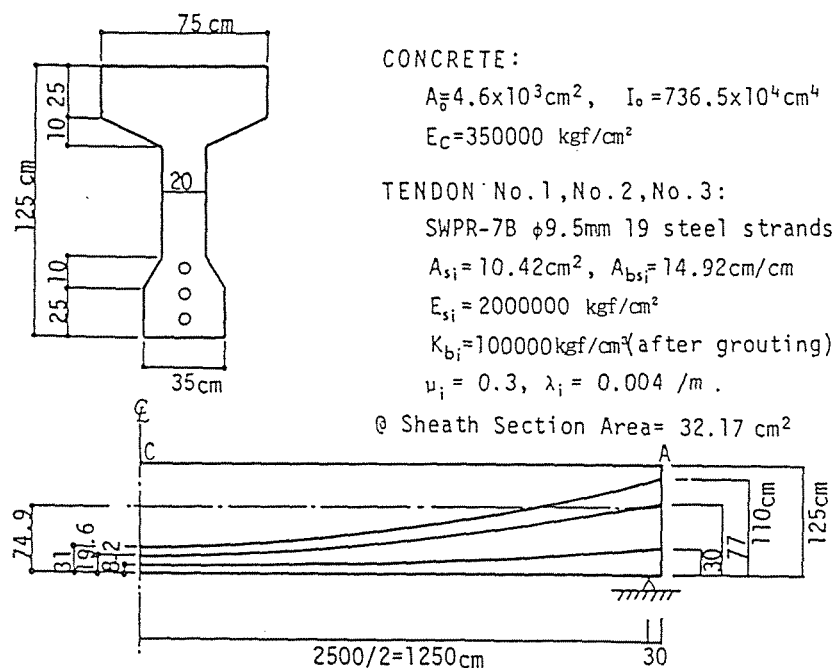
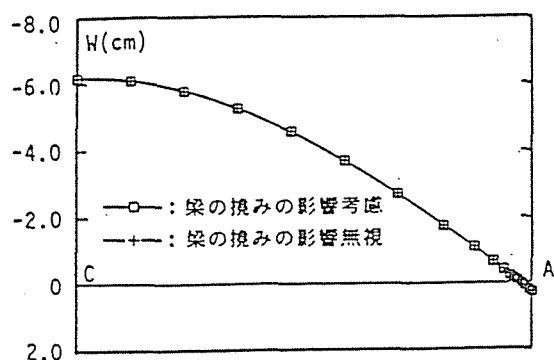
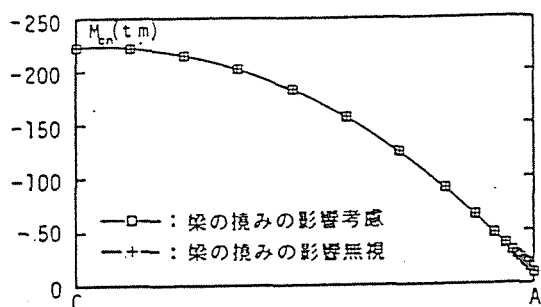


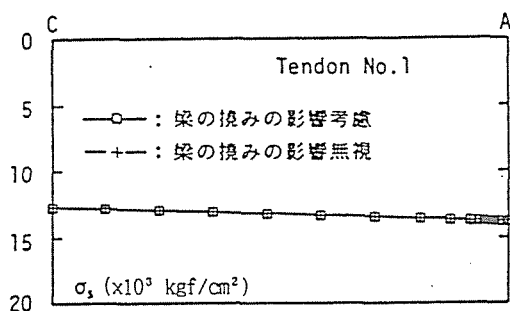
図5-16 モデルPC梁の概要と材料の仮定物性状



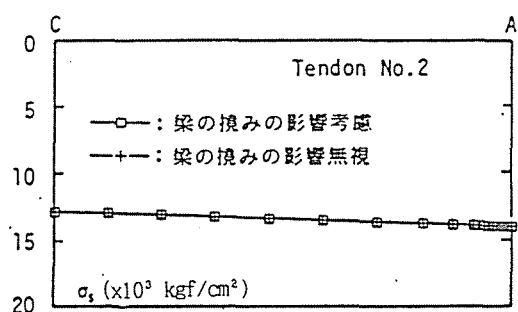
(a) 撓み曲線



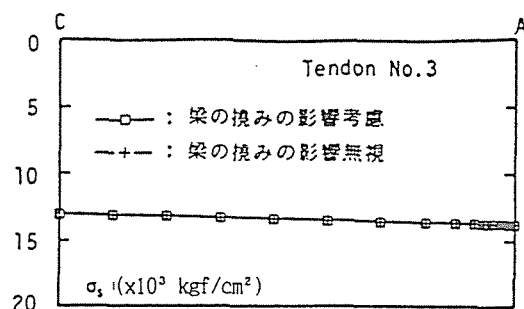
(b) 曲げモーメント曲線



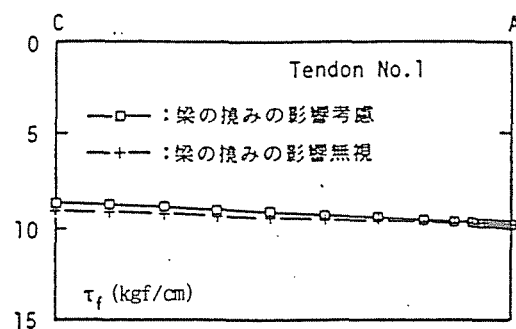
(c) Tendon No.1の応力曲線



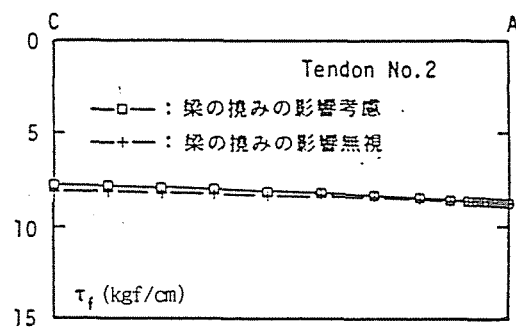
(d) Tendon No.2の応力曲線



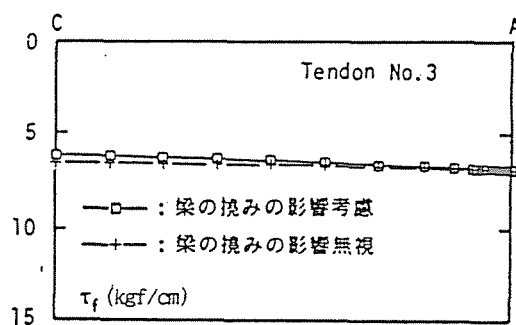
(e) Tendon No.3の応力曲線



(f) Tendon No.1の摩擦曲線

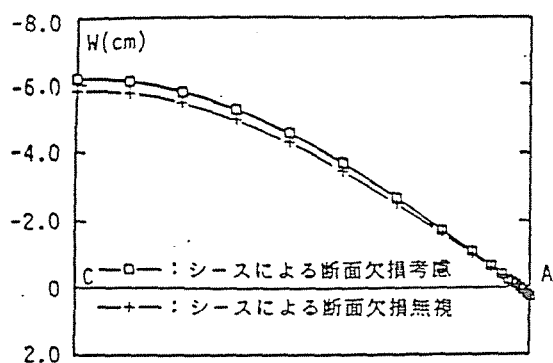


(g) Tendon No.2の摩擦曲線

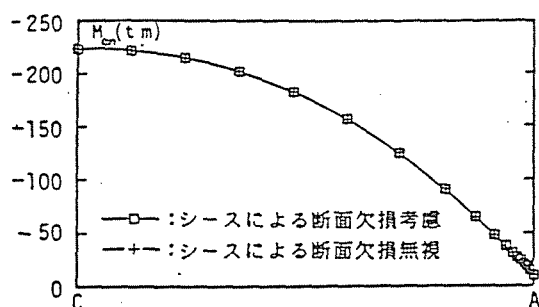


(h) Tendon No.3の摩擦曲線

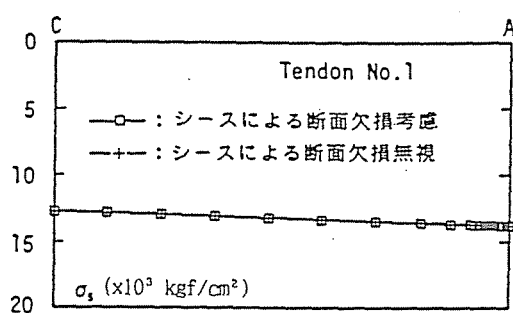
図5-17 梁自身の変位の tendon 曲線形への加算の有無が P C 梁の解析結果におよぼす影響



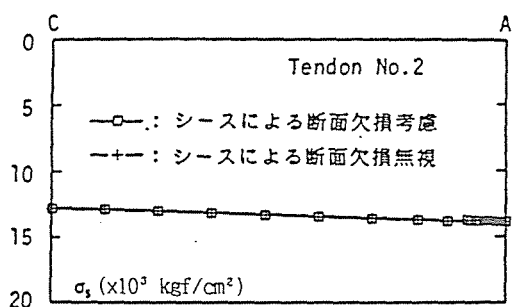
(a) 撓み曲線



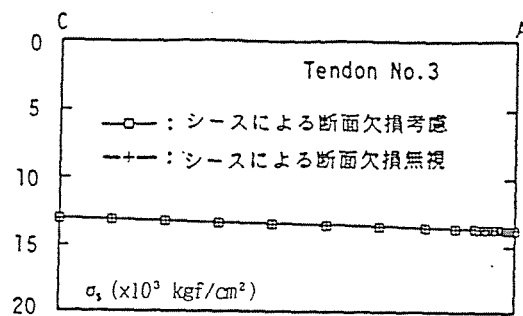
(b) 曲げモーメント曲線



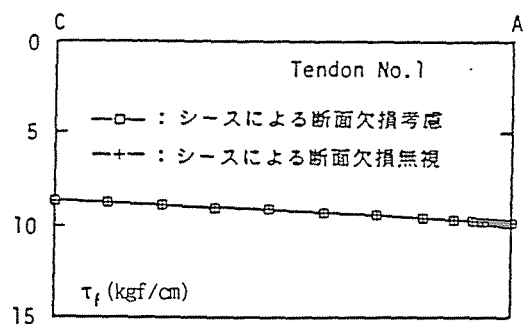
(c) Tendon No. 1の応力曲線



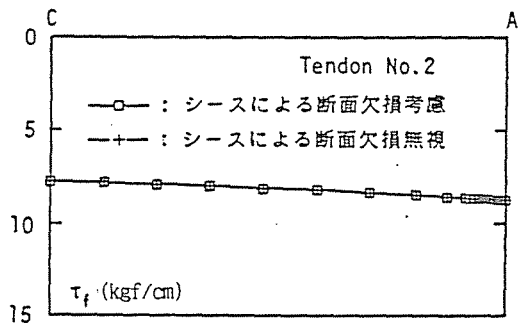
(d) Tendon No. 2の応力曲線



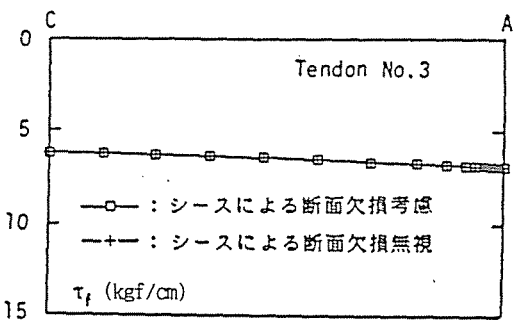
(e) Tendon No. 3の応力曲線



(f) Tendon No. 1の摩擦力曲線

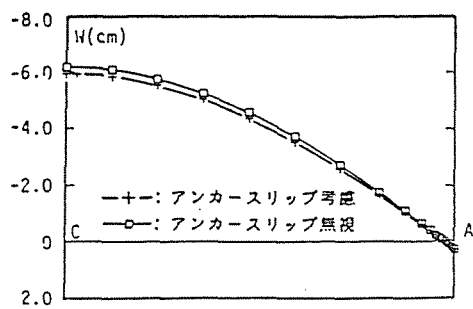


(g) Tendon No. 2の摩擦力曲線

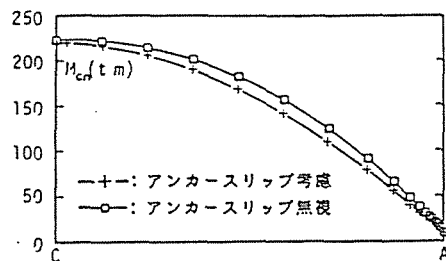


(h) Tendon No. 3の摩擦力曲線

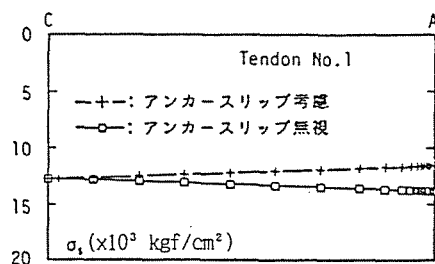
図5-18 シースによるコンクリート断面の欠損の考慮の有無が
P C 梁の解析結果におよぼす影響



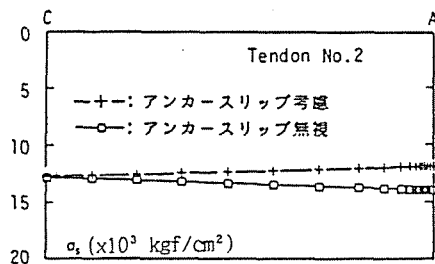
(a) 撓み曲線



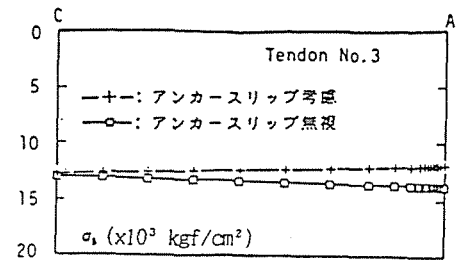
(b) 曲げモーメント曲線



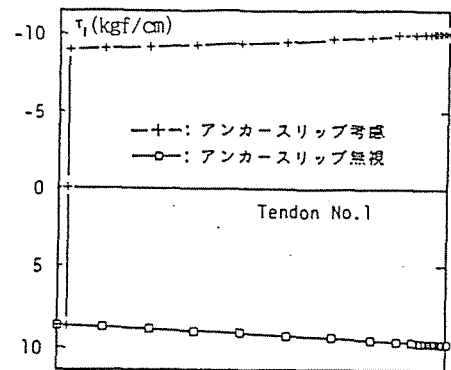
(c) Tendon No.1の応力曲線



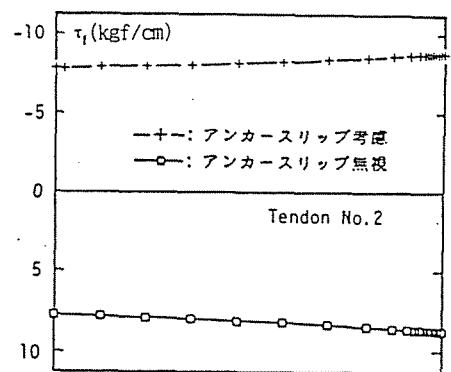
(d) Tendon No.2の応力曲線



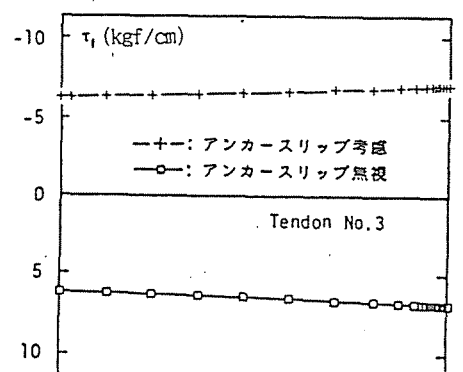
(e) Tendon No.3の応力曲線



(f) Tendon No.1の摩擦力曲線



(g) Tendon No.2の摩擦力曲線



(h) Tendon No.3の摩擦力曲線

図5-19 アンカースリップの考慮の有無がP C梁の解析結果におよぼす影響

両引きでジャッキアップされ、各テンドンには緊張端において、それぞれ144tの緊張力が導入されるものとする。

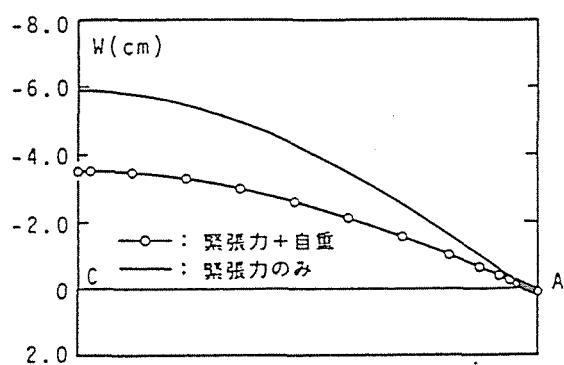
(a) アンカースリップが無い場合

P C梁の緊張解析を行うに際して留意すべき点としては、1)緊張力導入に伴う梁自身の鉛直変位のテンドン曲線形の変化と、それが更にプレストレス力分布におよぼす影響、2)シースの付設によるコンクリート断面の欠損に起因する梁の剛性低下、等の問題がある。ここでは簡単のため、アンカースリップが無い場合のP C梁を例にとり、これらの点について検討を行ってみる。

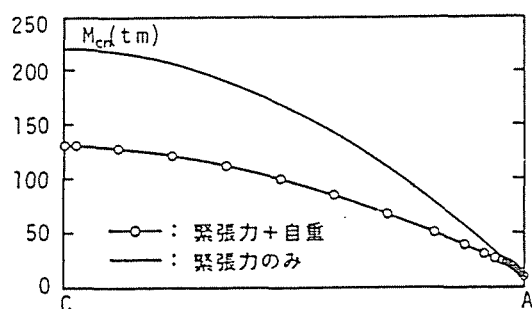
図5-17は、緊張力導入による梁自身の鉛直変位のテンドンの曲線形におよぼす影響を、考慮したときと無視した場合の本解析値（共にシースによる断面欠損を考慮）を、梁の変位、コンクリート部分の分担曲げモーメント、テンドンの応力、およびテンドンの摩擦力等の各分布曲線で比較したものである。図の結果は、(f)～(h)のテンドンの摩擦力分布に幾分かの違いが認められるが、他の曲線には殆ど差がなく、梁の鉛直変位のテンドン曲線形への影響は無視し得ることを示している。

また図5-18は、シースによるコンクリート断面の欠損の考慮の有・無が解析結果（梁の鉛直変位のテンドン曲線におよぼす影響は考慮）にどの程度の差をもたらすかを調べたものである。予期し得るように、コンクリート部分の分担曲げモーメント、テンドン応力、および摩擦力分布には相違は認められぬが、コンクリート部分を全断面有効と仮定すると梁の変位が過小評価され、中央点で6%弱と比較的大きな差が生じており、P C梁の剛性を正確に評価するためには、シースの付設によるコンクリート断面の欠損を考慮することが必要なことを示している。

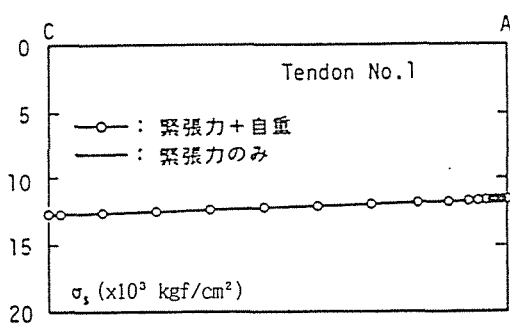
ここで調べた1)と2)での検討事項については、既往の慣用法では取り扱うことはできないが、比較のため慣用法³³⁾（梁の変位のテンドン曲線形におよぼす影響、およびシースによるコンクリート断面の欠損の効果は共に考慮されていない）を用いて計算を行ってみる。図が錯綜するので先の両図には記入されていないが、テンドンの応力と摩擦力分布は、梁の鉛直変位のテンドン曲線形への影響を無視した本解析値に一致（もともと同一の式に基づいているから当然である）し、従って曲げモーメント分布もほぼ同形となる。ただ、テンドンのプレストレスによる曲げ上げの効果を、各テンドンの梁中央点のプレストレス力 $P_{s,i}$ を用いた上向きの等価分布荷重に置換えて取り扱う慣用法によって、中央点変位を求めてみると、その値は5.92cmとなり、シースによるコンクリート断面の欠損を無視した



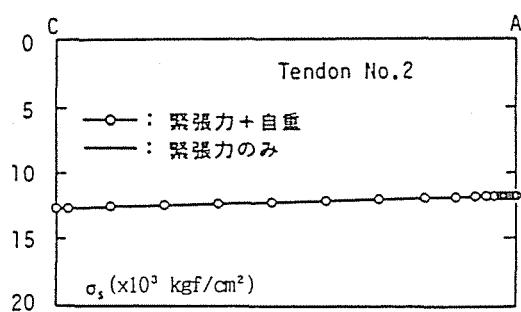
(a) 撓み曲線



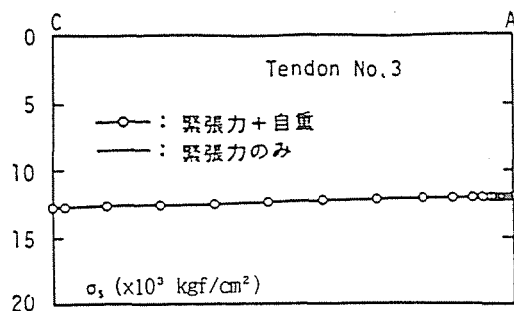
(b) 曲げモーメント曲線



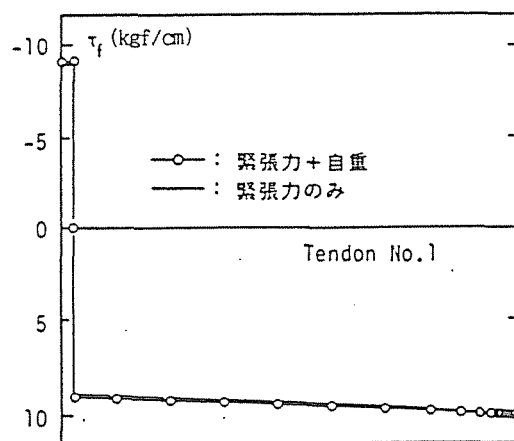
(c) Tendon No.1の応力曲線



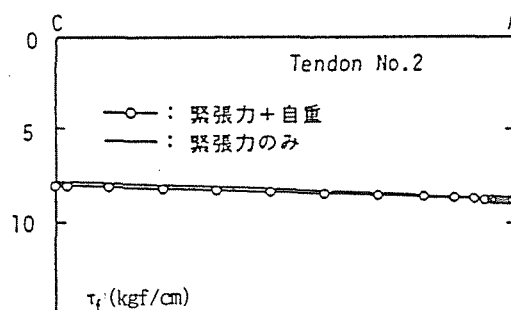
(d) Tendon No.2の応力曲線



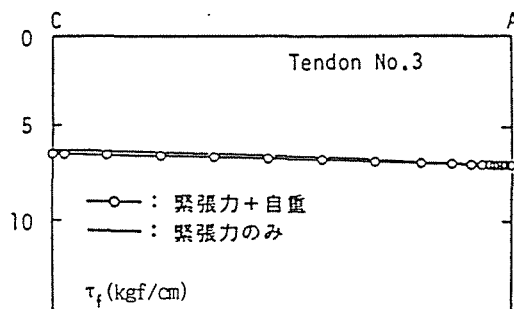
(e) Tendon No.3の応力曲線



(f) Tendon No.1の摩擦力曲線



(g) Tendon No.2の摩擦力曲線



(h) Tendon No.3の摩擦力曲線

図5-20 テンドンの緊張時に梁の自重が同時に作用する場合の解析結果

図5-18の本解析5.83cmに近い値が得られる。因みに、摩擦によるテンドンのプレストレス力の損失を無視したときの、慣用法による同点の変位は6.39cmとなり、この場合には、簡略化による誤差の累積の結果でもあるが、シースによるコンクリート断面の欠損を考慮した図5-17の本解析値6.17cmに近い値となる。何れにせよ、慣用法と本解析値との差はそれほど大きなものではなく、設計と言う実用的な見地からすれば、「慣用法は十分な精度を有している」と言うことができる、

尚、P C梁の緊張解析を行う際の今一つの留意点としては、「プレストレス導入順序の違いに起因する先行テンドンの応力変化の評価」の問題がある。本解析法では、この種の問題をも容易に取り扱うことが可能であるが、この点に関しては、田辺らが文献 3) において、既に詳細な計算例を示しているので、ここでは計算例としては敢えて取り上げなかった。ただ参考までに、プレストレスの導入順序をテンドン層 1, 2, 3の順と仮定し、緊張完了後の全てのテンドンの緊張端での引っ張り力が、上記の例と同じ144tになるような先行テンドン層 1, 2の緊張力割り増し率を本解析法によって求めてみると、それぞれ4.5%および3.2%となる。また、これを既往の略算法³⁶⁾によって求めてみると、各々5.9%および4.1%となり、略算値は本解析値より3割前後大きな値を与えることを知る。

(b) アンカースリップが有る場合

図5-19は、プレストレス導入後、各テンドンを緊張端に定着する際に生ずるアンカースリップを7mmと仮定し、これを考慮した本解析値と、無視した先の計算結果とを対比（梁の鉛直変位のテンドン曲線形の影響およびシースの断面欠損は、両解析値とも考慮）して掲げたものである。これらの図(a)~(h)には、梁の力学性状におよぼすアンカースリップの影響が明瞭に例示されている。特に、図中の(f), (g), (h)の摩擦力分布に注目すると、アンカースリップによるプレストレスの減少区間は、1層目のテンドンの場合は緊張端から12.472mで中央点まで達していないが、他の2, 3層の減少区間は中央点にまでおよんでいる。このストレス減少区間を建築学会計算規準の(56.9)式³³⁾を用いて求めてみると、誤差の最も大きな1層目の場合で12.123mとなり、より精密な本解析値との差は高々2.3%に過ぎないことを知る。また周知のように、同規準には「アンカースリップが生ずる場合にはプレストレス力の損失を考慮する」よう定められており、緊張端でのプレストレス力損失 ΔP_{s1} 。（ただしプレストレス減少区間が梁中央点までおよぶ場合）の計算式(56.10), (56.11)式が示されている。この規準式によって各テンドンのプレストレス力損失量を計算してみると、緊張端でそれぞれテンドン層1, 2, 3の順に $\Delta P_{s1.0}=24.07t$, $\Delta P_{s2.0}=22.64t$,

$\Delta P_{s3o}=20.24t$, 中央点で各々緊張端で $\Delta P_{s2c}=0.15t$, $\Delta P_{s3c}=2.55t$ となる。本解析法によるこれと対応する各値は、それぞれ $\Delta P_{s1o}=23.03t$, $\Delta P_{s2o}=21.62t$, $\Delta P_{s3o}=19.30t$, および $\Delta P_{s2c}=0.51t$, $\Delta P_{s3c}=2.60t$ となり、規準式は満足し得る精度を有していることが分かる。

以上に述べてきた図5-17～図5-19では、テンダンの緊張力の作用のみを考えてきたが、実際には、緊張作業中に梁自身の自重が、同時に並行して作用することになる。図5-20はテンダンの緊張荷重と梁自身の自重が同時に働く場合の本解析値を、緊張力のみが作用する前掲の図5-19のそれと比較して示したものである。勿論、同様な結果は、近似的には、図中の緊張力のみによる計算値に、自重の作用する無筋梁の応答を重ね合わせることもよっても得られるが、ここに示した解析結果は、シースによるコンクリート断面の欠損や、梁の鉛直変位のテンドン曲線形におよぼす影響、などが考慮されているより厳密なものである。

(2) Linの実験P C梁³⁷⁾の解析

P C梁の今一つの計算例を示すため、Linの実験P C梁を取り上げ解析を行ってみる。

図5-21にLinの実験梁の概要を掲げたが、この図の(a)からも明らかなように、この梁は両引きで緊張載荷される2径間連続P C梁である。同図(b)には計算に用いた仮定テンド

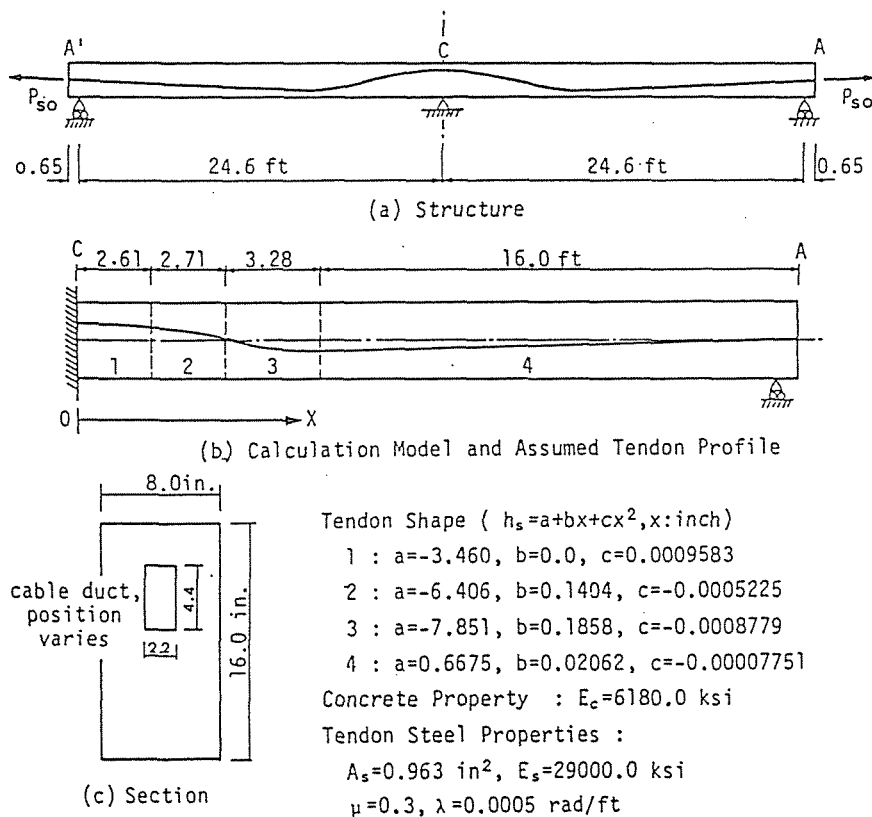
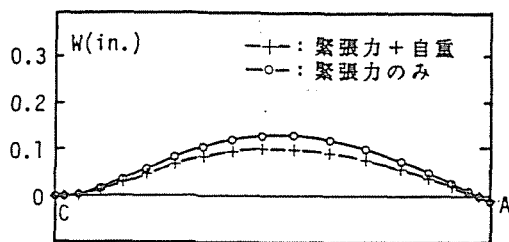
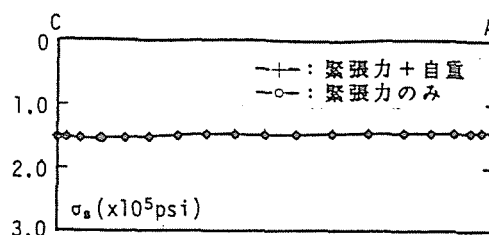


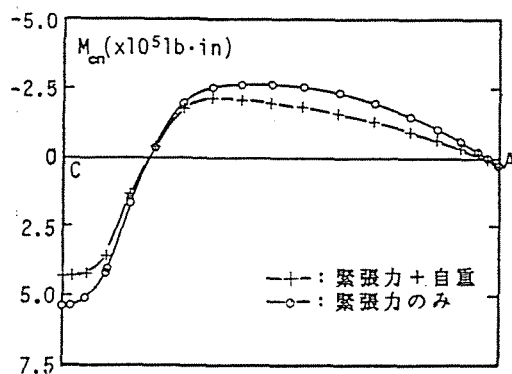
図5-21 Linの実験P C梁の概要と材料の物理性状



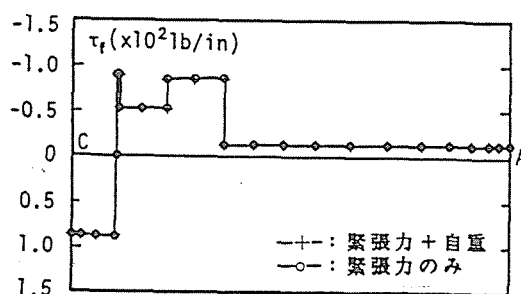
(a) 撓み曲線



(c) Tendonの応力曲線



(b) 曲げモーメント曲線



(d) Tendonの摩擦力曲線

図5-22 LinのP C梁の解析結果

ンプロフィールの4種の曲線区間を、また、(c)には梁の断面寸度と4種のテンドンの仮定2次曲線形を決定するための係数、及び材料の物理性状を示す。Linの報告によれば、このP C梁の両端の導入緊張力は、ともに15100lbで、またテンドン定着時のアンカースリップ量は0.105inであった。

図5-22に、本解析法（ケーブルダクトによるコンクリートの断面欠損も考慮）によるこのP C梁の解析結果を掲げる。同図の(a), (b), (c), (d)は、それぞれ梁の鉛直変位、曲げモーメント、テンドン応力、および摩擦力の各分布曲線を示したものであるが、これらの各図には、緊張力と同時に梁の自重が作用する場合の解析値のほかに、緊張力のみによる解析結果も併記した。この図によれば、梁の自重を無視すると、当然のことながら変位と曲げモーメントを過大に評価するが、テンドン応力と付着応力については、この例では自重による変形量自体が小さいため両解析値の間に殆ど差が生じていない。なお、Linの実験の目的が、終局強度等の材料非線形領域での力学性状の把握にあったため、本解析値と対比し得る有用なデータは示されていないが、唯一比較し得る梁中央点の変位は、自重考慮の本解析値が0.101inに対し、実測値は0.09inであった。この事実からも本解析法の妥当性を窺い知ることができる。

5.6 本章のまとめ

第5章では、テンドンとコンクリート間に付着すべりを許し、コンクリート部分には平面保持を仮定した場合の、曲線テンドンを有するポストテンションP C梁部材の曲げについて論じた。

本章の内容を要約し列挙すると次のようになる。

(1) 理論展開に際しての基本仮定事項を列挙し、テンドンの緊張力と曲げを受ける曲線テンドンを有するP C梁の全ポテンシャル・エネルギー汎関数を導いた。

(2) 前項で得たエネルギー汎関数を用いて、従来明らかにされていなかった「テンドンの緊張力導入時からグラウチング完了後の梁の挙動」までを一貫して取り扱い得るP C梁のための基礎微分方程式を導いた。

(3) この理論に基づき有限要素法への定式化を行い、原汎関数に忠実に従う“厳密な有限要素方程式”と、 $\sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}=1$ なる近似仮定を導入した“簡略化有限要素方程式”の2種を導いた。

(4) 緊張作業終了後、テンドンを梁本体に定着する際に生ずる「アンカースリップに起因する2〔プレストレス力の減少区間〕を求めるための、簡便で精度の高い新たな計算手法を提案し、さらに、緊張力導入時の「テンドンとシース間の摩擦」と「アンカースリップ」によるプレストレス力の減少が、P C梁の変形挙動への影響を考慮することが可能な、初期応力法に基づく解析手法を提示した。

(5) 最後に本有限要素解析法による2, 3の数値計算例を掲げて検討・考察を行い、次のような結論を得た。

即ち、テンドンの緊張・定着完了後のP C梁の力学性状に対応する“曲線配筋を有するR C梁”としての解析結果から、①梁の力学性状は、補強筋の曲線形と付着係数の値に左右されるが、付着係数が同一の場合、梁の補強の効果は配筋曲線の湾曲度の小さいものほど大きく、付着係数の増大に伴う梁の剛性の改善の効果は配筋曲線の湾曲度の大きいものほど大であり、また、配筋曲線形の如何に拘わらず、付着係数 K_b の値が 10kgf/cm^2 以下では、アンボンドとして、また 10^4kgf/cm^2 以上では、ほぼ完全付着状態と見做しうることを、②厳密な有限要素解と簡略化有限要素解の比較より、 $\sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}=1$ なる近似仮定を導入した簡略化有限要素でも、精度上さしたる問題もなく実用に供し得ること、等を明らかにした。

また、曲線テンドンを有するP C梁としての計算例から、①P C梁の緊張解析を行う場合、緊張力導入時に生ずる梁の鉛直変位のテンドン曲線におよぼす影響は無視し得るが、シースによるコンクリート断面の欠損は、梁の剛性の評価に少なからぬ影響をおよぼすので正確にはこれを考慮する必要があること、②設計規準等に採用されているP C梁のための既往の慣用法は、通常的设计計算上必要とされる十分な精度を有していること、などを指摘し、明らかにした。

第5章の APPENDIX

[5A - I] NとMに関する(5-21), (5-22)式中に $\sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}$ が表れる理由

P118の軸力Nと曲げモーメントMに関する(5-21), (5-22)式中に $\sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}$ が含まれる理由は全く同じであるから、ここでは軸力Nについてのみ記述する。

付図5-1に示すように、補強材が材軸に沿って斜めに配置されているコンクリート棒部材の自由端に、軸引張り力が作用するものとする。ここで平面保持の仮定を適用し、この部材はどの部分も一様に伸びるものとする。

今、簡単のため、補強材とコンクリートの間に完全付着の仮定が成り立ち、補強材は軸方向力のみを負担するものとする。このとき、外力の作用によって部材内部に蓄えられる歪エネルギー $E_{i,n}$ を用いて、この棒部材の軸力Nを求めてみる。

コンクリート部材と補強材の歪：

付図5-1よりコンクリート部分の歪 ϵ_c は明らかに下式で表される。

$$\epsilon_c = \Delta L / L \quad (5A-1)$$

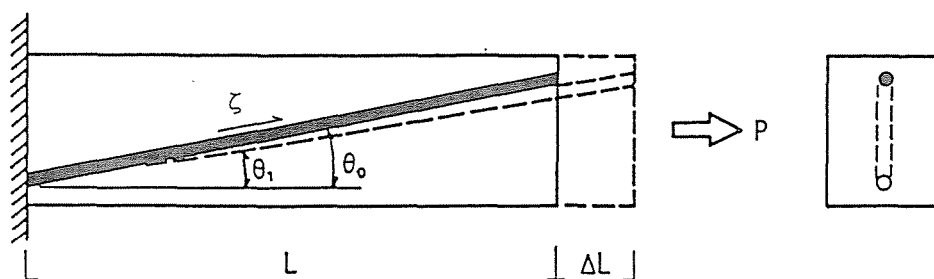
また、変形前の補強材の傾斜角 θ_0 は、変形後 θ_1 に変化するが、伸びがそれほど大きくなければ、 $\theta_0 = \theta_1$ と置くことができる。従って、補強材の配筋方向の歪 ϵ_s は、

$$\epsilon_s = (\Delta L / \cos \theta_0) / (L / \cos \theta_0) = \Delta L / L \quad (5A-2)$$

となるから、補強材の配筋方向の歪 ϵ_s はコンクリート部分の歪 ϵ_c と等しいことが判る。これは、部材断面に平面保持を仮定したことによる、言わば当然の帰結である。

歪エネルギー $E_{i,n}$ から求められる軸力N：

コンクリート部分の断面積を A_c 、補強材の配筋方向に垂直な断面積を A_s 。(従って、材軸に垂直な断面積は $A_s / \cos \theta_0$) とすると、この部材の歪エネルギー $E_{i,n}$ は次式で表示される。



付図5-1 傾斜補強材有するコンクリート棒部材

$$E_{in} = \frac{1}{2} \int_0^L A_c E_c \varepsilon_c^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^{L/\cos\theta_0} A_s E_s \varepsilon_s^2 d\xi \quad (5A-3)$$

ここで、先の関係より $\varepsilon_c = \varepsilon_s = \varepsilon_0$ と置くことができるから、 E_{in} は次のようになる。

$$E_{in} = \frac{1}{2} \varepsilon_0^2 L (A_c E_c + A_s E_s / \cos\theta_0) \quad (5A-4)$$

また、この E_{in} を材軸に垂直な断面の、部材全体の軸力 N を用いて表示すると下式となる。

$$E_{in} = \frac{1}{2} (N \varepsilon_0 L) \quad (5A-5)$$

従って、(5A-4)=(5A-5)の関係から、 N は次のように求められる。

$$N = \varepsilon_0 (A_c E_c + A_s E_s / \cos\theta_0) \quad (5A-6)$$

上式の右辺の $1/\cos\theta_0$ が、本文中の $\sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}$ に相当することは明らかである。

以上により、軸力 N の表示式に $\sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}$ が含まれることが証明された。ここで導入された軸力 N は、本文中でも既に述べたように、テンドンの断面積を、見掛け上、それ自身の傾斜量に見合う分（梁の横断面への投影面積分）だけ増えたものと見做した場合に対応させると、直感的には最も理解し易い。しかし、今上で述べた N の誘導過程と、本文中における汎関数の誘導過程を見ると明らかなように、 N の表示式に $\sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}$ が含まれるのは、「テンドンが曲線形を有するがため、P C 梁の任意の微小部材長 dx には、長さ $\sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2} dx$ のテンドンが存在するためである」と解する方が、より理に適っているように思われる。

ただここで留意すべきは、この N がエネルギー的に等価な謂わば“等価軸力”として、従って曲げモーメントの場合は、“等価曲げモーメント”として定義されていると言うことである。また既にみたように、ここで定義された等価量は、汎関数の誘導と全く無関係であり、実際の数値計算においても $\sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}$ そのものが微小であるため、軸力・曲げモーメントの値にも殆ど影響を及ぼさない。即ち、これらはただ基礎微分方程式(5-18)～(5-20)式を、(5-21)～(5-23)式の平衡方程式に変換するときのみ重要になる。換言すれば、「これらの等価量を導入すると、基礎微分方程式を第3章で述べた通常の R C 梁と同形の平衡方程式に対応させて変換することが可能となる」と言うことである。

第5章の参考文献

- 1) Bond, D. : An examination of the automated design of prestressed concrete bridge decks by computer, Proceedings of the Institution of Civil Engineers, Part 2, Vol. 59, 1975.
- 2) Kang, Y. J. and Scordelis, A. W. : Nonlinear analysis of prestressed concrete frames, Journal of Structural Division, ASCE, Vol. 106, No. ST2, 1980.
- 3) 田辺忠顕, Hong, P. W. : アンボンド P C 構造の組立て工程を考慮した応力解析, 土木学会論文報告集, 第303号, 1980, 11.
- 4) 梅原秀哲, 田辺忠顕, 吉田弥智 : 鋼材の付着を考慮した P C ラーメンの履歴挙動に関する研究, 土木学会論文集, No. 396/V-9, 1988, 8.
- 5) 六車 熙 : プレストレストコンクリート, コロナ社, 1963.
- 6) Nilson, A. H. : Design of prestressed concrete, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- 7) Lin, T. Y. and Burns, Ned. H. : Design of prestressed concrete structures, John Wiley & Sons, New York, 1980.
- 8) 猪股俊司 : プレストレストコンクリートの設計・施工, 技報堂出版, 1985.
- 9) F. ソーコ編著, 岡田 清・小林和夫 監訳 : プレストレストコンクリート [1], [2], 鹿島出版, 1983.
- 10) F. レオンハルト著, 横道英雄 監訳 : レオンハルトのコンクリート講座 5・プレストレストコンクリート, 鹿島出版, 1984.
- 11) 上田正生, 土橋由造 : 補強筋位置が材軸に沿って滑らかに変化する R C 梁部材の幾何学的非線形曲げについて (補強筋の付着すべりを考慮した場合の基礎微分方程式), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 59, 1986, 3.
- 12) 上田正生 : 補強筋の付着すべりを考慮した曲線形状配筋を有する R C 梁部材の曲げについて, 土木学会北海道支部論文報告集, 第43号, 1987, 2.
- 13) 上田正生, 松倉満智子, 松宮寿彦 : Tendonの付着すべりを考慮したプレストレストコンクリート梁部材の変形解析, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 60, 1987, 3.
- 14) 上田正生 : 補強筋の付着すべりを考慮した曲線形状配筋を有する鉄筋コンクリート梁部材の有限要素解析, 日本建築学会大会学術講演会梗概集 (近畿), 1987, 10.
- 15) 上田正生, 松倉満智子 : Tendonの付着すべりを考慮した Prestressed Concrete 梁部材の曲げ解析, 日本建築学会大会学術講演会梗概集 (近畿), 1987, 10.
- 16) 上田正生 : 補強筋の付着すべりを考慮した曲線形状配筋を有する R C 梁部材の曲げについて (その2. 数値計算例の訂正と考察), 土木学会北海道支部論文報告集, 第44号, 1988, 2.
- 17) 上田正生, 広瀬雅明 : 曲線 Tendon を有する P C 梁部材の有限要素解析, 土木学会北海道支部論文報告集, 第44号, 1988, 2.
- 18) 上田正生, 松倉満智子 : Tendonの付着すべりを考慮したプレストレストコンクリート梁部材の変形解析-2, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 61, 1988, 3.

- 19) 上田正生、広瀬雅明：補強筋の付着すべりを考慮した曲線テンドンを有する R C 梁部材のための簡略化有限要素について、日本建築学会北海道支部研究報告集、No.61, 1988, 3.
- 20) 上田正生、杉野目章、広瀬雅明：緊張完了後のポストテンション P C 梁の剛性評価のための有限要素について、コンクリート工学年次論文報告集、第10巻第3号、1988, 6.
- 21) 上田正生、松倉満智子：補強筋の付着すべりを考慮した曲線テンドンを有する R C 梁部材のための簡略化有限要素、日本建築学会大会学術講演会梗概集（関東）、1988, 10.
- 22) 上田正生：Anchor Slipの影響を考慮したポストテンション梁部材の有限要素解析、日本建築学会大会学術講演会梗概集（関東）、1988, 10.
- 23) Ueda, M. : Bending of R/C Beam Members with Curved Reinforcement with its Bond-Slip Involved, Bulletin of the Faculty of Engineering, Hokkaido University, No.145, 1988, 12.
- 24) Ueda, M., Sugimoto, A. and Hirose, M. : Finite Elements for Evaluation of Stiffness of Post-Tensioned Type Prestressed Concrete Beams, Transactions of the Japan Concrete Institute, Vol.10, 1988, 12.
- 25) 上田正生、広瀬雅明：アンカースリップの影響を考慮した P C 梁部材の緊張解析、土木学会北海道支部論文報告集、第45号、1989, 2.
- 26) 上田正生、中江玲子：P C 梁の緊張力導入時におけるアンカースリップの影響量の一評価法、日本建築学会北海道支部研究報告集、No.62, 1989, 3.
- 27) 上田正生、和田俊良、広瀬雅明：アンカースリップの影響を考慮した P C 梁部材の緊張解析、コンクリート工学年次論文報告集、第11巻第2号、1989, 6.
- 28) 上田正生：曲線テンドンを有する P C 梁部材の基礎微分方程式と有限要素法による数値計算例、コンクリート工学論文集、第1巻第1号、1990, 1.
- 29) Ueda, M., Wada, T. and Hirose, M. : Prestressing Analysis of Prestressed Concrete Beams Including Anchorage Slip, Bulletin of the Faculty of Engineering, Hokkaido University, No.150, 1990, 5.
- 30) Ueda, M. : Governing Equations for Prestressed Concrete Beams with Curved Tendons and Some Examples of Numerical Calculations by Means of the Finite Element Method, Transactions of the Japan Concrete Institute, Vol.12, 1990, 12.
- 31) 例えば、森口繁一、宇田川珪久、一松 信 共著：数学公式集 I, 岩波書店、1986.
- 32) 例えば、土木学会：プレストレストコンクリート標準示方書、1980.
- 33) 例えば、日本建築学会：プレストレストコンクリート設計・施工規準・同解説、1987.
- 34) Van Greunen, J. and Scordelis, A.C. : Nonlinear Analysis of Prestressed Concrete Slabs, Journal of Structural Engineering Division, ASCE, Vol.109, No. ST7, 1983, 7.
- 35) Zienkiewicz, O.C. 著、吉織雅夫、山田嘉昭 監訳：マトリックス有限要素法、培風館 1984.
- 36) Krishna, N. Raju : Prestressed Concrete, Tata McGraw-Hill, New Delhi, 1981.

- 37) Lin, T.Y. : Strength of Continuous Prestressed Concrete Beams under Static and Repeated Loads, Journal of ACI, Vol.26, No.10, 1955,6.

第6章 曲線テンドンをもつプレストレストコンクリート床板の解析

6. 1 はじめに

今日、世界の先進諸国において、曲線テンドンをもつプレストレストコンクリート（以下、P Cと略記）床板が最も頻繁に使用されるのは、恐らくオフィスビル等の建築構造物におけるP C床スラブ構造としてであろう。実際、欧米（特に米国）においては、多層のR C構造等の床板の多くが“アンボンドP C床板”で作製されているのは、広く知られているところである^{1)~3)}。

一方、最近では我が国においても、R C建物の床構造としてP C床板を使用する例が散見されるようになってきたが^{4)~6)}、その採用率は欧米と比較するとまだ遥かに低いのが現状である。ともあれ、国の内外におけるその豊富な実用例の存在を指摘するまでもなく、曲線テンドンをもつP C床板の解析手法は既に確立されており¹⁾、また特に近年では設計段階における煩雑な緊張解析も、コンピュータを駆使して可成り詳細に検討することが可能となっている。

しかしながら、P C床板のためのこれら既往の解析手法は、テンドンへのプレストレスの導入によって生ずる実際には複雑（テンドンとコンクリート間のすべり現象等）な床板の力学挙動を、テンドン曲線に沿う上向きの等分布荷重や緊張端における軸方向力に置き換えて取り扱う“慣用の近似解析理論”に基づいたものである。周知のようにP C床板のための最も進んだ既往の解析手法としては、有限要素法によるGreunenらの論文^{7)・8)}があるが、この研究では、テンドンは個々の要素内で直線と仮定されており、しかもテンドンの剛性自体が剛性マトリックスに含まれておらず、また、プレストレスによる床板の曲げ上げの効果も、後から各要素の節点における上向きの等価節点力に置き換えるることによって間接的に取り扱う手法を用いている。換言すれば、Greunenらの方法は、「基本的には“慣用の近似理論”を有限要素解析に巧みに組み入れたものである」と言うことができる。

以上で概観したように、少なくとも現時点においては、テンドンとコンクリート間の付着すべり作用を考慮した、曲線テンドンをもつP C床板のための基礎微分方程式さえ明らかにされていないのが現状のように思われる。

本章は、未だ厳密な理論的背景を有していないP C床板の“より合理的な解析手法”を

確立することを主たる目的としている。

即ち、本章では、まずエネルギー原理を用いて、テンドンとコンクリート間に付着すべりを許し、コンクリート断面には法線保持を仮定した場合の、“曲線テンドンを有するP C床板”のための基礎微分方程式を導いている。次いで、この理論に準拠して有限要素法への定式化を行って新しいP C床板要素を開発し、更に、数種のアンボンドP Cモデル床板の数値計算例を掲げ、主として、フラットタイプのP C床板を対象とした「欧・米の設計手法」の妥当性等について、若干の検討・考察を試みることにする。

6. 2 曲線テンドンを有するP C床板のための曲げ理論式の展開^{9) ~ 11)}

前述したように、曲線テンドンを有するP C床板の設計のための解析手法は、「極めて単純化された近似理論」に基づいており、テンドンとコンクリート間のすべり現象を考慮し、テンドンをあるがまゝの曲線として取り扱い得るP C床板のための曲げ理論は、見当らぬようである。

ここでは、テンドンの緊張時から定着完了後までの床板の挙動を一貫して取り扱うことが可能な、曲線テンドンを有するP C床板の曲げ理論について記述する。

6.2.1 基本仮定事項

理論を展開するに当たって設定した基本仮定事項を、以下に列挙する。

- 1) 床板には、面内荷重（テンドンの緊張荷重を含む）と面外荷重が作用するものとし、微小変形の仮定が適用できるものとする。
- 2) コンクリートは等方弾性体であり、コンクリート断面には変形後も法線保持の仮定が適用できるものとする。
- 3) テンドンは直交する x , y 方向に、それぞれ k 及び m 層ずつ配置されており、各方向のテンドンはいずれも板厚方向（ $x-z$ 平面および $y-z$ 平面内）に滑らかな曲線（ x 方向のテンドンは x のみ、 y 方向のテンドンは y のみの関数）を描いて配置曲線に沿う軸力のみを負担する線材層として存在し、しかも個々のテンドン層は板厚方向には大きさを持たない平均化された曲面層として取り扱う。
- 4) x , y 各方向の個々の層のテンドンとコンクリートの間には、テンドン曲線に沿って付着すべりが生ずるものとし、任意の位置における或るテンドン層のすべり変位は、法線

が保持される同位置のコンクリート部分からの相対変位で表示され、また、すべり変位と付着応力の間には線形関係が成り立つものとする。

6.2.2 変位場、および歪と応力

(1) 変位場

図6-1はP C床板の断面記号と床板の内部に配置されているxまたはy方向の任意のi層のテンドンの設置状況を概念的に図示したものである。前項の仮定より、この問題を定式化するために設定しなければならない変位場は、床板の中央面のxおよびy方向の変位u, vと鉛直方向の変位w、更に床板内のx, y方向に曲線を描いてそれぞれk, m層ずつ配置されている全テンドン層のすべり変位 $S_{x1}, S_{x2} \cdots S_{xi} \cdots S_{xk}$ と $S_{y1}, S_{y2} \cdots S_{yi} \cdots S_{ym}$ の、計(3+k+m)個の変位である。

(2) コンクリートの歪と応力

板の中央面からzだけ離れた任意点(x, y, z)のコンクリート部分の歪 $\{\varepsilon_c\}$ は、次式で表示される。

$$\{\varepsilon_c\} = \{\varepsilon_x \quad \varepsilon_y \quad \gamma_{xy}\}^T = \{\varepsilon_o\} + z\{\phi\} \quad (6-1)$$

ここに、 $\{\varepsilon_o\}$ と $\{\phi\}$ は、それぞれ板中央面の歪と曲率であるから、各々次のように表される。

$$\{\varepsilon_o\} = \{\varepsilon_{ox} \quad \varepsilon_{oy} \quad \gamma_{oxy}\}^T = \left\{ \frac{\partial u}{\partial x} \quad \frac{\partial v}{\partial y} \quad \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right\}^T \quad (6-2)$$

$$\{\phi\} = \{\phi_x \quad \phi_y \quad \phi_{xy}\}^T = \left\{ -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad -2\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right\}^T \quad (6-3)$$

また、(6-1)式の歪に対応する同位置のコンクリートの応力 $\{\sigma_c\}$ は、下式で与えられる。

$$\{\sigma_c\} = \{\sigma_{cx} \quad \sigma_{cy} \quad \tau_{cxy}\}^T = [D_c]\{\varepsilon_c\} \quad (6-4)$$

ここに、 $[D_c]$ は平面応力下のコンクリートの応力-歪マトリックスで、

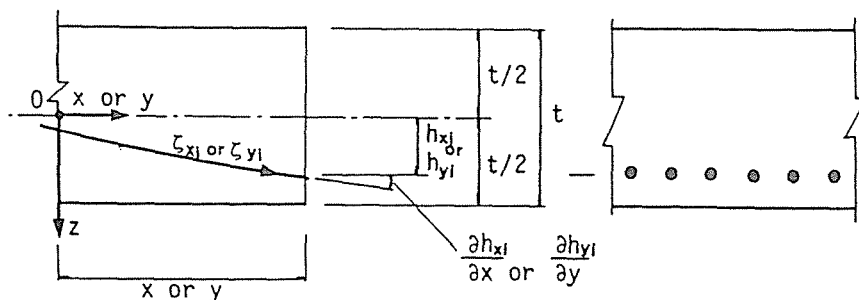


図6-1 P C床板の断面記号と、xおよびy方向の任意のテンドン層iの配置状況

$$[D_c] = \frac{E_c}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (6-5)$$

但し、 E_c : コンクリートのヤング係数、 ν : コンクリートのポアソン比

(3) テンドンの歪と応力

第4章のRC床板の場合と同様、テンドン層については、床板断面内の x 、 y 方向にそれぞれ k および m 個存在する、両方向の代表的な任意の i 層についてのみ記述することにする。

[x 方向の任意のテンドン層 i] : x 方向の任意のテンドン層 i の設置曲線方向の歪 ϵ_{sxi} は、次式で表示することができる。

$$\epsilon_{sxi} = \epsilon_{ox} + h_{xi} \phi + \epsilon_{ssxi} \quad (6-6)$$

但し、 ϵ_{ssxi} : x 方向の i 層のテンドンの設置曲線に沿うすべり率
上式中の h_{xi} は、図6-1に示すように、板の中央面からこのテンドン層 i までの距離で、先の基本仮定事項3)より x の関数である。

また、(6-6)式中のすべり率 ϵ_{ssxi} は、図6-2を参照すると次のように表される。

$$\epsilon_{ssxi} = \frac{\partial S_{xi}}{\partial \xi_{xi}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\partial h_{xi}/\partial x)^2}} \frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \quad (6-7)$$

(6-6)式の歪に対応するテンドン層 i の応力 σ_{sxi} は、

$$\sigma_{sxi} = E_{sxi} \epsilon_{sxi} \quad (6-8)$$

但し、 E_{sxi} : x 方向の i 層のテンドンのヤング係数

[y 方向の任意のテンドン層 i] : y 方向の任意のテンドン層 i の(6-6)~(6-8)式に対応する式は、同様にして求められ、それぞれ次のようになる。

$$\epsilon_{syi} = \epsilon_{oy} + h_{yi} \phi + \epsilon_{ssyi} \quad (6-9)$$

但し、 ϵ_{ssyi} : y 方向の i 層のテンドンの設置曲線に沿うすべり率

$$\epsilon_{ssyi} = \frac{\partial S_{yi}}{\partial \xi_{yi}} = \frac{1}{\sqrt{1+(\partial h_{yi}/\partial y)^2}} \frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \quad (6-10)$$

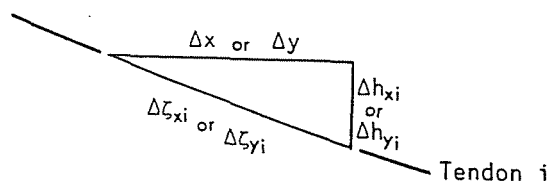


図6-2 $\Delta \xi_{xi}$ 、 Δh_{xi} 、 Δx および $\Delta \xi_{yi}$ 、 Δh_{yi} 、 Δy の関係

$$\sigma_{s y i} = E_{s y i} \varepsilon_{s y i} \quad (6-11)$$

但し、 $E_{s y i}$: y方向の i 層のテンダンのヤング係数

(4) テンダンのすべり変位と付着応力

基本仮定事項 4)より、x および y 方向の任意の i 層の或る位置におけるテンドンとコンクリートの付着境界に生ずる付着応力とすべり変位の関係は、それぞれ以下のように定義される。

[x方向の任意のテンドン層 i] :

$$\tau_{b x i} = K_{b x i} S_{x i} \quad (6-12)$$

但し、 $\tau_{b x i}$: x方向の i 層のテンダンの付着境界に生ずる付着応力、 $K_{b x i}$: x方向の i 層のテンダンの付着係数。

[y方向の任意のテンドン層 i] :

$$\tau_{b y i} = K_{b y i} S_{y i} \quad (6-13)$$

但し、 $\tau_{b y i}$: y方向の i 層のテンダンの付着境界に生ずる付着応力、 $K_{b y i}$: y方向の i 層のテンダンの付着係数。

6.2.3 全ポテンシャル・エネルギー汎関数

曲線テンダンの付着すべりを考慮した P C 床板のための、コンクリート、テンドン、および付着すべりに係る内部エネルギー $U_{c n}$, $U_{s t}$, $U_{b s}$ は、図6-1と図6-2を参照し、(6-1)～(6-13)式の関係を用いることによって容易に求められ、それぞれ次のように表示される。

$$U_{c n} = \frac{1}{2} \iint_R \int_{-t/2}^{t/2} \{ \varepsilon_z \}^T [D_c] \{ \varepsilon_z \} dz \, dx dy - \frac{1}{2} \iint_R \left\{ \sum^k A_{s x i} E_{c h x i} \varepsilon_{c x i}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{x i} / \partial x)^2} + \sum^m A_{s y i} E_{c h y i} \varepsilon_{c y i}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{y i} / \partial y)^2} \right\} dx dy \quad (6-14)$$

$$U_{s t} = \frac{1}{2} \iint_R \left\{ \sum^k A_{s x i} E_{s x i} \varepsilon_{s x i}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{x i} / \partial x)^2} + \sum^m A_{s y i} E_{s y i} \varepsilon_{s y i}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{y i} / \partial y)^2} \right\} dx dy \quad (6-15)$$

$$U_{b s} = \frac{1}{2} \iint_R \left\{ \sum^k \Omega_{x i} K_{b x i} S_{x i}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{x i} / \partial x)^2} + \sum^m \Omega_{y i} K_{b y i} S_{y i}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{y i} / \partial y)^2} \right\} dx dy \quad (6-16)$$

但し、 $A_{s x i}$, $A_{s y i}$: x 及び y 方向の任意の i 層のテンダンの床板単位面積当りの断面積
 $h_{x i} \varepsilon_{c x}$, $h_{y i} \varepsilon_{c y}$: x 及び y 方向の任意の i 層のテンドンと同じ位置におけるコンクリートの歪、 $\Omega_{x i}$, $\Omega_{y i}$: x 及び y 方向の任意の i 層のテンドン床板単位面積当りの付着表面積

また、鉛直方向の分布荷重 $q_z(x, y)$ のほかに、図6-3、図6-4に示すように、 C_1 によって表される床板の境界上の x および y 方向に、境界単位周長当り $\bar{P}_{xi}$ 、 $\bar{P}_{yi}$ のテンドンの緊張力と、境界側面の単位面積当りの量で定義される面内分布外荷重 $\bar{F}_x$ 、 $\bar{F}_y$ が働いているものとする、負荷ポテンシャル・エネルギー V は、次式で表される。

$$V = \iint_R q_z w \, dx dy + \int_{C_1} [\bar{N}_{x\eta} u + \bar{N}_{y\eta} v + \bar{M}_{x\eta} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{M}_{y\eta} \frac{\partial w}{\partial y} + \sum^k \bar{P}_{x\eta i} S_{xi} + \sum^m \bar{P}_{y\eta i} S_{yi}] d\xi \quad (6-17)$$

ここに、

$$\begin{aligned} \bar{P}_{x\eta i} &= \bar{P}_{xi} \alpha, & \bar{P}_{y\eta i} &= \bar{P}_{yi} \beta \\ \bar{N}_{x\eta} &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{F}_x dz + \sum^k \bar{P}_{x\eta i}, & \bar{N}_{y\eta} &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{F}_y dz + \sum^m \bar{P}_{y\eta i} \\ \bar{M}_{x\eta} &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{F}_x z \, dz + \sum^k \bar{P}_{x\eta i} h_{xi}, & \bar{M}_{y\eta} &= \int_{-t/2}^{t/2} \bar{F}_y z \, dz + \sum^m \bar{P}_{y\eta i} h_{yi} \end{aligned}$$

但し、 α 、 β ：境界に垂直な方向 η の x および y 方向に関する方向余弦

以上で得た(6-14)～(6-17)式に、(6-1)～(6-13)式の関係を入れて整理すると、全ポテンシャル・エネルギー汎関数 Π は次のようになる。

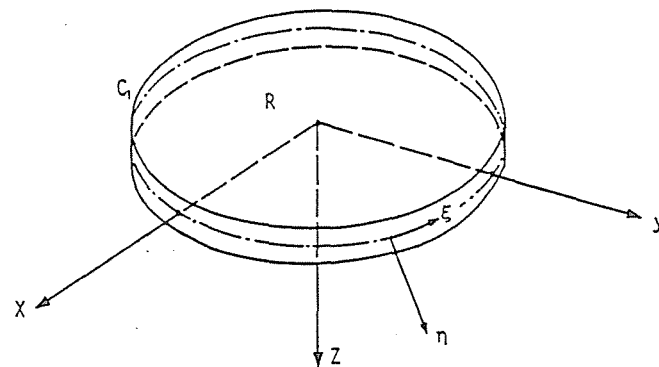


図6-3 PC床板の境界と座標系

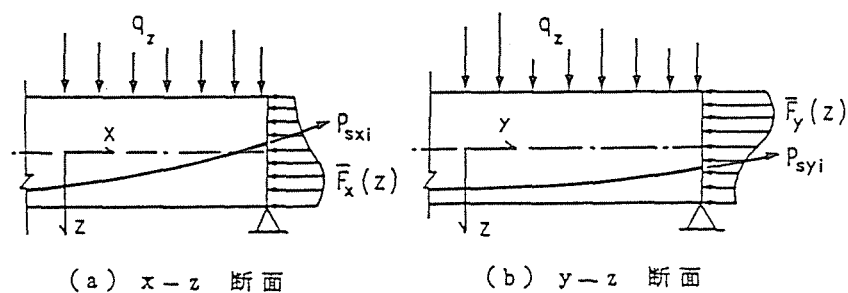


図6-4 PC床板の境界に作用する分布外力 $\bar{F}_x$ 、 $\bar{F}_y$

$$\begin{aligned}
\Pi = & \frac{1}{2} \iint_R \left\{ \left\{ \frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} \sqrt{1+(\partial h_{xi}/\partial x)^2} \right\} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \frac{2\nu E_c t}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial y} \right. \\
& + \left\{ \frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum^m A_{syi}^* E_{syi} \sqrt{1+(\partial h_{yi}/\partial y)^2} \right\} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \left\{ \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 \right\} \\
& + \left\{ \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi}^2 \sqrt{1+(\partial h_{xi}/\partial x)^2} \right\} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 + \frac{\nu E_c t^3}{6(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
& + \left\{ \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum^m A_{syi}^* E_{syi} h_{yi}^2 \sqrt{1+(\partial h_{yi}/\partial y)^2} \right\} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 + \frac{E_c t^3}{6(1+\nu)} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \\
& + \sum^k \left\{ \frac{A_{sxi} E_{sxi}}{\sqrt{1+(\partial h_{xi}/\partial x)^2}} \left(\frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \right)^2 + \Omega_{xi} K_{bxi} S_{xi}^2 \sqrt{1+(\partial h_{xi}/\partial x)^2} \right\} \\
& + \sum^m \left\{ \frac{A_{syi} E_{syi}}{\sqrt{1+(\partial h_{yi}/\partial y)^2}} \left(\frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \right)^2 + \Omega_{yi} K_{byi} S_{yi}^2 \sqrt{1+(\partial h_{yi}/\partial y)^2} \right\} \\
& - 2 \sum^k \left\{ A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi} \sqrt{1+(\partial h_{xi}/\partial x)^2} \right\} \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
& - 2 \sum^m \left\{ A_{syi}^* E_{syi} h_{yi} \sqrt{1+(\partial h_{yi}/\partial y)^2} \right\} \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
& + 2 \sum^k \left\{ A_{sxi} E_{sxi} \frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \right\} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \sum^m \left\{ A_{syi} E_{syi} \frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \right\} \frac{\partial v}{\partial y} \\
& - 2 \sum^k \left\{ A_{sxi} E_{sxi} h_{xi} \frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - 2 \sum^m \left\{ A_{syi} E_{syi} h_{yi} \frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \Bigg\} dx dy \\
& - \iint_R q_z w \, dx \, dy - \int_{C_1} [\bar{N}_{x\eta} u + \bar{N}_{y\eta} v + \bar{M}_{x\eta} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{M}_{y\eta} \frac{\partial w}{\partial y} \\
& \quad + \sum^k \bar{P}_{x\eta} S_{xi} + \sum^m \bar{P}_{y\eta} S_{yi}] d\xi \tag{6-18}
\end{aligned}$$

6.2.4 支配微分方程式

テンドンのすべりを考慮した曲線テンドンを有するPC床板の曲げを支配する基礎微分方程式は、前節で得た汎関数(6-18)式の変分問題として求めることができる。

変位 u , v , w および x , y 両方向の代表的な任意の i 層のすべり変位 S_{xi} と S_{yi} に関する第一変分をとり、Euler-Lagrange 方程式を構成すると、図6-3の境界曲線 C_1 で囲まれた床板の全ての領域において成立する一連の基礎微分方程式を得る。

変位 u に関して：

$$\begin{aligned}
& \left\{ \frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum^k A_{sxi}^* E_{sxi} \sqrt{1+(\partial h_{xi}/\partial x)^2} \right\} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{E_c t}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} \\
& + \sum^k \left\{ \frac{A_{sxi}^* E_{sxi}}{\sqrt{1+(\partial h_{xi}/\partial x)^2}} \frac{\partial h_{xi}}{\partial x} \frac{\partial^2 h_{xi}}{\partial x^2} \right\} \frac{\partial u}{\partial x} - \sum^k \left\{ A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi} \sqrt{1+(\partial h_{xi}/\partial x)^2} \right\} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\
& - \sum^k \left\{ A_{sxi}^* E_{sxi} \frac{\partial h_{xi}}{\partial x} \sqrt{1+(\partial h_{xi}/\partial x)^2} + \frac{A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi}}{\sqrt{1+(\partial h_{xi}/\partial x)^2}} \frac{\partial h_{xi}}{\partial x} \frac{\partial^2 h_{xi}}{\partial x^2} \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
& + \sum^k \left\{ A_{sxi} E_{sxi} \frac{\partial^2 S_{xi}}{\partial x^2} \right\} = 0 \tag{6-19}
\end{aligned}$$

変位 v に関して：

$$\begin{aligned}
 & \left\{ \frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum^m A_{s y i}^* E_{s y i} \sqrt{1+(\partial h_{y i} / \partial y)^2} \right\} \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{E_c t}{2(1-\nu)} \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} \\
 & + \sum^m \left\{ \frac{A_{s y i}^* E_{s y i}}{\sqrt{1+(\partial h_{y i} / \partial y)^2}} \frac{\partial h_{y i}}{\partial y} \frac{\partial^2 h_{y i}}{\partial y^2} \right\} \frac{\partial v}{\partial y} - \sum^m \left\{ A_{s y i}^* E_{s y i} h_{y i} \sqrt{1+(\partial h_{y i} / \partial y)^2} \right\} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \\
 & - \sum^m \left\{ A_{s y i}^* E_{s y i} \frac{\partial h_{y i}}{\partial y} \sqrt{1+(\partial h_{y i} / \partial y)^2} + \frac{A_{s y i}^* E_{s y i} h_{y i}}{\sqrt{1+(\partial h_{y i} / \partial y)^2}} \frac{\partial h_{y i}}{\partial y} \frac{\partial^2 h_{y i}}{\partial y^2} \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
 & + \sum^m \left\{ A_{s y i} E_{s y i} \frac{\partial^2 S_{y i}}{\partial y^2} \right\} = 0 \quad (6-20)
 \end{aligned}$$

変位 w に関して：

$$\begin{aligned}
 & - \sum^k \left\{ A_{s x i}^* E_{s x i} h_{x i} \sqrt{1+(\partial h_{x i} / \partial x)^2} \right\} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} - 2 \sum^k \left[A_{s x i}^* E_{s x i} \left\{ \frac{\partial h_{x i}}{\partial x} \sqrt{1+(\partial h_{x i} / \partial x)^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{h_{x i}}{\sqrt{1+(\partial h_{x i} / \partial x)^2}} \frac{\partial h_{x i}}{\partial x} \frac{\partial^2 h_{x i}}{\partial x^2} \right\} \right] \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \sum^k \left\{ A_{s x i}^* E_{s x i} \left[\frac{\partial^2 h_{x i}}{\partial x^2} \sqrt{1+(\partial h_{x i} / \partial x)^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{1+(\partial h_{x i} / \partial x)^2}} \left\{ 2 \left(\frac{\partial h_{x i}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 h_{x i}}{\partial x^2} + h_{x i} \left(\frac{\partial^2 h_{x i}}{\partial x^2} \right)^2 + h_{x i} \frac{\partial h_{x i}}{\partial x} \frac{\partial^3 h_{x i}}{\partial x^3} \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left. - h_{x i} \left\{ 1+(\partial h_{x i} / \partial x)^2 \right\}^{-3/2} \left(\frac{\partial h_{x i}}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 h_{x i}}{\partial x^2} \right)^2 \right\} \right] \frac{\partial u}{\partial x} \\
 & + \left\{ \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum^k A_{s x i}^* E_{s x i} h_{x i} \sqrt{1+(\partial h_{x i} / \partial x)^2} \right\} \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \\
 & + 2 \sum^k \left[A_{s x i}^* E_{s x i} \left\{ 2 h_{x i} \frac{\partial h_{x i}}{\partial x} \sqrt{1+(\partial h_{x i} / \partial x)^2} + \frac{h_{x i}^2}{\sqrt{1+(\partial h_{x i} / \partial x)^2}} \frac{\partial h_{x i}}{\partial x} \frac{\partial^2 h_{x i}}{\partial x^2} \right\} \right] \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} \\
 & + \sum^k \left\{ A_{s x i}^* E_{s x i} \left[\sqrt{1+(\partial h_{x i} / \partial x)^2} \left\{ 2 \left(\frac{\partial h_{x i}}{\partial x} \right)^2 + 2 h_{x i} \frac{\partial^2 h_{x i}}{\partial x^2} \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{h_{x i}}{\sqrt{1+(\partial h_{x i} / \partial x)^2}} \left\{ 4 \left(\frac{\partial h_{x i}}{\partial x} \right)^2 \frac{\partial^2 h_{x i}}{\partial x^2} + h_{x i} \left(\frac{\partial^2 h_{x i}}{\partial x^2} \right)^2 + h_{x i} \frac{\partial h_{x i}}{\partial x} \frac{\partial^3 h_{x i}}{\partial x^3} \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left. - h_{x i}^2 \left\{ 1+(\partial h_{x i} / \partial x)^2 \right\}^{-3/2} \left(\frac{\partial h_{x i}}{\partial x} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 h_{x i}}{\partial x^2} \right)^2 \right\} \right] \right\} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
 & - \sum^k \left(A_{s x i} E_{s x i} h_{x i} \frac{\partial^3 S_{x i}}{\partial x^3} \right) - 2 \sum^k \left(A_{s x i} E_{s x i} \frac{\partial h_{x i}}{\partial x} \frac{\partial^2 S_{x i}}{\partial x^2} \right) - \sum^k \left(A_{s x i} E_{s x i} \frac{\partial^2 h_{x i}}{\partial x^2} \frac{\partial S_{x i}}{\partial x} \right) \\
 & + \frac{E_c t^3}{6(1-\nu^2)} \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} \\
 & - \sum^m \left\{ A_{s y i}^* E_{s y i} h_{y i} \sqrt{1+(\partial h_{y i} / \partial y)^2} \right\} \frac{\partial^3 v}{\partial y^3} - 2 \sum^m \left[A_{s y i}^* E_{s y i} \left\{ \frac{\partial h_{y i}}{\partial y} \sqrt{1+(\partial h_{y i} / \partial y)^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{h_{y i}}{\sqrt{1+(\partial h_{y i} / \partial y)^2}} \frac{\partial h_{y i}}{\partial y} \frac{\partial^2 h_{y i}}{\partial y^2} \right\} \right] \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - \sum^m \left\{ A_{s y i}^* E_{s y i} \left[\frac{\partial^2 h_{y i}}{\partial y^2} \sqrt{1+(\partial h_{y i} / \partial y)^2} \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{1}{\sqrt{1+(\partial h_{y i} / \partial y)^2}} \left\{ 2 \left(\frac{\partial h_{y i}}{\partial y} \right)^2 \frac{\partial^2 h_{y i}}{\partial y^2} + h_{y i} \left(\frac{\partial^2 h_{y i}}{\partial y^2} \right)^2 + h_{y i} \frac{\partial h_{y i}}{\partial y} \frac{\partial^3 h_{y i}}{\partial y^3} \right\} \right. \right. \\
 & \left. \left. - h_{y i} \left\{ 1+(\partial h_{y i} / \partial y)^2 \right\}^{-3/2} \left(\frac{\partial h_{y i}}{\partial y} \right)^2 \left(\frac{\partial^2 h_{y i}}{\partial y^2} \right)^2 \right\} \right] \frac{\partial v}{\partial y} \\
 & + \left\{ \frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum^m A_{s y i}^* E_{s y i} h_{y i} \sqrt{1+(\partial h_{y i} / \partial y)^2} \right\} \frac{\partial^4 w}{\partial y^4}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 2 \sum^m [A_{s y i}^* E_{s y i} \{ 2 h_{y i} \frac{\partial h_{y i}}{\partial y} \sqrt{1 + (\partial h_{y i} / \partial y)^2} + \frac{h_{y i}^2}{\sqrt{1 + (\partial h_{y i} / \partial y)^2}} \frac{\partial h_{y i}}{\partial y} \frac{\partial^2 h_{y i}}{\partial y^2} \}] \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \\
& + \sum^m \{ A_{s y i}^* E_{s y i} [\sqrt{1 + (\partial h_{y i} / \partial y)^2} \{ 2 (\frac{\partial h_{y i}}{\partial y})^2 + 2 h_{y i} \frac{\partial^2 h_{y i}}{\partial y^2} \} \\
& + \frac{h_{y i}}{\sqrt{1 + (\partial h_{y i} / \partial y)^2}} \{ 4 (\frac{\partial h_{y i}}{\partial y})^2 \frac{\partial^2 h_{y i}}{\partial y^2} + h_{y i} (\frac{\partial^2 h_{y i}}{\partial y^2})^2 + h_{y i} \frac{\partial h_{y i}}{\partial y} \frac{\partial^3 h_{y i}}{\partial y^3} \} \\
& - h_{y i}^2 \{ 1 + (\partial h_{y i} / \partial y)^2 \}^{-3/2} (\frac{\partial h_{y i}}{\partial y})^2 (\frac{\partial^2 h_{y i}}{\partial y^2})^2 \}] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
& - \sum^m (A_{s y i} E_{s y i} h_{y i} \frac{\partial^3 S_{y i}}{\partial y^3}) - 2 \sum^m (A_{s y i} E_{s y i} \frac{\partial h_{y i}}{\partial y} \frac{\partial^2 S_{y i}}{\partial y^2}) - \sum^m (A_{s y i} E_{s y i} \frac{\partial^2 h_{y i}}{\partial y^2} \frac{\partial S_{y i}}{\partial y}) \\
& = q_z
\end{aligned} \tag{6-21}$$

変位 $S_{x i}$ に関して：

$$\begin{aligned}
& A_{s x i} E_{s x i} [\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - h_{x i} \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} - \frac{\partial h_{x i}}{\partial x} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial h_{x i} / \partial x)^2}} \frac{\partial^2 S_{x i}}{\partial x^2} \\
& - \{ 1 + (\partial h_{x i} / \partial x)^2 \}^{-3/2} \frac{\partial h_{x i}}{\partial x} \frac{\partial^2 h_{x i}}{\partial x^2} \frac{\partial S_{x i}}{\partial x} = \Omega_{x i} K_{b x i} S_{x i} \sqrt{1 + (\partial h_{x i} / \partial x)^2}
\end{aligned} \tag{6-22}$$

変位 $S_{y i}$ に関して：

$$\begin{aligned}
& A_{s y i} E_{s y i} [\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - h_{y i} \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} - \frac{\partial h_{y i}}{\partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{1}{\sqrt{1 + (\partial h_{y i} / \partial y)^2}} \frac{\partial^2 S_{y i}}{\partial y^2} \\
& - \{ 1 + (\partial h_{y i} / \partial y)^2 \}^{-3/2} \frac{\partial h_{y i}}{\partial y} \frac{\partial^2 h_{y i}}{\partial y^2} \frac{\partial S_{y i}}{\partial y} = \Omega_{y i} K_{b y i} S_{y i} \sqrt{1 + (\partial h_{y i} / \partial y)^2}
\end{aligned} \tag{6-23}$$

上式中の $S_{x i}$ と $S_{y i}$ に関する (6-22), (6-23) 式は、補強筋の付着すべりを考慮した R C 床板の場合^{6), 7)}と同様、x 及び y 方向の各テンドン層ごとに成立するから、これらの式と相似な式は、それぞれの方向に配置されているテンドンの数 (x 方向は k, y 方向は m) だけ存在することになる。

6.2.5 等価膜力・等価モーメントの導入と平衡方程式

前節 6.2.4 で得た基礎微分方程式を平衡方程式に変換するために、ここでは、床板断面の合応力としての等価膜力 $\{N\} = \{N_x, N_y, N_{xy}\}^T$ と、等価モーメント $\{M\} = \{M_x, M_y, M_{xy}\}^T$ をそれぞれ次のように定義する。

$$\left. \begin{aligned}
N_x &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{cx} dz + \sum^k \{ A_{s x i} \sqrt{1 + (\partial h_{x i} / \partial x)^2} (\sigma_{s x i} - h_{x i} \sigma_{cx}) \} \\
N_y &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{cy} dz + \sum^m \{ A_{s y i} \sqrt{1 + (\partial h_{y i} / \partial y)^2} (\sigma_{s y i} - h_{y i} \sigma_{cy}) \}
\end{aligned} \right\} \tag{6-24}$$

$$\left. \begin{aligned}
N_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{cy} dz \\
M_x &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{cx} z dz + \sum_k \{ A_{sxi} h_{xi} \sqrt{1 + (\partial h_{xi} / \partial x)^2} (\sigma_{sxi} - h_{xi} \sigma_{cx}) \} \\
M_y &= \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_{cy} z dz + \sum_m \{ A_{syi} h_{yi} \sqrt{1 + (\partial h_{yi} / \partial y)^2} (\sigma_{syi} - h_{yi} \sigma_{cy}) \} \\
M_{xy} &= \int_{-t/2}^{t/2} z \tau_{cxy} z dz
\end{aligned} \right\} \quad (6-25)$$

上2式中の $h_{xi} \sigma_{cx}$ と $h_{yi} \sigma_{cy}$ は、 x 及び y 方向の i 層のテンドンと同位置におけるコンクリートの対応する方向の応力で、テンドンによるコンクリート断面の欠損を考慮するために必要となるものである。これら(6-24), (6-25)式に先の(6-1)~(13)式の関係を入れて整理すると、膜力とモーメントは変位で表示され以下のようなになる。

$$\left. \begin{aligned}
N_x &= \left[\frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum_k \{ A_{sxi}^* E_{sxi} \sqrt{1 + (\partial h_{xi} / \partial x)^2} \} \right] \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\nu E_c t}{1-\nu^2} \frac{\partial v}{\partial y} \\
&\quad - \sum_k \{ A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi} \sqrt{1 + (\partial h_{xi} / \partial x)^2} \} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sum_k (A_{sxi} E_{sxi}) \frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \\
N_y &= \left[\frac{E_c t}{1-\nu^2} + \sum_m \{ A_{syi} E_{syi} \sqrt{1 + (\partial h_{yi} / \partial y)^2} \} \right] \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\nu E_c t}{1-\nu^2} \frac{\partial u}{\partial x} \\
&\quad - \sum_m \{ A_{syi} E_{syi} h_{yi} \sqrt{1 + (\partial h_{yi} / \partial y)^2} \} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sum_m (A_{syi} E_{syi}) \frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \\
N_{xy} &= \frac{E_c t}{2(1+\nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right)
\end{aligned} \right\} \quad (6-26)$$

$$\left. \begin{aligned}
M_x &= \sum_k \{ A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi} \sqrt{1 + (\partial h_{xi} / \partial x)^2} \} \frac{\partial u}{\partial x} \\
&\quad - \left[\frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum_k \{ A_{sxi}^* E_{sxi} h_{xi}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{xi} / \partial x)^2} \} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \\
&\quad - \frac{\nu E_c t^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sum_k (A_{sxi} E_{sxi}) \frac{\partial S_{xi}}{\partial x} \\
M_y &= \sum_m \{ A_{syi}^* E_{syi} h_{yi} \sqrt{1 + (\partial h_{yi} / \partial y)^2} \} \frac{\partial v}{\partial y} \\
&\quad - \left[\frac{E_c t^3}{12(1-\nu^2)} + \sum_m \{ A_{syi}^* E_{syi} h_{yi}^2 \sqrt{1 + (\partial h_{yi} / \partial y)^2} \} \right] \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \\
&\quad - \frac{\nu E_c t^3}{12(1-\nu^2)} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sum_m (A_{syi} E_{syi}) \frac{\partial S_{yi}}{\partial y} \\
M_{xy} &= - \frac{E_c t^3}{12(1+\nu)} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}
\end{aligned} \right\} \quad (6-27)$$

但し、 $A_{xi}^* = A_{xi}(1 - E_c/E_{sxi})$, $A_{yi}^* = A_{yi}(1 - E_c/E_{syi})$

(6-24)~(6-27)式で定義した量の内の N_x と M_x に $\sqrt{1+(\partial h_{xi}/\partial x)^2}$ が、また N_y と M_y に $\sqrt{1+(\partial h_{yi}/\partial y)^2}$ の項が含まれる理由と、これらの量を等価膜力および等価モーメントと呼称する所以は、第5で述べた“曲線テンドンを有するP C梁”の場合¹²⁾と同じである。これらの等価量を用いると、先の基礎微分方程式(6-19)~(6-23)式は、以下に示すような平衡方程式に変換することができる。

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} = 0 \quad (6-28)$$

$$\frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (6-29)$$

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} + q_z = 0 \quad (6-30)$$

$$A_{sxi} \frac{\partial \sigma_{sxi}}{\partial x} = \Omega_{xi} \tau_{bxi} \sqrt{1+(\partial h_{xi}/\partial x)^2} \quad (6-31)$$

但し、 $i = 1 \sim k$

$$A_{syi} \frac{\partial \sigma_{syi}}{\partial y} = \Omega_{yi} \tau_{byi} \sqrt{1+(\partial h_{yi}/\partial y)^2} \quad (6-32)$$

但し、 $i = 1 \sim m$

6. 3 各テンドン層が任意の配置方向を有するP C床板の有限要素解析^{13)~21)}

前節6.2では、曲線テンドンが x 、 y 2方向にのみ配置される場合のP C床板の基礎微分方程式を導いたが、ここではこの理論を、各テンドン層が任意の配置方向を有するP C床板をも取り扱い得るように拡張して、有限要素法への定式化を行うこととする。

6.3.1 追加仮定事項

有限要素法への定式化に当り、前節6.2.1で設定した基本仮定のほかに、以下に記す事項を追加する。

1) 図6-5に示すように、ドロップパネル部分のような板厚の変化する場合の、P C床板の幾何形状を実際に近い形で取り扱うことが可能なように、板内の任意面を基準面として定式化を行う。

2) テンドンは床板内に n 層配置されており、さらに各テンドン層は、それぞれ任意の方向をもって2次曲線形で配置されているものとする。

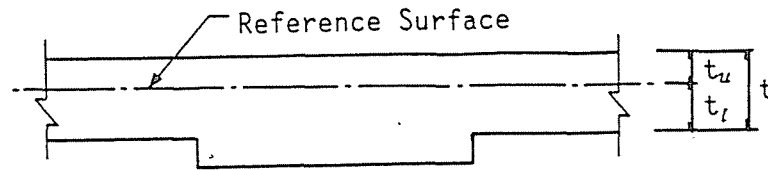


図6-5 床板の断面と基準面 (Reference Surface)

3) x , y 方向の全てのテンドン曲線の湾曲の程度は微小であり、両方向とも各テンドン層の曲線長は、それぞれの座標軸への投影直線長で表し得るものとする。即ち、次の関係が成立するものとする。

$$\sqrt{1+(\partial h_{si}/\partial l_i)^2} = 1 \quad (6-33)$$

以上3つの追加事項のうち、仮定としての妥当性に疑念を抱き得るのは最後の3)のみであるが、それが十分な妥当性をもつものであることは、第5章で述べた曲線テンドンを有するPC梁の計算例において、既に見たとおりである。

6.3.2 変位場、および歪と応力

(1) 変位場

先の仮定に基づき、この問題を有限要素法を用いて定式化するために設定しなければならない変位場は、第4章のRC床板の場合と同様、板中央面における x, y, z 方向の変位 u, v, w と、板内に配置される全テンドン層の n 個のすべり変位 $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_n$ の計 $(3+n)$ 個の変位である。

(2) 鉄筋層の歪と応力

コンクリート部分の歪と応力は、(6-1)～(6-5)式の関係がそのまま有効であり、また、すべり変位と付着応力の関係についても、本質的には先の(6-12), (6-13)式の表示が成立するから、ここではテンドン層の歪と応力だけが問題となる。任意の i 層のテンドンの設置曲線 l_i に沿う歪 ϵ_{si} は、次式で表示される。

$$\epsilon_{si} = \epsilon_{osi} + \epsilon_{bsi} + \epsilon_{ssi} \quad (6-34)$$

但し、 ϵ_{osi} : 板の基準面の l_i 方向の面内歪、 ϵ_{bsi} : テンドンの l_i 方向の曲げ歪、

ϵ_{ssi} : テンドン曲線 l_i に沿うすべり率

上式の右辺の ϵ_{osi} と ϵ_{bsi} は、次のように表される。

$$\epsilon_{osi} = [H_{si}] \{ \epsilon_o \} \quad (6-35)$$

$$\epsilon_{bsi} = h_{si} [H_{si}] \{ \phi \} \quad (6-36)$$

言うまでもなく、上式中の $\{ \epsilon_o \}$ と $\{ \phi \}$ は、既に(6-2)式と(6-3)式で定義した板の面内歪と曲率であり、 $[H_{si}]$ は下式で与えられる。

$$[H_{si}] = [\cos^2 \psi_i \quad \sin^2 \psi_i \quad (\cos \psi_i \cdot \sin \psi_i)] \quad (6-37)$$

但し、 ψ_i : l_i とx軸のなす角 (図6-6参照)

(6-36)式の右辺の h_{si} は、板の基準面からi層の tendon 位置までの距離であるから、前項の追加仮定2)より l_i の関数として次式で表される

$$h_{si} = a_i + b_i l_i + c_i l_i^2 \quad (6-38)$$

但し、 a_i, b_i, c_i : i層の tendon の2次曲線形を定義するための定数
上の h_{si} をx,y座標で表示し直すと、

$$h_{si} = \bar{a}_i + \bar{b}_i x + \bar{c}_i y + \bar{d}_i xy + \bar{e}_i x^2 + \bar{f}_i y^2 \quad (6-39)$$

$$\text{但し、} \bar{a}_i = a_i, \bar{b}_i = b_i \cos \psi_i, \bar{c}_i = b_i \sin \psi_i, \bar{d}_i = 2c_i \cos \psi_i \sin \psi_i, \bar{e}_i = c_i \cos^2 \psi_i, \bar{f}_i = c_i \sin^2 \psi_i$$

また、(6-34)式中の tendon 層iのすべり率 ϵ_{ssi} は、次式で表示される。

$$\epsilon_{ssi} = \frac{\partial S_i}{\partial \xi_i} = \frac{\partial S_i}{\partial l_i} / \frac{\partial \xi_i}{\partial l_i} \quad (6-40)$$

上の(6-40)式中の $\partial \xi_i / \partial l_i$ は、先の追加仮定事項3)より、 $\partial \xi_i / \partial l_i = \sqrt{1 + (\partial h_{si} / \partial l_i)^2} = 1$ となるから、結果として次のようになる。

$$\epsilon_{ssi} = \frac{\partial S_i}{\partial l_i} = [T_{si}] \left\{ \begin{array}{c} \frac{\partial S_i}{\partial x} \\ \frac{\partial S_i}{\partial y} \end{array} \right\} \quad (6-41)$$

ここに、

$$[T_{si}] = [\cos \psi_i \quad \sin \psi_i] \quad (6-42)$$

一方、任意位置におけるi層の tendon の応力 σ_{si} は、

$$\sigma_{si} = E_{si} \epsilon_{si} \quad (6-43)$$

但し、 E_{si} : i層の tendon のヤング係数

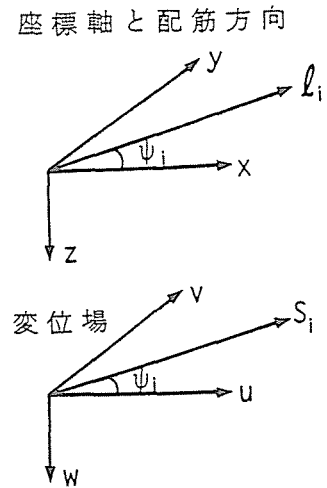


図6-6 座標系と変位場

6.3.3 有限要素解析のための全ポテンシャル・エネルギー汎関数

(6-34)～(6-43)式の関係を用いると、前項6.3.1の追加仮定を導入した「各テンドン層が任意の方向を有する場合のP C床板の汎関数」は、次のように求められる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{1}{2} \iint_{R_e} \left[\int_{-t_u}^{t_l} \{z \varepsilon_c\}^T [D_c] \{z \varepsilon_c\} dz + \sum_i^n A_{s,i}^* E_{s,i} \varepsilon_{s,i}^2 \right. \\ & \left. + \sum_i^n \Omega_{s,i} K_{b,i} S_i^2 - 2q_z w \right] dxdy \\ & - \int_{C_1} \left[\bar{N}_{x,\eta} u + \bar{N}_{y,\eta} v + \bar{M}_{x,\eta} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{M}_{y,\eta} \frac{\partial w}{\partial y} \right] d\xi \end{aligned} \quad (6-44)$$

但し、 t_l ：基準面から板の下面までの距離、 t_u ：基準面から板の上面までの距離、

R_e ：矩形要素の面積領域、 $\{z \varepsilon_c\}$ ：板の基準面から z だけ離れた任意位置におけるコンクリート部分の歪であり $\{z \varepsilon_c\} = \{\varepsilon_o\} + z\{\phi\}$ 、 $A_{s,i}^*$ ： i 層のテンドンの板単位面積当りの換算断面積で $A_{s,i}^* = A_{s,i}(1 - E_c/E_{s,i})$ 、 $A_{s,i}$ ： i 層のテンドンの板単位面積当りの断面積、 $\Omega_{s,i}$ ： i 層のテンドンの板単位面積当りの付着表面積、 $K_{b,i}$ ： i 層のテンドンの付着係数。

6.3.4 変位関数と歪の有限要素表示

第4章において記述した「直線配筋を有するR C床板」の場合と同様、図6-7に示す矩形要素を使用することにする。

ここで導入しなければならない変位は、前節6.2.2の(1)で述べた全ての変位、即ち、 x 、 y 、 z 方向の変位 u 、 v 、 w と、板内の全てのテンドンのすべり変位 $S_1, S_2, \dots, S_i, \dots, S_n$ である。

(1) 面内変形

面内変形 u, v に関しては次の変位関数を用いる。

$$\begin{Bmatrix} u \\ v \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & x & y & xy & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x & y & xy \end{bmatrix} \{\alpha_o\} = [f_o] \{\alpha_o\} \quad (6-45)$$

但し、 $\{\alpha_o\}$ ：面内変位の一般化変位

従って、各要素の面内節点変位ベクトル $\{\Delta_o\}$ は、

$$\begin{aligned} \{\Delta_o\} &= \{u_e \quad v_e \quad u_f \quad v_f \quad u_g \quad v_g \quad u_h \quad v_h\}^T \\ &= [C_o] \{\alpha_o\} \end{aligned} \quad (6-46)$$

但し、 $[C_o]$ ：(6-45)式に従って節点変位ベクトル $\{\Delta_o\}$ と一般化変位 $\{\alpha_o\}$ を関連づけるための係数マトリックスで、本質的に(4-57)式の $[C_o]$ と同一である。

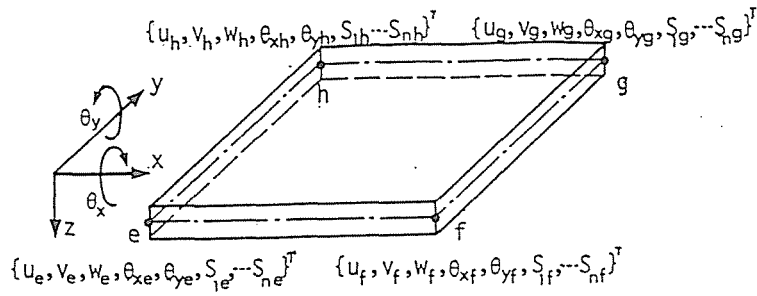


図6-7 P C床板要素

また、要素内の面内変位 $\{\epsilon_o\}$ は下式で表される。

$$\{\epsilon_o\} = [b_o][C_o^{-1}]\{\Delta_o\} \quad (6-47)$$

但し、 $[b_o]$ ：(6-45)式中の $[f_o]$ を微分することによって得られる係数マトリックス、

$\{\Delta_o\}$ ：変位 u, v に対応する面内節点変位ベクトル。

(2) 曲げ変形

P C床板の曲げ変形を表示するための鉛直方向の変位 w の変位関数を次式で表示する。

$$\begin{aligned} w &= [1 \ x \ y \ x^2 \ xy \ y^2 \ x^3 \ x^2y \ xy^2 \ y^3 \ x^3y \ xy^3]\{\alpha_b\} \\ &= [f_b]\{\alpha_b\} \end{aligned} \quad (6-48)$$

但し、 $\{\alpha_b\}$ ：曲げ変形の一般化変位

また、回転角 θ_x, θ_y は、

$$\theta_x = \frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}[f_b]\{\alpha_b\} \quad (6-49)$$

$$\theta_y = -\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x}[f_b]\{\alpha_b\} \quad (6-50)$$

従って、変位成分 w, θ_x, θ_y に対応する節点変位ベクトル $\{\Delta_b\}$ は、R C床板の場合と同様下式で一般化変位 $\{\alpha_b\}$ と関係づけられる。

$$\begin{aligned} \{\Delta_b\} &= \{w_e \ \theta_{xe} \ \theta_{ye} \ w_f \ \theta_{xf} \ \theta_{yf} \ w_g \ \theta_{xg} \ \theta_{yg} \ w_h \ \theta_{xh} \ \theta_{yh}\}^T \\ &= [C_b]\{\alpha_b\} \end{aligned} \quad (6-51)$$

但し、 $[C_b]$ ：(6-48)～(6-50)式に従って、要素の曲げ節点変位ベクトル $\{\Delta_b\}$ と一般化変位 $\{\alpha_b\}$ を関連づけるための係数マトリックスで、(4-64)式の $[C_b]$ と同一である。

以上より、P C床板の一般化曲率 $\{\phi\}$ は、次のように表示される。

$$\{\phi\} = \left[-\frac{\partial^2}{\partial x^2} [f_b] \quad -\frac{\partial^2}{\partial y^2} [f_b] \quad -2\frac{\partial^2}{\partial x \partial y} [f_b] \right]^T \{\alpha_b\}$$

$$= [b_b][C_b^{-1}]\{\Delta_b\} \quad (6-52)$$

但し、 $[b_b]$ ：上式から明らかなように $[f_b]$ を微分して得られる係数マトリックス、

$\{\Delta_b\}$ ：変位成分 w, θ_x, θ_y に対応する曲げ節点変位ベクトル、 $[C_b]$ ：曲げ節点変位ベクトル $\{\Delta_b\}$ と一般化変位 $\{\alpha_b\}$ を関係づける係数マトリックスで、(4-64)式の $[C_o]$ と同一となる。

従って、板の基準面から z だけ離れた任意点の曲げのみによる歪 $\{\epsilon_b\}$ は、下式のようになる。

$$\{\epsilon_b\} = \{\epsilon_{bx} \quad \epsilon_{by} \quad \gamma_{bxy}\}^T = z [b_b][C_b^{-1}]\{\Delta_b\} \quad (6-53)$$

(3) すべり変形

任意のテンドン層 i のすべり変位 S_i は、次式で表示する。

$$S_i = [1 \quad x \quad y \quad xy]\{\alpha_{si}\} = [f_s]\{\alpha_{si}\} \quad (6-54)$$

但し、 $\{\alpha_{si}\}$ ：すべり変位 S_i の一般化変位。

従って、任意のテンドン層 i に関する要素節点すべり変位ベクトル $\{\Delta_{si}\}$ は、

$$\{\Delta_{si}\} = \{S_{ie} \quad S_{if} \quad S_{ig} \quad S_{ih}\}^T = [C_s]\{\alpha_{si}\} \quad (6-55)$$

但し、 $[C_s]$ ：(6-54)、(6-55)式に従って、任意のテンドン層 i に関する要素節点すべり変位ベクトル $\{\Delta_{si}\}$ と一般化変位 $\{\alpha_{si}\}$ を関連づけるための係数マトリックスで、その表示式は(4-71)式の $[C_s]$ と同一である。

また、このテンドン層 i のすべり率 ϵ_{ssi} は、(6-41)式と上の(6-54)、(6-55)式の関係より、次のようになる。

$$\epsilon_{ssi} = [b_{si}][C_s^{-1}]\{\Delta_{si}\} \quad (6-56)$$

但し、 $[b_{si}] = [0 \quad \cos\phi_i \quad \sin\phi_i \quad (x \cos\phi_i + y \sin\phi_i)]$

(4) コンクリート部分の歪とテンドン層の歪

前項(1)～(3)の関係より、有限要素法への定式化の際に必要となるコンクリート部分の歪 $\{\epsilon_c\}$ と、テンドン層 i の歪 ϵ_{si} の有限要素表示は、次のようになる。

$$\{\epsilon_c\} = \{\epsilon_o\} + \{\epsilon_b\} = [b_o][C_o^{-1}]\{\Delta_o\} + z[b_b][C_b^{-1}]\{\Delta_b\} \quad (6-57)$$

$$\epsilon_{si} = \epsilon_{osi} + \epsilon_{bsi} + \epsilon_{ssi}$$

$$= [H_{si}][b_o][C_o^{-1}]\{\Delta_o\}$$

$$+ (\bar{a}_i + \bar{b}_i x + \bar{c}_i y + \bar{d}_i xy + \bar{e}_i x^2 + \bar{f}_i y^2) [H_{si}][b_b][C_b^{-1}]\{\Delta_b\} + [b_{si}][C_s^{-1}]\{\Delta_{si}\}$$

$$(6-58)$$

但し、 $\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{c}_i, \bar{d}_i, \bar{e}_i, \bar{f}_i$ ：(6-39)式を参照。

6.3.5 有限要素方程式

前項6.3.1に掲げる追加仮定を導入した有限要素展開のための汎関数(6-44)式に、上で求めた(6-45)～(6-58)式の関係代入し、各節点変位ベクトル $\{\Delta_o\}$, $\{\Delta_b\}$, $\{\Delta_s\}$ に関して変分をとり整理すると、曲線テンドンを有するP C床板の有限要素方程式が得られ下式となる。

$$\begin{bmatrix} K_{oo} & K_{ob} & K_{os} \\ K_{ob}^T & K_{bb} & K_{bs} \\ K_{os}^T & K_{bs}^T & K_{ss} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta_o \\ \Delta_b \\ \Delta_s \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} P_o \\ P_b \\ P_s \end{Bmatrix} \quad (6-59)$$

但し、 $\{\Delta_s\}$ ：各テンドン層のすべり変位ベクトルから構成される全テンドン層に関する節点すべり変位ベクトル、 $\{P_o\}$, $\{P_b\}$, $\{P_s\}$ ：それぞれの節点変位ベクトル $\{\Delta_o\}$, $\{\Delta_b\}$, $\{\Delta_s\}$ に対応する節点外荷重ベクトル。

上式の右辺の部分剛性マトリックスのうち、 $[K_{oo}]$, $[K_{ob}]$, $[K_{bb}]$ は、それぞれ次のように表示される。

$$\begin{aligned} [K_{oo}] &= [C_o^{-1}]^T \left\{ \iint_{R_e} [b_o]^T \{t[D_c] + \sum^n A_{si} E_{si} [H_{si}]^T [H_{si}]\} [b_o] dx dy \right\} [C_o^{-1}] \\ &= [C_o^{-1}]^T [\bar{K}_{oo}] [C_o^{-1}] \end{aligned} \quad (6-60)$$

$$\begin{aligned} [K_{ob}] &= [C_o^{-1}]^T \left\{ \iint_{R_e} [b_o]^T \left\{ \left(\frac{t_i^2 - t_u^2}{2} \right) [D_c] + \sum^n A_{si} E_{si} h_{si} [H_{si}]^T [H_{si}] \right\} [b_b] dx dy \right\} [C_b^{-1}] \\ &= [C_o^{-1}]^T [\bar{K}_{ob}] [C_b^{-1}] \end{aligned} \quad (6-61)$$

$$\begin{aligned} [K_{bb}] &= [C_b^{-1}]^T \left\{ \iint_{R_e} [b_b]^T \left\{ \left(\frac{t_i^3 - t_u^3}{3} \right) [D_c] + \sum^n A_{si} E_{si} h_{si}^2 [H_{si}]^T [H_{si}] \right\} [b_b] dx dy \right\} [C_b^{-1}] \\ &= [C_b^{-1}]^T [\bar{K}_{bb}] [C_b^{-1}] \end{aligned} \quad (6-62)$$

但し、 R_e ：矩形要素の面積領域、 t_i ：基準面から板下面までの距離、 t_u ：基準面から板上面までの距離。

上の(6-60)式中の $[\bar{K}_{oo}]$ は、結果として第4章の微小変形理論に基づくR C床板のそれと全く同じ形であり、 $[\bar{K}_{oo}]$ の各成分も、第4章のAppendix[4A-I]の(4A-3)式で与えられることになる。また、(6-61)式の $[\bar{K}_{ob}]$ と、(6-62)式の $[\bar{K}_{bb}]$ の各成分については、本章のAppendix[6A-I]に一覧して掲げてある。

更にまた、(6-59)式の他の部分剛性マトリックス $[K_{os}]$, $[K_{bs}]$, $[K_{ss}]$ については、以下に示す任意のテンドン層*i*に関する部分マトリックス $[k_{os,i}]$, $[k_{bs,i}]$, $[k_{ss,i}]$ を、全テンドン層の節点すべり変位ベクトル $\{\Delta_s\}$ の並び順にしたがって再構成(assembly)す

ることにより、容易に求められる。

$$\begin{aligned} [k_{o.s.i}] &= [C_o^{-1}]^T \left\{ \iint_{R_e} A_{s.i} E_{s.i} [b_o]^T [H_{s.i}]^T [b_{s.i}] dx dy \right\} [C_s^{-1}] \\ &= [C_o^{-1}]^T [\bar{k}_{o.s.i}] [C_s^{-1}] \end{aligned} \quad (6-63)$$

$$\begin{aligned} [k_{b.s.i}] &= [C_b^{-1}]^T \left\{ \iint_{R_e} A_{s.i} E_{s.i} h_{s.i} [b_b]^T [H_{s.i}]^T [b_{s.i}] dx dy \right\} [C_s^{-1}] \\ &= [C_b^{-1}]^T [\bar{k}_{b.s.i}] [C_s^{-1}] \end{aligned} \quad (6-64)$$

$$\begin{aligned} [k_{s.s.i}] &= [C_s^{-1}]^T \left\{ \iint_{R_e} \{ \Omega_{s.i} K_{b.i} [f_s]^T [f_s] + A_{s.i} E_{s.i} [b_{s.i}]^T [b_{s.i}] \} dx dy \right\} [C_s^{-1}] \\ &= [C_o^{-1}]^T \{ [{}_1\bar{k}_{s.s.i}] + [{}_2\bar{k}_{s.s.i}] \} [C_b^{-1}] \end{aligned} \quad (6-65)$$

但し、 R_e ：矩形要素の面積領域。

以上で明らかのように、上の(6-63)～(6-65)式の表示形もまた、第4章の微小変形理論に基づくRC床板の場合と同形である。従って、これらの3式に含まれる $[\bar{k}_{o.s.i}]$ 、 $[{}_1\bar{k}_{s.s.i}]$ 、 $[{}_2\bar{k}_{s.s.i}]$ を構成する各成分には、(4-80)～(4-82)式の関係がそのまま適用されることになる。また、 $[\bar{k}_{b.s.i}]$ については、先の $[\bar{K}_{o.b}]$ 、 $[\bar{K}_{b.b}]$ と共に本章の Appendix[6A-I]に掲げている。

ここで求めたPC床板のための有限要素方程式は、補強材の付着すべりを考慮した直線配筋を有するRC床板の場合と同様、付着係数の値のみを調整することによって、 tendon とコンクリート間の接触境界に、“完全アンボンド”から“完全付着”に至るまで任意の付着状態を設定して解析することが可能である。

6.3.6 摩擦によるプレストレス力の損失の評価とその算入法

前述したように、tendon とコンクリート間に完全アンボンド状態を仮定し得るならば、PC床板の緊張解析は、「付着係数 K_b に 10kg/cm^2 以下の小さな値を設定しておき、先の有限要素方程式(6-59)の右辺の荷重ベクトル $\{P_s\}$ に、対応する各 tendon の導入緊張力を等値し、これを解く」ことによって容易に取り扱うことが可能である。しかしながら、第5章のPC梁の第4節でも述べたように、PC床板の場合も、緊張端において緊張力を導入する際、tendon とコンクリート間の摩擦作用によって、導入されたプレストレス力は緊張端から離れるに従って徐々に減少して行き、更にまた緊張作業完了後、tendon を床板本体に定着する際にアンカースリップが生じ、これが tendon のプレストレス力分布に更なる変化を及ぼすことになる。摩擦作用によるこれら tendon のプレストレス力分布の変化は、PC梁の場合と同様、結果として床板全体の变形と応力に影響を及ぼすことにな

る。この影響を実際に近い形で考慮することが可能な既往の方法としては、既に触れた Greunen等の研究⁷⁾があるが、通常は、摩擦作用によるプレストレス力分布変化後の各パネル中央点の緊張力が、パネル全体に一様分布するものとして、その影響を近似的に勘案するのが一般的である。著者は既に、第5章において、Greunen等の手法よりも簡便で精度の高い「アンカースリップの影響をも含めた摩擦作用に起因するプレストレス力分布の評価法」を開発してP C梁の解析に適用し、その有用性を明らかにした。ここでは、P C梁のための基本手法を、床板にも適用可能なように拡張することにする。

本解析法では、テンドンとコンクリート間の摩擦作用を考慮してP C床板の緊張解析を行う際に、第5章のP C梁の場合と同様、プレストレス力の変化を、テンドンの長さ方向に沿って精密に評価し、これを外力としてではなく内力として取り扱っている。従って、本解析結果には、テンドン緊張時のP C床板の実際の挙動が忠実に反映されることになる。また前述したように、これらのテンドンの応力と摩擦力分布の変化が、床板の力学性状におよぼす影響を算入する方法は、基本的にはP C梁で用いた繰り返し計算手法（勿論、摩擦力とアンカースリップによるP C力の損失も考慮されている）と全く同一である。従ってここでは、テンドンのプレストレス力分布と摩擦力分布の等価節点力への変換についてのみ記述することにする。

(1) テンドンのプレストレス力分布と摩擦力分布の等価節点力への変換

〔プレストレス力分布の変換〕： テンドンのプレストレス力分布 $P_{s,i}$ ($i=1\sim n$) を初期応力分布 $\Delta\sigma_{s,i}$ ($=P_{s,i}/A_{s,i}$) と見做し、その要素内分布を線形変化と仮定すると、この初期応力 $\Delta\sigma_{s,i}$ ($i=1\sim n$) 分布と等価な節点力 $\{\Delta P\}$ は、梁の場合と同じく仮想働の原理²²⁾ を用いて求められ、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \{\Delta P\} &= \{\Delta P_o\} + \{\Delta P_b\} + \{\Delta P_s\} \\
 &= \sum^n \left\{ [C_o^{-1}]^T \left[\int_{Re} A_{s,i} [b_o]^T [H_{s,i}]^T [1 \ x \ y \ xy] dx dy [C_o^{-1}] \{\Delta\sigma_{s,i}\} \right] \right. \\
 &\quad + \sum^n \left\{ [C_b^{-1}]^T \left[\int_{Re} A_{s,i} h_{s,i} [b_b]^T [H_{s,i}]^T [1 \ x \ y \ xy] dx dy [C_o^{-1}] \{\Delta\sigma_{s,i}\} \right] \right. \\
 &\quad + \sum^n \left\{ [C_s^{-1}]^T \left[\int_{Re} A_{s,i} [b_s]^T [1 \ x \ y \ xy] dx dy [C_o^{-1}] \{\Delta\sigma_{s,i}\} \right] \right\} \\
 &= \sum^n \left\{ [C_o^{-1}]^T [Z_{o,i}] [C_o^{-1}] \{\Delta\sigma_{s,i}\} \right\} + \sum^n \left\{ [C_b^{-1}]^T [Z_{b,i}] [C_o^{-1}] \{\Delta\sigma_{s,i}\} \right\} \\
 &\quad + \sum^n \left\{ [C_s^{-1}]^T [Z_{s,i}] [C_o^{-1}] \{\Delta\sigma_{s,i}\} \right\} \tag{6-66}
 \end{aligned}$$

但し、 $[C_e] = [C_s]$ で $[C_s]$ は前出， h_{si} ：板の基準面から i 層のテンドンまでの距離で、(6-39)式で与えられる。

上式中の $\sum$ 線付きの記号 $\sum$ は、単なるsummationではなく、節点すべり変位 S_i の並び順に従ってassembleすることを意味している。

上の(6-66)式中の係数マトリックス $[Z_{oi}]$ 、 $[Z_{bi}]$ 、 $[Z_{si}]$ の内の $[Z_{oi}]$ と $[Z_{si}]$ は、次のように表される。

$$[Z_{oi}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_E \cdot cs^2 & 0 & 0 & 0 \\ A_E \cdot sn \cdot cs & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} a_x^3 a_y \cdot sn \cdot cs & \frac{4}{3} a_x a_y^3 \cdot cs^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_E \cdot sn \cdot cs & 0 & 0 & 0 \\ A_E \cdot sn^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} a_x^3 a_y \cdot sn^2 & \frac{4}{3} a_x a_y^3 \cdot sn \cdot cs & 0 \end{bmatrix} \quad (6-67)$$

$$[Z_{si}] = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ A_E \cdot cs & 0 & 0 & 0 \\ A_E \cdot sn & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} a_x^3 a_y \cdot sn & \frac{4}{3} a_x a_y^3 \cdot cs & 0 \end{bmatrix} \quad (6-68)$$

但し、 a_x, a_y ：矩形要素の x, y 方向の $1/2$ 辺長， A_E ：矩形要素の面積（ $A_E = 4a_x a_y$ ），

$sn = \sin \psi_i$ ， $cs = \cos \psi_i$ ， ψ_i ： i 層のテンダンの配置方向と x 軸のなす角（図6-6参照）

また、 $[Z_{bi}]$ については、本章の Appendix [6A-II]に一覧する。

〔テンダンの摩擦力分布の変換〕： テンドン曲線に沿って、コンクリートとの付着境界に生じている摩擦力分布 τ_{fi} （ $i=1 \sim n$ ）を、初期付着応力分布 $\Delta \tau_{bi}$ （ $= \tau_{fi} / \Omega_{si}$ ）と見做し、更に、それが要素内で線形で変化するものと仮定すると、この初期応力 $\Delta \tau_{bi}$ 分布もまた、仮想働の原理²²⁾を用いてこれと等価な節点荷重 $\{\Delta P\}$ に変換され、次のようになる。

$$\begin{aligned} \{\Delta P\} &= \{\Delta P_s\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ [C_s^{-1}]^T \left[\int_{Re} \Omega_{si} [f_s]^T [1 \ x \ y \ xy] dx dy [C_e^{-1}] \{\Delta \tau_{bi}\} \right] \right\} \\ &= \sum_{i=1}^n \left\{ [C_s^{-1}]^T [Z_{fi}] [C_e^{-1}] \{\Delta \sigma_{si}\} \right\} \end{aligned} \quad (6-69)$$

但し、 $[C_e] = [C_s]$ で $[C_s]$ は前出， $[f_s]$ ：(6-54)式参照。

上式中の 線付きの記号 $\sum$ もまた、単なる summation ではなく、節点すべり変位 S_i の並び順って assemble することを示している。

また、上式中の係数マトリックス $[Z_{r,i}]$ は、次式で表される。

$$[Z_{r,i}] = \begin{bmatrix} A_E & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{4}{3} a_x^3 a_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} a_x a_y^3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{9} a_x^3 a_y^3 \end{bmatrix} \quad (6-70)$$

但し、 a_x , a_y : 矩形要素の x および y 方向の $1/2$ 辺長, A_E : 矩形要素の面積 ($A_E = 4a_x a_y$).

6. 4 数値計算例とその考察

本章の序論でも既に触れたように、我が国の建築構造物における P C 床スラブの使用頻度は、欧米に比べるとまだ格段に少ないとは云え、その使用例が確実に増えつつあるのもまた事実である。ただ、欧米の場合と事情が大きく異なるのは、欧米では“フラットタイプの P C スラブ”の使用が殆どであるのに対して、我が国では“周辺梁を有する P C 床スラブ”がその主流を占めていると云う点である。このことは、日本建築学会 P C (P R C) 設計施工規準 (指針) ・同解説^{23), 24)}に記載されている計算例 (但し、床スラブに関する明確な条項は未だ規定されていない) が、P C スラブのうちでも設計の最も容易な周辺梁を有するスラブ (事実、我が国で通常行われているように、周辺梁の変形を考慮せぬ場合、その設計計算は極めて容易となる) を対象にしたものであり、フラットタイプの P C スラブについては、何ら示されていないことを見ても明らかである。

しかしながら、従来我が国においては、耐震壁の多い倉庫建築等に稀に用いられるに過ぎなかった“P C フラットスラブ構造”も、近年では建物の竣工の前・後を問わぬ「間仕切り変更の自由度」が再認識され、スーパーマーケットのような商業用建物や事務所建築に最適の構造形式として使用例も増えつつあり^{4) ~ 6)}、その需要は今後さらに増大することが予想される。

以上に概述した我が国における P C 床板の設計環境の現状を勘案し、本章では、「フラットタイプの P C スラブを対象とした“より合理的な設計規準”を選定するための一参考資料に資すること」を意図して、本解析法によるフラットタイプのモデル P C スラブ数種の数値計算例を掲げ、この種のスラブの力学性状について若干の検討・考察を試みることにする。

6.4.1 解析モデルスラブの設定

図6-8に、ここで取り上げる全モデルスラブ構造に共通の概要図と材料の仮定材料性状を、また、表6-1には、3類全6種の各解析モデルの記号とスラブ厚、およびスラブ各部位（図6-9参照）のテンドン配分の詳細を一覧して掲げる。これらの図表からも知り得るように、ここで設定されたモデルスラブは全て、個々のパネルが8m×8m（柱心スパン）の正方形パネル9個からなる「柱のみに支持された連続アンボンドPCスラブ^{註1)}」である。但し、この構造の解析に際しては、全ての柱は、図6-8の(b)に示すように上・下端におい

[SLAB]

Concrete:

$$E_c = 320000.0 \text{ kgf/cm}^2, \nu = 0.2,$$

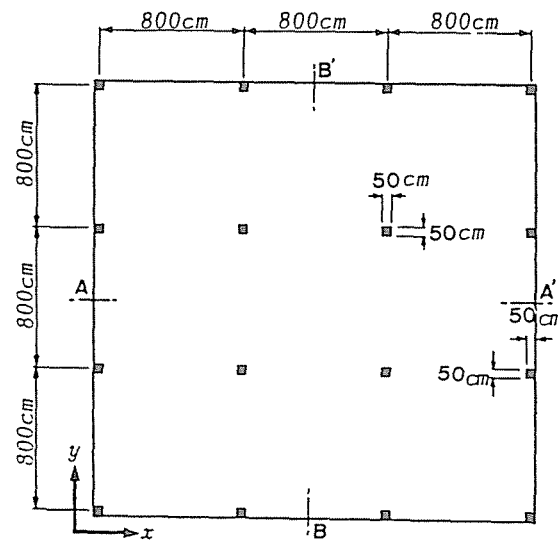
Tendon:

$$SWPR-7B, \phi 15.2 \text{ mm}, @A_s = 1.875 \text{ cm}^2,$$

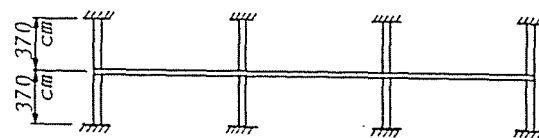
$$E_s = 2000000.0 \text{ kgf/cm}^2$$

[COLUMN]

$$\text{Flexural Rigidity: } EI = 4.1 \times 10^{11} \text{ kgf} \cdot \text{cm}^2$$



(a) 平面図



(b) 立面図

注) x 及び y 方向の各テンドンのPC力は、それぞれA及びB側を緊張端とする片引きで導入されるものとする。

図6-8 解析モデルスラブの構造の概要と材料の仮定性状

てのみ固定された状態でスラブを支持しているものと仮定し、スラブからのモーメントの伝達による、柱自身の曲げ変形を考慮するものとする。

以上に設定したように、柱頭部にドロップパネルを有するフラットスラブではなく、フラットプレートの主たる計算対象に選んだ理由は、欧米では今日、柱頭まわりの剪断に対する限界断面の増大を、ドロップパネルによってではなく、型鋼等で作製されたシャーヘッドを柱頭近傍のスラブ内部に埋め込むことによって達成するフラットプレートが多用されており³⁾、また、この種のスラブの力学性状を調べるには、ドロップパネルを持たないフラットプレートの方が単純で明解であるからである。従って、ここで取り上げるモデルP Cフラットプレートを実際の建物に採用する際には、シャーヘッドの使用が前提となるが、本解析に当っては簡単のためシャーヘッドの剛性は考慮せぬこととする。

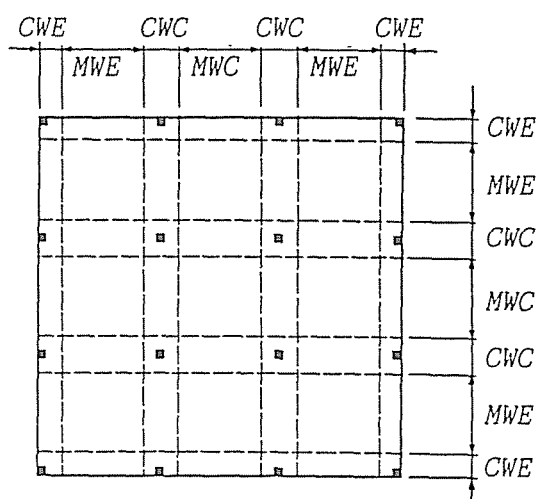
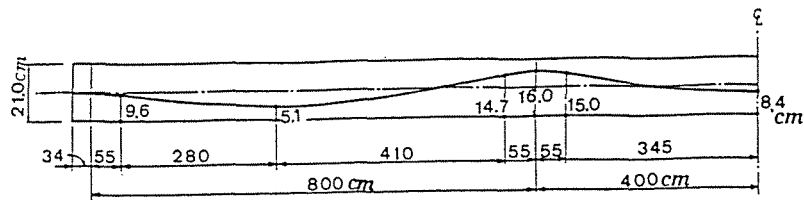


図6-9 テンドン配分のためのスラブ部位記号

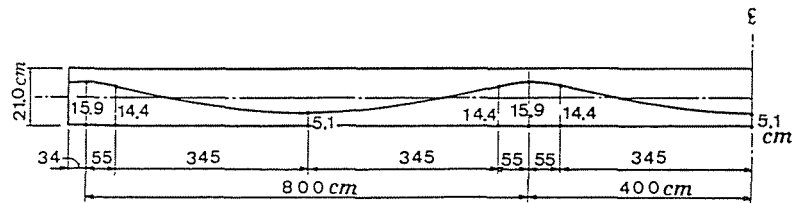
表 1 モデルP Cスラブの一スパン当りの部位別寸度と配置テンドン数、およびスラブ厚一覧

スラ ブの 類 別	ス ラ ブ 記 号	ス ラ ブ 部 位 別 テ ン ド ン 配 分 詳 細								ス ラ ブ 厚 (t)	備 考
		CWE		MWE		CWC		MWC			
		テ ン ド ン 配 置 本 数	巾 (Be)	テ ン ド ン 配 置 本 数	巾	テ ン ド ン 配 置 本 数	巾 (B)	テ ン ド ン 配 置 本 数	巾		
I	FLP-Eu	7 本	89 cm	11 本	690 cm	14 本	110 cm	11 本	690 cm	21 cm	3体共図10(a)のテンドンプロ フィールを有するフラットプ レート
	FLP-Am	9 本	234 cm	7 本	400 cm	18 本	400 cm	7 本	400 cm	21 cm	
	FLP-Sp	8 本	106 cm	10 本	656 cm	15 本	144 cm	10 本	656 cm	21 cm	
II	FLP-NB	5 本	89 cm	8 本	690 cm	10 本	110 cm	8 本	690 cm	21 cm	2体共図10(b)のテンドンプロ フィールを有するフラットプ レート
	FLP-WB	5 本	89 cm	8 本	690 cm	10 本	110 cm	8 本	690 cm	21 cm	
III	FLS-FB	4 本	89 cm	11 本	690 cm	7 本	110 cm	11 本	690 cm	21 cm (取手=40cm)	厚肉部長手方向は図10(c)のプロ フィール、他は図8(a)のプロフィ ールをもつ変厚フラットスラブ

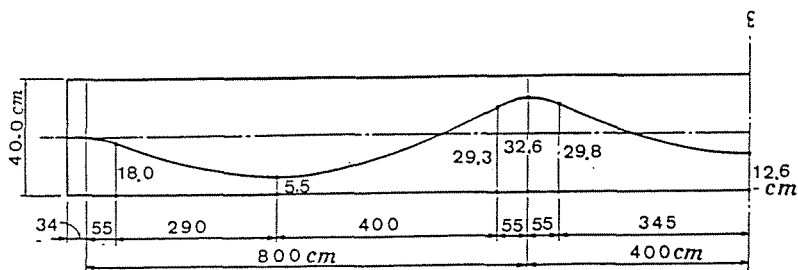
注) テンドンは全て各スラブ部位ごとに等間隔で配置されるものとする。また、スラブの部位別記号CWE, MWE, CWC, MWCについては、図6-9を参照のこと。



(a) 第Ⅰ類のスラブのテンドンプロフィール



(b) 第Ⅱ類のスラブのテンドンプロフィール



(c) 第Ⅲ類のスラブの厚肉部長手方向のテンドンプロフィール

図6-10 解析モデルのテンドンプロフィール詳細

6.4.2 計算結果とその考察

(1) 第Ⅰ類のモデルP Cフラットプレート

第Ⅰ類のモデルスラブ3種は全て、図6-10の(a)に示すように、 x 、 y 両方向とも同一のテンドンプロフィールを有している²²⁾。表1の中に既に掲げてあるが、このプロフィールを採用した場合に必要な「各スラブの個々のパネル(8m×8m)一スパン幅(8m)当りの(x 、 y 両方向とも)のテンドン配置本数」は、Load Balancing法を用いて容易に求められ25本となる。但し、これはコンクリートのクリープ等を考慮したP C力の有効率を0.85、テンドンの摩擦とアンカーロスによる有効率を0.96、即ち、全有効率を0.816として求めたものである。

第Ⅰ類のモデルスラブは、このテンドン配置本数の「スラブパネル内への配分方法の違い」が、緊張力導入時のスラブの力学性状に如何ような影響をおよぼすかを調べるために選定したものである。即ち、①スラブFLP-Euは、FIP指針²⁵⁾に倣ってテンドンの配置本数

を Column Line に集中的に配分したもので、②スラブFLP-Amは、ACI²⁶⁾ に準じて柱列帯 (Column Strip) に総本数の75%を配分し、残りをそれぞれの柱間帯 (Middle Strip) に配したものである。また、③スラブFLP-Spは、施工性向上の観点 (Column Lineに集中するテンダンの配置間隔を幾分かでも広げ得るように) から、Column Line 幅 Bを $B=0.18L$ (L : 柱心スパン) にとり、先のスラブ①のFLP-Euより幾分広く設定したものである。

図6-11は、無筋状態のスラブ (第II類も同じ) に、自重に相当するBalanced Load (504 kgf/m^2) が作用した場合の、(a)鉛直変位 w 、(b)曲げモーメント M_x 、および(c)ねじりモーメント M_{xy} の解析結果を図示したものである。言うまでもなく、ここで取り上げるモデルスラブは全て、この図6-11の“Balanced Loadによるスラブの変形応答”をキャンセルすべく設計されたものであるから、第I類のこれら3種のスラブの、テンダンの配分方法の善し悪しは、結果的に、「同図の(a)鉛直変位、(b)曲げモーメント M_x 、および(c)ねじりモーメント M_{xy} の各分布を、P C力の導入により、どの程度フラットな状態に戻すことが可能か」によって容易に評価し得ることになる。ただここで留意すべきは、「これらのスラブは全てプレストレスの全有効率0.816として設計されたものである」と言うことである。従って、実際のテンドン (SWPR 7B, $\phi 15.2\text{mm}$) 一本当りの導入P C力 18080kgf の全有効率倍に相当する緊張力、即ち、「緊張力 14735.2kgf が導入された場合の各スラブの応答」がその評価の判断基準となる。

図6-12, 6-13, 6-14は、スラブの自重作用後の各スラブFLP-Eu, FLP-Am, およびFLP-Spに、この性能評価のための緊張力 (14735.2kgf) が導入された時の、「摩擦によるP C力の損失を無視し得る完全アンボンドの場合の解析結果」を、(a) 鉛直変位 w 、(b) 膜力 N_x と(c) N_{xy} 、(d)モーメント M_x と(e) M_{xy} 、およびテンダンの(f) 応力 σ_{sx} と(g) 摩擦力 τ_{rx} (テンドン一本当りの付着力に相当し、 $\tau_{rx}=\tau_{bx}\pi\phi$) の各分布曲面で表示し比較 (但し、図6-13, 6-14については、(f), (g)は省略) したものである。

これらの各図の(a), (d), (e)を相互に比較すると明らかなように、所期の目的である“Load Balancing”の観点からすれば明らかに、ACIタイプのテンドン配分を有する図6-13のFLP-Amよりも、Column Line (幅 $B=110\text{cm}$) にバンド状に集中的にテンダンを配分するFIPタイプの図6-12のFLP-Euの方が優れており、さらにまた施工性を勘案し、FLP-EuよりもColumn Line幅を広く ($B=144\text{cm}$) とった図6-14のスラブFLP-Spの場合でも、FLP-Euと略同程度の性能が得られることを読み取ることができる。然しながら、これらの各図の(b)の膜力の分布状況を比較すると明らかなように、テンダンをColumn Line にバンド状に配

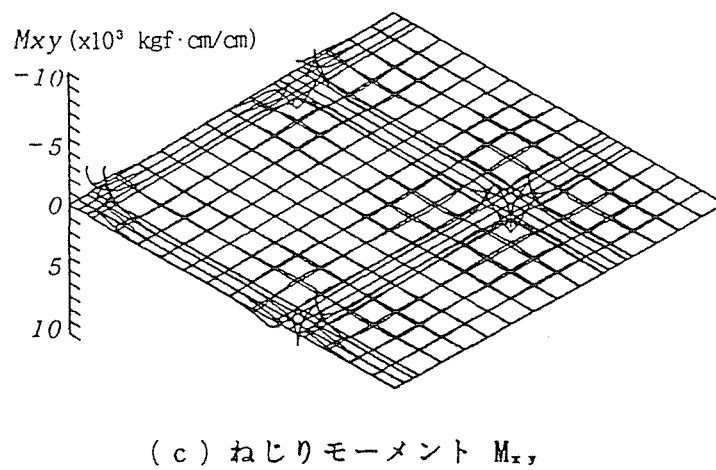
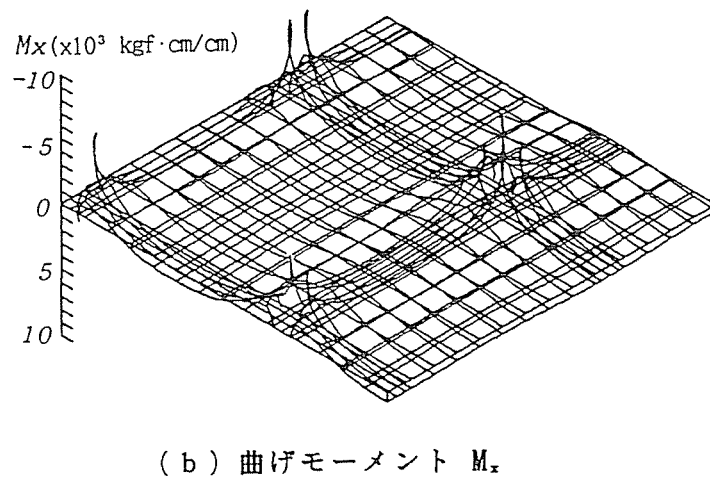
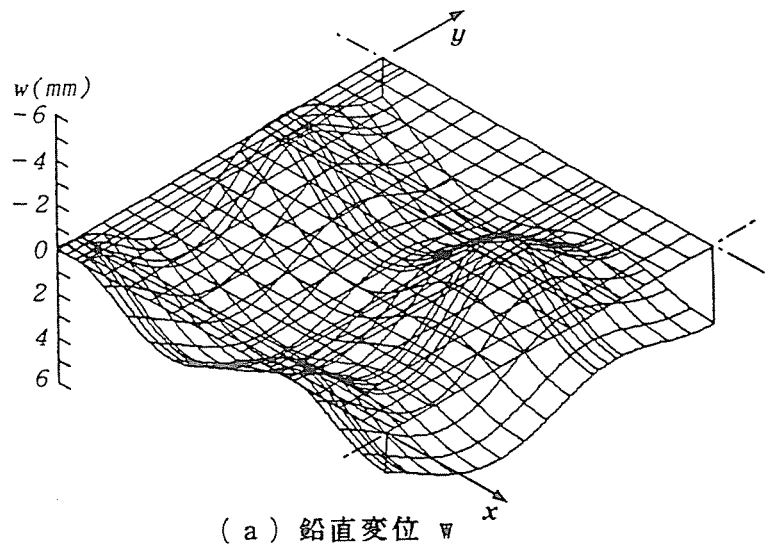


図6-11 無筋状態の第Ⅰ類（第Ⅱ類のFLP-NBも同じ）のスラブの自重による変形ならびに応力

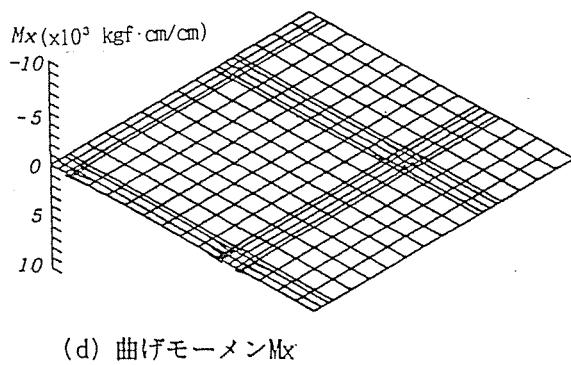
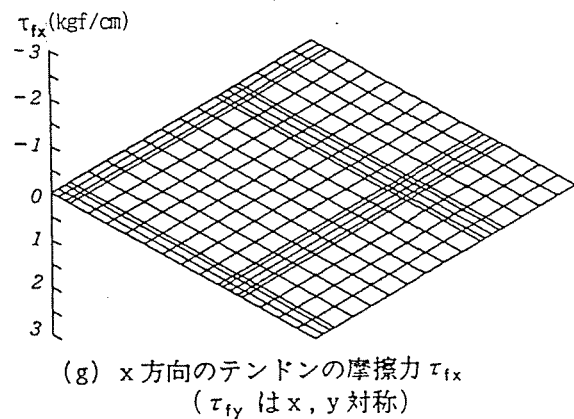
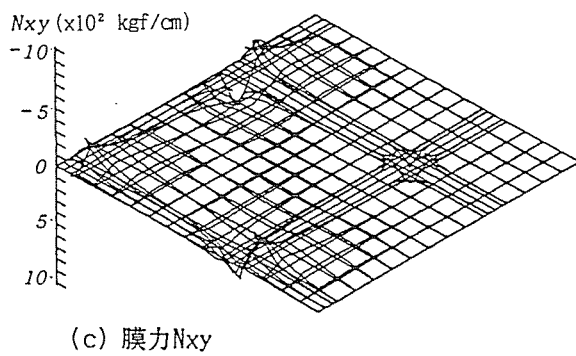
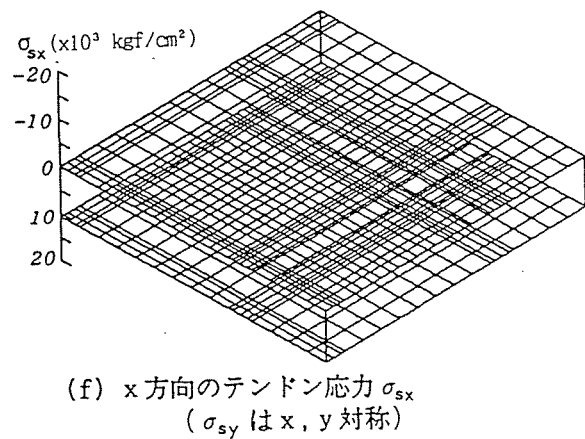
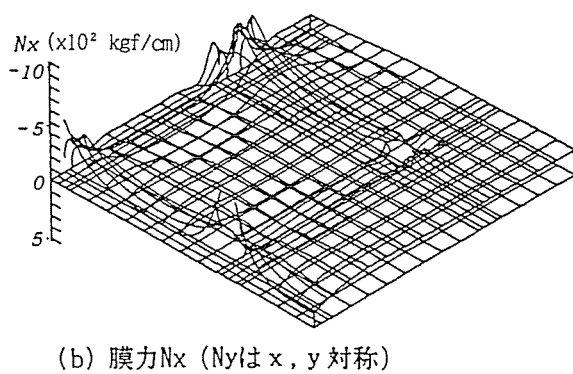
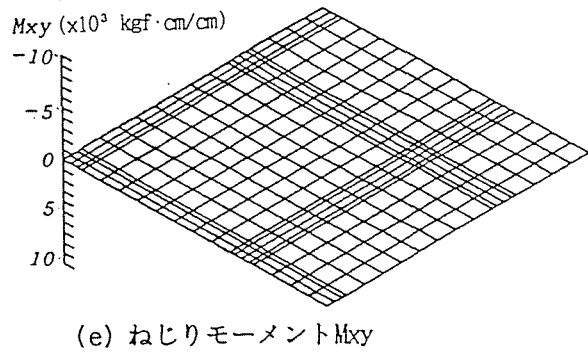
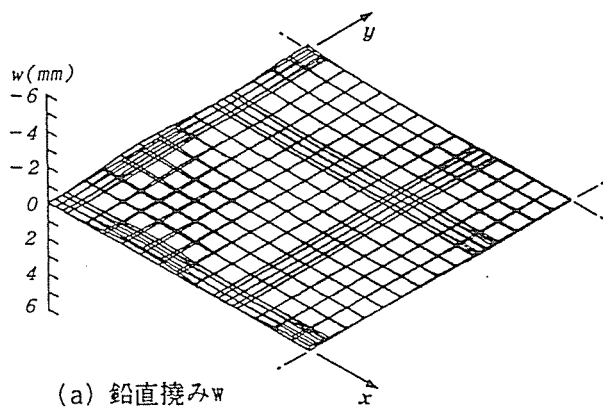
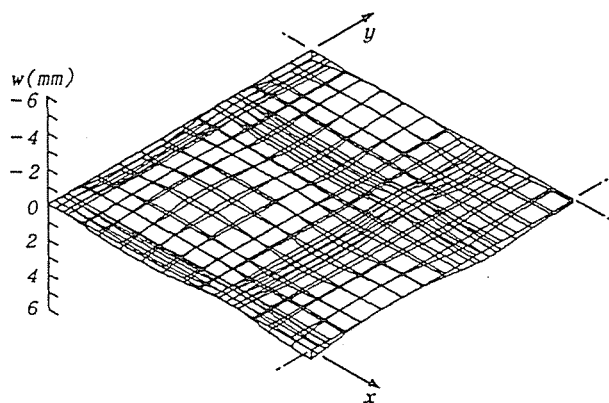
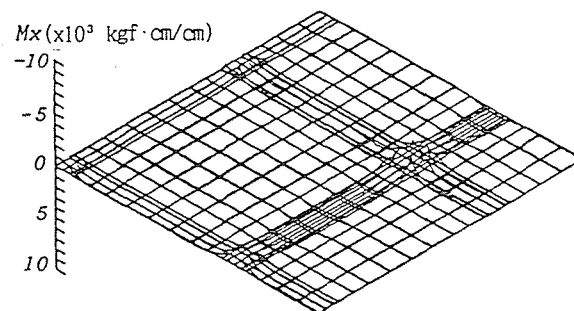


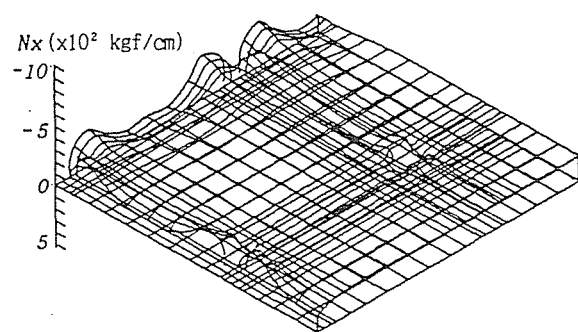
図6-12 緊張力 $P_s=14735.2\text{kgf}$ 時の第I類のスラブFLP-Euの解析結果



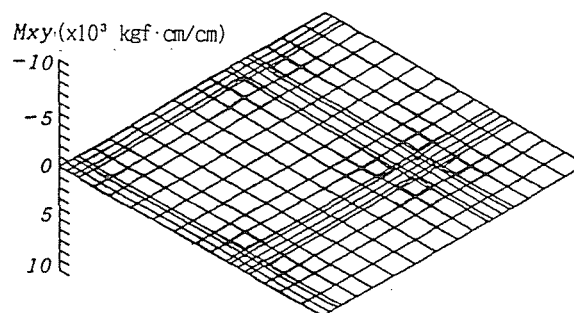
(a) 鉛直変位 w



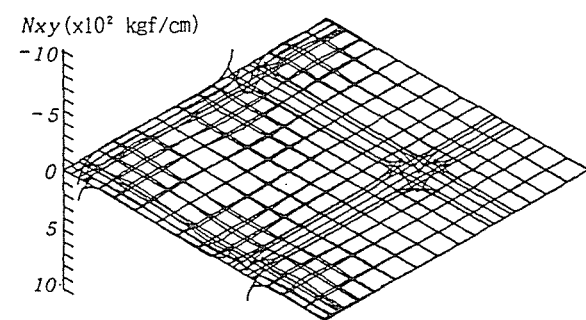
(d) 曲げモーメント M_x



(b) 膜力 N_x

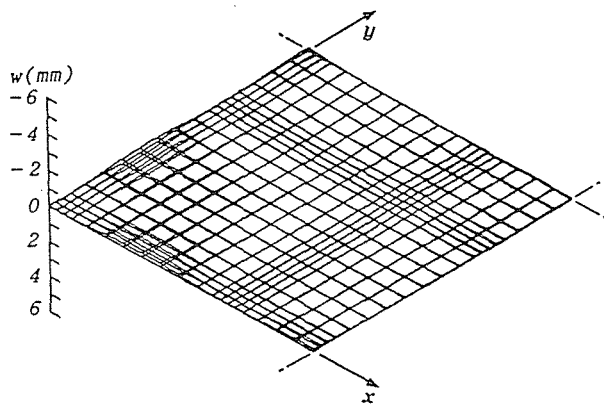


(e) ねじりモーメント M_{xy}

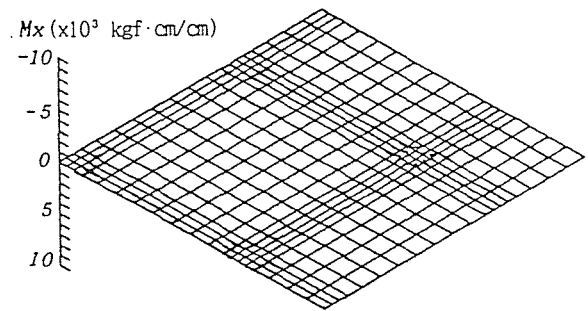


(c) 膜力 N_{xy}

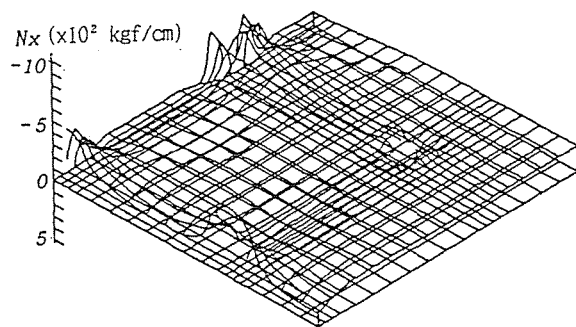
図6-13 緊張力 $P_s=14735.2\text{kgf}$ 時の第 I 類のスラブFLP-Amの解析結果



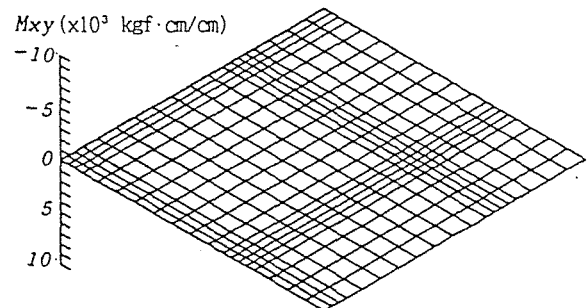
(a) 鉛直変位 w



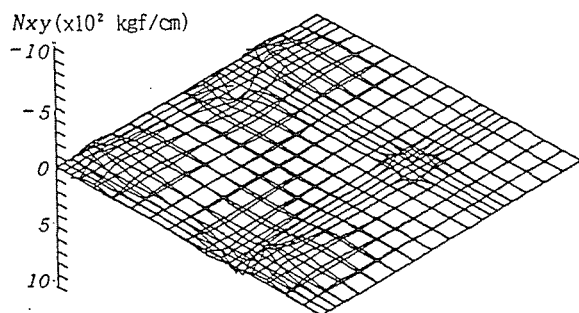
(d) 曲げモーメント M_x



(b) 膜力 N_x

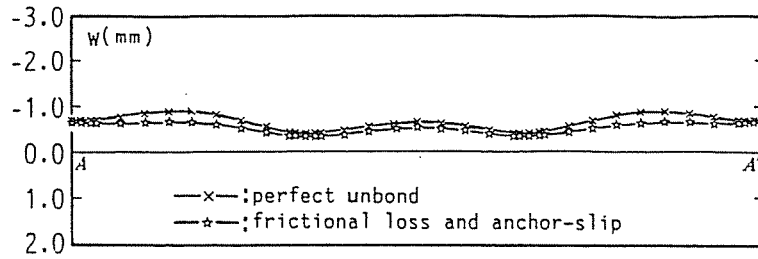


(e) ねじりモーメント M_{xy}

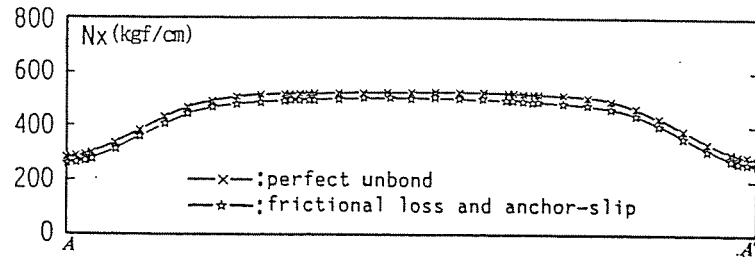


(c) 膜力 N_{xy}

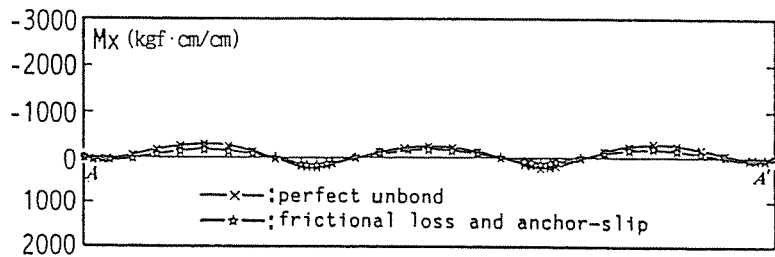
図6-14 緊張力 $P_s=14735.2\text{kgf}$ 時の第 I 類のスラブFLP-Spの解析結果



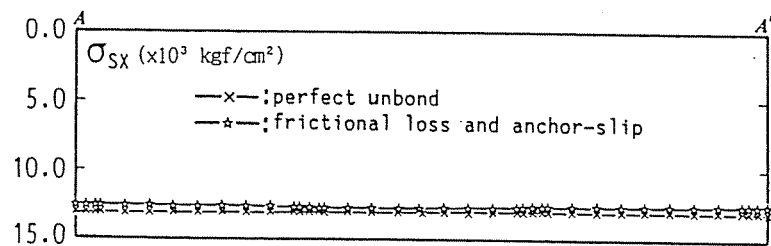
(a) スラブ中央線上の鉛直撓み w の比較



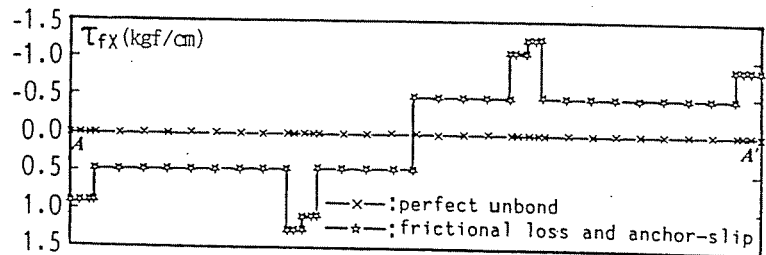
(b) スラブ中央線上の膜力 N_x の比較



(c) スラブ中央線上の曲げモーメント M_x の比較

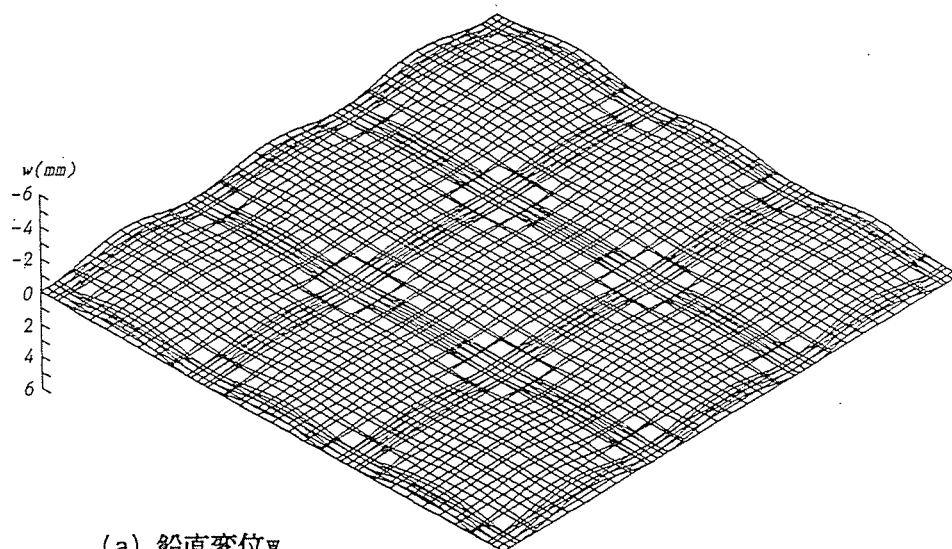


(d) スラブ中央線上の tendon 応力 σ_{sx} の比較

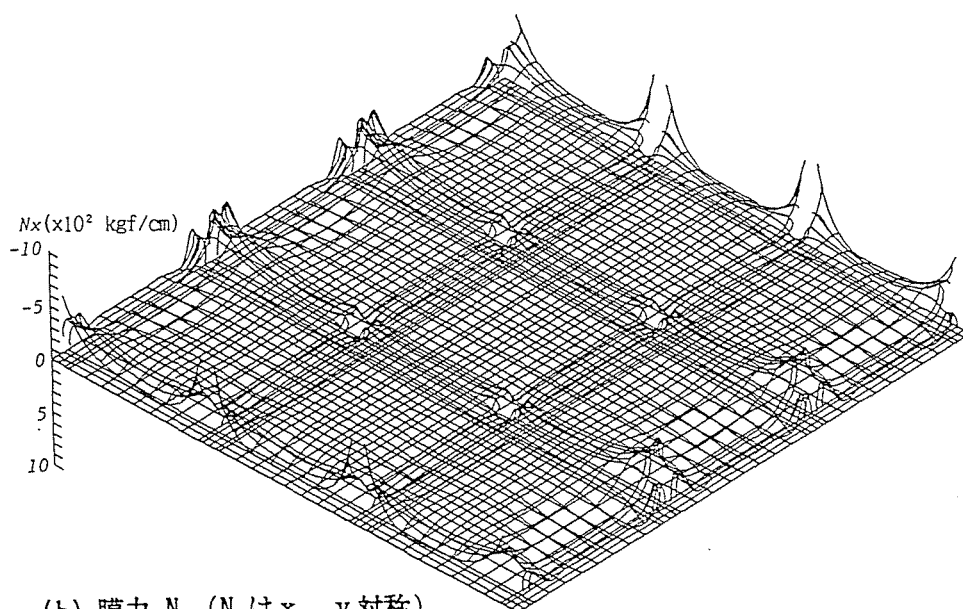


(e) スラブ中央線上の tendon 一本当たりの
摩擦力 τ_{fx} の比較

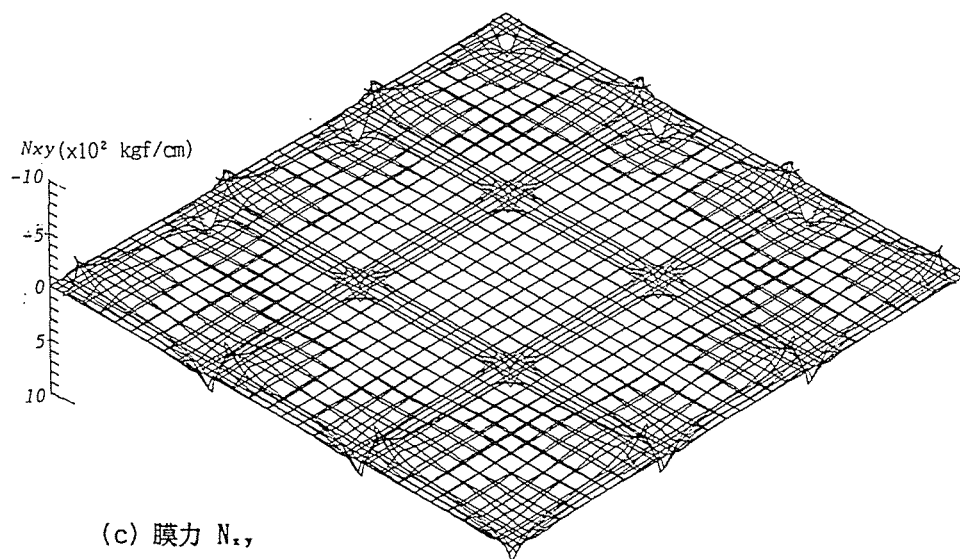
図6-15 摩擦等による P C 力の損失が、緊張力 $P_s=18080.0$ kgf 時のスラブ FLP-Eu の解析結果に及ぼす影響



(a) 鉛直変位 w



(b) 膜力 N_x (N_x は x , y 対称)



(c) 膜力 N_{xy}

図6-16 摩擦等によるPC力の損失を考慮した場合 ($P_s=18080.0\text{kgf}$ 時) の FLP-Euのスラブパネル全体に対する解析結果 (その1)

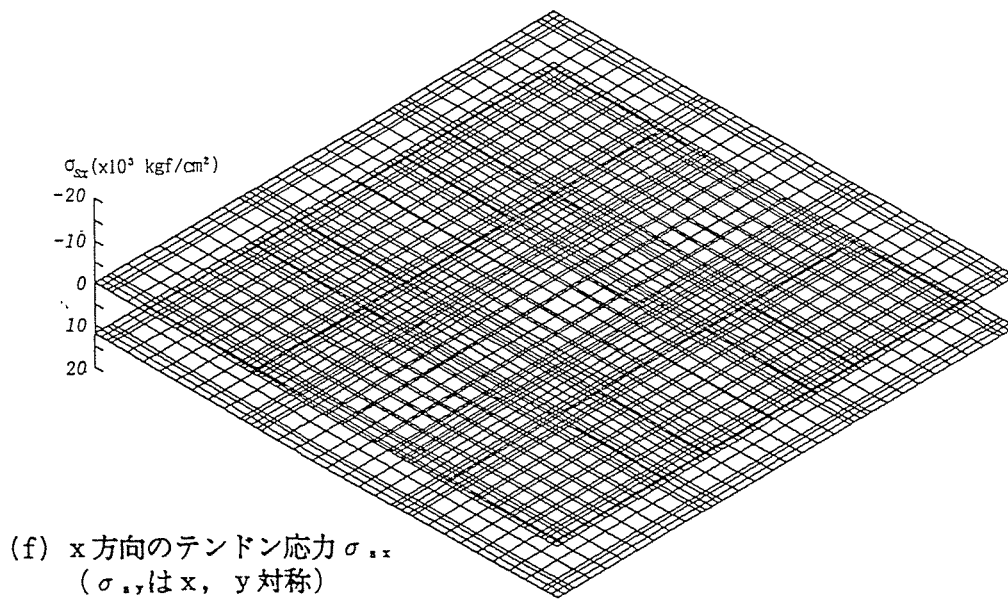
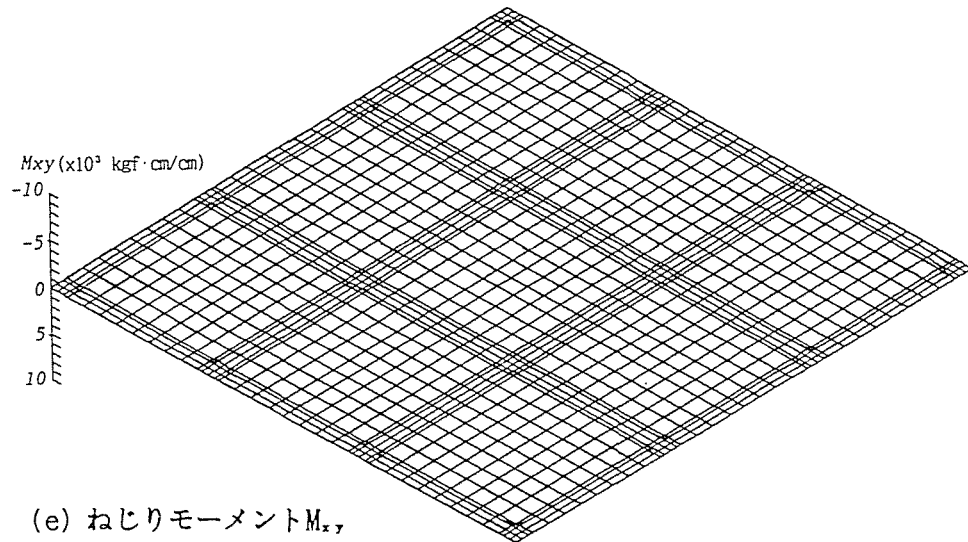
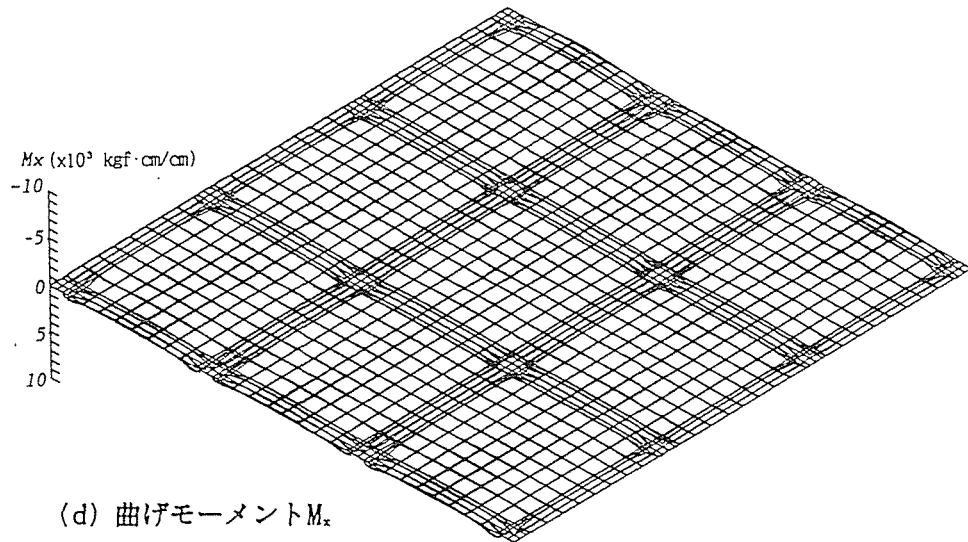


図6-16 摩擦等による P C 力の損失を考慮した場合 ($P_s=18080.0\text{kgf}$ 時) の FLP-Eu のスラブパネル全体に対する解析結果 (その 2)

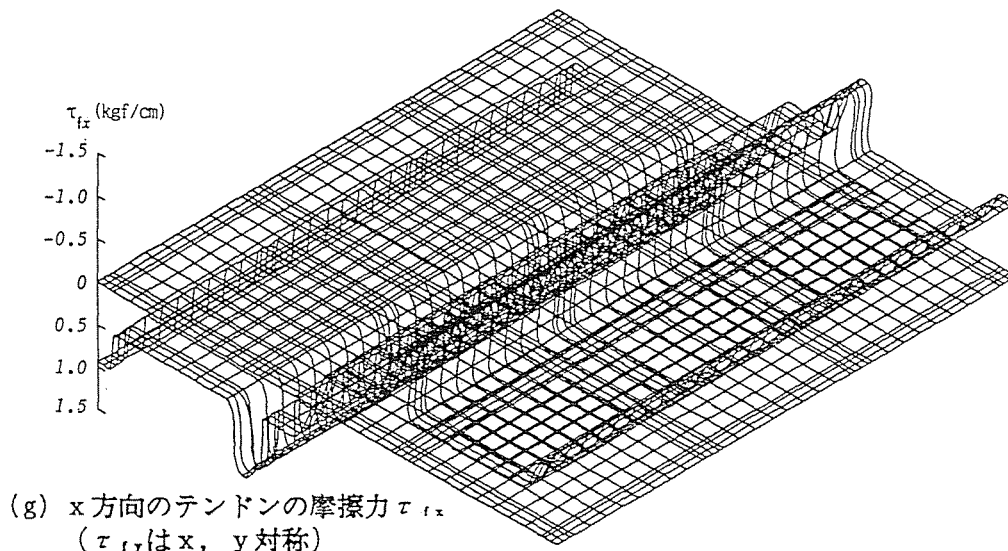


図6-16 摩擦等による P C 力の損失を考慮した場合 ($P_s=18080.0\text{kgf}$ 時) の FLP-Eu のスラブパネル全体に対する解析結果 (その 3)

分するスラブにあっては、外側のスラブパネルの柱の近傍に膜力が卓越し集中する傾向を示すことになるので、実際の設計に当っては、十分な配慮が要求されることになる。

図6-15は、これらのモデルスラブのうちのFLP-Euを例にとり、テンドンに施工時の実際の緊張力 18080kgf (一本当り) が導入されたときの解析結果を、スラブの主要線に沿う各分布曲線で図示したもので、同図中には、P C 力の摩擦による損失とアンカー時のセットロス (3mmを仮定) を、考慮した時と無視した場合の値を対比して掲げたもので、また、図6-16には参考のため、摩擦による損失とアンカーロスを考慮した場合の、(a)～(g)の計算結果を全スラブパネルに関する解析曲面で図示して掲げた。

周知のように、既往の板要素を用いた有限要素法によって、このような摩擦力等による P C 力の損失の影響を取り扱おうとすると、まず、①これらの損失を考慮した場合のテンドンの P C 力分布曲線を求めておき、次に、②その分布力を各要素の個々の節点ごとに、これと等価な上向きの荷重に置き換えると言う極めて面倒な手続きを踏まなければならない。しかし、本解析法では、テンドンの曲線形と摩擦係数、およびアンカー時のセットロスをデーターとして入力するだけで、これらの影響を自動的に考慮することが可能である。

以上、ここで取り扱った第 I 類のスラブの「一スパン幅当りのテンドン配置本数25本」は、欧・米の規準に基づいて設計される通常の配置本数 (例えば米国の設計例では、この程度のスラブの場合15～16本のテンドン本数が普通である⁴⁾) と比較すると可成り過大であり、實際上、FLP-Euのようなスラブでは、Column Lineでのテンドンの配置それ自体が

困難となる。このように、設計されるテンドンの配置本数に大きな差が生ずるのは、専ら必要とされるテンドンの最小被り厚の差がその原因である。例えば、FIPおよびACIの最小被り厚は、場合にもよるが、それぞれ2.5cmおよび $3/4in=1.9cm$ の各値が極く一般的に用いられている。これらの値と比較すると、日本建築学会の規準値3.5cmが如何に大きな値であるかが分かる。勿論、耐火・耐腐食性の観点からすれば、テンドンの被り厚は、厚いほど好ましいことは明らかであるが、これは、テンドンの被り厚が最小となる部位（それは高々テンドン曲線の停留点近傍の極く一部分に過ぎない）に、適当な措置を施すことによって容易に対処することが可能であるから、我が国におけるPCスラブの普及率を欧米なみに近づけるためには、「何らかの条件をつける等、テンドンの必要被り厚の軽減を適切に図ること」が是非とも必要なことのように思われる。

（２）第Ⅱ類のモデルPCフラットプレート

第Ⅱ類のモデルスラブ２種は、ともに全スラブパネルのテンドン曲線が同一である図6-10の(b)に示すようなテンドンプロフィールを有している。勿論、この種のスラブの場合、力学的には第Ⅰ類のスラブのプロフィールのように、「外側のパネルの自由端辺でのPC力の導入による偏心曲げモーメントの発生を避ける」のが理想的であることは云うまでもない。しかしながら、実際問題として、全スラブパネルに同一テンドン曲線の使用が可能ならば、設計時のみならず、施工時の手間を大幅に軽減することができることになる。例えば、この第Ⅱ類のスラブの各パネルの一方向一スパン幅当りのテンドン配置本数は18本であり、先の第Ⅰ類のスラブより7本少なくなっている。第Ⅱ類のスラブは、図6-10の(b)に示すテンドンプロフィールを採用した場合、PC力導入時に、外側のパネルの自由辺端に生ずる偏心曲げモーメントが、スラブの力学性状にどのような影響をおよぼすかを調べるために選定したものである。即ち、これら２種のスラブは、表1からも明らかなように

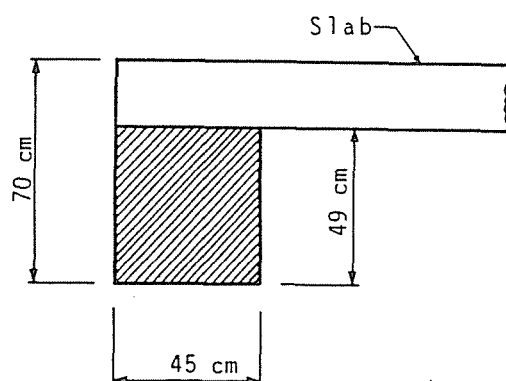
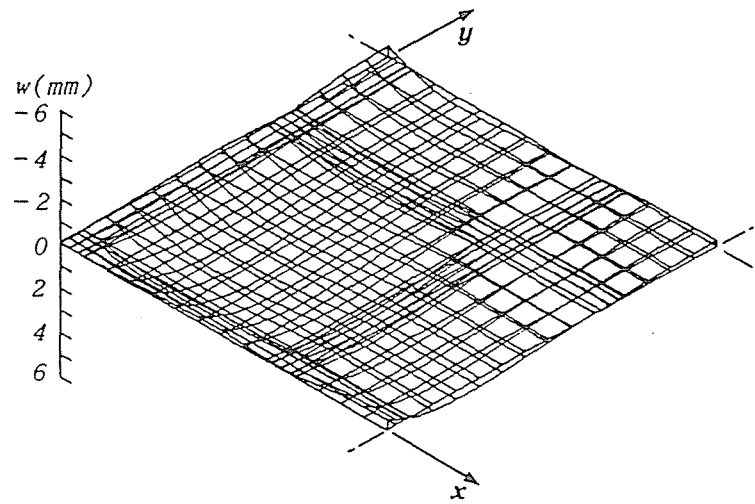
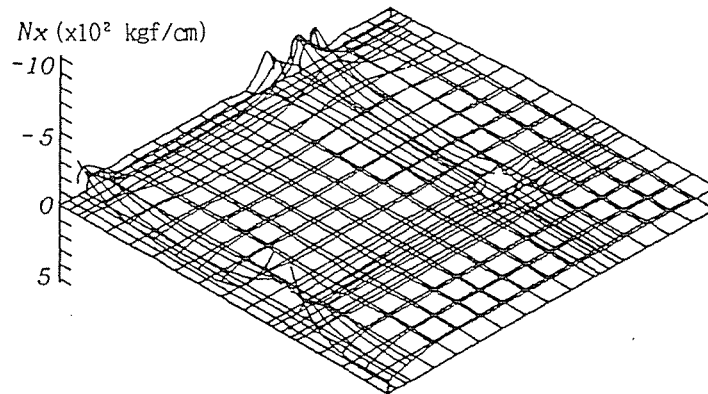


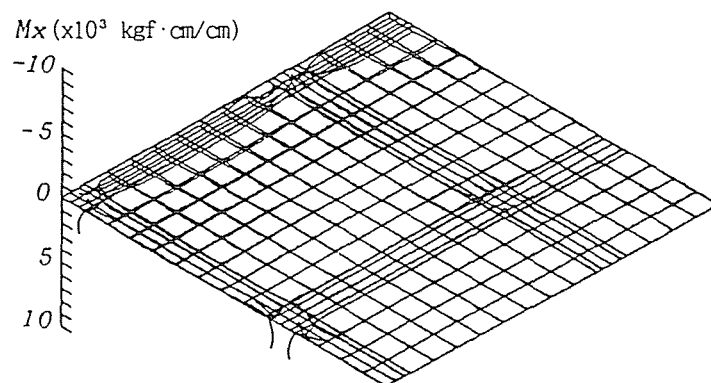
図6-17 スラブFLP-WBの外梁断面



(a) 鉛直変位 w

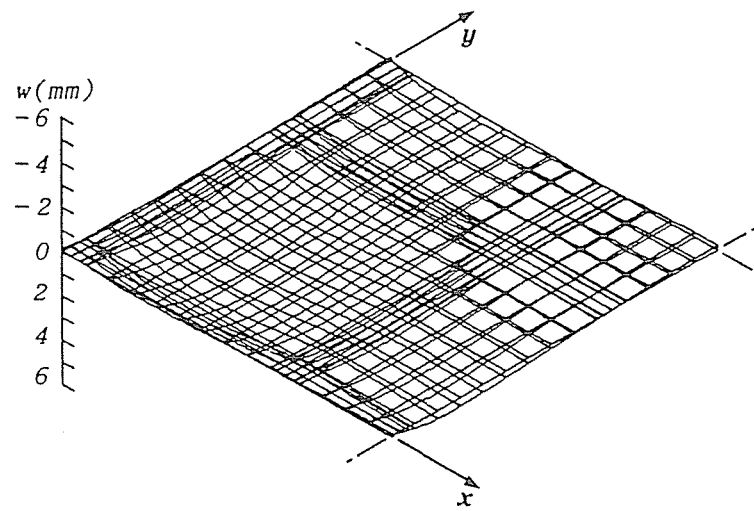


(b) 膜力 N_x

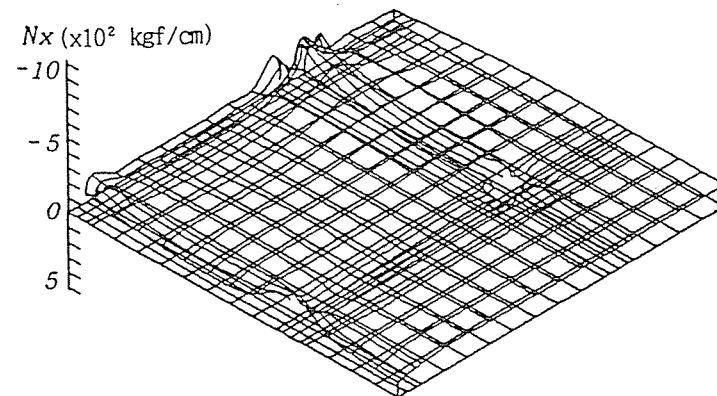


(c) 曲げモーメント M_x

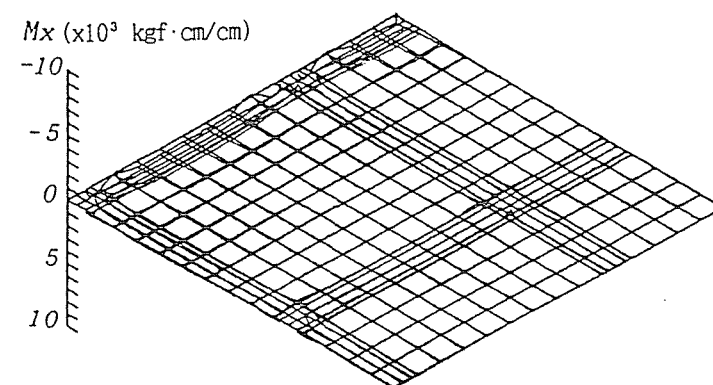
図6-18 緊張力 $P_s=14735.2\text{kgf}$ 時の第II類のスラブFLP-NBの解析結果



(a) 鉛直変位 w



(b) 膜力 N_x



(c) 曲げモーメント M_x

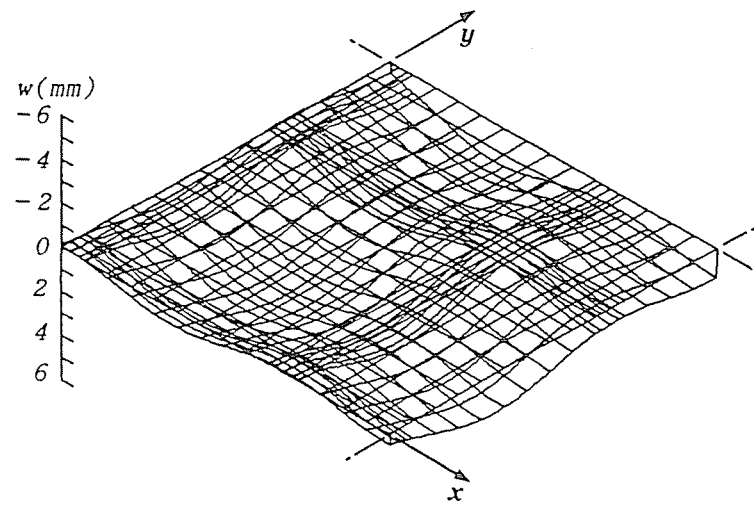
図6-19 緊張力 $P_s=14735.2\text{kgf}$ 時の第II類のスラブFLP-WBの解析結果

スラブ自身の構造は全く同一であるが、①FLP-NBは、第Ⅰ類のスラブと同様、柱のみに支持されており、②FLP-WBは、図6-17に示すように、先のスラブFLP-NBに加えて、自由辺に沿って図中にハッチング表示した断面の外梁を追加したものである。周知のように、このFLP-WBのような外梁を有するタイプのスラブは、力学的に十分な検討がなされないまま、我が国においてフラットスラブ構造を使用する際、しばしば採用されているものである。

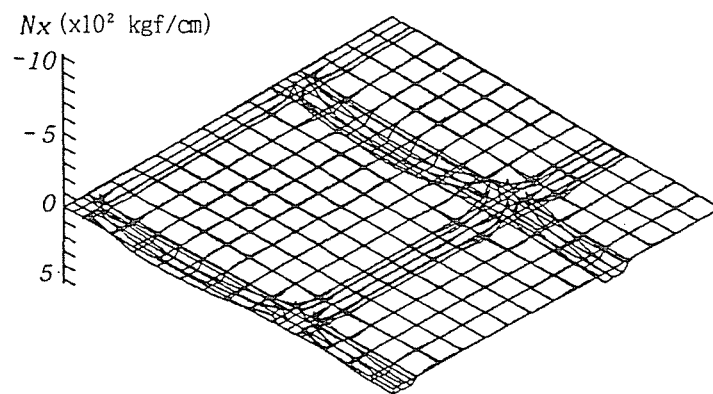
図6-18と6-19は、自重作用後に、先に述べたスラブ性能評価のための緊張力14735.2kgが導入されたときの、これら第Ⅱ類のスラブFLP-NBとFLP-WBの完全アンボンドの場合の解析結果を、(a)鉛直変位 w 、(b)膜力 N_x 、(c)曲げモーメント M_x について、それぞれ比較し図示したものである。当然のことながら、この両スラブの構造性能の善し悪しもまた、「図(a)の鉛直変位 w と(c)の曲げモーメント M_x の分布曲面を、どの程度フラットな状態に近づけ得るか？」によって判定されることになる。これらの両図と先の第Ⅰ類の図6-12～6-14の対応する各図を相互に比較すると、この第Ⅱ類のスラブの性能は、両者とも第Ⅰ類のスラブより格段に劣っていることが明白である。しかしながら、このスラブFLP-NBとFLP-WBの解析結果を対比してみると、外梁の追加によるスラブの鉛直変位曲面の劇的な改善効果は認められぬが、外梁付きのFLP-WBでは、外梁なしのFLP-NBの場合にみられる、自由辺に接する外柱近傍の曲げモーメントの集中現象が著しく緩和されており、また、追加した外梁に流れる膜力 N_x の量もさほど大きなものではなく、外梁を追加することにより、スラブの性能は、応力的には十分満足し得る程度に改善し得ることが分かる。ただ、“厳密な撓み制御”と云う観点からすれば、応力的には殆ど問題のないこの第Ⅱ類のスラブFLP-WBの場合でも、既にみたように、第Ⅰ類のスラブに対するその劣性は明白であり、純力学的には「この第Ⅱ類のスラブのようなテンドンプロフィールは使用すべきではない」と言う結論になる。しかし、実用的な見地からすれば、第Ⅰ類のスラブのそれと比較すると、格段に劣っている第Ⅱ類のスラブFLP-WBの変位曲面も、Balanced Load（スラブ自重）作用時の先の図6-11の(a)と比較してみると、「スラブの鉛直変位は十分に制御されている」と見做すことができるように思われる。また、この種のスラブは、「テンドンの総配置本数が、第Ⅰ類のスラブよりも遥かに少なく済む」と言う利点を有していることなどを合わせ考えると、外梁付きのFLP-WBタイプのスラブは、「十分実用性に富むP Cスラブ形式である」と言うことができよう。

(3) 第Ⅲ類のモデルP Cフラットスラブ

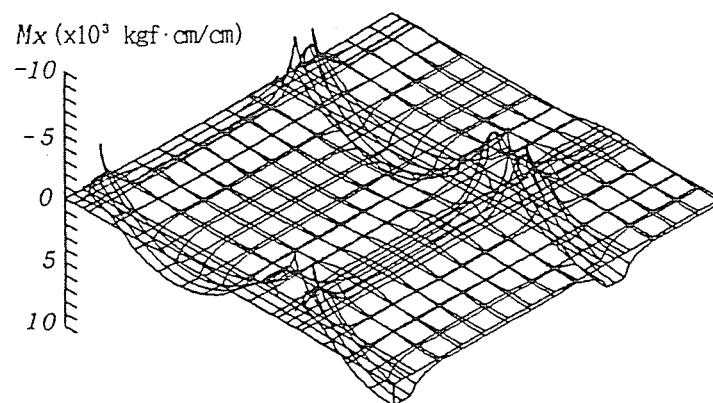
フラットプレートのColumn Line近傍部分をフラットビーム状に厚くした“変厚フラッ



(a) 鉛直変位 w

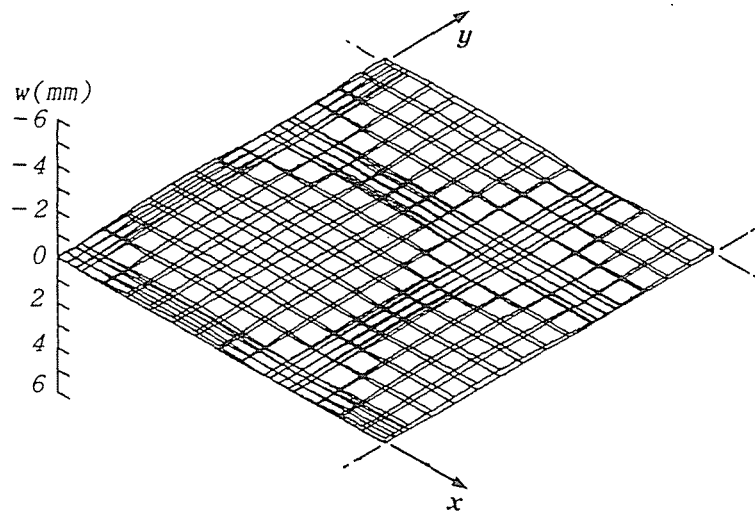


(b) 膜力 N_x

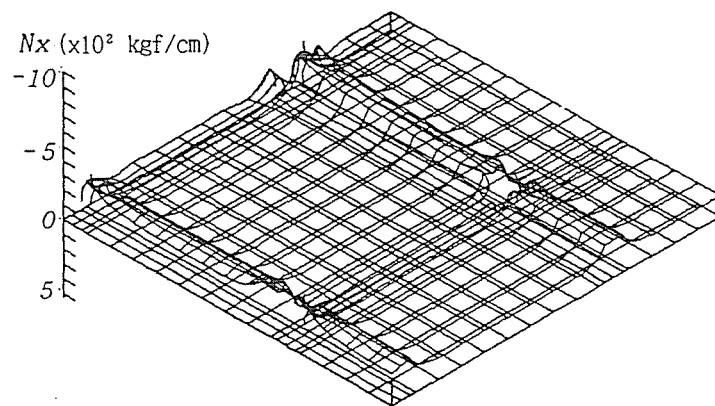


(c) 曲げモーメント M_x

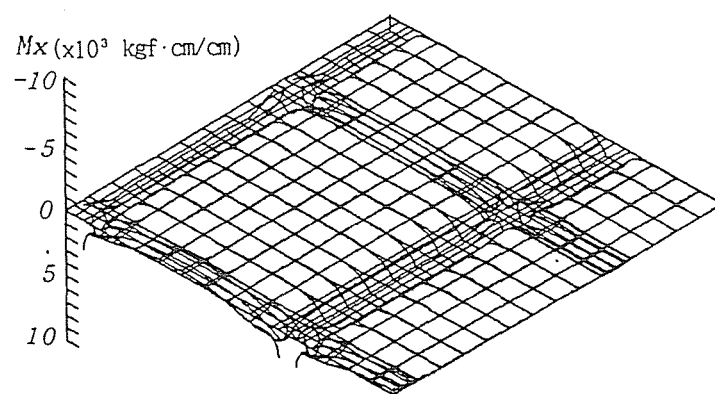
図6-20 無筋状態の第Ⅲ類のスラブFLS-FBの自重による変形ならびに応力



(a) 鉛直変位 w



(b) 膜力 N_x



(c) 曲げモーメント M_x

図6-21 緊張力 $P_s=14735.2\text{kgf}$ 時の第Ⅲ類のスラブFLS-FBの解析結果

トスラブ”は、柱頭の周囲のみにドロップパネルを有する通常の“フラットスラブ”とは異なり、単に「柱頭まわりの剪断に対する限界断面の増大をもたらす」だけでなく、「厚肉部分の長手方向に配置されるテンドン曲線の、設定可能なライズ高を増大させ得る」ことになり、結果として、この部分の配置テンドン本数を少なくすることができるという利点を具備することになる。

変厚P Cフラットスラブの有効性を例示するために選定されたこの第Ⅲ類のFLS-FBは、表1に示すように、先の第ⅠのスラブFLP-EuのColumn Lineに沿う幅110cmの部分のみを、スラブ厚40cmを持つフラットビーム状の厚肉部に変更し、更に、この厚肉部分の長手方向のテンドンプロフィール（図6-10の(c)参照）と配分本数を設定し直した（他は第Ⅰ類のスラブFLP-Euと同一）ものである。

図6-20には、無筋状態のこのスラブに自重のみが作用した場合の計算結果を示したが、この図(a)の鉛直変位曲面を、前掲の図6-11のフラットプレートのそれと比較すると、フラットビームによるスラブの剛性の改善の効果を、明瞭に読み取ることができる。また、同図(b)からも知り得るように、面内方向の外力が作用していないにも拘わらず、このスラブFLP-FBに膜力が生ずるのは、厚肉部と薄肉部分のスラブ厚の差に起因するスラブ中央面の偏心（スラブの上面をフラットな連続した面として取り扱っているため）がその原因である。

図6-21は、「スラブの自重」と「スラブ性能評価のための緊張力14735.2kgf」が同時に作用したときの、摩擦作用によるP C力の損失を無視した場合の解析結果を掲げたものである。この変厚フラットスラブの場合、自由辺に垂直な方向のテンドンによる偏心曲げモーメントが生ずるにも拘わらず、全体的には、極めて良好な力学性能を有していることを知る。加えて、この種のスラブは、水平方向の荷重に対する柱－スラブシステムとしての“剛性の著しい改善”に寄与することになるから²⁷⁾、我が国のような地震多発国においては、このタイプのフラットスラブの利用価値は極めて大きいとすることができる。

6. 5 本章のまとめ

第6章では、テンドンとコンクリートの間に付着すべりを許し、コンクリート部分には法線保持を仮定した場合の“曲線テンドンを有するP C床板の曲げ”について論じた。

本章の内容を要約して列挙すると以下のようになる。

(1) 解析に当たっての基本仮定事項を明示し、テンドンが直交する x , y 方向にそれぞれ滑らかな曲線を描いて配置されている場合の、微小変形理論による P C 床板のための全ポテンシャル・エネルギー汎関数を求め、更にこれを用いて、従来明らかにされていなかった「テンドンの付着すべりを考慮した場合の P C 床板の基礎微分方程式」を導いた。

(2) 前項の理論に基づき、この問題を、①テンドンの配置方向が、直交する x , y 2 方向のみならず任意の方向を有する場合にも対処できるように、さらに、②板厚がドロップパネル状に突然変化する「変厚床板」をも矛盾なく取り扱い得るように拡張して、有限要素法への定式化を図り、より適用性の広い“新しい P C 床板要素”の開発を行った。

(3) テンドンの緊張作業時に生ずる「テンドンとコンクリート間の摩擦」、及び定着時の「アンカースリップによるセットロス」が、P C 床板の変形・応力におよぼす影響を考慮するため、「P C 梁のために展開した第 5 章・第 4 節の基本手法」を P C 床板の問題にも適用可能なように拡張・発展させた。

(4) 本章で展開した P C 床板のための有限要素解析法を用い、我が国では、その設計環境が殆ど未整備の状態にある“フラットタイプの P C スラブ”を対象にして、数種のモデルスラブの数値計算例を掲げ、更に、若干の検討・考察を行って次のような結論を得た。

即ち、①テンドンのスラブ内配分の方法は、ACI 方式よりも FIP 方式の方が優れていること、②平面計画における「間仕切りの自由性」等、優れた利用価値を有するフラットタイプの P C スラブの普及を促進するには、テンドンの必要最小被り厚の軽減を許す、何らかの緩和措置が必要であること、③自由辺端に偏心曲げモーメントが生ずる「全パネル同一曲線形からなるテンドンプロファイルを有するタイプのスラブ」は、外梁を追加打設することにより、実用に供し得るスラブ性能を発揮させ得ること、および、④Column Line に沿ってフラットビーム状の厚肉部を有するタイプの“変厚フラットスラブ”の有効性、などを指摘し明らかにした。

注 1)： 勿論、我が国においては、このような柱のみに支持されるフラットプレート構造は、実構造としては成り立たず、「後打ちによって追加される耐震壁の存在が、実際の構造物として使用する場合の前提となる」ことは言うまでもない。

注 2)： 図6-10の(a)のテンドンプロフィールは、P C力の導入に伴うスラブ端部における偏心曲げモーメントの発生を避ける目的で、外側のパネルのスラブ自由辺端でのテンドン位置を、可能な限りスラブ中央面近傍に設置されている^{4)・28)}。一方、各スラブパネルは全てテンドンの緊張時に、先に設定した Balanced Loadに見合う分の“曲げ上げ力”を発揮しなければならない。したがって、各スラブパネルのテンドンの配分本数を個々のパネルごとに変化させずに、同一本数配置するものとすれば、結果として内側のパネルのテンドン曲線の“曲げ上げに寄与するライズ高”を外側のそれに等しく取る必要があり、内側のパネルのライズ高に余裕を残す（図6-10 (a)参照）ことになる。勿論、このようなテンドン配置の非効率を避けることは可能であり、例えば、1) 外側のパネルのスパンを内側のパネルのそれより短縮するとか、2) 内側のスラブパネルにおけるテンドンの配置本数を、外側より少なくする（但し、この場合には、内側のパネルより余分に配置されている外側のパネルのテンドンを、内側のパネルの内部にアンカーリングしなければならないため、その部分に比較的大きな膜力の擾乱の発生を覚悟しなければならない）、などして調整することができる。しかしながら、本計算例の目的は、「策定さるべき我が国の設計規準を、模索・選定する際の問題点を抽出すること」にあるから、ここでは敢えてこのテンドン配置を選定した。

第6章のAPPENDIX

[6A - I] (6-61)式と(6-62)式、および(6-64)式を構成する部分剛性マトリックス

$[\bar{K}_{ob}]$, $[\bar{K}_{bb}]$, $[\bar{K}_{bsi}]$ の各成分

(1) $[\bar{K}_{ob}]$ の構成成分

(6-61)式より、 $[\bar{K}_{ob}]$ は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} [\bar{K}_{ob}] &= [{}_1\bar{K}_{ob}] + \sum^n [{}_2\bar{K}_{ob}] \\ &= \iint_{Re} [b_o]^T \left\{ \left(\frac{t_i^2 - t_u^2}{2} \right) [D_c] \right\} [b_b] dx dy \\ &\quad + \sum^n \iint_{Re} A_{si}^* E_{si} h_{si} [b_o]^T [H_{si}]^T [H_{si}] [b_b] dx dy \quad (6A-1) \end{aligned}$$

上式中の $[{}_1\bar{K}_{ob}]$ において、

$$[F] = \left(\frac{t_i^2 - t_u^2}{2} \right) [D_c] \quad (6A-2)$$

と置くと、(6A-1)式中の $[{}_1\bar{K}_{ob}]$ の構成成分 ${}_1\bar{K}_{ob}^{ij}$ は、第4章のAppendixに示す $[\bar{K}_{ob}]$ に関する表示式(4A-6)がくそのまゝ適用できることになる。

従ってここでは、 $[{}_2\bar{K}_{ob}]$ のみが問題となる。次に示す3行3列の係数マトリックス記号 $[Y]$ を導入すると

$$[Y] = [H_{si}]^T [H_{si}] \quad (6A-3)$$

$[{}_2\bar{K}_{ob}]$ の構成成分 ${}_2\bar{K}_{ob}$ は次のようになる。

$$\begin{aligned} {}_2\bar{K}_{ob}^{11} &= {}_2\bar{K}_{ob}^{12} = {}_2\bar{K}_{ob}^{13} = {}_2\bar{K}_{ob}^{14} = {}_2\bar{K}_{ob}^{15} = {}_2\bar{K}_{ob}^{16} = {}_2\bar{K}_{ob}^{17} = {}_2\bar{K}_{ob}^{18} = {}_2\bar{K}_{ob}^{19} = {}_2\bar{K}_{ob}^{110} = 0 \\ {}_2\bar{K}_{ob}^{111} &= {}_2\bar{K}_{ob}^{112} = {}_2\bar{K}_{ob}^{21} = {}_2\bar{K}_{ob}^{22} = {}_2\bar{K}_{ob}^{23} = 0, \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{24} = -2A_{si}^* E_{si} Y_{11} \bar{H}_s, \\ {}_2\bar{K}_{ob}^{25} &= -2A_{si}^* E_{si} Y_{13} \bar{H}_s, \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{26} = -2A_{si}^* E_{si} Y_{12} \bar{H}_s, \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{27} = -6A_{si}^* E_{si} Y_{11} \bar{H}_s X \\ {}_2\bar{K}_{ob}^{28} &= -2A_{si}^* E_{si} (Y_{11} \bar{H}_s Y + 2Y_{13} \bar{H}_s X), \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{29} = -2A_{si}^* E_{si} (Y_{12} \bar{H}_s X + 2Y_{13} \bar{H}_s Y) \\ {}_2\bar{K}_{ob}^{210} &= -6A_{si}^* E_{si} Y_{12} \bar{H}_s Y, \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{211} = -6A_{si}^* E_{si} (Y_{11} \bar{H}_s XY + Y_{13} \bar{H}_s X^2), \\ {}_2\bar{K}_{ob}^{212} &= -6A_{si}^* E_{si} (Y_{12} \bar{H}_s XY + Y_{13} \bar{H}_s Y^2), \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{31} = {}_2\bar{K}_{ob}^{32} = {}_2\bar{K}_{ob}^{33} = 0, \\ {}_2\bar{K}_{ob}^{34} &= -2A_{si}^* E_{si} Y_{13} \bar{H}_s, \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{35} = -2A_{si}^* E_{si} Y_{33} \bar{H}_s, \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{36} = -2A_{si}^* E_{si} Y_{23} \bar{H}_s \\ {}_2\bar{K}_{ob}^{37} &= -6A_{si}^* E_{si} Y_{13} \bar{H}_s X, \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{38} = -2A_{si}^* E_{si} (Y_{13} \bar{H}_s Y + 2Y_{33} \bar{H}_s X), \\ {}_2\bar{K}_{ob}^{39} &= -2A_{si}^* E_{si} (Y_{23} \bar{H}_s X + 2Y_{33} \bar{H}_s Y), \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{310} = -6A_{si}^* E_{si} Y_{23} \bar{H}_s Y, \\ {}_2\bar{K}_{ob}^{311} &= -6A_{si}^* E_{si} (Y_{13} \bar{H}_s XY + Y_{33} \bar{H}_s X^2), \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{312} = -6A_{si}^* E_{si} (Y_{23} \bar{H}_s XY + Y_{33} \bar{H}_s Y^2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
{}_2\bar{K}_{ob}^{41} &= {}_2\bar{K}_{ob}^{42} = {}_2\bar{K}_{ob}^{43} = 0, \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{44} = -2A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{11}\bar{H}_s\bar{Y} + \bar{y}_{13}\bar{H}_s\bar{X}), \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{45} &= -2A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{13}\bar{H}_s\bar{Y} + \bar{y}_{33}\bar{H}_s\bar{X}), \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{46} = -2A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{12}\bar{H}_s\bar{Y} + \bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{X}), \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{47} &= -6A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{11}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y} + \bar{y}_{13}\bar{H}_s\bar{X}^2), \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{48} &= -2A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{11}\bar{H}_s\bar{Y}^2 + \bar{y}_{13}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y} + 2\bar{y}_{13}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y} + 2\bar{y}_{33}\bar{H}_s\bar{X}^2), \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{49} &= -2A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{12}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y} + \bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{X}^2 + 2\bar{y}_{13}\bar{H}_s\bar{Y}^2 + 2\bar{y}_{33}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y}), \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{410} &= -6A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{12}\bar{H}_s\bar{Y}^2 + \bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y}), \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{411} &= -6A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{11}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y}^2 + 2\bar{y}_{13}\bar{H}_s\bar{X}^2\bar{Y} + \bar{y}_{33}\bar{H}_s\bar{X}^3), \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{412} &= -6A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{12}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y}^2 + \bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{X}^2\bar{Y} + \bar{y}_{13}\bar{H}_s\bar{Y}^3 + \bar{y}_{33}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y}^2), \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{51} &= {}_2\bar{K}_{ob}^{52} = {}_2\bar{K}_{ob}^{53} = {}_2\bar{K}_{ob}^{54} = {}_2\bar{K}_{ob}^{55} = {}_2\bar{K}_{ob}^{56} = {}_2\bar{K}_{ob}^{57} = {}_2\bar{K}_{ob}^{58} = {}_2\bar{K}_{ob}^{59} = {}_2\bar{K}_{ob}^{510} = 0 \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{511} &= {}_2\bar{K}_{ob}^{512} = {}_2\bar{K}_{ob}^{61} = {}_2\bar{K}_{ob}^{62} = {}_2\bar{K}_{ob}^{63} = 0, \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{64} = -2A_{si}^* E_{si} \bar{y}_{13}\bar{H}_s, \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{65} &= -2A_{si}^* E_{si} \bar{y}_{33}\bar{H}_s, \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{66} = -2A_{si}^* E_{si} \bar{y}_{23}\bar{H}_s, \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{67} = -2A_{si}^* E_{si} \bar{y}_{13}\bar{H}_s\bar{X} \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{68} &= -2A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{13}\bar{H}_s\bar{Y} + 2\bar{y}_{33}\bar{H}_s\bar{X}), \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{69} = -2A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{X} + 2\bar{y}_{33}\bar{H}_s\bar{Y}) \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{610} &= -2A_{si}^* E_{si} \bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{Y}, \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{611} = -6A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{13}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y} + \bar{y}_{33}\bar{H}_s\bar{X}^2), \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{612} &= -6A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y} + \bar{y}_{33}\bar{H}_s\bar{Y}^2), \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{71} = {}_2\bar{K}_{ob}^{72} = {}_2\bar{K}_{ob}^{73} = 0, \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{74} &= -2A_{si}^* E_{si} \bar{y}_{12}\bar{H}_s, \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{75} = -2A_{si}^* E_{si} \bar{y}_{23}\bar{H}_s, \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{76} = -2A_{si}^* E_{si} \bar{y}_{22}\bar{H}_s, \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{77} &= -2A_{si}^* E_{si} \bar{y}_{12}\bar{H}_s\bar{X}, \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{78} = -2A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{12}\bar{H}_s\bar{Y} + 2\bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{X}), \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{79} &= -2A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{22}\bar{H}_s\bar{X} + 2\bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{Y}), \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{710} = -6A_{si}^* E_{si} \bar{y}_{22}\bar{H}_s\bar{Y}, \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{711} &= -6A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{12}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y} + \bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{X}^2), \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{712} = -6A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{22}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y} + \bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{Y}^2) \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{81} &= {}_2\bar{K}_{ob}^{82} = {}_2\bar{K}_{ob}^{83} = 0, \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{84} = -2A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{12}\bar{H}_s\bar{X} + \bar{y}_{13}\bar{H}_s\bar{Y}), \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{85} &= -2A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{X} + \bar{y}_{33}\bar{H}_s\bar{Y}), \quad {}_2\bar{K}_{ob}^{86} = -2A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{22}\bar{H}_s\bar{X} + \bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{Y}), \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{87} &= -6A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{12}\bar{H}_s\bar{X}^2 + \bar{y}_{13}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y}), \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{88} &= -2A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{12}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y} + \bar{y}_{13}\bar{H}_s\bar{Y}^2 + 2\bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{X}^2 + 2\bar{y}_{33}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y}), \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{89} &= -2A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{22}\bar{H}_s\bar{X}^2 + \bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y} + 2\bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y} + 2\bar{y}_{33}\bar{H}_s\bar{Y}^2), \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{810} &= -6A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{22}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y} + \bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{Y}^2), \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{811} &= -6A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{12}\bar{H}_s\bar{X}^2\bar{Y} + \bar{y}_{13}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y}^2 + \bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{X}^3 + \bar{y}_{33}\bar{H}_s\bar{X}^2\bar{Y}), \\
{}_2\bar{K}_{ob}^{812} &= -6A_{si}^* E_{si} (\bar{y}_{22}\bar{H}_s\bar{X}^2\bar{Y} + 2\bar{y}_{23}\bar{H}_s\bar{X}\bar{Y}^2 + \bar{y}_{33}\bar{H}_s\bar{Y}^3),
\end{aligned}
\tag{6A-4}$$

但し、 A_{si}^* : i 層のテンダンの換算断面積で $A_{si}^* = A_{si}(1 - E_c/E_{si})$, A_{si} : i 層のテンドン

の断面積, $E_{s,i}$: i 層のテンドンのヤング係数

ここに、(6A-4)式に含まれる各項は以下のである。

$$\left. \begin{aligned} \bar{H}_s &= \bar{a}_i A_E + \frac{4}{3} \bar{e}_i a_x^3 a_y + \frac{4}{3} \bar{f}_i a_x a_y^3, & \bar{H}_s X &= \frac{4}{3} \bar{b}_i a_x^3 a_y, & \bar{H}_s Y &= \frac{4}{3} \bar{c}_i a_x a_y^3, \\ \bar{H}_s X^2 &= \frac{4}{3} \bar{a}_i a_x^3 a_y + \frac{4}{5} \bar{e}_i a_x^5 a_y + \frac{4}{9} \bar{f}_i a_x^3 a_y^3, & \bar{H}_s Y^2 &= \frac{4}{3} \bar{a}_i a_x a_y^3 + \frac{4}{9} \bar{e}_i a_x^3 a_y^3 + \frac{4}{5} \bar{f}_i a_x a_y^5, \\ \bar{H}_s XY &= \frac{4}{9} \bar{d}_i a_x^3 a_y^3, & \bar{H}_s X^2 Y &= \frac{4}{9} \bar{c}_i a_x^3 a_y^3, & \bar{H}_s XY^2 &= \frac{4}{9} \bar{b}_i a_x^3 a_y^3, & \bar{H}_s X^3 &= \frac{4}{5} \bar{b}_i a_x^5 a_y, \\ \bar{H}_s Y^3 &= \frac{4}{5} \bar{c}_i a_x a_y^5, \end{aligned} \right\} \quad (6A-5)$$

但し、 $\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{c}_i, \bar{d}_i, \bar{e}_i, \bar{f}_i$: (6-39)式の但し書を参照のこと, a_x, a_y : 矩形要素の x, y 方向の $1/2$ 辺長, A_E : 矩形要素の要素面積。

(2) $[\bar{K}_{bb}]$ の構成成分

(6-62)式より、 $[\bar{K}_{bb}]$ は次のように書き直すことができる。

$$\begin{aligned} [\bar{K}_{bb}] &= [{}_1\bar{K}_{bb}] + \sum^n [{}_2\bar{K}_{bb}] \\ &= \iint_{Re} [b_b]^T \left\{ \left(\frac{t_l^3 + t_u^3}{3} \right) [D_c] \right\} [b_b] dx dy \\ &\quad + \sum^n \iint_{Re} A_{s,i}^* E_{s,i} h_{s,i}^2 [b_o]^T [H_{s,i}]^T [H_{s,i}] \{b_b\} dx dy \quad (6A-6) \end{aligned}$$

上式中の $[{}_1\bar{K}_{bb}]$ において、

$$[G] = \left(\frac{t_l^3 + t_u^3}{3} \right) [D_c] \quad (6A-7)$$

と置くと、(6A-6)式中の $[{}_1\bar{K}_{bb}]$ の構成成分 ${}_1\bar{K}_{bb}^{ij}$ は、第4章のAppendix [4A-I] に示す $[\bar{K}_{bb}]$ に関する表示式(4A-8)がそのまま適用できることになる。

対称マトリックスである $[{}_2\bar{K}_{bb}]$ の構成成分 ${}_2\bar{K}_{bb}$ は次のようになる。

$$\left. \begin{aligned} {}_2\bar{K}_{bb}^{11} &= {}_2\bar{K}_{bb}^{12} = {}_2\bar{K}_{bb}^{13} = {}_2\bar{K}_{bb}^{14} = {}_2\bar{K}_{bb}^{15} = {}_2\bar{K}_{bb}^{16} = {}_2\bar{K}_{bb}^{17} = {}_2\bar{K}_{bb}^{18} = {}_2\bar{K}_{bb}^{19} = {}_2\bar{K}_{bb}^{110} = 0 \\ {}_2\bar{K}_{bb}^{111} &= {}_2\bar{K}_{bb}^{112} = {}_2\bar{K}_{bb}^{22} = {}_2\bar{K}_{bb}^{23} = {}_2\bar{K}_{bb}^{24} = {}_2\bar{K}_{bb}^{25} = {}_2\bar{K}_{bb}^{26} = {}_2\bar{K}_{bb}^{27} = {}_2\bar{K}_{bb}^{28} = {}_2\bar{K}_{bb}^{29} = 0 \\ {}_2\bar{K}_{bb}^{210} &= {}_2\bar{K}_{bb}^{211} = {}_2\bar{K}_{bb}^{212} = {}_2\bar{K}_{bb}^{33} = {}_2\bar{K}_{bb}^{34} = {}_2\bar{K}_{bb}^{35} = {}_2\bar{K}_{bb}^{36} = {}_2\bar{K}_{bb}^{37} = {}_2\bar{K}_{bb}^{38} = {}_2\bar{K}_{bb}^{39} = 0 \\ {}_2\bar{K}_{bb}^{310} &= {}_2\bar{K}_{bb}^{311} = {}_2\bar{K}_{bb}^{312} = 0, & {}_2\bar{K}_{bb}^{44} &= 4A_{s,i}^* E_{s,i} \eta_{11} \bar{H}_s^2, & {}_2\bar{K}_{bb}^{45} &= 4A_{s,i}^* E_{s,i} \eta_{13} \bar{H}_s^2 \\ {}_2\bar{K}_{bb}^{46} &= 4A_{s,i}^* E_{s,i} \eta_{12} \bar{H}_s^2, & {}_2\bar{K}_{bb}^{47} &= 12A_{s,i}^* E_{s,i} \eta_{11} \bar{H}_s^2 X, \\ {}_2\bar{K}_{bb}^{48} &= 4A_{s,i}^* E_{s,i} (\eta_{11} \bar{H}_s^2 Y + 2\eta_{13} \bar{H}_s^2 X), & {}_2\bar{K}_{bb}^{49} &= 4A_{s,i}^* E_{s,i} (\eta_{12} \bar{H}_s^2 X + 2\eta_{13} \bar{H}_s^2 Y) \\ {}_2\bar{K}_{bb}^{410} &= 12A_{s,i}^* E_{s,i} \eta_{12} \bar{H}_s^2 Y, & {}_2\bar{K}_{bb}^{411} &= 4A_{s,i}^* E_{s,i} (\eta_{11} \bar{H}_s^2 XY + \eta_{13} \bar{H}_s^2 X^2), \\ {}_2\bar{K}_{bb}^{412} &= 4A_{s,i}^* E_{s,i} (\eta_{12} \bar{H}_s^2 XY + \eta_{13} \bar{H}_s^2 Y^2), & {}_2\bar{K}_{bb}^{55} &= 4A_{s,i}^* E_{s,i} \eta_{33} \bar{H}_s^2, \end{aligned} \right\}$$

$$\begin{aligned}
{}_2\bar{K}_{bb}^{56} &= 4A_{si}^* E_{si} \bar{\eta}_{23} H_s^2, & {}_2\bar{K}_{bb}^{57} &= 12A_{si}^* E_{si} \bar{\eta}_{13} H_s^2 X, \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{58} &= 4A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{13} H_s^2 Y + 2\bar{\eta}_{33} H_s^2 X), & {}_2\bar{K}_{bb}^{59} &= 4A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{23} H_s^2 X + 2\bar{\eta}_{33} H_s^2 Y) \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{510} &= 12A_{si}^* E_{si} \bar{\eta}_{23} H_s^2 Y, & {}_2\bar{K}_{bb}^{511} &= 12A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{13} H_s^2 XY + \bar{\eta}_{33} H_s^2 X^2), \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{512} &= 12A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{23} H_s^2 XY + \bar{\eta}_{33} H_s^2 Y^2), & {}_2\bar{K}_{bb}^{66} &= 4A_{si}^* E_{si} \bar{\eta}_{22} H_s^2, \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{67} &= 12A_{si}^* E_{si} \bar{\eta}_{12} H_s^2 X, & {}_2\bar{K}_{bb}^{68} &= 4A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{12} H_s^2 Y + 2\bar{\eta}_{23} H_s^2 X), \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{69} &= 4A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{22} H_s^2 X + 2\bar{\eta}_{23} H_s^2 Y), & {}_2\bar{K}_{bb}^{610} &= 12A_{si}^* E_{si} \bar{\eta}_{22} H_s^2 Y, \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{611} &= 12A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{12} H_s^2 XY + \bar{\eta}_{23} H_s^2 X^2), & {}_2\bar{K}_{bb}^{612} &= 12A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{23} H_s^2 XY + \bar{\eta}_{33} H_s^2 Y^2) \quad (6A-8) \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{77} &= 36A_{si}^* E_{si} \bar{\eta}_{11} H_s^2 X^2, & {}_2\bar{K}_{bb}^{78} &= 12A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{11} H_s^2 XY + 2\bar{\eta}_{13} H_s^2 X^2), \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{79} &= 12A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{12} H_s^2 X^2 + 2\bar{\eta}_{13} H_s^2 XY), & {}_2\bar{K}_{bb}^{710} &= 36A_{si}^* E_{si} \bar{\eta}_{12} H_s^2 XY, \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{711} &= 36A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{11} H_s^2 X^2 Y + \bar{\eta}_{23} H_s^2 X^3), \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{712} &= 36A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{12} H_s^2 X^2 Y + \bar{\eta}_{13} H_s^2 XY^2), \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{88} &= 4A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{11} H_s^2 Y^2 + 4\bar{\eta}_{13} H_s^2 XY + 4\bar{\eta}_{33} H_s^2 X^2), \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{89} &= 4A_{si}^* E_{si} \{2\bar{\eta}_{23} H_s^2 X^2 + (\bar{\eta}_{12} + 4\bar{\eta}_{33}) H_s^2 XY + 2\bar{\eta}_{13} H_s^2 Y^2\}, \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{810} &= 12A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{12} H_s^2 Y^2 + 2\bar{\eta}_{23} H_s^2 XY), \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{811} &= 12A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{11} H_s^2 XY^2 + 4\bar{\eta}_{13} H_s^2 X^2 Y + 2\bar{\eta}_{33} H_s^2 Y^3), \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{812} &= 12A_{si}^* E_{si} \{(\bar{\eta}_{12} + 2\bar{\eta}_{33}) H_s^2 XY^2 + 2\bar{\eta}_{23} H_s^2 X^2 Y + \bar{\eta}_{13} H_s^2 Y^3\}, \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{99} &= A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{22} H_s^2 X^2 + 4\bar{\eta}_{23} H_s^2 XY + 4\bar{\eta}_{33} H_s^2 Y^2), \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{910} &= 12A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{22} H_s^2 XY + 2\bar{\eta}_{23} H_s^2 Y^2), \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{911} &= 12A_{si}^* E_{si} \{2\bar{\eta}_{13} H_s^2 XY^2 + (\bar{\eta}_{12} + 2\bar{\eta}_{33}) H_s^2 X^2 Y + \bar{\eta}_{23} H_s^2 X^3\}, \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{912} &= 12A_{si}^* E_{si} (3\bar{\eta}_{23} H_s^2 XY^2 + \bar{\eta}_{22} H_s^2 X^2 Y + 2\bar{\eta}_{33} H_s^2 Y^3), \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{1010} &= 36A_{si}^* E_{si} \bar{\eta}_{22} H_s^2 Y^2, & {}_2\bar{K}_{bb}^{1011} &= 36A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{12} H_s^2 XY^2 + \bar{\eta}_{23} H_s^2 X^2 Y), \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{1012} &= 36A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{22} H_s^2 XY^2 + \bar{\eta}_{23} H_s^2 Y^3), \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{1111} &= 36A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{23} H_s^2 X^2 Y^2 + 2\bar{\eta}_{13} H_s^2 X^3 Y + \bar{\eta}_{33} H_s^2 X^4), \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{1112} &= 36A_{si}^* E_{si} \{(\bar{\eta}_{12} + \bar{\eta}_{33}) H_s^2 X^2 Y^2 + \bar{\eta}_{23} H_s^2 X^3 Y + \bar{\eta}_{13} H_s^2 XY^3\}, \\
{}_2\bar{K}_{bb}^{1212} &= 36A_{si}^* E_{si} (\bar{\eta}_{22} H_s^2 X^2 Y^2 + 2\bar{\eta}_{23} H_s^2 XY^3 + \bar{\eta}_{33} H_s^2 Y^4),
\end{aligned}$$

但し、 A_{si}^* : i 層のテンドンの換算断面積で $A_{si}^* = A_{si}(1 - E_c/E_{si})$, A_{si} : i 層のテンドンの断面積, E_{si} : i 層のテンドンのヤング係数

ここに、(6A-8)式に含まれる各項は以下のである。

$$\begin{aligned}
 \overline{H_s^2} &= \overline{a_i} A_e + \frac{4}{3} \overline{e_i} a_x^3 a_y + \frac{4}{3} \overline{f_i} a_x a_y^3 + \frac{4}{9} \overline{k_i} a_x^3 a_y^3 + \frac{4}{5} \overline{n_i} a_x^5 a_y + \frac{4}{5} \overline{o_i} a_x a_y^5 \\
 \overline{H_s^2 X} &= \frac{4}{3} \overline{b_i} a_x^3 a_y + \frac{4}{9} \overline{h_i} a_x^3 a_y^3 + \frac{4}{5} \overline{i_i} a_x^5 a_y, \\
 \overline{H_s^2 Y} &= \frac{4}{3} \overline{c_i} a_x a_y^3 + \frac{4}{9} \overline{g_i} a_x^3 a_y^3 + \frac{4}{5} \overline{j_i} a_x a_y^5, \\
 \overline{H_s^2 X^2} &= \frac{4}{3} \overline{a_i} a_x^3 a_y + \frac{4}{5} \overline{e_i} a_x^5 a_y + \frac{4}{9} \overline{f_i} a_x^3 a_y^3 + \frac{4}{15} \overline{k_i} a_x^5 a_y^3 + \frac{4}{7} \overline{n_i} a_x^7 a_y + \frac{4}{15} \overline{o_i} a_x^3 a_y^5 \\
 \overline{H_s^2 Y^2} &= \frac{4}{3} \overline{a_i} a_x a_y^3 + \frac{4}{5} \overline{e_i} a_x^3 a_y^3 + \frac{4}{9} \overline{f_i} a_x a_y^5 + \frac{4}{15} \overline{k_i} a_x^3 a_y^5 + \frac{4}{7} \overline{n_i} a_x^5 a_y^3 + \frac{4}{15} \overline{o_i} a_x a_y^7 \\
 \overline{H_s^2 XY} &= \frac{4}{9} \overline{d_i} a_x^3 a_y^3 + \frac{4}{15} \overline{l_i} a_x^5 a_y^3 + \frac{4}{15} \overline{m_i} a_x^3 a_y^5, \\
 \overline{H_s^2 X^3} &= \frac{4}{5} \overline{b_i} a_x^5 a_y + \frac{4}{15} \overline{h_i} a_x^5 a_y^3 + \frac{4}{7} \overline{i_i} a_x^7 a_y, \\
 \overline{H_s^2 Y^3} &= \frac{4}{5} \overline{c_i} a_x a_y^5 + \frac{4}{15} \overline{g_i} a_x^3 a_y^5 + \frac{4}{7} \overline{j_i} a_x a_y^7, \\
 \overline{H_s^2 X^2 Y} &= \frac{4}{9} \overline{c_i} a_x^3 a_y^3 + \frac{4}{15} \overline{g_i} a_x^5 a_y^3 + \frac{4}{15} \overline{j_i} a_x^3 a_y^5, \\
 \overline{H_s^2 XY^2} &= \frac{4}{9} \overline{b_i} a_x^3 a_y^3 + \frac{4}{15} \overline{h_i} a_x^3 a_y^5 + \frac{4}{15} \overline{i_i} a_x^5 a_y^3, \\
 \overline{H_s^2 X^4} &= \frac{4}{5} \overline{a_i} a_x^5 a_y + \frac{4}{7} \overline{e_i} a_x^7 a_y + \frac{4}{15} \overline{f_i} a_x^5 a_y^3 + \frac{4}{21} \overline{k_i} a_x^7 a_y^3 + \frac{4}{9} \overline{n_i} a_x^9 a_y + \frac{4}{25} \overline{o_i} a_x^5 a_y^5 \\
 \overline{H_s^2 Y^4} &= \frac{4}{5} \overline{a_i} a_x a_y^5 + \frac{4}{15} \overline{e_i} a_x^3 a_y^5 + \frac{4}{7} \overline{f_i} a_x a_y^7 + \frac{4}{21} \overline{k_i} a_x^3 a_y^7 + \frac{4}{25} \overline{n_i} a_x^5 a_y^5 + \frac{4}{9} \overline{o_i} a_x a_y^9 \\
 \overline{H_s^2 X^3 Y} &= \frac{4}{15} \overline{d_i} a_x^5 a_y^3 + \frac{4}{21} \overline{l_i} a_x^7 a_y^3 + \frac{4}{25} \overline{m_i} a_x^5 a_y^5, \\
 \overline{H_s^2 XY^3} &= \frac{4}{15} \overline{d_i} a_x^3 a_y^5 + \frac{4}{25} \overline{l_i} a_x^5 a_y^5 + \frac{4}{21} \overline{m_i} a_x^3 a_y^7, \\
 \overline{H_s^2 X^2 Y^2} &= \frac{4}{9} \overline{a_i} a_x^3 a_y^3 + \frac{4}{15} \overline{e_i} a_x^5 a_y^3 + \frac{4}{15} \overline{f_i} a_x^3 a_y^5 + \frac{4}{25} \overline{k_i} a_x^5 a_y^5 + \frac{4}{21} \overline{n_i} a_x^7 a_y^3 + \frac{4}{21} \overline{o_i} a_x^3 a_y^7
 \end{aligned} \tag{6A-9}$$

但し、 a_x, a_y : 矩形要素の x および y 方向の $1/2$ 辺長, A_e : 矩形要素の面積

上の(6A-9)式に含まれる記号 $\overline{a_i} \sim \overline{o_i}$ は、 i 層のテンドン曲線 $h_{s,i}$ ($= \overline{a_i} + \overline{b_i} x + \overline{c_i} y + \overline{d_i} xy + \overline{e_i} x^2 + \overline{f_i} y^2$) に係わる定数 (但し、 $\overline{a_i} \sim \overline{f_i}$ については第6章 6.3.2項の(6-39)式参照) で、 $h_{s,i}$ の2乗を簡略化表示する ($h_{s,i}^2 = \overline{a_i} + \overline{b_i} x + \overline{c_i} y + \overline{d_i} xy + \overline{e_i} x^2 + \overline{f_i} y^2 + \overline{g_i} x^2 y + \overline{h_i} xy^2 + \overline{i_i} x^3 + \overline{j_i} y^3 + \overline{k_i} x^2 y^2 + \overline{l_i} x^3 y + \overline{m_i} xy^3 + \overline{n_i} x^4 + \overline{o_i} y^4$) ために導入された記号で、先に定義済みの記号 $\overline{a_i} \sim \overline{f_i}$ を用いて、それぞれ次の様に表示される。

$$\left. \begin{aligned}
 \overline{a_i} &= \overline{a_i}^2, & \overline{b_i} &= 2\overline{a_i} \overline{b_i}, & \overline{c_i} &= 2\overline{a_i} \overline{c_i}, & \overline{d_i} &= 2(\overline{a_i} \overline{d_i} + \overline{b_i} \overline{c_i}), & \overline{e_i} &= \overline{b_i}^2 + 2\overline{a_i} \overline{e_i} \\
 \overline{f_i} &= \overline{c_i}^2 + 2\overline{a_i} \overline{f_i}, & \overline{g_i} &= 2(\overline{b_i} \overline{d_i} + \overline{c_i} \overline{e_i}), & \overline{h_i} &= 2(\overline{c_i} \overline{d_i} + \overline{b_i} \overline{f_i}), & \overline{i_i} &= 2\overline{b_i} \overline{e_i} \\
 \overline{j_i} &= 2\overline{c_i} \overline{f_i}, & \overline{k_i} &= \overline{d_i}^2 + 2\overline{e_i} \overline{f_i}, & \overline{l_i} &= 2\overline{d_i} \overline{e_i}, & \overline{m_i} &= 2\overline{d_i} \overline{f_i}, & \overline{n_i} &= \overline{e_i}^2, & \overline{o_i} &= \overline{f_i}^2
 \end{aligned} \right\} \tag{6A-10}$$

(3) $[\bar{k}_{bsi}]$ の構成成分

(6-64)式の $[\bar{k}_{bsi}]$ の構成成分 $\bar{k}_{bsi}^{ij}$ は、次のようになる。

$$\begin{aligned}
 \bar{k}_{bsi}^{11} &= \bar{k}_{bsi}^{12} = \bar{k}_{bsi}^{13} = \bar{k}_{bsi}^{14} = \bar{k}_{bsi}^{21} = \bar{k}_{bsi}^{22} = \bar{k}_{bsi}^{23} = \bar{k}_{bsi}^{24} = \bar{k}_{bsi}^{31} = \bar{k}_{bsi}^{32} = \bar{k}_{bsi}^{33} = 0 \\
 \bar{k}_{bsi}^{34} &= \bar{k}_{bsi}^{41} = 0, \quad \bar{k}_{bsi}^{42} = -2A_{si}E_{si}\overline{cs^3H_s}, \quad \bar{k}_{bsi}^{43} = -2A_{si}E_{si}\overline{cs^2snH_s}, \\
 \bar{k}_{bsi}^{44} &= -2A_{si}E_{si}(\overline{cs^3H_sY} + \overline{cs^2snH_sX}), \quad \bar{k}_{bsi}^{51} = 0, \quad \bar{k}_{bsi}^{52} = -2A_{si}E_{si}\overline{sn\,cs^2H_s}, \\
 \bar{k}_{bsi}^{53} &= -2A_{si}E_{si}\overline{sn^2csH_s}, \quad \bar{k}_{bsi}^{54} = -2A_{si}E_{si}(\overline{cs^2snH_sY} + \overline{sn^2csH_sX}), \\
 \bar{k}_{bsi}^{61} &= 0, \quad \bar{k}_{bsi}^{62} = -2A_{si}E_{si}\overline{sn^2csH_s}, \quad \bar{k}_{bsi}^{63} = -2A_{si}E_{si}\overline{sn^3H_s}, \\
 \bar{k}_{bsi}^{64} &= -2A_{si}E_{si}(\overline{cs\,sn^2H_sY} + \overline{sn^3H_sX}), \quad \bar{k}_{bsi}^{71} = 0, \quad \bar{k}_{bsi}^{72} = -6A_{si}E_{si}\overline{cs^3H_sX}, \\
 \bar{k}_{bsi}^{73} &= -6A_{si}E_{si}\overline{cs^2snH_sX}, \quad \bar{k}_{bsi}^{74} = -2A_{si}E_{si}(\overline{cs^3H_sXY} + \overline{cs^2snH_sX^2}), \\
 \bar{k}_{bsi}^{81} &= 0, \quad \bar{k}_{bsi}^{82} = -2A_{si}E_{si}(\overline{cs^3H_sY} + \overline{2sn\,cs^2H_sX}), \\
 \bar{k}_{bsi}^{83} &= -2A_{si}E_{si}(\overline{cs^2snH_sY} + \overline{2sn^2csH_sX}), \\
 \bar{k}_{bsi}^{84} &= -2A_{si}E_{si}(\overline{cs^3H_sY^2} + \overline{3cs^2snH_sXY} + \overline{2sn^2csH_sX^2}), \\
 \bar{k}_{bsi}^{91} &= 0, \quad \bar{k}_{bsi}^{92} = -2A_{si}E_{si}(\overline{sn^2csH_sX} + \overline{2sn\,cs^2H_sY}), \\
 \bar{k}_{bsi}^{93} &= -2A_{si}E_{si}(\overline{sn^3H_sX} + \overline{2sn^2csH_sY}), \\
 \bar{k}_{bsi}^{94} &= -2A_{si}E_{si}(\overline{2sn\,cs^2H_sY^2} + \overline{3cs\,sn^2H_sXY} + \overline{sn^3H_sX^2}), \\
 \bar{k}_{bsi}^{101} &= 0, \quad \bar{k}_{bsi}^{102} = -6A_{si}E_{si}\overline{sn^2csH_sY}, \quad \bar{k}_{bsi}^{103} = -6A_{si}E_{si}\overline{sn^3H_sY}, \\
 \bar{k}_{bsi}^{104} &= -6A_{si}E_{si}(\overline{cs\,sn^2H_sY^2} + \overline{sn^3H_sXY}), \quad \bar{k}_{bsi}^{111} = 0, \\
 \bar{k}_{bsi}^{112} &= -6A_{si}E_{si}(\overline{cs^3H_sXY} + \overline{sn\,cs^2H_sX^2}), \\
 \bar{k}_{bsi}^{113} &= -6A_{si}E_{si}(\overline{cs^2snH_sXY} + \overline{sn^2csH_sX^2}), \\
 \bar{k}_{bsi}^{114} &= -6A_{si}E_{si}(\overline{sn^2csH_sX^3} + \overline{cs^3H_sXY^2} + \overline{2cs^2snH_sX^2Y}), \quad \bar{k}_{bsi}^{111} = 0 \\
 \bar{k}_{bsi}^{122} &= -6A_{si}E_{si}(\overline{sn^2csH_sXY} + \overline{sn\,cs^2H_sY^2}), \\
 \bar{k}_{bsi}^{123} &= -6A_{si}E_{si}(\overline{sn^3H_sXY} + \overline{sn^2csH_sY^2}), \\
 \bar{k}_{bsi}^{124} &= -6A_{si}E_{si}(\overline{sn\,cs^2H_sY^3} + \overline{sn^3H_sX^2Y} + \overline{2sn^2csH_sXY^2}),
 \end{aligned} \tag{6A-11}$$

但し、 A_{si} : i 層のテンドンの断面積、 E_{si} : i 層のテンドンのヤング係数

$$\overline{sn} = \sin\psi_i, \quad \overline{cs} = \cos\psi_i$$

上式中の記号 $\overline{H_s}$, $\overline{H_sX}$, $\overline{H_sY}$, $\overline{H_sX^2}$, $\dots$, $\overline{H_sY^3}$ については、(6A-5)式及び(6A-9)式を参照のこと。

[6A - II] (6-66)式に含まれる係数マトリックス[Z_{bi}]の構成成分

$$\begin{aligned}
 Z_{bi}^{11} &= Z_{bi}^{12} = Z_{bi}^{13} = Z_{bi}^{14} = Z_{bi}^{21} = Z_{bi}^{22} = Z_{bi}^{23} = Z_{bi}^{24} = Z_{bi}^{31} = Z_{bi}^{32} = Z_{bi}^{33} = Z_{bi}^{34} = 0 \\
 Z_{bi}^{41} &= 2 \overline{cs^2 H_s}, \quad Z_{bi}^{42} = 2 \overline{cs^2 H_s X}, \quad Z_{bi}^{43} = 2 \overline{cs^2 H_s Y}, \quad Z_{bi}^{44} = 2 \overline{cs^2 H_s XY} \\
 Z_{bi}^{51} &= 2 \overline{sn cs H_s}, \quad Z_{bi}^{52} = 2 \overline{sn cs H_s X}, \quad Z_{bi}^{53} = 2 \overline{sn cs H_s Y}, \\
 Z_{bi}^{54} &= 2 \overline{sn cs H_s XY}, \quad Z_{bi}^{61} = 2 \overline{sn^2 H_s}, \quad Z_{bi}^{62} = 2 \overline{sn^2 H_s X}, \quad Z_{bi}^{63} = 2 \overline{sn^2 H_s Y} \\
 Z_{bi}^{64} &= 2 \overline{sn^2 H_s XY}, \quad Z_{bi}^{71} = 6 \overline{cs^2 H_s X}, \quad Z_{bi}^{72} = 6 \overline{cs^2 H_s X^2}, \quad Z_{bi}^{73} = 6 \overline{cs^2 H_s XY} \\
 Z_{bi}^{74} &= 6 \overline{cs^2 H_s X^2 Y}, \quad Z_{bi}^{81} = 2(\overline{cs^2 H_s Y} + 2 \overline{sn cs H_s X}), \\
 Z_{bi}^{82} &= 2(\overline{cs^2 H_s XY} + 2 \overline{sn cs H_s X^2}), \quad Z_{bi}^{83} = 2(\overline{cs^2 H_s Y^2} + 2 \overline{sn cs H_s XY}), \\
 Z_{bi}^{84} &= 2(\overline{cs^2 H_s XY^2} + 2 \overline{sn cs H_s X^2 Y}), \quad Z_{bi}^{91} = 2(\overline{sn^2 H_s X} + 2 \overline{sn cs H_s Y}), \\
 Z_{bi}^{92} &= 2(\overline{sn^2 H_s X^2} + 2 \overline{sn cs H_s XY}), \quad Z_{bi}^{93} = 2(\overline{sn^2 H_s XY} + 2 \overline{sn cs H_s Y^2}), \\
 Z_{bi}^{94} &= 2(\overline{sn^2 H_s X^2 Y} + 2 \overline{sn cs H_s XY^2}), \quad Z_{bi}^{101} = 6 \overline{sn^2 H_s Y}, \quad Z_{bi}^{102} = 6 \overline{sn^2 H_s XY} \\
 Z_{bi}^{103} &= 6 \overline{sn^2 H_s Y^2}, \quad Z_{bi}^{104} = 6 \overline{sn^2 H_s XY^2}, \quad Z_{bi}^{111} = 6(\overline{cs^2 H_s XY} + \overline{sn cs H_s X^2}) \\
 Z_{bi}^{112} &= 6(\overline{cs^2 H_s X^2 Y} + \overline{sn cs H_s X^3}), \quad Z_{bi}^{113} = 6(\overline{cs^2 H_s XY^2} + \overline{sn cs H_s X^2 Y}) \\
 Z_{bi}^{114} &= 6(\overline{cs^2 H_s X^2 Y^2} + \overline{sn cs H_s X^3 Y}), \quad Z_{bi}^{121} = 6(\overline{sn^2 H_s XY} + \overline{sn cs H_s Y^2}) \\
 Z_{bi}^{122} &= 6(\overline{sn^2 H_s X^2 Y} + \overline{sn cs H_s XY^2}), \quad Z_{bi}^{123} = 6(\overline{sn^2 H_s XY^2} + \overline{sn cs H_s Y^3}) \\
 Z_{bi}^{124} &= 6(\overline{sn^2 H_s X^2 Y^2} + \overline{sn cs H_s XY^3}),
 \end{aligned} \tag{6A-12}$$

但し, $sn = \sin \psi$, $cs = \cos \psi$

上式中の記号 $\overline{H_s}$, $\overline{H_s X}$, $\overline{H_s Y}$, $\overline{H_s X^2}$, $\dots \dots \overline{H_s Y^3}$ については, (6A-5)式及び(6A-9)式を参照のこと。

第6章の参考文献

- 1) Lin, T. Y. and Burns, Ned. H. : Design of prestressed concrete structures, John Wiley & Sons, New York, 1980.
- 2) Nilson, A. H. : Design of prestressed concrete, John Wiley & Sons, New York, 1978.
- 3) Collins, M. P. and Mitchell, D. : Prestressed concrete structures, Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1991.
- 4) 海老原 武、谷田雅広、田中保雄 : アンボンドフラットスラブ構造のオフィスビルへの応用、コンクリート工学、Vol.20, No.8, 1982.
- 5) 中山克己、富田昭夫 : アンボンドP R Cスラブーある大型店舗ビルー、コンクリート工学、Vol.25, No.7, 1987.
- 6) 鈴木計夫 編著 : プレストレスト鉄筋コンクリート構造と設計例、鹿島出版会、1990.
- 7) Van Greunen, J. and Scordelis, A. C. : Nonlinear analysis of prestressed concrete Slabs, Journal of Structural Engineering Division, ASCE, Vol.109, No. ST7, 1983, 7.
- 8) Van Greunen, J. : Nonlinear geometric, material and time dependent analysis of reinforced and prestressed concrete slabs and plates, UC-SESM Report No. 79-3, Division of Structural Engineering and Structural Mechanics, University of California, Berkeley, Calif., Oct., 1979.
- 9) 上田正生 : 補強筋の付着すべりを考慮した曲線形配筋を有するR C床板の曲げについて、日本建築学会北海道支部研究報告集、No.60, 1987, 3.
- 10) 上田正生、中川 修 : 補強筋の付着すべりを考慮した曲線形配筋を有するR C床板の曲げについて、日本建築学会大会学術講演会梗概集（近畿）, 1987, 10.
- 11) 上田正生 : 曲線テンドンを有するプレストレストコンクリートスラブの基礎微分方程式と有限要素法による数値計算例、コンクリート工学論文集、第2巻 第2号, 1991, 7.
- 12) 上田正生 : 曲線テンドンを有するP C梁部材の基礎微分方程式と有限要素法による数値計算例、コンクリート工学論文集、第1巻 第1号, 1990, 1.
- 13) 上田正生 : 曲線テンドンを有するP Cスラブの有限要素解析、土木学会北海道支部論文報告集、第45号, 1989, 2.
- 14) 上田正生、松倉満智子、山本俊彦 : 曲線テンドンを有するP Cスラブのための一有限要素について、日本建築学会北海道支部研究報告集、No.62, 1989, 3.
- 15) 上田正生、山本俊彦、井手 斉 : アンボンドP Cスラブの有限要素解析、コンクリート工学年次論文報告集、第11巻第2号、1989, 7.
- 16) 上田正生、松倉満智子 : 曲線テンドンを有するP Cスラブの有限要素解析 その1. 汎関数と有限要素法への定式化、日本建築学会大会学術講演会梗概集（九州）, 1989, 10.
- 17) 上田正生、松倉満智子、和田俊良、山本俊彦 : 曲線テンドンを有するP Cスラブの有限要素解析 その2. 数値計算例、日本建築学会大会学術講演会梗概集（九州）,

1989, 10.

- 18) Ueda, M., Yamamoto, T. and Ide, H: On the finite elements for Prestressed concrete slabs with curved tendons, Transaction of JCI, No.11, 1989. 12.
- 17) 上田正生、松倉満智子、和田俊良、山本俊彦: R C ラーメンに支持された連続 P C スラブの力学性状について、日本建築学会北海道支部研究報告集、No.63, 1990, 3.
- 18) 上田正生、和田俊良、松倉満智子: 任意方向のテンドン配置を有する P C スラブのための有限要素法について、日本建築学会北海道支部研究報告集、No.63, 1990, 3.
- 19) 上田正生、松倉満智子、山本俊彦: 任意方向に曲線テンドンを有する P C スラブのための有限要素法による定式化、日本建築学会大会学術講演会梗概集 (広島), 1990, 10.
- 20) 上田正生、松倉満智子、和田俊良: 緊張力導入時におけるフラットタイプの P C スラブの力学性状について、日本建築学会北海道支部研究報告集、No.64, 1991, 3.
- 21) 松倉満智子、上田正生: 緊張力導入時におけるフラットタイプの P C スラブの力学性状について、日本建築学会大会学術講演会梗概集 (東北), 1991, 9.
- 22) Zienkiewicz, O.C. 著、吉織雅夫、山田嘉昭 監訳: マトリックス有限要素法、培風館、1984.
- 23) 日本建築学会: プレストレストコンクリート設計・施工規準・同解説、1987.
- 24) 日本建築学会: プレストレスト鉄筋コンクリート (Ⅲ種 P C) 構造設計・施工指針・同解説、1986.
- 25) FIP: Recommendation for the design of flat slabs in post-tensioned concrete (using unbonded and bonded tendons), 1980.
- 26) ACI-ASCE Committee 423: Tentative recommendations for prestressed concrete flat plates, ACI Journal, 1974, 2.
- 27) 上田正生、土橋由造、日野正熙: 柱接合部のモーメント伝達における中央部薄肉型フラットスラブの有効幅、日本建築学会北海道支部研究報告集、No.56, 1983, 3.
- 28) The Concrete Society: Post-tensioned flat-slab design handbook, Concrete Society Technical Report No. 25, 1984.

第7章 補強材の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート部材の 材料非線形解析への一二の拡張と適用の試み

7. 1 はじめに

第2章から第6章においては、棒部材、梁部材、床板から成るRCおよびPC構造部材を対象にして、補強材（鉄筋およびPC鋼材）の付着すべりを考慮した場合の最も基本的な問題、即ち、コンクリートと補強材が共に弾性域にあり、なお且つ、付着応力—すべり関係が線形領域にある場合の、それぞれの部材の基礎微分方程式を求め、さらに、有限要素法への定式化を行って幾つかの数値計算例を示し、これら個々の部材の基本的な力学性状を明らかにした。

しかしながら、アンボンド・テンドンを主要な構成要素とするPC構造を別にすれば、通常のコンクリート構造においてコンクリートと補強材間の付着すべりが重要な問題となるのは、コンクリートに亀裂が生じた後の非弾性領域においてである。したがって、「本論文の前章までの研究成果は、これらコンクリート構造部材の、より複雑で困難な材料非線形領域における力学挙動を追跡するための一つの方法を提案し、その最も基本的な“線形領域における解析手法”を確立した段階に過ぎない」言うことができる。換言すれば、「本論文で提案されたこれらの基本手法は、材料非線形解析にまで拡張されて初めて、付着すべり作用を考慮に入れた本来の意義が発揮されることになる」と言うことである。

本章は、第2章から第6章において展開してきた“弾性線形領域”における、補強材の付着すべりを考慮に入れたコンクリート構造の有限要素解析法を、コンクリートの亀裂や補強材の降伏を伴う“材料非線形領域”にまで拡張することを意図し、その最も基本的な一、二の問題への適用を試みたものである。

即ち、本章では、まずはじめに、この種の問題の最も単純な例として、軸方向力のみを受けるRC棒部材を取り上げ、荷重の増大とともに、コンクリート部分に生ずる断続的な亀裂の発生と、これに伴う亀裂幅の拡大の様相を、連続して追跡し得る解析手法を提案してその計算例を示し、次に、この方法をRC梁部材に拡張するために必要となる、新たな仮定を導入した材料非線形解析法を提示して、さらに、既往のRC梁の実験結果との比較検討を行い、その有用性を明らかにしている。

7. 2 鉄筋コンクリート棒部材の材料非線形解析^{1)~3)}

既に、第1章 序論の2節第1項でも触れたように、RC棒部材を対象とした非線形な付着作用を、一次元付着問題として取り扱った既往の研究としては、Rehm, Holymyanski, 森田ら、など数多くの有用な研究^{4)~13)}がある。しかしながら、これら既往の研究の多くは、あらかじめ設定された一つの亀裂間隔内における付着すべり現象を対象としたものであり、材軸を横切って貫通するコンクリートの亀裂の発生をも考慮した報告は、極めて少ないのが現状ある。亀裂の逐次発生を考慮した研究としては、青柳ら¹²⁾及び田辺ら¹³⁾の論文があるが、前者の青柳らの研究では、亀裂が生ずるたびに計算を中断し、その位置に新たに境界条件を設定してから再度計算を再開する方法を用いており、また、後者の田辺らの報告では、亀裂の発生時に計算の中断はないが、青柳らの解析と同様、亀裂に伴う“すべり方向の逆転”による載荷履歴の効果（除荷の影響）が無視されている。

ここでは、コンクリートの引張り側での亀裂の発生と、圧縮側における非線形な応力-歪性状、鉄筋の降伏、および非線形な付着応力-すべり挙動をも連続して追跡することが可能なRC棒部材の、繰返し載荷を含む材料非線形付着すべり解析手法について記述する。

7.2.1 非線形解析のための仮定事項

RC棒部材の非線形解析に際しては、第2章の2.3.1項で展開した図7-1に示す低次元関数要素を使用することとし、さらに、次に掲げる仮定事項を設定する。

- 1) コンクリートと鉄筋の応力-歪、および付着応力-すべり関係は、部材全般にわたって同一の性質を有し、コンクリートの亀裂は、材軸に垂直に生ずるものとする。
- 2) 非線形解析手法としては、接線剛性を用いた荷重増分・反復法¹⁴⁾を用いることとし、構成材料と付着すべり性状の非線形性に起因して生ずる非釣り合い力を、初期応力と見做

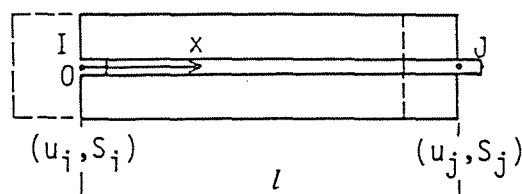


図7-1 非線形解析に用いたRC棒部材要素

してこれと等価な節点荷重に変換し、全構造系に分散させることによって解除する方法を用いる。

3) 引張り力を受ける部材を取り扱う場合には、亀裂の発生が予想される位置に要素長の極めて短い亀裂要素を分散して配置しておき、亀裂はこの要素に選択的に発生させる。

以上の仮定を用いると、各荷重増分段階においては、Piecewise Linear (部分的線形) が適用されるので、個々の増分区間では、第2章の3節の汎関数(2-12)式がそのまま有効であり、(2-27)式の有限要素方程式を増分表示することにより、繰り返し使用することが可能になる。

7.2.2 材料の力学性状と構成関係

(1) コンクリートの応力-歪関係

単調増加荷重時のコンクリートは、図7-2に太い実線で示すように、引張り側では線形弾性が成立するが、引張り強度 σ_{ct} (図中のT点)を越えると亀裂が生じて、その時点で応力を失うものとし、圧縮側での応力-歪曲線は、圧縮強度 σ_{cc} (図中のC点)に達するまで、下式に示すSaenzの曲線¹⁵⁾で表示でき、C点で剛性を失い($E_{ct}=0$)、C点以降は図中の下降直線に沿って徐々に応力を低減して行くものとする。

$$\sigma_c = \frac{E_{co} \varepsilon_c}{1 + (E_{co}/E_{cs} - 2)(\varepsilon_c/\varepsilon_{cc}) + (\varepsilon_c/\varepsilon_{cc})^2} \quad (7-1)$$

但し、 E_{co} , E_{cs} , σ_{cc} , ε_{cc} : 図7-2参照

したがって、任意の歪 ε_c に対応するコンクリートの接線ヤング係数 E_{ct} は、次式で求められる。

$$E_{ct} = \frac{d\sigma_c}{d\varepsilon_c} \quad (7-2)$$

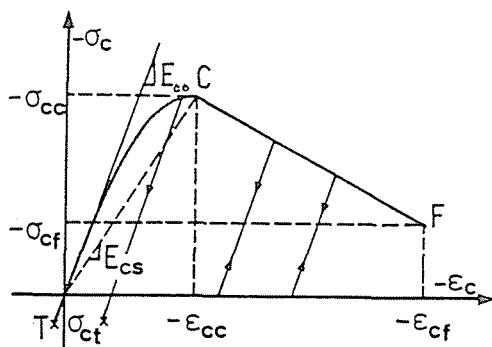


図7-2 コンクリートの假定応力-歪関係

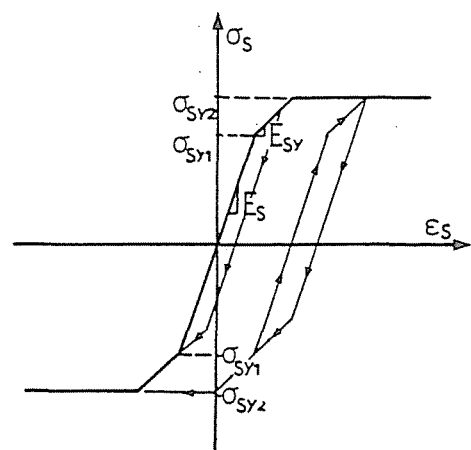


図7-3 鉄筋の假定応力-歪関係

また、圧縮側の繰返し載荷に対しては、荷重の繰返しによる剛性の低下を無視し、図中に矢印を有する細線でその方向を示した初期接線係数 E_c に等しい傾きをもつ「除荷および再載荷経路」を仮定する。

(2) 鉄筋の応力－歪関係

鉄筋は、trilinear 型の弾塑性材料として取り扱うことにする。図7-3に、ここで用いた単調漸増載荷時と繰返し載荷時の、鉄筋の仮定応力－歪モデルを掲げる。

(3) 付着応力－すべり関係

R C 部材のコンクリート中に埋め込まれた鉄筋と、コンクリートの界面における付着すべり挙動を、解析によって精度よく再現するためには、部材内部で実際に起こっている付着応力 (τ_b)－すべり (S) 関係を、でき得る限り忠実な形でモデル化することが必要となる。

(a) 単調載荷時の τ_b － S モデル

ここでは、でき得る限り適用性の広い τ_b － S 関係を設定するために、図7-4に示すような5本の直線(①～⑤)から成る折れ線を用いて、単調載荷時の τ_b － S 曲線をシミュレートすることにする。

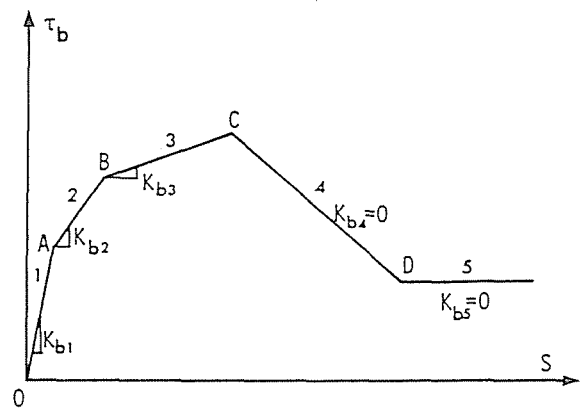


図7-4 単調載荷時の仮定 τ_b － S モデル

即ち、付着破壊(C点)以前をtrilinearの3本の直線①, ②, ③で表示し、付着係数として K_{b1} , K_{b2} , K_{b3} を、また④と⑤では $K_{b4}=K_{b5}=0$ を設定し、0点からA点まで(直線①)は回復可能な弾性変形として、またA点以降(直線②～⑤)の変形には、回復不能な塑性すべりが含まれるものとして取り扱う。これらの仮定のうち、付着破壊(C点)後の直線④, ⑤は、残留付着応力の量を規定し、解除すべき非釣り合い応力を算定するために必要となるものである。

(b) 繰返し載荷時の τ_b － S モデル

繰返し載荷時における τ_b － S 関係を取り扱った実験データは、単調載荷時のそれと比較するとまだ少なく、R C 部材の復元力特性の評価等を目的とした既往の理論解析においても、それぞれ異なった τ_b － S モデルを設定して解析を行っているのが現状のようである。したがって、現時点では、繰返し荷重下における τ_b － S 関係の普遍的な法則化は困難であるが、本論文では、既往のモデルのうちで最も優れていると思われる森田・角の

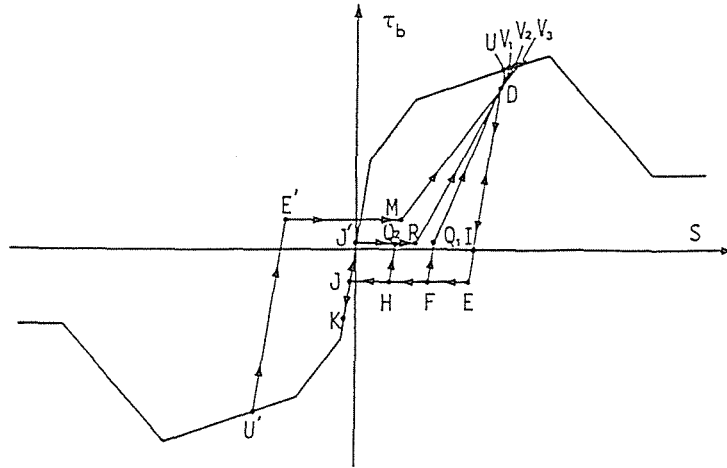


図7-5 繰り返し載荷時の仮定 τ_b - S モデル

構成則¹⁶⁾に準拠して τ_b - S 関係をモデル化することとする。

図7-5は、ここで設定した τ_b - S モデルの代表的な除荷、および再載荷経路を図示したものである。図中のU点が除荷開始点を、またF, H, K, U'点は、考え得る再載荷開始点の典型を、さらにまた、 V_i は再載荷による単調載荷曲線への復帰点を、それぞれ表わしている。したがって、本モデルで表示可能な1サイクル当りの繰り返し載荷経路は、次の4種である。

i) $U \Rightarrow E \Rightarrow F \Rightarrow Q_1 \Rightarrow D \Rightarrow V_1$ (但し、 $\tau_{bQ} > \tau_{bR}$ のとき)

ii) $U \Rightarrow E \Rightarrow H \Rightarrow Q_2 \Rightarrow R \Rightarrow D \Rightarrow V_2$

iii) $U \Rightarrow E \Rightarrow J \Rightarrow K \Rightarrow J' \Rightarrow R \Rightarrow D \Rightarrow V_2$

iv) $U \Rightarrow E \Rightarrow J \Rightarrow U' \Rightarrow E' \Rightarrow M \Rightarrow D \Rightarrow V_3$

これらの経路において、除荷区間U-Eと再載荷区間F- Q_1 , H- Q_2 , U'-E'の傾きが初期付着係数 K_{b1} に等しい値をとるものと仮定すれば、上記の全経路は、i) E, E', Q_i の τ_b 座標値と、ii) D, I, M, Rの各点の座標値 (τ_b , S) を、与えることによって決定することができる。これらの各点を規定するために、本モデルで使用した座標値を以下に列記する。

i) E, E', Q_i の τ_b 座標値

$$\left. \begin{aligned} \tau_{bE} &= -\eta \tau_{bU} \\ \tau_{bE'} &= -\eta \tau_{bU'} \\ \tau_{bQ1} &= \tau_{bQ2} = -\eta \tau_{bE} \end{aligned} \right\} \quad (7-3)$$

ii) D, I, M, Rの各点の座標値 (τ_b , S)

$$\left. \begin{aligned} \tau_{bD} &= \beta \tau_U, \quad S_D = S_u - (1-\beta) \tau_{bU}/K_{b1} \\ \tau_{bI} &= 0, \quad S_I = S_u - \tau_{bU}/K_{b1} \end{aligned} \right\} \quad (7-4)$$

$$\left. \begin{aligned} \tau_{bM} &= \tau_{bE'}, \quad S_M = (3S_E + S_{E'})/4 \\ \tau_{bR} &= \tau_{bQ}, \quad S_R = S_I/2 - (1+\eta)\tau_{bE}/K_{b1} \end{aligned} \right\}$$

但し、 $S_M > S_R$ のときは、 $S_M = S_R$ とする。また、 $\eta = 0.18$, $\beta = 0.9$ とする。

上記の τ_b - S モデルを規定する各点の座標値は、比較的大きなすべり変位振幅を対象にした森田らの再載荷時の τ_b - S 基本則を、すべり変位の小さな領域をも取り扱い得るように、一部修正を加えて設定したものである。即ち、森田らがbilinearで仮定した単調載荷時の τ_b - S 曲線を、trilinearで表示したことによって生じた不合理の除去が、上記の各座標値に修正の要を生じた主な理由である。

7.2.3 非釣り合い応力の等価節点力への変換

外荷重の増加につれて、部材内の各部の要素には、材料性状の非線形性に起因する様々な非釣り合い応力が発生する。これらの非釣り合い応力は、初期応力と見做され、構造系はこの初期応力の作用により、荷重の増加なしにさらに変形することになる。今、或る荷重増分段階にある任意の要素を考える。この要素のコンクリート、鉄筋、および両者の付着境界に、それぞれ $d\sigma_c$, $d\sigma_s$, $d\tau_b$ なる非釣り合い力が存在するものとする。これと等価な節点荷重は、仮想働の原理¹⁷⁾より容易に求められ、次のように表示される。

$$\{d_e P_u\} = (A_c d\sigma_c + A_s d\sigma_s) [C_1^{-1}]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (7-5)$$

$$\{d_e P_s\} = [C_1^{-1}]^T \left[\begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} A_s d\sigma_s + \begin{Bmatrix} l \\ l^2/2 \end{Bmatrix} A_{bs} d\tau_b \right] \quad (7-6)$$

但し、 $\{d_e P_u\}$, $\{d_e P_s\}$ ：それぞれコンクリートの変位 u とすべり変位 S に掛かる等価節点

力， A_c ：部材のコンクリート部分の断面積， A_s ：部材中の鉄筋の断面積，

A_{bs} ：鉄筋の付着表面積， $[C_1]$ ：第2章の(2-20)式参照， l ：RC部材の要素長

したがって原則的には、各荷重増分段階において、新たな非釣り合い応力($d\sigma_c$, $d\sigma_s$, $d\tau_b$ のどれか一つでも)の発生が認められなくなるまで、上記の等価節点荷重による解析を継続することになる。

7.2.4 非線形解析手法

本論文で採用している非線形解析手法は、既往の有限要素法による材料非線形解析において広く用いられている一般的なものであり¹⁸⁾、解析手順そのものを、改めて詳述する

必要は認められぬので、ここでは、本解析に特徴的な事項についてのみ記述することとする。

(1) 収束条件

各荷重増分段階での解の収束を判定するために、本解析で使用した条件は、下式の通りである。

$$dS_{max} < 0.001 \text{ mm} \quad (7-7)$$

但し、 dS_{max} ：各繰返し計算ごとに求められる全節点すべり変位増分のうちの最大値

(2) 亀裂荷重を正確に求めるための荷重増分量の決定手法

一般に、増分手法により R C 部材の材料非線形解析を行う際には、一定の荷重増分量を使用するか、あるいは、終局荷重に近い非線形性の著しい領域においてのみ増分量を小さくする手法をとることが多いが、本解析では、引張り荷重の作用する部材を解析する場合には、亀裂発生時の荷重を精度よく求めるために、各荷重段階ごとに増分量の調整を行う次のような手法を用いることにする。

即ち、今、或る増分荷重ステップ n での計算を開始するに当って、ここで適用すべき荷重増分 dP_n の決定法を以下に略記する。ただし、任意の定荷重増分 dP_0 は、解析開始前の入力データとして既に与えられているものとする。

i) 前ステップ $n-1$ の繰返し計算終了時点で、コンクリートの引張り応力が最大の要素を捜し出し、この要素のコンクリートの全応力 σ_{cmax} と、同要素のこのステップでの応力増分量 $d\sigma_{cmax}$ を記憶しておく。

ii) n ステップの計算開始時には、まず仮に定荷重増分 dP_0 を与えた場合の、この要素のコンクリートの予想全引張り応力 σ_{cpre} を、次式により求める。

$$\sigma_{cpre} = \sigma_{cmax} + \frac{dP_0}{dP_{n-1}} d\sigma_{cmax} \quad (7-8)$$

但し、 dP_{n-1} ： $n-1$ ステップで用いた荷重増分量

ここで、もし $\sigma_{cpre} < \sigma_{ct}$ がコンクリートの引張り強度 σ_{ct} より小さければ、

$$dP_n = dP_0. \quad (7-9)$$

また、 $\sigma_{cpre} \geq \sigma_{ct}$ であれば、亀裂の発生する可能性があるから、より正確な亀裂荷重を得るため、荷重増分 dP_n は、下式を用いて調整する。

$$dP_n = dP_{n-1} \left(\frac{\sigma_{ct} - \sigma_{cmax}}{\sigma_{cmax}} + \chi \right) \quad (7-10)$$

上式の右辺の記号 χ は、亀裂の発生を早めるための加速係数で、ここでは、数値計算によ

る検討の結果、 χ の値として $\chi = 0.001$ を使用している。

(3) 亀裂の亀裂要素への選択導入

R C 棒部材が引張り力を受けてコンクリート部分に亀裂が生ずる場合、その亀裂は、部材内に適当な間隔をおいて配置してある亀裂要素に、選択的に発生させる必要がある。勿論、コンクリートの引張り応力が荷重の増加に伴って、順次最大値をとり得る位置に亀裂要素を配置しておき、その亀裂要素の応力のみがコンクリートの引張り強度に等しくなるような荷重増分量を、逐一正確に求めることができれば、理論的には何らの問題も生じない。しかしながら、隣接する他の要素は無傷のまま、亀裂要素だけに亀裂を発生させ得るような荷重増分量を正確に求めることは、實際上殆ど困難である。したがって、本解析では、亀裂を亀裂要素に選択的に発生させるため、「他の要素のコンクリートの引張り強度を $\overline{\sigma}_{ct}$ を、亀裂要素のそれより幾分大きく設定する」と言う便宜的な仮定を導入することにした。この追加仮定は次式で表わされる

$$\overline{\sigma}_{ct} = \kappa \sigma_{ct} \quad (7-11)$$

上式中の記号 κ は、コンクリートの引張り強度の割り増し係数で、ここでは $\kappa = 1.01$ を用いている。

7. 3 鉄筋コンクリート梁部材の材料非線形解析^{19)~21)}

通常のR C 梁部材の材料非線形解析において、定式化が非常に煩雑となる鉄筋とコンクリートの付着すべり現象を、直接取り扱わざるを得なくなるのは、亀裂近傍の鉄筋のすべり出しが支配的となる梁と柱などの、接合部の変形挙動のような特殊な問題に対してであり、亀裂発生後のR C 梁部材の曲げ剛性の評価のみを必要とする、極く一般的な問題の場合には、「より平易で間接的な“平均化手法”が極めて有効に使用することができる」ことは周知のとおりである。したがって、短期荷重下における、R C 梁部材の曲げ変形挙動の解析のみを目的とする限り、学問的な興味は別として、或る間隔をおいて散発的に発生する実際の亀裂現象を、現実に近い形で忠実に追跡することの必要性は低く、また、その意義も希薄である。しかしながら、事が「使用荷重下における、R C 部材の長期変形挙動の問題」となると事情は一変する。その理由としては、1)通常のR C 部材では、使用荷重下における亀裂の発生は不可避であること、2)この場合の亀裂の発生は極めてまばらで、その付着作用も局所的であること、また、3) 亀裂位置は接合部近くのモーメントの急変

部が少なくなく、既往の長期解析で使用されている平均化手法の適用性には疑問が残ることなどが挙げられる。したがって、亀裂の生じたRC梁部材の、より詳細な長期変形解析を可能にするためにも、まず、短期荷重下の梁の亀裂現象を、実際に近い形で再現・表示できる解析手法を確立することが必要となる。

第1章 序論の「既往の研究」の項において概述したように、平面保持の仮定に立脚する梁要素に、補強筋の付着すべりの効果を取り入れた非線形解析としては、既に幾つかの研究が報告されているが、これら既往の解析のなかで注目すべきものとしては、松浦・山本²²⁾、佐藤・青柳^{23), 24)}、山田ら²⁵⁾、および坂田ら^{26), 27)}の研究がある。この4者は全て付着すべりを直接解析に取り入れたものであり、RC梁の非線形挙動をより詳細に追跡することを意図しているが、これらの内、亀裂間隔まで表現し得るのは佐藤らの研究のみである。したがって、RC梁部材の非線形な荷重－変形応答を実際に近い形で表現するという観点からすれば、平面保持の仮定に準拠したこの種の解析手法としては、佐藤らの研究が最も進んだ解析法の一つとして位置付けることができるように思われる。しかし乍ら、この研究では、部材が全長にわたって一定モーメントおよび一定軸力下におかれながら漸増荷重を受ける場合に限定されており、また、亀裂の発生に伴って生ずる鉄筋のすべり方向の逆転による、付着応力の除荷の効果が無視されている。

ここでは、接合部等の拘束端からの鉄筋のすべり出しや、亀裂間隔をも表示することが可能な、より適用性の広いRC梁部材の材料非線形解析のための一つの手法について記述することとする。

7.3.1 非線形解析のための仮定事項

RC梁部材の非線形解析に当っては、第3章の3.3.1項で展開した図7-6に掲げる低次元要素を使用することとし、さらに、次に列挙する仮定を導入する。

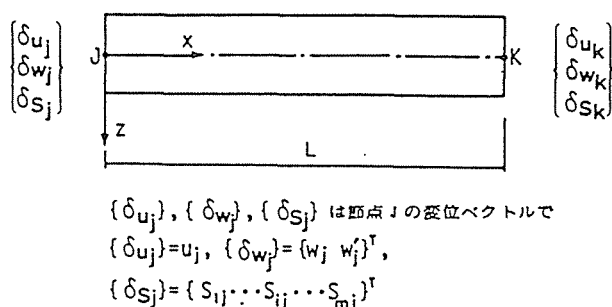


図7-6 非線形解析に用いたRC梁要素

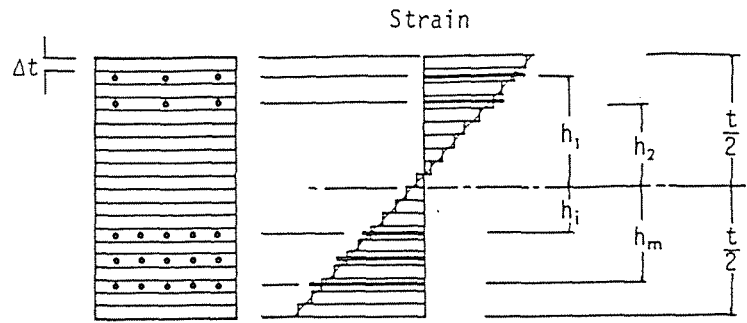


図7-7 積層要素の断面記号

1) 歪の量に応じて変化する梁丈方向のコンクリートの材料性状の違いを、解析に反映させるため、図7-7に示すように、梁断面を厚さ方向に層状（ n 個）に仮想分割して取り扱う周知の積層（Fiber）要素を採用する。

2) 荷重は単調増加荷重下のみであり、コンクリートと鉄筋の応力－歪関係、および付着応力－すべり関係は、部材全域にわたって同一の性質を有するものとする。ただし、各コンクリート層および鉄筋層（ m 層存在するものとする）の接線剛性は、個々の要素の中心点の歪を用いて評価する。

3) コンクリートの亀裂は、材軸に垂直に生ずるものとし、部材の要素分割に際しては、他の要素より長さの十分短い亀裂を表示するための亀裂要素を分散配置しておき、亀裂はこの要素に選択的に発生させる。

4) 非線形解析法としては、前節のRC棒部材の場合と同様、接線剛性を用いた初期応力法に基づく荷重増分・反復法を用いる。

7.3.2 材料の力学性状と構成関係

（1）コンクリートの応力－歪関係

コンクリートの応力－歪関係としては、前節のRC棒部材の場合と全く同一の(7-1)式および(7-2)式に従う構成関係を使用する。

（2）鉄筋の応力－歪関係

鉄筋層の応力－歪関係としては、RC棒部材の場合より幾分簡略化した図7-8に示すような bilinear型の完全弾・塑性材料として取り扱う。

（3）付着応力－すべり関係

先の仮定事項でも記述したように、ここでは、単調増

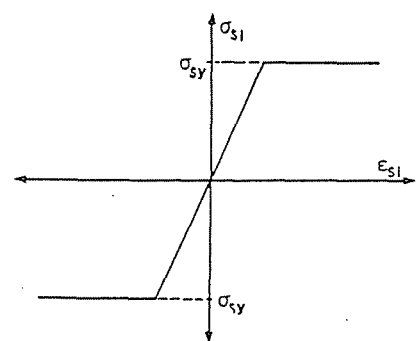


図7-8 鉄筋の応力－歪関係

加荷重時の梁の挙動のみを対象としているが、部材内の或る位置に、鉄筋を横切るような亀裂が発生した場合、亀裂を挟んだどちらか一方の側にすべり方向の逆転が起こるので、部材全体が単調増加荷重下にある場合でも、付着応力－すべり関係には、除荷による載荷履歴の影響を考慮することが必要となる。したがって、梁の解析に際しても、前節のRC棒部材で用いた“繰返し載荷時を含む τ_b -Sモデル”を用いることにする。

7.3.3 材料非線形解析のための増分汎関数

仮定事項 4)より、各荷重増分段階では、Piece-wise Linearが適用されるので、基本的には第3章で述べた汎関数(3-37)式が有効であるが、非線形領域においては、個々の要素の各薄層ごとに構成材料の接線剛性が異なるので、前述の汎関数は、非線形解析のための積層要素に適した形に書き換えることが必要になる。この汎関数は増分形で表示され下式となる。

$$\begin{aligned}
 d\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L & \left[(B \Delta t \sum_{i=1}^n E_{cti} + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si}) \{d\Delta_u\}^T [C_1^{-1}]^T [f_1]^T [f_1] [C_1^{-1}] \{d\Delta_u\} \right. \\
 & - 2 \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si} \{d\Delta_u\}^T [C_1^{-1}]^T [f_1]^T [f_3] [C_3^{-1}] \{d\Delta_w\} \\
 & + (B \Delta t \sum_{i=1}^n z_i^2 E_{cti} + \sum_{i=1}^m A_{si}^* E_{si}) \{d\Delta_w\}^T [C_3^{-1}]^T [f_3]^T [f_3] [C_3^{-1}] \{d\Delta_w\} \\
 & + 2 \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} \{d\Delta_u\}^T [C_1^{-1}]^T [f_1]^T [f_1] [C_1^{-1}] \{d\Delta_{si}\} \\
 & - 2 \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} \{d\Delta_w\}^T [C_3^{-1}]^T [f_3]^T [f_1] [C_1^{-1}] \{d\Delta_{si}\} \\
 & + \sum_{i=1}^m A_{si} E_{si} \{d\Delta_{si}\}^T [C_1^{-1}]^T [f_1]^T [f_1] [C_1^{-1}] \{d\Delta_{si}\} \\
 & \left. + \sum_{i=1}^m A_{bsi} K_{bi} \{d\Delta_{si}\}^T [C_1^{-1}]^T [f_1]^T [f_1] [C_1^{-1}] \{d\Delta_{si}\} \right] dx \\
 & - \{d\Delta_u\}^T \{dP_u\} - \{d\Delta_w\}^T \{dP_w\}
 \end{aligned} \quad (7-12)$$

但し、 Δt ：仮想分割されたコンクリート薄層の厚さ、 n ：コンクリート断面の梁丈方向の分割数、 E_{cti} ：任意のコンクリート薄層 i の接線ヤング係数、 B ：梁断面の幅、 z_i ：材軸から任意のコンクリート薄層 i の中心までの距離、 m ：鉄筋層の数、 E_{si} ：任意の i 層の鉄筋のヤング係数、 A_{si} ： i 層の鉄筋の断面積、 A_{si}^* ：任意の i 層の鉄筋の換算断面積で $A_{si}^* = A_{si}(1 - E_{cti}/E_{si})$ 、 A_{bsi} ： i 層の鉄筋の付着表面積、 K_{bi} ： i 層の鉄筋とコンクリート間の付着係数、 l ：梁要素の長さ、 $\{d\Delta_u\}, \{d\Delta_w\}, \{d\Delta_{si}\}$ ：第3章で述べた節点変位ベクトル $\{\Delta_u\}, \{\Delta_w\}, \{\Delta_{si}\}$ の増分表示、 $[C_3], [C_1], \{f_1\}, \{f_3\}$ ：第3章の3.3.1項を参照、 $\{dP_u\}, \{dP_w\}$ ：それぞれ軸 (x) 方向および鉛直 (z) 方向の外荷重節点ベクトル増分

したがって、結果として得られる増分表示された有限要素方程式も、第3章の3.3.1の場合と同様にして容易に求められることになる。

7.3.4 非釣り合い応力の等価節点力への変換

図7-7に示すRC梁の断面をもつ或る要素の任意(i)のコンクリート薄層、鉄筋層、および鉄筋層とコンクリートとの付着境界に、個々の材料非線形性に起因して、それぞれ $d\sigma_{ci}$, $d\sigma_{si}$, $d\tau_{bi}$ なる非釣り合い応力が存在するものとする。初期応力として取り扱われるこれらの非釣り合い応力は、RC棒部材の場合と同様、仮想働の原理を用いて等価節点力に変換され、次のようになる。

$$\{d_e P_u\} = B \Delta t \sum^n d\sigma_{ci} [C_1^{-1}]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ l \end{Bmatrix} + \sum^m A_{si} d\sigma_{si} [C_3^{-1}]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ l \end{Bmatrix} \quad (7-13)$$

$$\{d_e P_w\} = -B \Delta t \sum^n z_i d\sigma_{ci} [C_3^{-1}]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2l \\ 3l^2 \end{Bmatrix} - \sum^m A_{si} z_i d\sigma_{si} [C_3^{-1}]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 2l \\ 3l^2 \end{Bmatrix} \quad (7-14)$$

$$\{d_e P_s\} = \sum^m A_{si} d\sigma_{si} [C_1^{-1}]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ l \end{Bmatrix} + \sum^m A_{bsi} d\tau_{bi} [C_1^{-1}]^T \begin{Bmatrix} 0 \\ l \end{Bmatrix} \quad (7-15)$$

但し、上の3式中の各記号については(7-12)式を参照

上の(7-15)式の右辺の記号 $\sum$ は、単なるsummationではなく、節点すべり変位の並び順に従ってassembleすることを意味している。

7.3.5 非線形解析手法

材料非線形領域における本解析法の計算手順は、亀裂要素の取り扱い等、基本的には、前節で述べたRC棒部材で用いた手法と同一である。したがって、ここではRC梁の解析に特徴的な事項についてのみ記述することとする。

以下では、(1) 平面保持の仮定がもたらす矛盾点を指摘し、(2) これを克服するためにとられている既往の手法について言及した後、(3) より実際に近い形でコンクリートの亀裂現象を表示するために本解析で用いた一簡略化手法について述べる。

(1) 平面保持の仮定がもたらす矛盾点

論点を明確にするために、図7-9に示すような一定モーメントに支配される単配筋のRC梁部材を考える。梁幅方向の応力を平均化して取り扱うと、亀裂近傍の(図7-9のA-A断

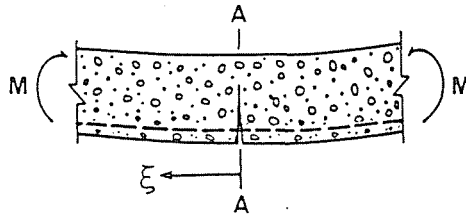


図7-9 亀裂近傍の梁の断面記号

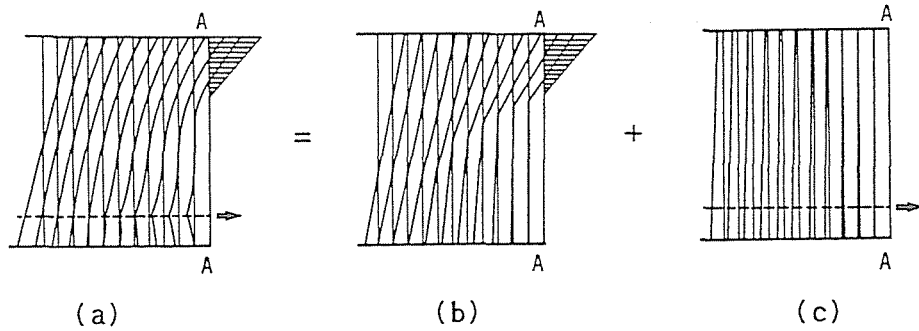


図7-10 梁の亀裂近傍の応力状態の概念図

面から ξ 方向の)各横断面におけるコンクリート部分の実際の応力分布は、図7-10の(a)のようになっているものと考えることができる²⁸⁾。この応力状態はまた、同図(b)の亀裂位置A-A断面のコンクリートの圧縮応力分布を、外荷重とみなしたときの無筋梁の応力分担と、(c)の引張り鉄筋からコンクリートへの付着による応力伝達の問題とに分離して取り扱うことができる。ここで留意すべきは、図(b)の梁丈方向の応力分布形状である。この応力分布をそのまま、歪分布として読み代えると、亀裂近傍の圧縮側と引張り側では歪分布の形状が大きく異なっており、梁断面に唯一つの曲率を設定する平面保持の仮定とは大きな隔たりがあることを示している。これが、本解析のように、梁のコンクリート断面に平面保持を仮定した場合に生ずる大きな矛盾点である。また、この事実は、亀裂に隣接する引張り側のコンクリートの剛性分担を軽減させる必要があること、換言すれば、「亀裂近傍の要素では、平面保持の仮定を担う梁断面の曲率を、圧縮側と引張り側とに分けて設定することが必要となる」ことを示唆している。逆説的に言えば、「この矛盾点を克服するための何らかの処置をとらなければ、亀裂近傍の梁の引張り側の剛性を過大評価する」危険があることを意味している。また実際、この点に対する特別な処置を講じていない既往の研究^{22), 25)~27)}では、コンクリートの亀裂発生領域が広範囲にわたっており、付着すべりを考慮した本来の意義が失われている。

(2) 上記矛盾点を克服するための既往の手法

図7-11の(a)と(b)には、上記の矛盾に抵触しない既往の単純化モデルを掲げた^{29), 30)}。

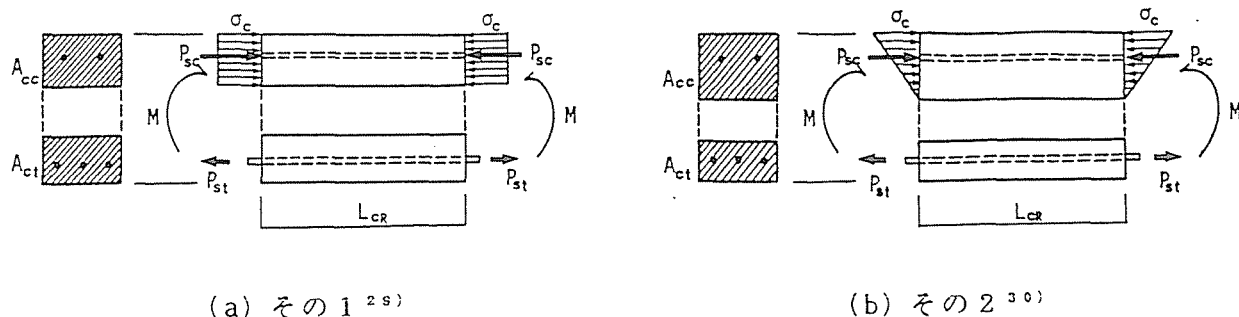


図7-11 亀裂安定状態を対象とした既往の単純化モデル

しかし、この種の方法は、亀裂が十分に発達した、所謂“亀裂安定状態”における梁に対してのみ使用可能な単純化手法である。より实际的で有用な方法が、先に言及した佐藤・青柳によって示されている^{23), 24)}。この研究では、部材が一定モーメント下にある場合を対象とし、亀裂の生じたRC梁を支配する基礎微分方程式を導き、これをRunge-Kutta法を用いて解析する方法について報告している。この手法では、亀裂発生後のコンクリートの引張り応力分担は、付着による鉄筋からの応力伝達のみ依存するものと見做して評価しているため、前述のような矛盾は生じない。しかしながら、この方法では、図7-10の(b)でみたような「亀裂位置近くのコンクリートの歪分布の乱れは、鉄筋からの応力伝達がなくても、実際には可成り狭い範囲で局部的に分散、吸収され、平面保持が回復する」と言う事実が見逃されており、結果として、「コンクリートの応力分担を過小に見積る可能性がある」ことを指摘することができる。

(3) 本解析で用いた一簡略化手法

前項(1)と(2)で概観したように、平面保持の仮定に立脚する限り、何らかの近似的な方法を導入せざるをえないことは明らかである。ここでは、前記の矛盾に対処するために、① 亀裂近傍の引張り側コンクリート部分の、ある領域内の曲率を、圧縮側のそれより低減して表示するものとし、② その領域と、亀裂部位からの距離に応じて異なる曲率低減の程度は、亀裂位置の圧縮応力分担を外荷重と見做した、無筋梁の断面応力状態を参考にして評価する、と言う簡略化手法を採用することにする。

図7-12は、上記の目的を達成するために図7-10の(b)を参照して、「引張り側コンクリートの曲率低減領域が、亀裂深さ e_{cr} の違いによってどのように変化するか」を、2次元有限要素解析を用いて調べたものである。即ち、この図は、十分に長い無筋梁の亀裂位置を想定した梁の先端部A-A断面に、コンクリートの圧縮分担応力に相当する3角形状の外荷重(0点回りのモーメント M_0 が一定になるように)を作用させた時の、3種の亀裂深さ・梁丈比($e_{cr}/t = 0.8, 0.7, 0.6$)に対するA-A断面近傍の応力状態の線形解析結果を掲げ

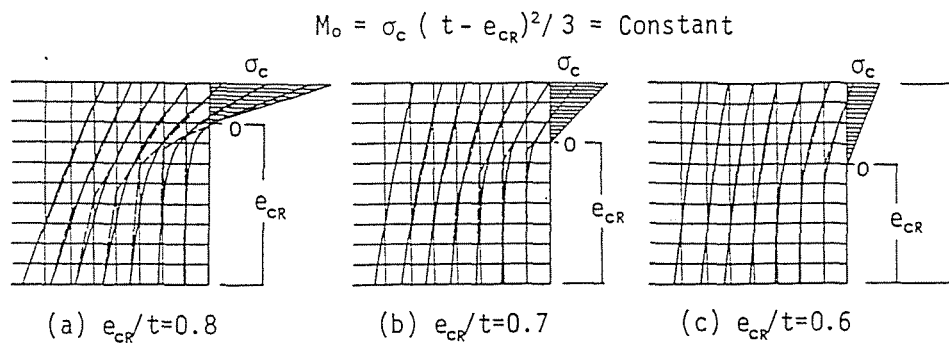


図7-12 Crack Depthの違いが亀裂近傍のコンクリートの応力分布分担におよぼす影響たものである。同図中にはまた、これらを歪分布として読み替え、更に、この歪を圧縮側と引張り側とに分離して直線でシミュレートした（厳密には容認し難いが、大局的には問題の本質を損なうものでないことは明らかである）場合の近似値をも破線で併記した。また、図7-14は、図7-12の各シミュレート値を図7-13に示すような曲率 ϕ_c 、 ϕ_t で表わし、これを更に平面保持の回復の程度を表わす曲率比 $C_\phi = \phi_t / \phi_c$ と、距離比 ξ / e_{cr} の關係に整理しなおして表示したものである。この図は、「平面保持の乱れは、亀裂位置から離れるに従って急速に回復し、亀裂深さ e_{cr} に相当する位置（ $\xi / e_{cr} = 1$ ）では、殆ど $C_\phi = 1$ と見做し得る」ことを示している。本解析では、この關係を図中に破線で示したシミュレート曲線を表示し、これを用いて亀裂に隣接する要素の引張り側コンクリートの剛性を評価することとした。即ち、亀裂から ξ なる距離にある要素の引張り側の各コンクリート層 i の剛性係数 $E_{c,i}$ を、次式で与える。

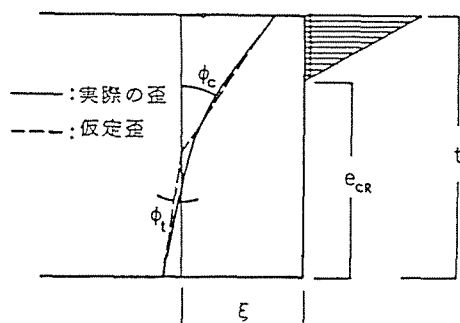


図7-13 亀裂近傍の梁内部の歪分布の近似化

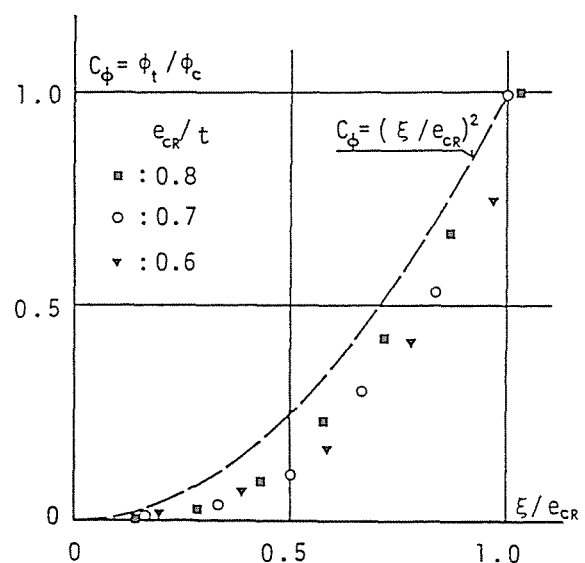


図7-14 曲率比 ϕ_t / ϕ_c と距離比 ξ / e_{cr} の關係

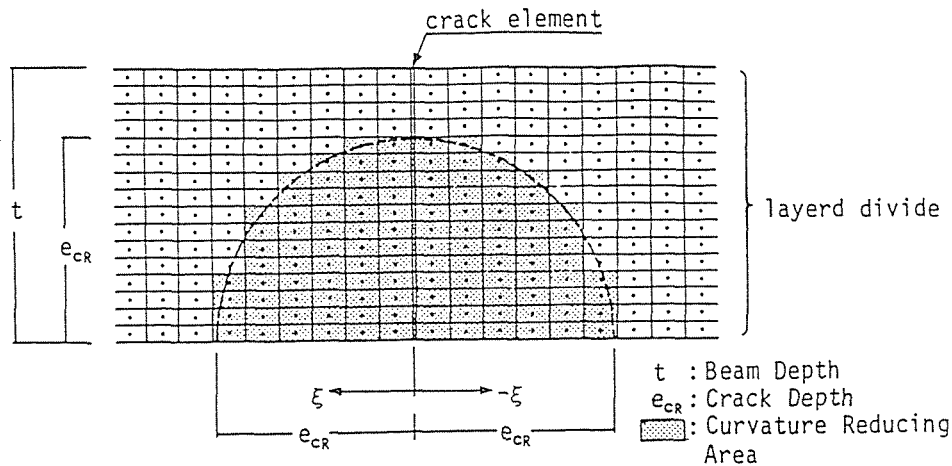


図7-15 亀裂近傍の梁の引張り側コンクリートの剛性低減領域

$$E_{cti} = E_{co} \cdot C_{\xi} = E_{co} \cdot (\xi / e_{CR})^2 \quad (7-14)$$

図7-15にはまた、先の結果に基づいて設定し、本解析で用いたコンクリートの剛性低下領域を図示して掲げた。

以上に述べた本簡略化手法には、容易に指摘し得るように、平面保持の回復に寄与する付着による鉄筋の効果が無視されており、一見容認し難い仮定のように見える。しかしながら、この方法は、引張り側コンクリートの応力分担を、鉄筋からの付着による応力分担のみに求める前述の佐藤らの仮定と対照をなすものであり、“簡略化の程度”という意味では、両者は同列に位置すると見做し得るものである。また明らかに、著者のこの仮定は低配筋の梁に有利であり、佐藤らのそれは高配筋の梁の解析に適する仮定である、ということもできよう。更に付言するなら、「引張り側のコンクリートの応力分担が、梁全体の剛性を評価する際に重要となるのは、低配筋の場合であり、高配筋になると引張り剛性の大部分が鉄筋に依存することになるので、その重要性は相対的に低下する」と言う事実を指摘することもできる。

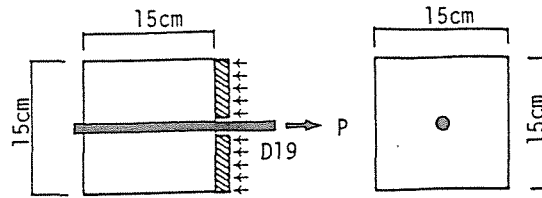
7. 4 数値計算例と考察

7.4.1 R C棒部材の非線形計算例

本章の第2節で展開したR C棒部材の材料非線形解析法の妥当性を調べるため、本解析法による若干の数値計算例を掲げ、既往の実験結果等との比較・検討を行うこととする。

(1) 山本らの引き抜き試験体の解析⁷⁾

図7-16に、山本らの引き抜き試験体の概要と材料の力学的性質を、また、図7-17には、



$$\begin{aligned}
 E_{co} &= 380000 \text{ kgf/cm}^2, \\
 \sigma_{cc} &= 332 \text{ kgf/cm}^2, \epsilon_{cc} = 0.002, \epsilon_{cf} = 0.005 \\
 E_s &= 2000000 \text{ kgf/cm}^2, E_{sy} = 0, \sigma_{sy1} = \sigma_{sy2} = 3200 \text{ kgf/cm}^2
 \end{aligned}$$

図7-16 山本らの引き抜き試験体の概要

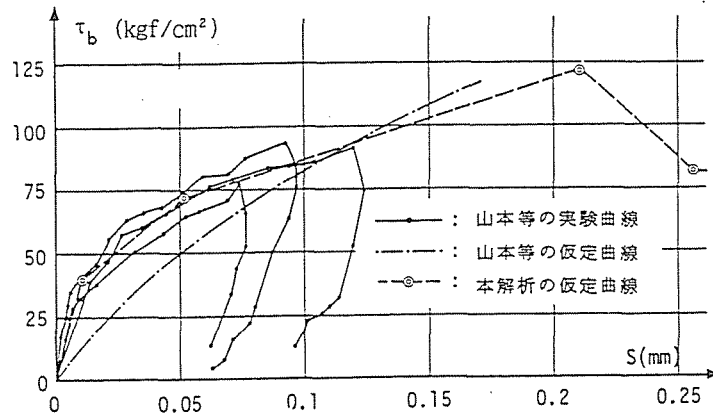


図7-17 山本らの引き抜き試験体の τ_b -S 曲線

τ_b -S 曲線の実験値と、著者および山本らのシミュレート曲線を対比して掲げる。ここではまず、この試験体を対象にして、要素分割数など、本解析値の基本的な性質を調べた後、実験結果との比較・考察を試みる。

(a) 要素分割数の影響

第2章の4節において既に検討したように、RC棒部材の線形弾性付着すべり問題については、5分割程度で十分な精度が得られることを明らかにしたが、これは材料性状と付着剛性が部材全長にわたって一様な線形領域についてのみ言えることであって、これらの力学性状が、各要素ごとに刻々と変化する材料非線形解析の場合には、この結果をそのまま適用することはできない。

図7-18は、荷重増分量 $dP=0.25t$ を用い、このRC棒部材の要素分割数 5, 15, 30 の3種に対する荷重端 ($x=L$) と、自由端 ($x=0$) の荷重-すべり変位曲線におよぼす分割数の影響を比較したものである。図によれば、要素分割数の最も粗い5分割の荷重端のすべり S_L 曲線には、高荷重領域において曲線の傾きが幾分大きくなる傾向が認められるが、全体的にはさほど大きな違いはなく、また特に分割数15と30の解は殆ど一致しており、この試験体の解析には、分割数として15程度を用いれば十分であることを知る。

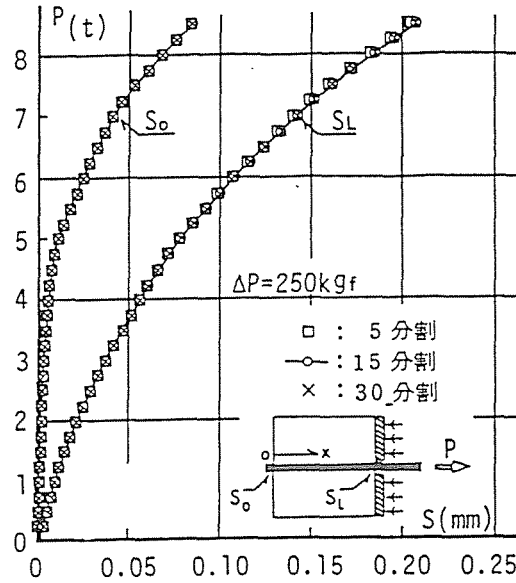


図7-18 要素分割数が解析結果におよぼす影響

(b) 実験結果との比較

前項(a)での検討結果から、実験値との比較には、要素分割数15を用いることにする。

図7-19は、載荷端における荷重—すべり曲線を、また図7-20と図7-21は、8つの荷重段階に対する、材軸に沿うすべり変位と鉄筋歪の分布の推移状況を、それぞれ実験値と比較したものである。これらの図の結果からも知り得るように、本解析値は、何れの場合も実験結果との良好な対応をみせており、引き抜き試験における実際の付着すべり挙動を、ほぼ再現し得ることを示している。

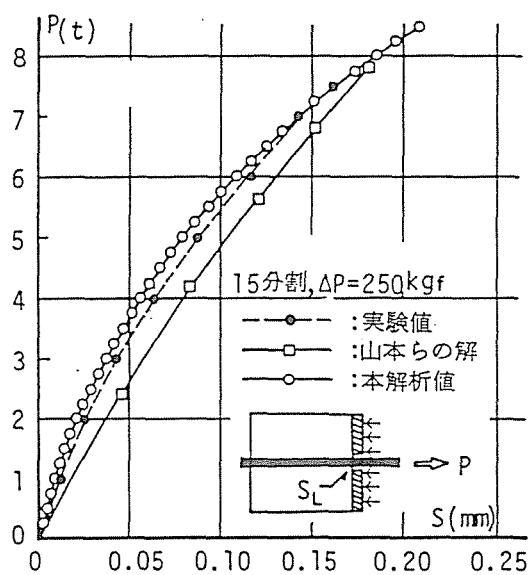


図7-19 山本らの実験値との比較

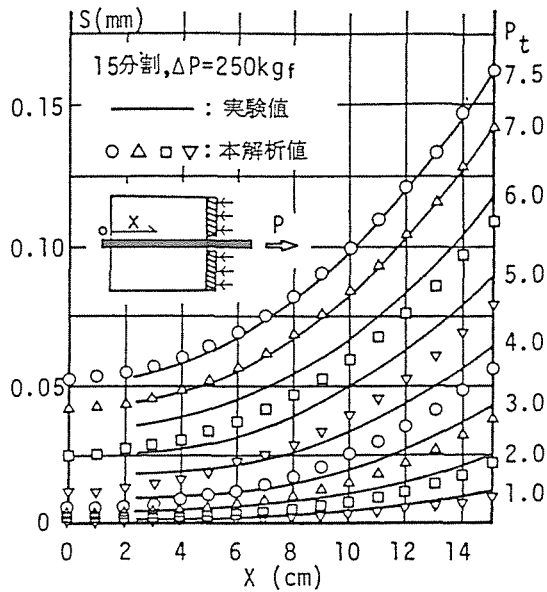


図7-20 すべり分布の実験値との比較

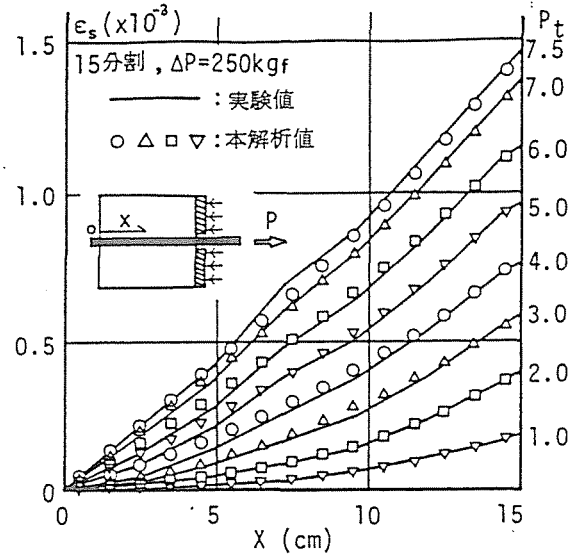


図7-21 鉄筋歪分布の実験値との比較

(2) 森田らの両引き試験体の解析⁶⁾

図7-22に、部材両端の鉄筋に引き抜き荷重の作用する森田らの試験体の概要を、図7-23には、実験 τ_b -S 曲線と解析に用いたシミュレート曲線を示す。この試験体のコンクリート部分には、当然のことながら引張り応力が生じることになるが、この実験自体の目的が τ_b -S 関係にその主眼を置いているため、コンクリートと鉄筋は共に弾性領域にあり、貫通亀裂の生ずる恐れがないので、計算に当っては亀裂要素を導入せずに、半部材長（対称性を考慮）を20等分割して、荷重増分 $dP=1.1\text{ t}$ を用いて解析を行った。

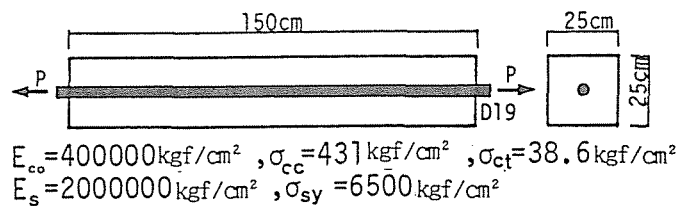


図7-22 森田らの両引き試験体の概要

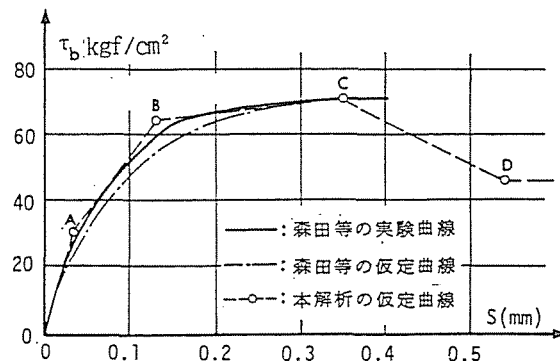


図7-23 森田らの両引き試験体の τ_b -S 曲線

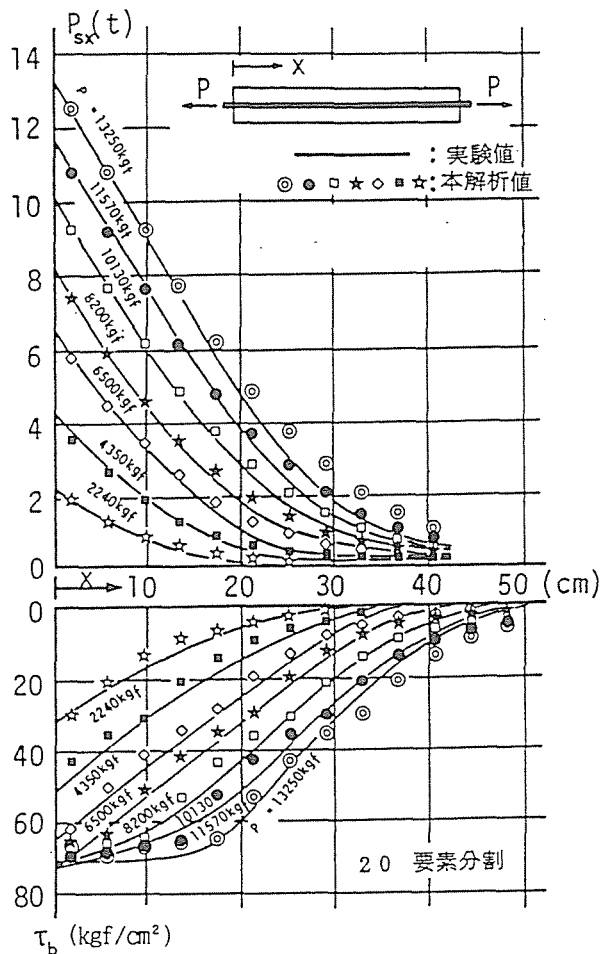


図7-24 森田らの両引き試験体の鉄筋合力 P_{sx} 及び付着応力分布曲線の推移

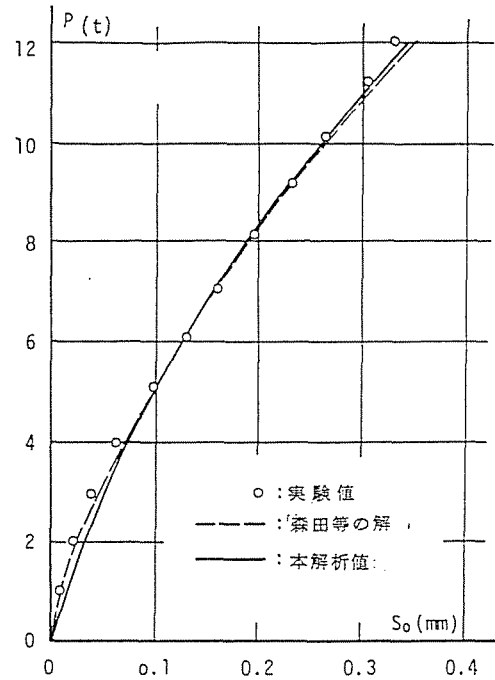


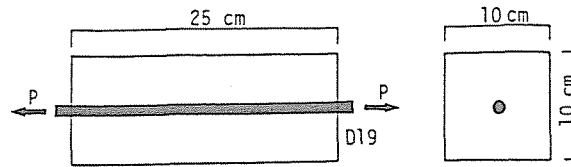
図7-25 森田らの両引き試験体の荷重材端すべり曲線の比較

図7-24は、7段階の荷重に対する、材軸に沿う鉄筋の合応力 P_s ($P_s = A_s \sigma_s$)と付着応力 τ_b の分布を、それぞれ実験値と比較したものである。また、図7-25には、本解析値と森田らの実験および計算結果を、載荷端の荷重—すべり変位曲線に対比して掲げたが、これらの各曲線間には良好な近似が認められ、本解析法が単調漸増荷重下にある“両引きRC棒部材”の非線形付着すべり現象を、十分な精度で追跡することが可能なことを示している。

(3) 山本らの除荷を含む両引き試験体⁸⁾

前項(1)と(2)の計算例は、既にみたように、共に部材が単調漸増荷重下にある場合のみを対象としており、除荷時の挙動は含まれていなかったが、ここでは、図7-26に示す「除荷を含む山本らの両引き試験体」を取り上げ、その解析を行うこととする。図7-27には、 τ_b — S 関係の実験曲線と、解析に用いた山本ら及び著者のシミュレート曲線を、対比して併記した。

図7-28は、この試験体の外荷重7tまでの載荷および除荷時の、本解析結果と山本らの



$$E_{co} = 380000 \text{ kgf/cm}^2 \quad \sigma_{cc} = 332 \text{ kgf/cm}^2$$

$$\epsilon_{cc} = 0.002, \quad \epsilon_{cf} = 0.005$$

$$E_s = 2000000 \text{ kgf/cm}^2 \quad E_{sy} = 0, \quad \sigma_{sy1} = \sigma_{sy2} = 3200 \text{ kgf/cm}^2$$

図7-26 山本らの両引き試験体の概要

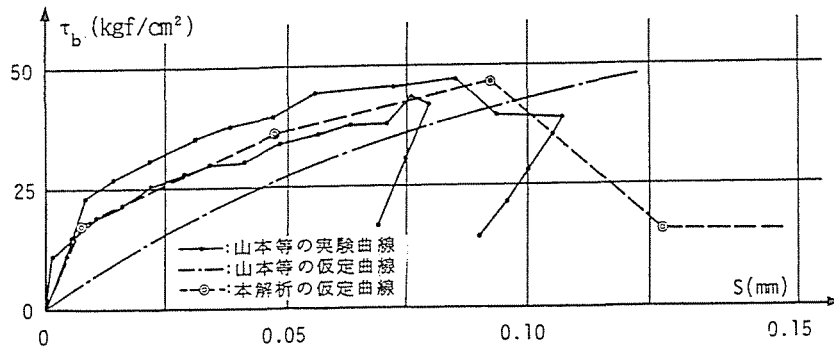


図7-27 山本らの両引き試験体の $\tau_b - S$ 曲線

実験および計算値とを、載荷端における荷重—すべり変位曲線で比較したもので、また、図7-29と図7-30には、それぞれ載荷および除荷時途上の7段階の荷重に対応する鉄筋の歪分布の本解析値を、実験結果と比較して図示した。これらの図中の本解析曲線は、処女載荷時のみならず除荷時においても、実際の付着すべり現象を比較的よく表現しており、本解析手法が十分な妥当性を有していることを知り得る。

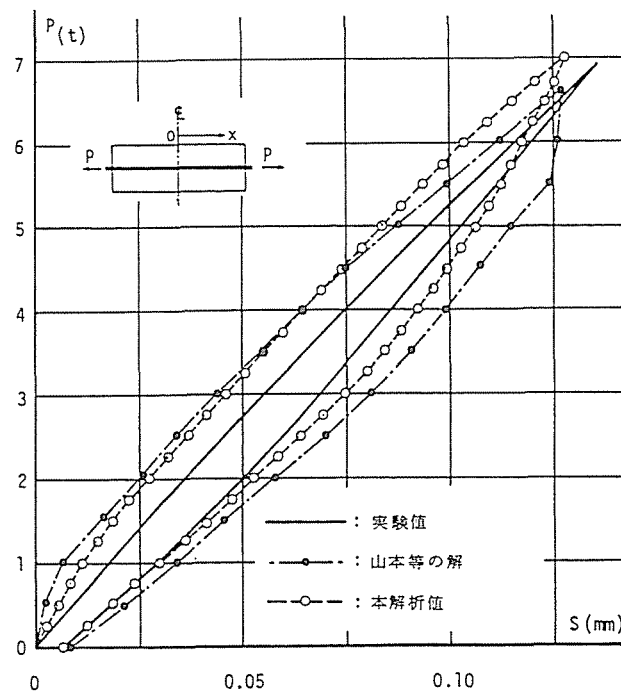


図7-28 山本らの両引き試験体の荷重—材端すべり曲線の比較

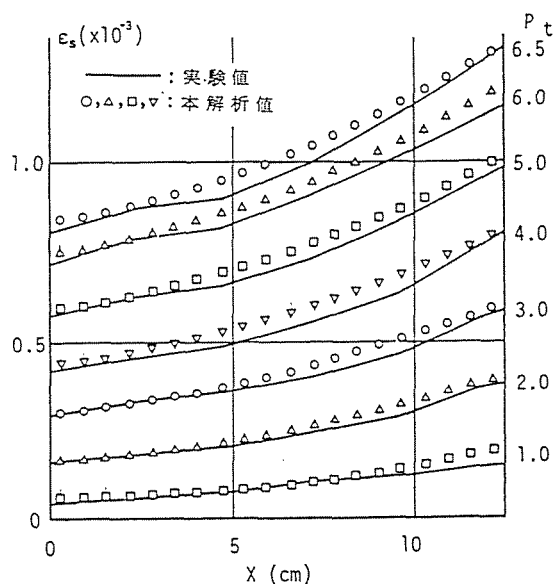


図7-29 山本らの両引き試験体の載荷時における鉄筋歪分布の比較

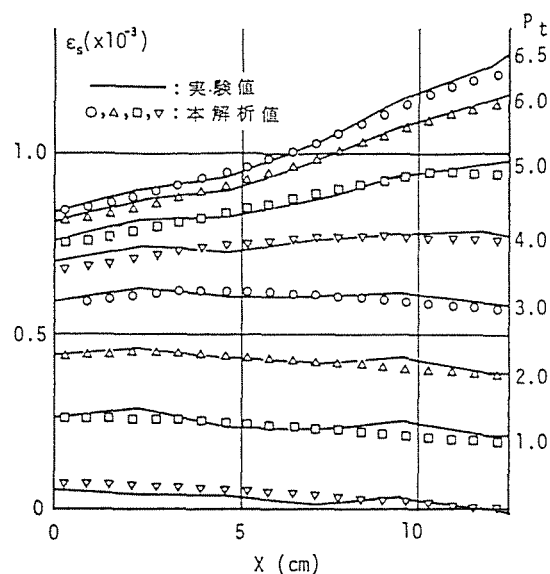


図7-30 山本らの両引き試験体の除荷時における鉄筋歪分布の比較

(4) 半無限コンクリート躯体に埋め込まれた鉄筋の付着すべり問題

除荷時のみならず再載荷時をも含む計算例を示すために、図7-31に示すような半無限コンクリート躯体に埋め込まれた鉄筋の付着すべり問題の解析を行ってみる。この解析モデルは、森田らが既報¹⁶⁾において計算例として挙げているものである。図7-32には、解析に用いた森田らと著者の単調載荷時の仮定 τ_b - S 曲線（繰り返し載荷時の経路は、前述のモデル化に従って自動的に設定される）を掲げる。

図7-33は、この解析モデルの処女載荷途上19.5 t から0 t までの1サイクルの繰り返し載荷を含む鉄筋の引き抜き挙動における、森田らおよび著者の計算結果を、自由端点 ($x=0$ cm) 位置の荷重-すべり変位曲線で比較したものである。本章の第2節で設定した繰り返し載荷時の本 τ_b - S モデルが、森田・角の基本則に一部修正を加えたものであることは、既に述べたが、この図の結果からも知り得るように、両解析値には、計算仮定に幾分かの違いがある（差分法による森田らの計算では、すべり変位 $S=0.001$ cm をもって定着

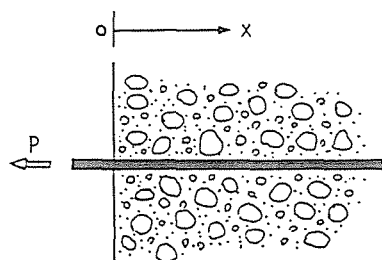


図7-31 半無限体コンクリート中に埋め込まれた鉄筋の概念図

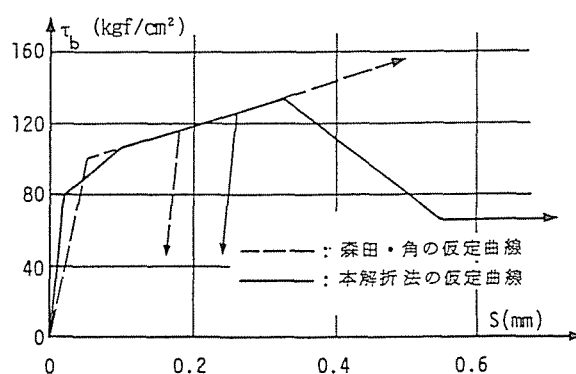


図7-32 計算に用いた τ_b - S 曲線

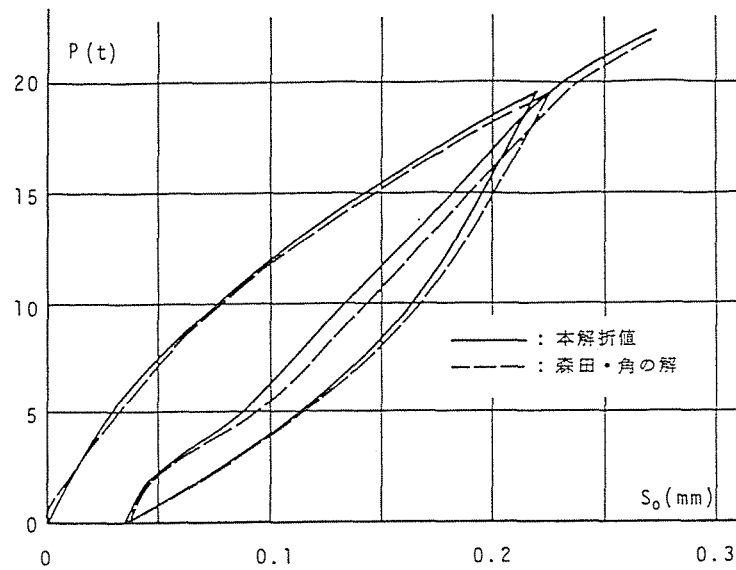
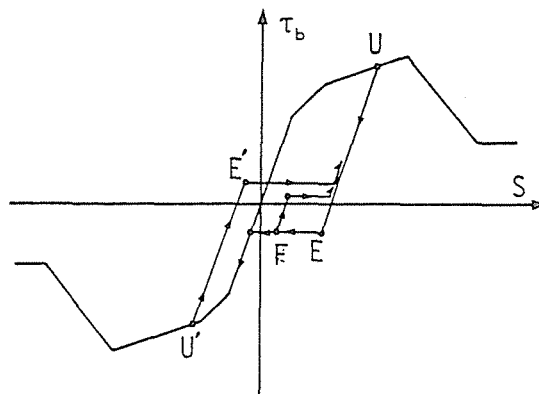


図7-33 荷重－材端すべり曲線－1 森田らの解との比較－



付図7-1 Tassiosらの τ_b -Sモデル

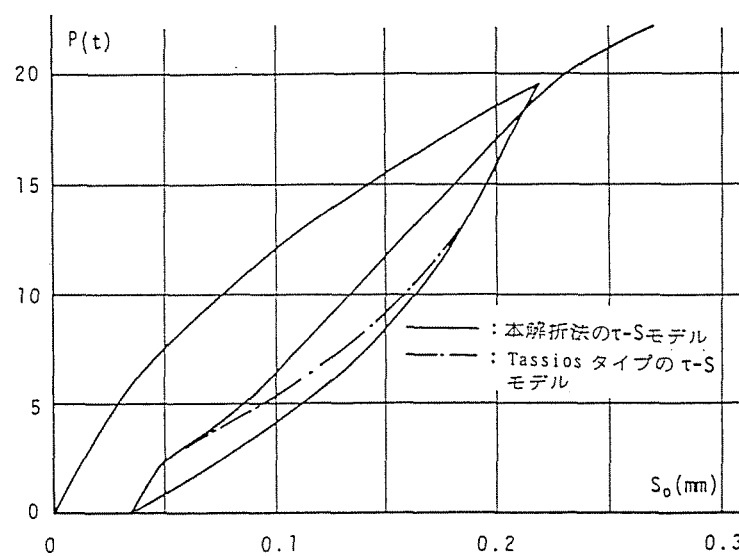
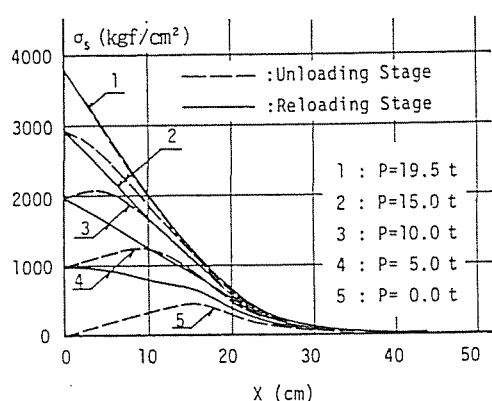


図7-34 荷重－材端すべり曲線－2 Tassiosらの τ_b -S曲線を用いた場合の解との比較－

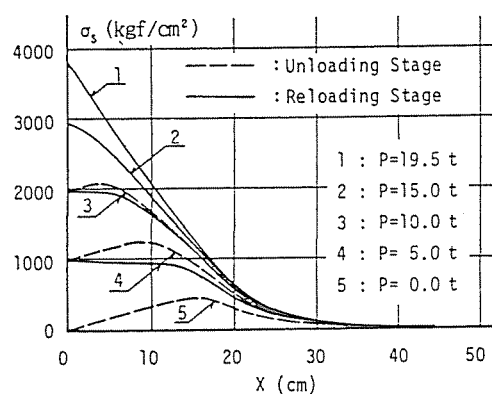
完了と見做しているのに対し、本解析では、部材長 $L=80\text{cm}$ の位置で $S=0$ の拘束条件を

与えている)にも拘わらず、本解析曲線は、森田らの計算値に極めてよく近似しており、本 τ_b -Sモデルは、森田・角の基本則を許容し得る十分な精度で近似していることを知る。

また周知のように、Tassiosら¹²⁾は、前記の森田・角の τ_b -S基本則を参考にしながら、これを幾分簡略化した付図7-1に示すような τ_b -S関係を設定して、RC部材の付着すべり問題に関する幾つかの数値実験を行い、繰り返し載荷に伴う付着劣化の影響について詳細に検討し、その結果について報告している。図7-34は、拘束端からの鉄筋の抜け出しを想定した「この解析モデル」の計算に、付図7-1の τ_b -S関係を使用した場合、自由端点位置における荷重-すべり変位曲線に、如何ような相違が現れるかを調べたものである。同図には比較のため、先の図7-33の本解析値をも再記したが、図によれば、付図7-1

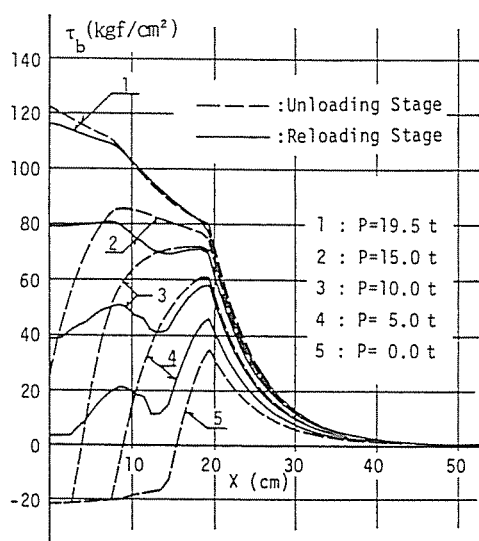


(a) 本 τ_b -Sモデルによる解

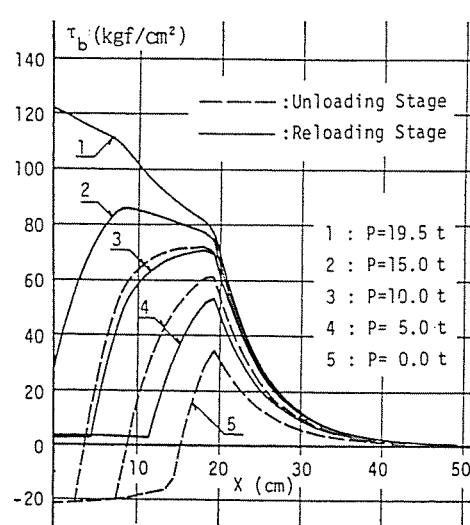


(b) Tassiosらの τ_b -Sモデルによる解

図7-35 材軸に沿う鉄筋応力分布の推移状況の比較



(a) 本 τ_b -Sモデルによる解



(b) Tassiosらの τ_b -Sモデルによる解

図7-36 材軸に沿う付着応力分布の推移状況の比較

の τ_b-S 関係による解は、再載荷曲線は途中から除荷時の曲線に復帰し、再載荷完了時と除荷開始時は完全に一致しており、このTassiosらの τ_b-S 関係では、繰り返し載荷による付着劣化の効果を表現できないことが分かる。図7-35と図7-36には参考のため、除荷および再載荷途上の5つの荷重段階に対する「鉄筋応力」と「付着応力」の分布を、それぞれ本 τ_b-S モデルとTassiosらの τ_b-S モデルを用いた場合の解を対比して図示した。

(5) 引張り亀裂の生ずる両引きモデル部材の解析

亀裂を含む両引きRC棒部材については、既に夥しい数の実験データがあるが、著者の知る限りでは、本解析法を用いて計算する場合に必要な τ_b-S 曲線をも具備した信頼し得るデータは見当らぬようである。したがってここでは、モデル試験体を設定して数値実験を行い、コンクリートの亀裂、および鉄筋の降伏を含むRC棒部材の非線形挙動について若干の検討・考察を試みる。図7-37と図7-38には、それぞれこのモデルRC部材の概要と、計算に用いた仮定 τ_b-S 曲線を示す。尚、このモデル部材の解析に際しては、半部材長を80等分した後、コンクリートの亀裂を表示するための亀裂要素(0.0001mm)を、部材中央を含む位置に10要素おきの等間隔(6.25cm)で8個、また、材軸に沿う応力分布をより詳細に知るため、亀裂要素の両側に長さ0.01mmの通常要素各1個をそれぞれ分散配置し、合計104要素を用いて計算を行った。

(a) 単調載荷時の付着すべり挙動

図7-39は、単調増加荷重を受けるこのモデル試験体の、載荷時以前に生じ得るコンクリ

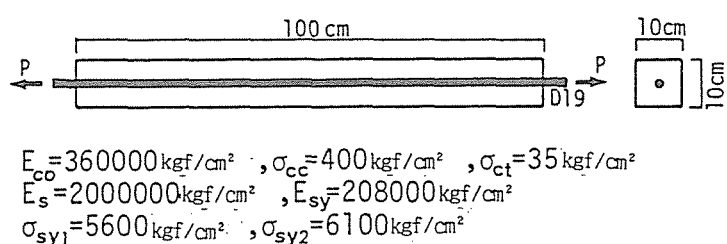


図7-37 両引きモデル試験体の概要

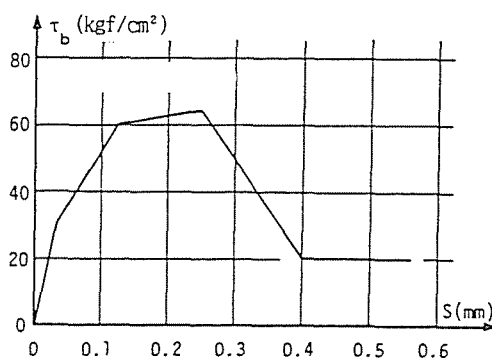


図7-38 仮定 τ_b-S 曲線

ートの乾燥収縮の影響を無視した場合の計算結果を、荷重－平均歪の関係で図示したものである。図中の解析曲線上に明瞭に認められる階段状の水平な部分は、亀裂の発生に伴う鉄筋の急激な抜け出しに起因して生ずるもので、これらの各部に記入した数値は、First Crack以後の亀裂の発生順位を表わしている。また、この解析曲線は、RC部材が亀裂の発生たびごとに急速に剛性を失い、次第に同図中に併記した裸鉄筋の平均歪の値に近づいて行くことを示している。

図7-40には、亀裂幅がどのように拡大形成されていくかを調べるため、各亀裂位置の荷

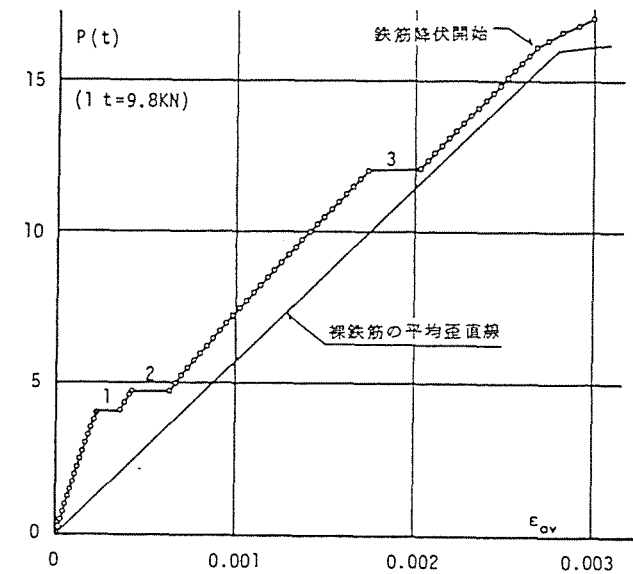


図7-39 荷重－平均歪曲線

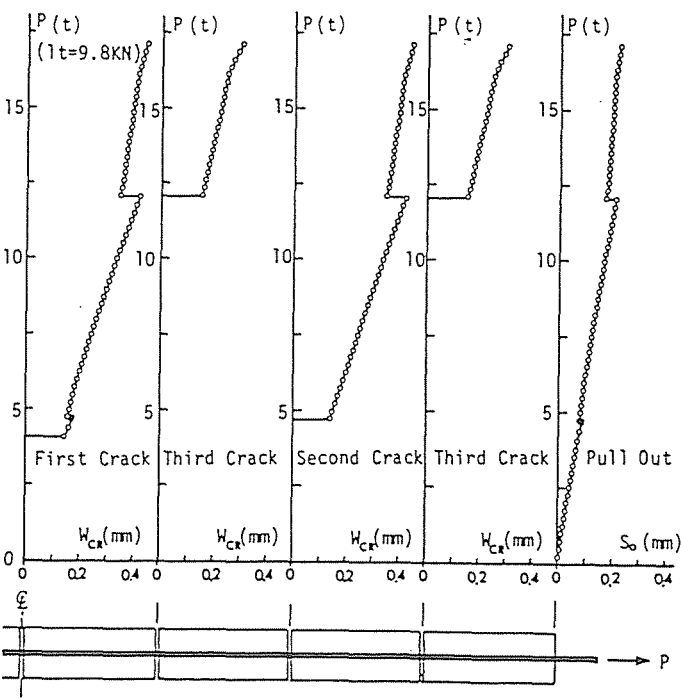


図7-40 荷重－亀裂幅、および材端すべり曲線

重一亀裂幅曲線、および荷重－抜け出し曲線を掲げたが、図の結果は、「或る場所に新たに亀裂が発生する場合、すでに亀裂の生じている他の位置では、応力の再配分によって亀裂幅の一時的な縮小が起こり、各位置の亀裂幅を均等化しようとする動きが認められるが、それでもなお亀裂発生時の荷重差の大きい新・旧亀裂間（例えば、Third Crackとそれ以前のCrack）には、可成り大きな亀裂幅の開きが残る」ことを示唆している。また、図7-41は、このモデル部材の5つの荷重段階に対するコンクリート、鉄筋および付着の各応力の

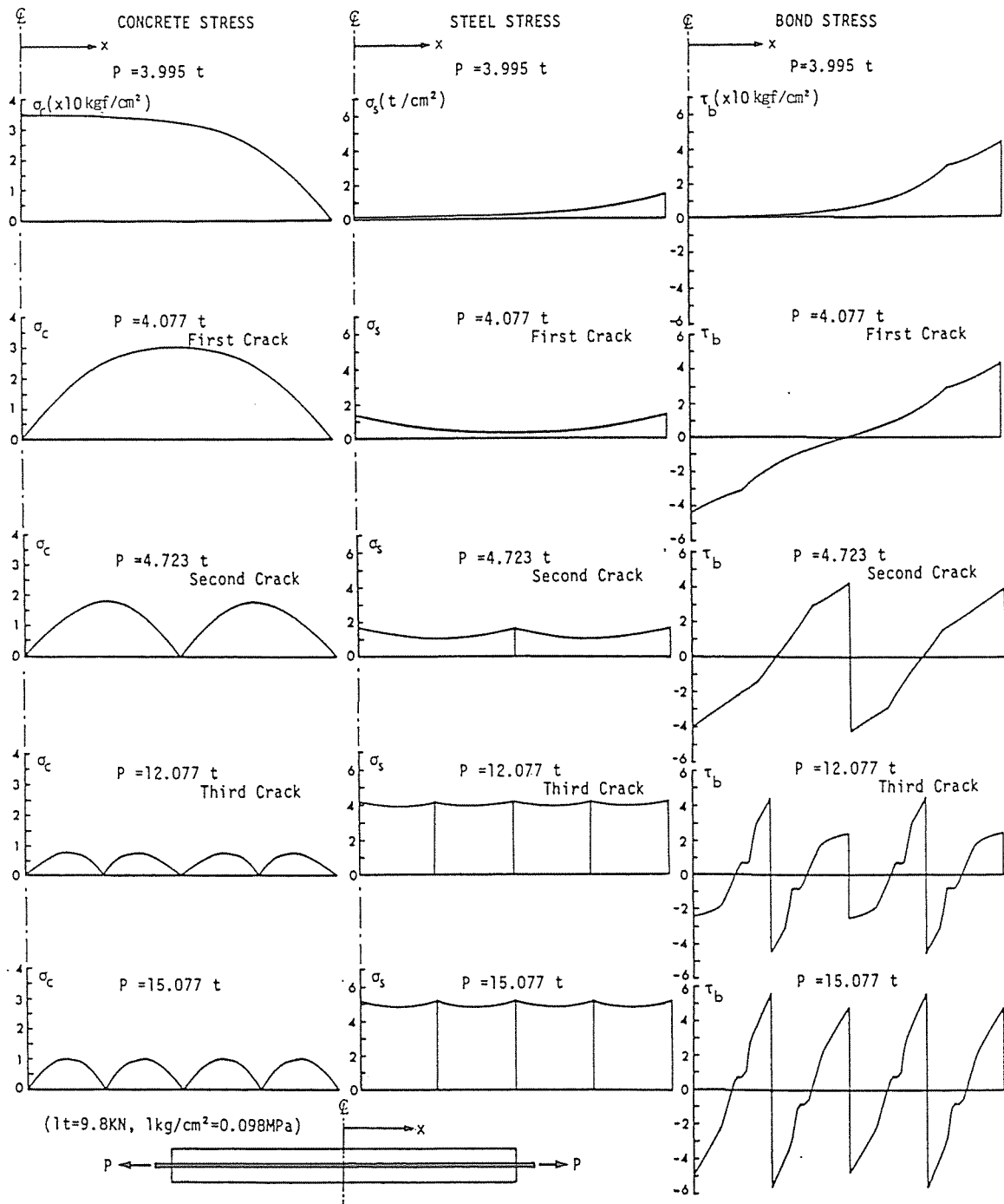


図7-41 材軸に沿う各応力分布曲線の推移

分布形状を例示したものである。この図から、材軸に沿う各応力の分布形状は、荷重の増加に伴う亀裂の発生たびごとに、大きく変化しながら推移しており、部材の受け持つ軸応力分担が、付着応力を介してコンクリートから鉄筋へと次第に移行していく様子を読み取ることができる。この付着応力分布の荷重12.077 t 以降の曲線における、各亀裂間隔中央点近傍の比較的低応力の水平に近い曲線部分は、Third Crackの発生以前に、この部分が受けていた付着応力の載荷履歴の影響によって生じたものである。即ち、これらの曲線部分は、Third Crackの発生に伴って生じたすべり方向の逆転による各部の除荷の影響の名残を表わしている。

(b) 被亀裂試験体の単調載荷時の付着すべり解析

前項(a)では、付着応力の載荷履歴が、亀裂発生後の部材の各応力分布に大きな影響を与えていることを指摘したが、ここでは、この「付着応力の載荷履歴の考慮の有無」が、Third Crack以降における部材の付着すべり挙動に、どのような影響をおよぼすのかを明らかにするため、このモデル試験体に、あらかじめThird Crackの時点と同じように亀裂を入れておいた場合の被亀裂試験体の解析を行ってみる。

図7-42、図7-43、図7-44 は、この被亀裂試験体の解析結果を、荷重－平均歪曲線、荷重－亀裂幅曲線、および材軸に沿うコンクリート、鉄筋、付着の各応力分布形状の形で、それぞれ対応する先の図7-39～図7-41の結果と比較したものである。これらの各図には、載荷履歴の考慮の有無の差が明瞭に現れており、載荷履歴を無視すると、亀裂幅はすべての位置で同じ大きさとなり、また、材軸に沿うコンクリートと付着の各応力分担を過大に評価することを示している。

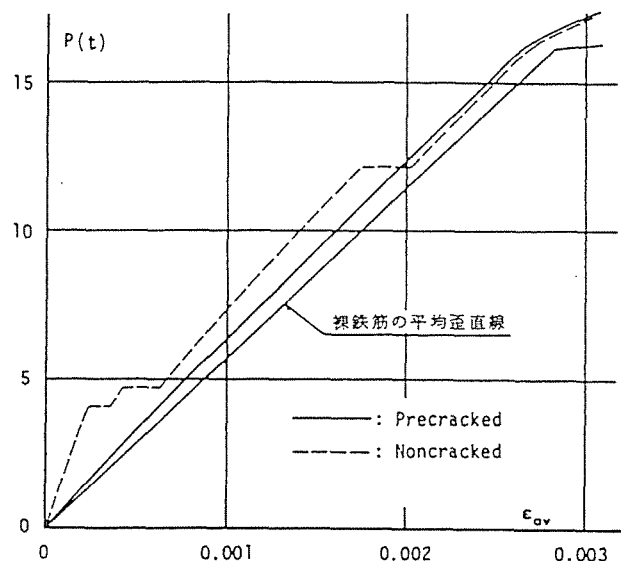


図7-42 既亀裂試験体の荷重－平均歪曲線

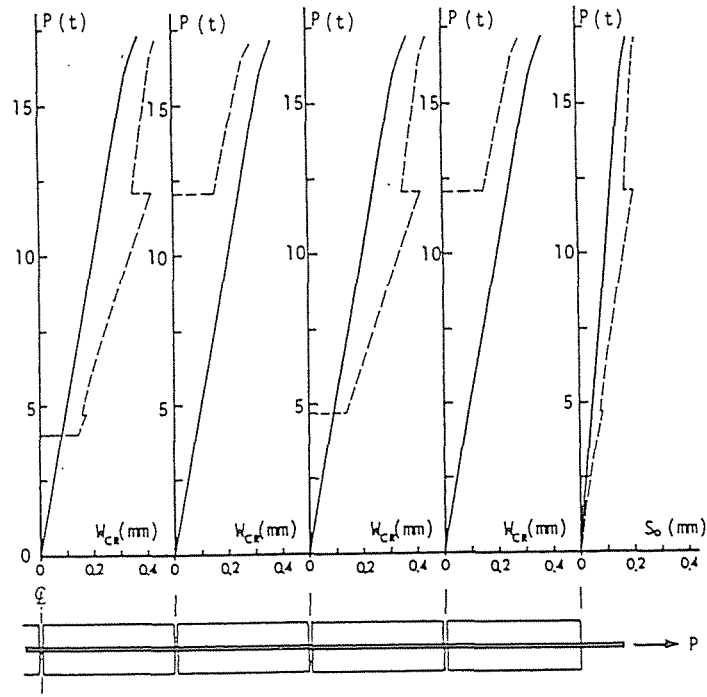


図7-43 既亀裂試験体の荷重－亀裂幅、および－材端すべり曲線

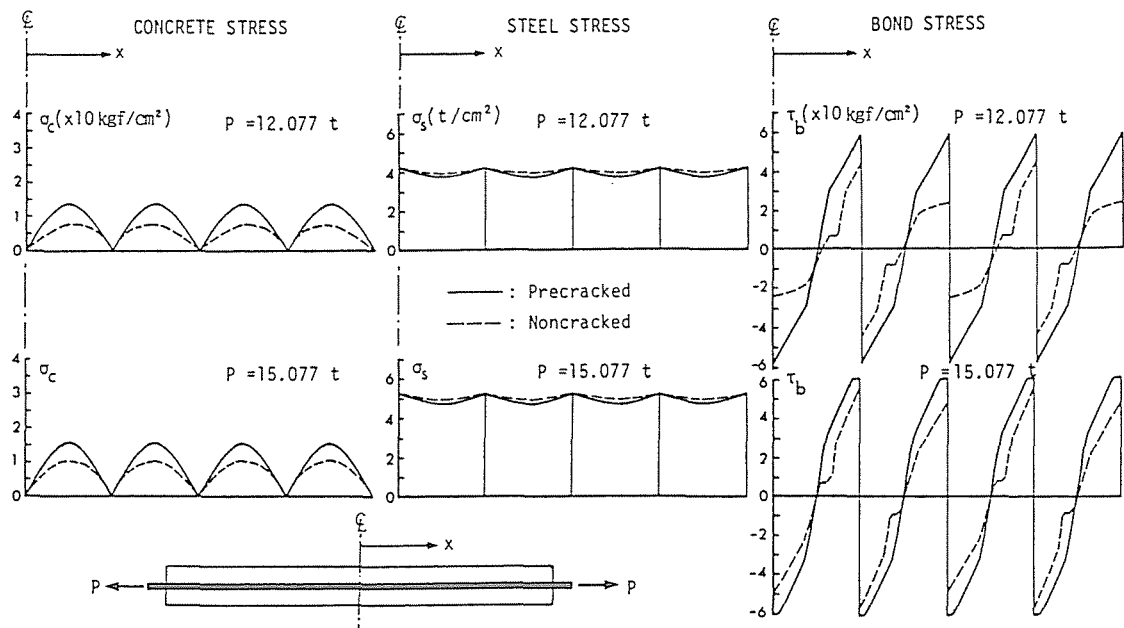


図7-44 既亀裂試験体の材軸に沿う各応力分布

(c) 繰返し載荷時の付着すべり挙動

繰返し荷重を受ける部材の計算例を示すために、処女載荷途上の荷重 $P=10\text{ t}$ の時点から荷重 $P=0$ の時点まで除荷し、再び鉄筋が降伏するまで載荷した場合の解析を行ってみる。ただし、この試験体のコンクリートには、載荷開始前に乾燥収縮歪 $\varepsilon_{sh}=-0.0002$ が生じているものとする。

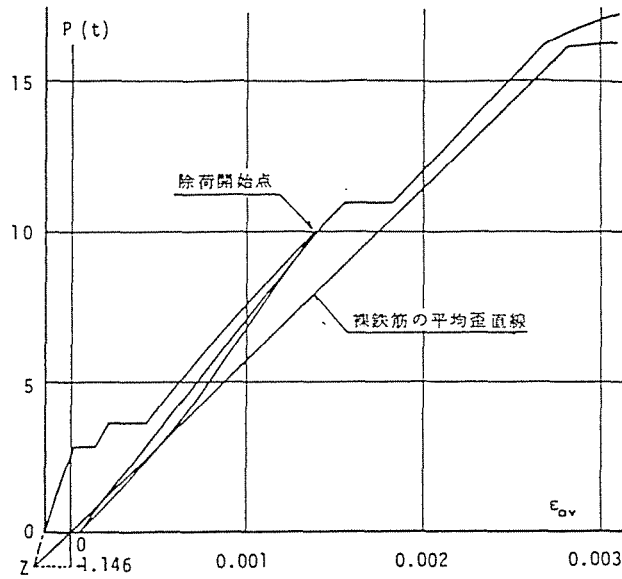


図7-45 荷重－平均歪曲線

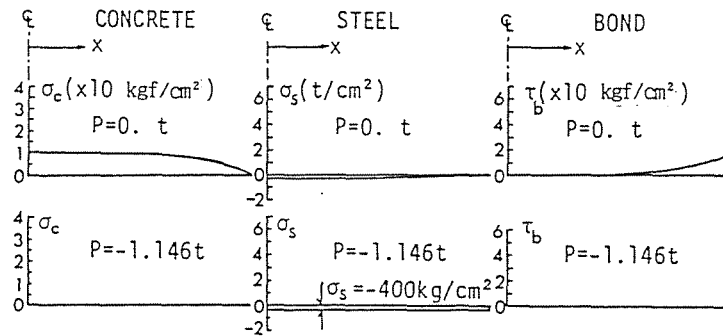


図7-46 $P=0$, $P=-1.146\text{ t}$ の時の材軸に沿う各応力分布

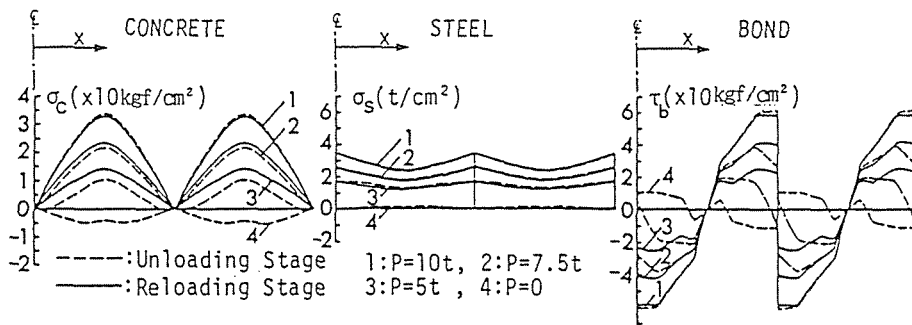


図7-47 除荷および再載荷時における各応力分布の推移

図7-45に、この部材の荷重－平均歪解析曲線を示す。図からも明らかなように、この部材には載荷開始前に、コンクリートの乾燥収縮によって負の平均歪が生ずるため、荷重 $P=0$ におけるこの解析曲線と裸鉄筋の歪は一致しない。図中には参考のため、この試験体に逆方向の押し込み荷重を加え、本解析曲線と裸鉄筋の歪直線の交差する位置 z を求めたときの計算結果を併記した。図7-46には、載荷前 ($P=0$) と z 点における、材軸に沿うコ

ンクリート、鉄筋、付着の各応力分布を例示したが、 $P=0$ ではコンクリートの乾燥収縮によって、コンクリートと鉄筋には、それぞれ引張り応力と圧縮応力が生じており、また、 z 点においては、コンクリートと付着はともにゼロ応力状態にあり、鉄筋にのみ一様な圧縮応力 ($\sigma_s = -400 \text{ kgf/cm}^2$) が生じることになる。また、図7-47は、 $P=10 \text{ t}$ から $P=0$ の4段階の荷重に対するコンクリート、鉄筋、付着の各応力の、除荷および再載荷時における材軸に沿う分布形状の推移を対比して掲げたが、これらの各応力分布には、荷重の繰り返しによる付着劣化の影響が明瞭に現われている。

7.4.2 R C梁部材の非線形計算例

本章の第3節で展開したR C梁部材の材料非線形解析法を用いて、既往のR C梁の実験結果との比較を行い、若干の検討・考察を試みることにする。

(1) 林らの片持ち実験梁³¹⁾の解析

図7-48に、ここで解析の対象とした林らの片持ち梁の概要と材料の力学性状を示す。自由端近くに集中荷重を受けるこの梁の鉄筋は、上下とも梁先端と拘束端（図の中央部の厚肉部）から7.5cmの位置で完全に定着されており、また、梁の下側のコンクリート部分には、拘束端とそれから20cm離れた位置に、それぞれPrecrackを想定した絶縁用の鋼板（厚さ0.5mm）が、下端筋下面まで挿入されている。図7-49には、計算に用いた仮定 τ_b-S 関係を掲げたが、この仮定曲線は、亀裂近傍の付着劣化をも考慮して、林ら自らが実験結果に基づいて設定した τ_b-S 関係そのままであり、比較のため後に掲げる林ら自身の解との整合性をとるため、 τ_b が最大値に達した後の付着応力逓減領域を敢えて設定していない。また、解析にあたっては、コンクリート断面を梁丈方向に14層分割して、図7-50に示すような「部材中の Precrack位置に亀裂要素を挿入した要素分割」を用い、更に、こ

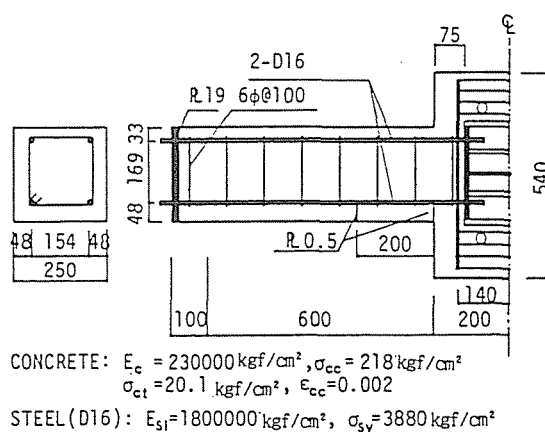


図7-48 林らの片持ち梁試験体の概要

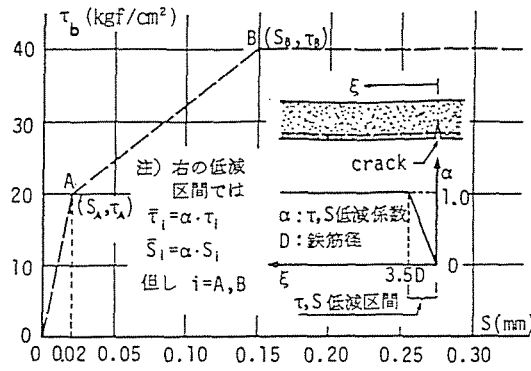


図7-49 解析に用いた $\tau_b - S$ 曲線

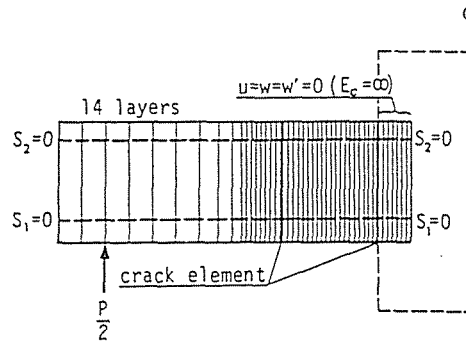


図7-50 解析に用いた要素分割と拘束条件

の梁は、「拘束部ではコンクリート断面が無限大であり、鉄筋のすべり出しのみが生ずる」ものとして計算を行った。なお、この実験結果は、本解析法を用いて計算する際に必要となる材料性状が、全て明記されたものとしては、著者が見出し得た唯一の例である。

(a) 林らの実験および計算結果との比較

図7-51は、本解析法によるこの梁の計算結果を、林らの実験および解析値と比較するため、載荷点における荷重－変位曲線で示したもので、図7-52は、荷重 $P=7t$ の時点为例に

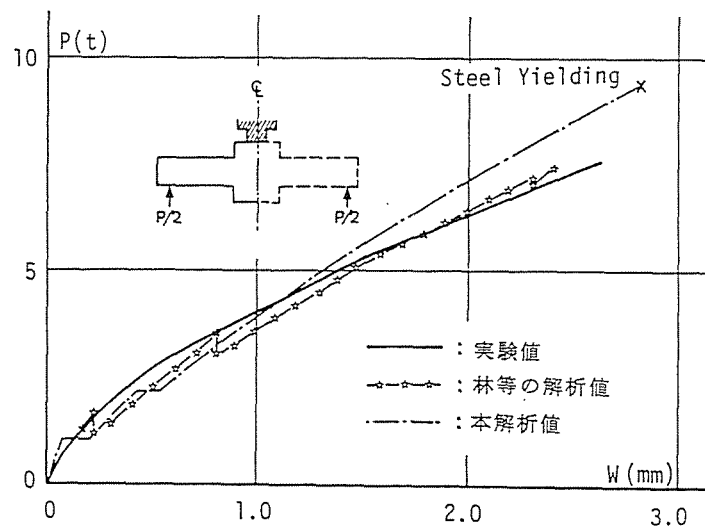
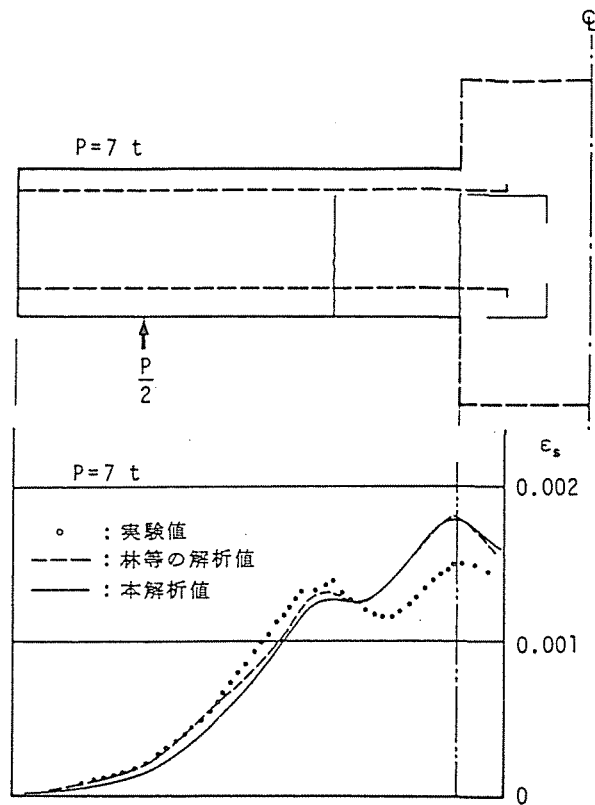
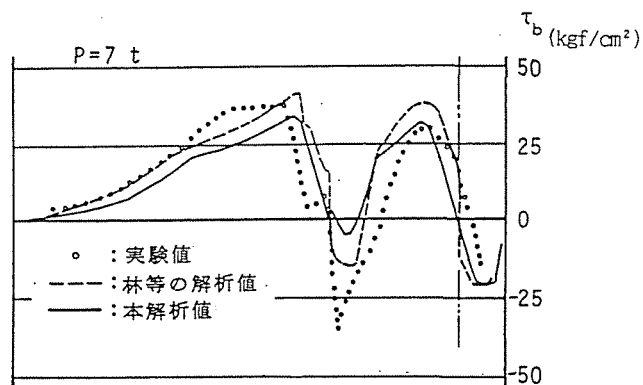


図7-51 載荷点における荷重－変位曲線の実験値との比較



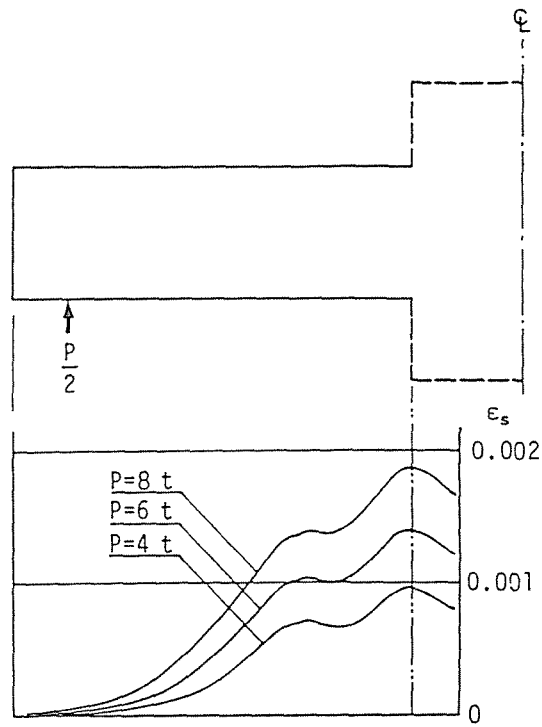
(a) 引張り側鉄筋の歪分布



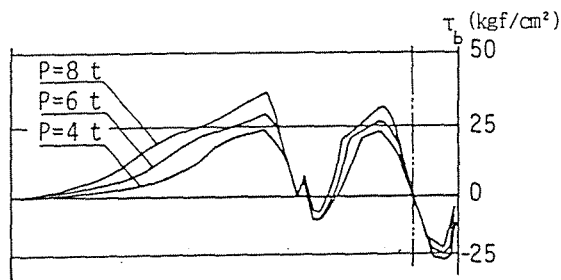
(b) 引張り側鉄筋に沿う付着応力

図7-52 P=7tの時点の材軸に沿う鉄筋応力と付着応力分布の実験結果との比較

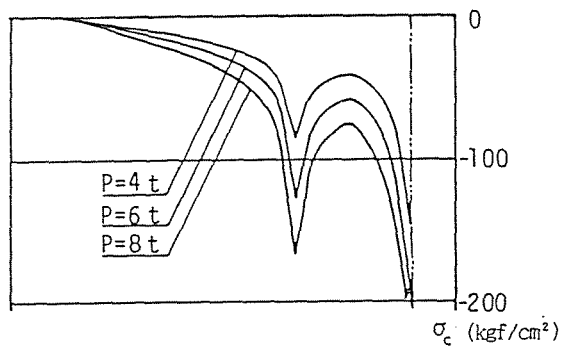
とり、この梁の材軸に沿う下端筋の鉄筋応力と付着応力に対する先の3者の値を、それぞれ対比して図示したものである。これらの図の結果によれば、本解析値は、図7-51の荷重－変位曲線の高荷重領域において、その解の精度が低下しているが、図7-52の各応力分布を含め、実験曲線の全体的な傾向を可成りよく表現している。このように高荷重領域において本解析値の精度が低下するのは、「本解析法が、RC梁の曲げ変形のみを対象としており、鉛直剪断変形を考慮したものではない」ことに起因するものと考えられるから、これは寧ろ「当然の帰結」として解釈し得るものである。したがって、本解析によって得られたこの図の結果は、「林らの解が、実験時の亀裂パターンを模した要素分割を用い、現



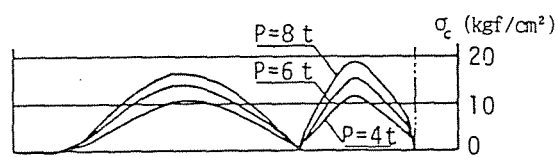
(a) 引張り側鉄筋の歪分布



(b) 引張り側鉄筋に沿う付着応力



(c) 圧縮側コンクリートの縁応力分布



(d) 引張り側コンクリートの縁応力分布

図7-53 材軸に沿う各応力分布解析曲線の推移状況

時点では、この種の問題を最も実際に近い状態で追跡することが可能とされている、ボンドリックとトラックリンクを導入した2次元有限要素解析によって得られた結果である」こと等を考え合わせると、十分に満足し得るものであり、本非線形解析法の妥当性を窺い知ることができるように思われる。

図7-53には参考のため、3段階の荷重を対象として、本解析法による下端筋の鉄筋応力と付着応力、および、梁上・下面のコンクリートの縁応力分布曲線の推移状況を例示して掲げた。実験値が示されていないため、図中のコンクリートの計算縁応力分布が、実際の曲線にどの程度近似するかは不明であるが、少なくとも、その形状が“それらしい形”をしていることだけは確かなようである。

(b) 完全付着の仮定に基づく既往の解析値³²⁾との比較

R C梁・柱部材の有力な材料非線形解析法として、完全付着の仮定に立脚し、tension stiffening effectの概念に基づく積層要素(Fiber要素)による有限要素解析法があることは周知のとおりである。この方法は、計算上の取り扱いが比較的容易で、なおかつ実際のR C部材の変形挙動を可成りよく追跡することが可能なため、長期変形を含めた各種R C構造の問題に使用されている。ここでは、前項(b)の林らの実験梁を再び取り挙げ、亀裂の生じたコンクリート部分にtension stiffening effectによる引張り応力分担を、歪に逆比例させて逡減していく既往の“完全付着の仮定に基づく既往の有限要素解³²⁾”(以下「完全付着の既往解」と略記)と、本解析値との比較を中心にして二、三検討を行ってみる。

図7-54は、この完全付着の既往解、本解析値および実験値を、先の場合と同様、載荷点の荷重－変位曲線で比較したものである。この例では、完全付着の既往解は、この梁の剛

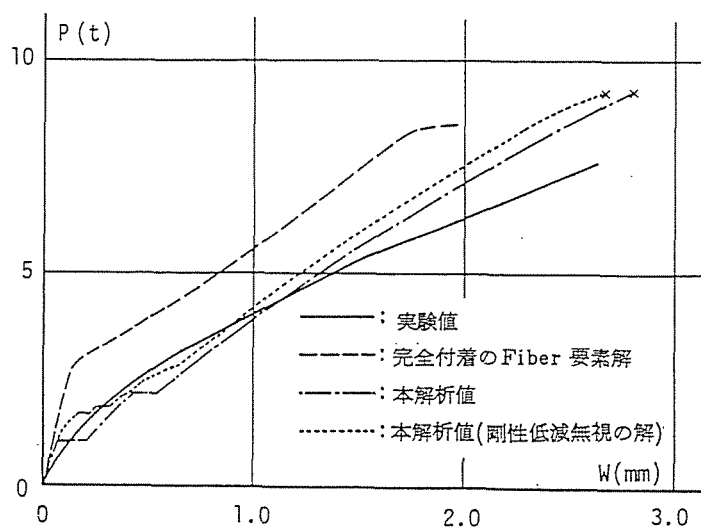
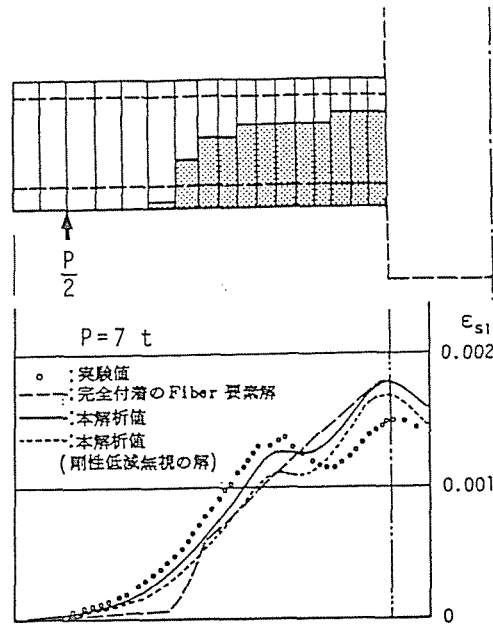
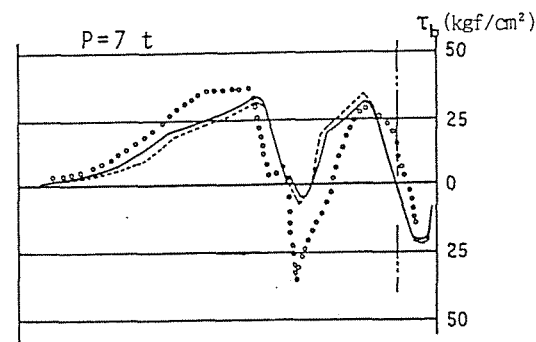


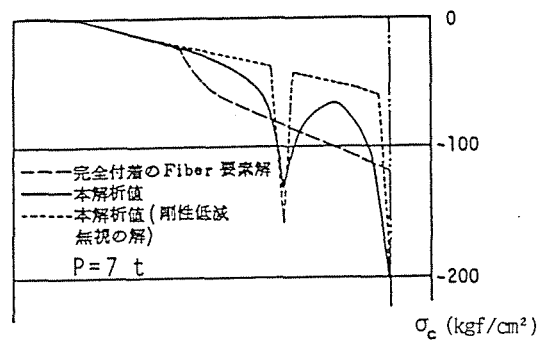
図7-54 載荷点における荷重－変位曲線の既往解との比較



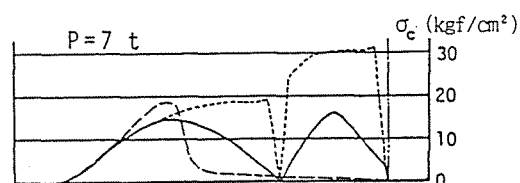
(a) 引張り側鉄筋の歪分布



(b) 引張り側鉄筋に沿う付着応力



(c) 圧縮側コンクリートの縁応力分布



(d) 引張り側コンクリートの縁応力分布

図7-55 P=7tの時点の材軸に沿う鉄筋応力と付着応力分布の既往解との比較

性を可成り過大に評価しており、既往の研究で報告されている単純支持梁の実験値との良好な近似結果とは掛け離れた傾向を示している。この原因の一つとしては、完全付着の解では、片持ち梁の拘束端からの鉄筋のすべり出しの影響を考慮することが出来ないことを挙げることができよう。図7-55にはまた、荷重 $P=7t$ のときの下端鉄筋の歪と付着応力、および梁上・下面のコンクリートの縁応力分布を、それぞれの解と比較して掲げたが、これらの図の結果も、完全付着の既往解では、鉄筋の応力分布はともかく、梁上・下面のコンクリートの縁応力状態は、予想し得る実際の分布とは程遠い形状となることを示している。したがって、このような完全付着の仮定に基づくRC梁の解析法を、クリープのようなコンクリートの応力状態に大きく依存する「長期変形挙動の解析」に適用することには、可成り無理があることが分かる。

また、ここまでの考察では、論点が不明確になることを避けるため、殊更に触れなかったが、上の両図には、本解析法で提案し使用している「引張り側コンクリートの亀裂近傍領域における剛性の簡略化低減法」の効果を調べるため、この剛性低減の処置を行わなかった場合の本解析値（図中の剛性低減無視の解と明記）をも併記した。これらの解析結果は明らかに、本解析法で用いた亀裂近傍の引張り側コンクリート剛性の“簡略化低減法”の有効性を傍証している。

（２） 鈴木らのRCおよびPRC単純支持実験梁³³⁾の解析

周知のように、通常強度のコンクリートを用いたRC構造に、高強度鉄筋を使用した場合、短期的には部材強度の増進、使用鋼材量の低減、配筋作業の簡略化など、多くの利点が発揮されるが、長期荷重下においては、設計に際して、その強度に見合う高い鉄筋応力を許容すると、コンクリートの亀裂幅や部材全体の撓みが大きくなるという問題が生じ、高強度鉄筋の有効な利用範囲は、“高強度コンクリート使用のRC構造”への適用など、

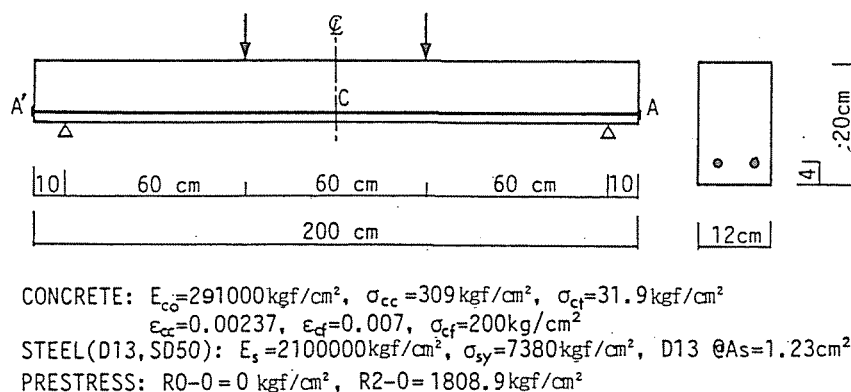


図7-56 鈴木らの単純支持梁試験体の概要

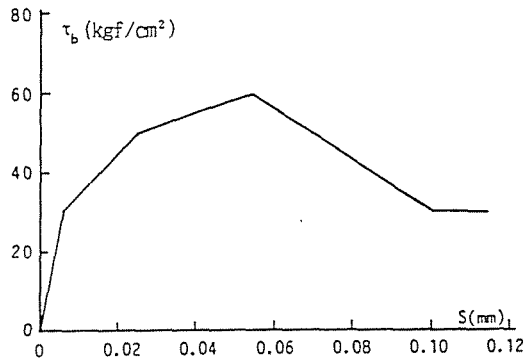


図7-57 計算に用いた仮定 τ_b - S 曲線

極めて狭い領域に限定されることになる。大阪大学の鈴木教授らは、高強度鉄筋の活用の場を飛躍的に拡大するために、高強度鉄筋そのものを緊張鋼材として使用するP R C構造の有用性に着目し、その実用化を目的とした一連の研究を精力的に行っており、幾多の注目すべき成果をあげている^{34)~38)}。

ここでは、高強度鉄筋を用いたコンクリート梁に関する鈴木らの論文の中から、図7-56にその概要を示すR CおよびP R C梁各一体を例にとり、解析を行ってみる。ここで取り挙げる実験梁は、試験体名 R0-0とR2-0の2種であり、「前者のR0-0がプレストレス無しのR C梁であるのに対し、後者のR2-0は有効プレストレス 1808.9kg/cm^2 のP R C梁である」ほかは、部材長、断面寸度、材料の力学性状など全て同一（図7-56参照）である。また、図7-57には解析に用いた仮定 τ_b - S 曲線を掲げる。

尚、これらの梁の解析に際しては、梁の半部材長（対称性を考慮）の曲げモーメント一定区間部分では0.5cm間隔で、またその他の区間では0.6cm間隔で、それぞれ要素分割した

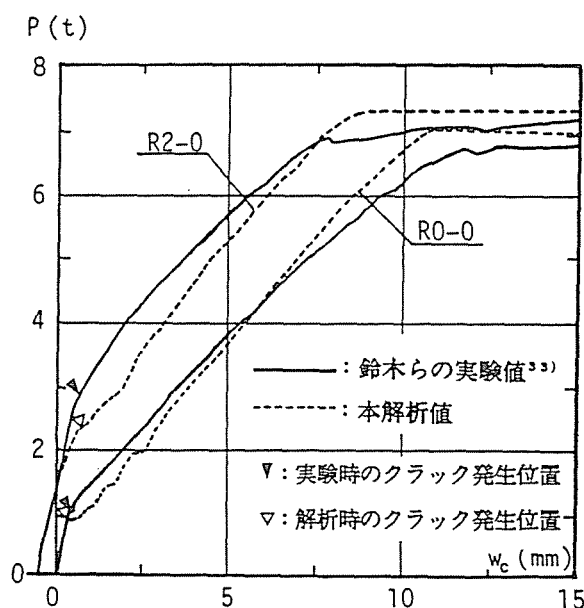
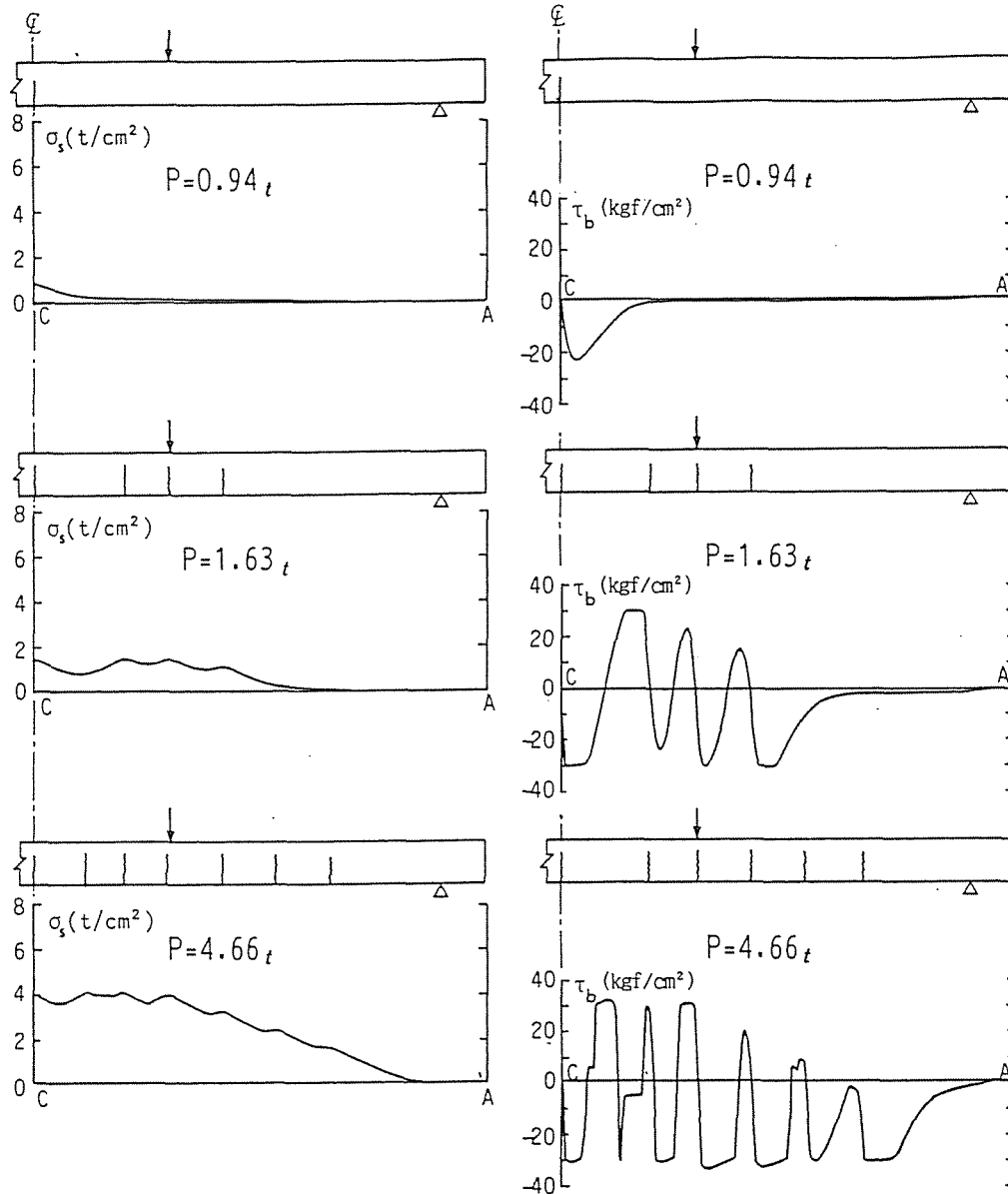


図7-58 梁中央点における荷重 - 変位曲線の実験結果との比較



(a) 鉄筋の応力分布

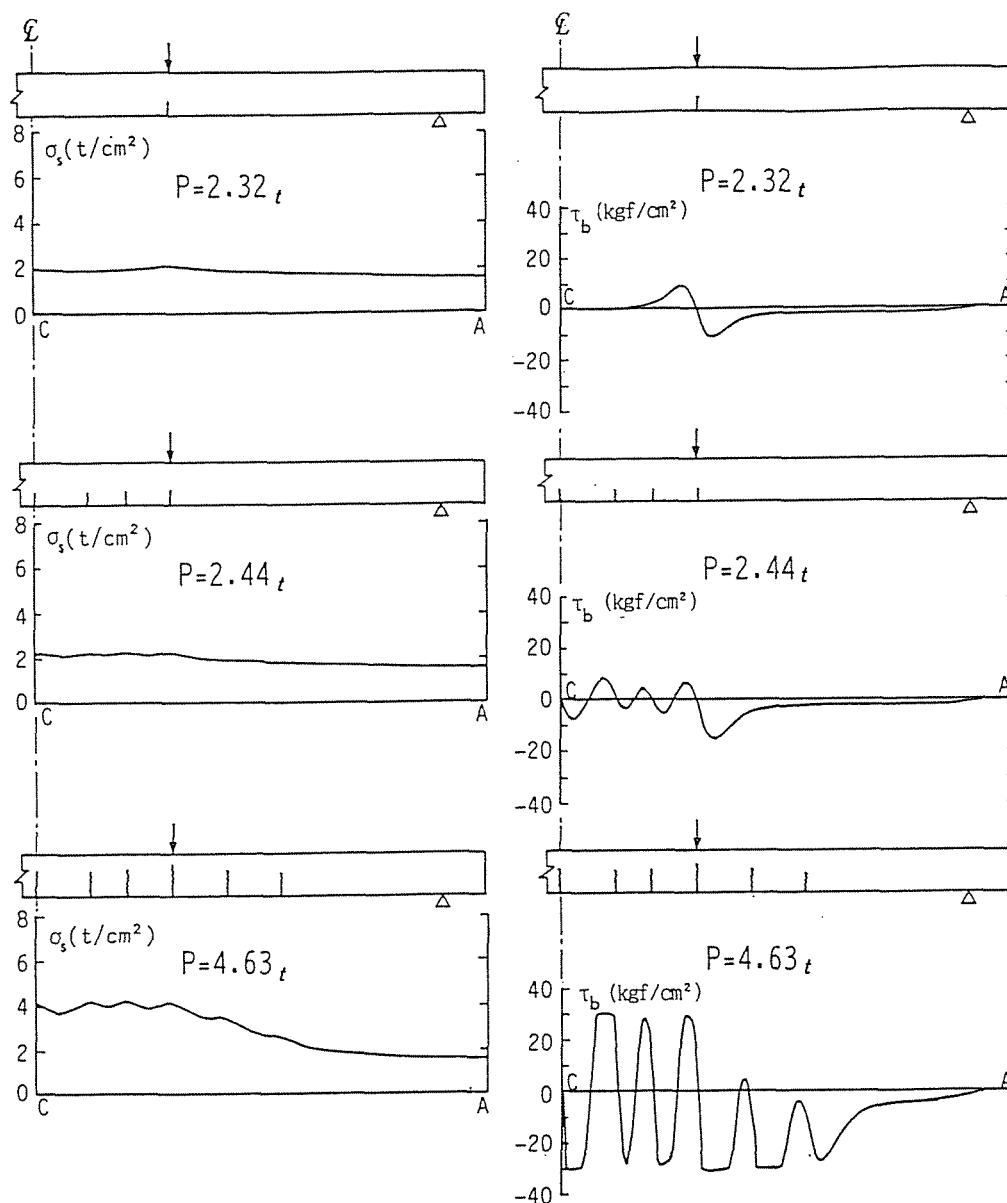
(b) 付着応力分布

図7-59 R0-0梁の材軸に沿う鉄筋応力および付着応力分布解析曲線の推移

後、全ての区間において、亀裂要素 (0.01cm) を4要素おきに分散配置した総計222の要素を用い、さらに梁の横断面を全て梁丈方向に14層に仮想分割して計算を行った。

図7-58は、両試験体の本解析値と実験結果を、梁の中央点における荷重－変位曲線で比較したもので、図中には、実験および解析によって得られた初亀裂の発生位置も明記して図示してある。図の結果からも知り得るように、R0-0およびR2-0の両者とも、本解析値はそれぞれの実験曲線に比較的良好に追従しており、本非線形解析法が、RC梁のみならずプレストレス力の作用するPRC梁の荷重－変形応答をも表現可能なことを示している。

また、図7-59と図7-60には、試験体R0-0とR2-0のそれぞれについて、3種の荷重段階を

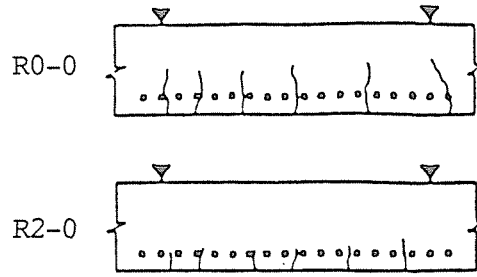


(a) 鉄筋の応力分布

(b) 付着応力分布

図7-60 R2-0梁の材軸に沿う鉄筋応力および付着応力分布解析曲線の推移

例にとり、本解析法によって得られた「材軸に沿う鉄筋応力と付着応力分布の推移状況」を掲げた。図中の各解析曲線の上方の梁側面図には、計算上得られた亀裂位置と亀裂depthをも明示したが、両梁に生ずる亀裂の数（計算上の）は、両図中に示されている最大の荷重段階（試験体R0-0では $P=4.63t$ 、R2-0では $P=4.63t$ の各段階）の状態が最終的なものであり、両者とも亀裂の数はそのまゝの状態、亀裂depthが次第に深くなり、圧縮側コンクリートの圧壊および鉄筋の降伏を伴って終局に至っている。R0-0、R2-0の各梁の初亀裂位置をみると明らかなように、本計算例では自重を作用させた後、載荷を開始しているため、RC梁R0-0では、初亀裂は中央点に生じているのに対して、プレストレスの作用す



付図7-2 P=4.66tの時点の実験亀裂図

るP R C梁 R2-0では、載荷点直下の位置に発生しており、計算上得られる初亀裂位置は両者間で異なっている。しかしながら、亀裂depthには差が認められる（R2-0にはプレストレスが存在するから、亀裂depthがR0-0より浅くなるのは当然である）が、最終的な亀裂の数とその発生位置については、両者間に明確な差異は生じていない。また、付図7-2には、参考のため、これらの梁の荷重 $P=4.66t$ の時点でのモーメント一定区間 B-B'（図7-56）における平均亀裂間隔の実験値を図示したが、これらの結果と本解析による先の両図（図7-59と図7-60）の対応する亀裂図とを比較すると明らかなように、解析値は実験結果に比較的良好に対応しており、「本解析手法は、コンクリート梁の亀裂現象を、可成り実際に近い形で追跡し得る可能性がある」ことを示唆している。

7. 5 本章のまとめ

第7章では、第2章から第6章において展開してきた「補強材とコンクリート間の付着すべり作用を考慮したコンクリート構造部材のための弾性解析法」を、材料非線形領域にまで拡張するための基本的な手法を模索・修得することに主眼をおき、その最も基本的な一、二の問題への適用を試みた。

即ち、まず第2節では、鉄筋コンクリート構造部材における材料非線形付着すべり問題の最も単純な例として、軸方向力のみを受けるR C棒部材を取り上げ、①コンクリートの引張り亀裂と圧縮側における非線形な応力-歪性状、②鉄筋の弾・塑性性状、③鉄筋とコンクリート間の繰返し載荷を含む非線形な付着応力-すべり変位モデルなどを設定し、更に、④亀裂要素を導入することによって、荷重の増大とともに、コンクリートに生ずる断続的な引張り亀裂現象と、これに伴う亀裂幅の拡大の様相を、計算を中断することなしに、連続して追跡し得る“新たな解析手法”の提案を行った。また、第4節の数値計算例では、解析値と既往の実験結果との比較・検討をおこなって、本非線形解析手法の妥当性を検証し、さらにまた、両引きモデル試験体を対象にして亀裂の発生を伴う場合の、単調載

荷および繰り返し荷を受ける場合の解析例を示して、1) 新・旧亀裂間の亀裂発生時の荷重差が大きければ、付着応力の荷履歴の影響により、亀裂幅は新しい方が古いものよりも小さくなること、2) 荷履歴を無視すると、コンクリートと付着の各応力分担が過大評価され、全亀裂幅が等しい値となることなど、従来明らかにされていなかった新たな知見を得た。

第3節においては、RC梁部材の材料非線形解析を可能にするため、第2節で述べた基本手法をさらに発展させ、亀裂発生後の梁の変形挙動をより実際に近い形で追跡することを意図して、亀裂近傍の引張り側コンクリートの剛性を低減するための、一簡略化手法を導入した新たな非線形解析法を展開した。また、第4節の数値計算例では、林らの片持ちRC梁の実験ならびに解析値、更には、鈴木らの単純支持のRCおよびPRC梁の実験結果と、本解析値との比較・検討を行って、本非線形解析法が、この種の問題の有用な解析手段の一つとなり得る可能性のあることを明らかにした。

第7章の参考文献

- 1) 上田正生、土橋由造：鉄筋コンクリート部材の材料非線形付着滑り解析、土木学会北海道支部論文報告集、第40号、1984, 2.
- 2) 上田正生、土橋由造：引張り力を受けるRC部材の付着滑り挙動解析、土木学会北海道支部論文報告集、第41号、1985, 2.
- 3) 上田正生、土橋由造：軸力を受ける鉄筋コンクリート棒部材の材料非線形付着すべり解析、土木学会論文集、第360号/V-3, 1985, 8.
- 4) Rehm, G. : Über die Grundlagen des Verbundes Zwischen Stahl und Beton, Deutscher Ausschuss für Stahlbeton H. 138, 1961.
- 5) Holmyanski, M.M. et al : The transmission of prestress to concrete by bond, The third congress of FIP, Berlin, 1958.
- 6) 六車 熙、森田司郎、富田孝次郎：鋼とコンクリートの付着に関する基礎的研究、日本建築学会論文報告集、第131, 132, 134, 139号, 1967, 1, 2, 4, 9.
- 7) 田 政範、島田静雄：鉄筋とコンクリートの付着に関する基礎的研究、土木学会論文報告集、No.217号, 1973, 9.
- 8) 中島 亨、山本康弘：鉄筋コンクリートの付着応力度の履歴とひびわれの復元性に関する研究、土木学会論文報告集、No.219, 1973, 11.
- 9) 中田慎介：付着特性を考慮した鉄筋コンクリート部材の復元力特性に関する研究、日本建築学会関東支部研究報告集、第41号、1971, 1.
- 10) Tassios, T.P. and Yannopoulos, P.J. : Analytical Studies on Reinforced Concrete Members under Cyclic Loading based on Bond Stress-Slip Relationship, ACI Journal, Vol.78, 1981.
- 11) Shafer, H. : A Contribution to the Solution of Contact Problems with the Aid of Bond Element, Computer Method in Applied Mechanics and Engineering, Vol.6, 1975.
- 12) 青柳征夫、佐藤良一：低温度下における鉄筋コンクリート引っ張り部材の変形とひびわれ性状、セメント技術年報、V.32, 1978.
- 13) 田辺忠顕、呉 智深、加藤千貴：クラックひずみ分布関数を用いたRC単軸要素の引っ張り剛性に関するFEM解析の定式化、コンクリート工学年次論文報告集、第11巻2号, 1989.
- 14) 川本腓万、林 正夫：地盤工学における有限要素解析、倍風館, 1984.
- 15) Saenz, L.P. : Discussion of equation for the stress-strain curve of concrete, by Desay and Krishnan, ASCE, Vol.99, No.EM4, 1973, 4.
- 16) 森田司郎、角 徹三：繰り返し荷重下における鉄筋とコンクリート間の付着特性に関する研究、日本建築学会論文報告集、第229号、1975, 3.
- 17) 吉織雅夫・山田嘉昭 監訳, Zienkiwicz : The finite element method, Third edition, 倍風館, 1984.
- 18) 土木学会編：土木工学における数値解析、サイエンス社、1980.

- 19) 上田正生、土橋由造：補強筋のすべりを考慮したRC梁部材の曲げについて、土木学会北海道支部論文報告集、第41号、1985,2.
- 20) 上田正生、土橋由造：補強筋のすべりを考慮した鉄筋コンクリート梁部材の材料非線形解析、土木学会北海道支部論文報告集、第42号、1986,2.
- 21) 上田正生、土橋由造：補強筋のすべりを考慮した鉄筋コンクリート梁部材の曲げ変形解析、土木学会論文集、第372号/V-5、1986,8.
- 22) 松浦 誠、山本春行：鉄筋コンクリート梁・柱部材の非線形及び時間依存性挙動、日本建築学会論文報告集、第322号、1982,12.
- 23) Sato,R. and Aoyagi,Y. : Studies on deformation and crack of reinforced concrete flexural members under low temperature, Proceedings of JSCE, No.329,1983,2.
- 24) Sato,R. , Aoyagi,Y. and Kanazu,T. : Experimental and theoretical studies on the behaviours of flexurally restrained reinforced concrete members, subjected to temperature gradient, Proceedings of JSCE, No.348, 1984,8.
- 25) 小坂静雄、谷川恭雄、山田和夫：エンドクロニック理論による鉄筋コンクリートの非線形解析、第1報、第2報、日本建築学会論文報告集、第326号、第330号、1983,4,8.
- 26) 坂田弘安、和田 章、林 静雄、黒正清治：接合部せん断変形、鉄筋の付着すべりを考慮した分割要素法による鉄筋コンクリート骨組みの弾塑性解析法、日本建築学会論文報告集、第386号、1988,4.
- 27) 坂田弘安、和田 章、林 静雄、黒正清治：曲げ降伏する軸方向伸びを考慮した鉄筋コンクリート骨組みの弾塑性挙動に関する解析研究、日本建築学会論文報告集、第396号、1989,2.
- 28) 六車 熙、森田司郎、富田孝次郎：曲げひびわれを生じた鉄筋コンクリートはり材の応力状態と変形に関する研究、日本建築学会論文報告集、第200号、1972,10.
- 29) 原 喬ほか：RC部材の長期たわみに関する解析的研究、竹中技術研究報告、第15号、1976,3.
- 30) Tassios,T.P. and Yannopoulos,P.J. : Analytical studies on reinforced concrete members under cyclic loading based on bond stress-slip relationship, Journal of ACI, Vol.78, 1981,6.
- 31) 林 静雄、吉田弘行、黒正清治：ひびわれ近傍における異形鉄筋とコンクリートの付着性状に関する実験的研究、日本建築学会論文報告集、第348号、1985,2.
- 32) 和田俊良、上田正生、土橋由造：ひびわれ後のコンクリートの引張り剛性を考慮したRC部材の短期材料非線形解析、日本建築学会北海道支部研究報告集、No.57,1984,3.
- 33) 鈴木計夫、大野義照、白井敏彦：高強度鉄筋を用いてプレストレスを導入したPRCはりの曲げ性状、コンクリート工学年次論文集、Vol.9-2, 1987.

第8章 研究の総括と今後の課題

8. 1 研究の総括

本論文は、既往の有限要素解析において多用されているボンド・リンクのような“数値計算上のテクニック”としてではなく、「補強材とコンクリート間の付着すべり作用そのもの」を、解析理論に直接組み入れた場合の、コンクリート構造部材、即ち、① 直線配筋を有するRC棒、梁、および床板と、② 曲線テンドンを有するPC梁並びに床板のための「より適用性の広い解析手法」を確立するために行った研究で、全8章より構成されている。

第1章「序論」においては、本研究の背景と現状について述べた後、コンクリート構造部材の解析手法に関する既往の研究を概観して問題点を指摘し、本論文の目的と範囲を定めて、研究の概要を記述した。

第2章「鉄筋コンクリート棒部材の1次元付着すべり解析」では、コンクリート構造における、補強材とコンクリート間の付着すべりに係わる問題のうちでも、最も基本的な問題である“軸方向力のみを受ける鉄筋コンクリート棒部材”の1次元付着すべり解析を行うための手法について論じた。第2章の内容を要約すると以下のとおりである。

(1) 理論展開に当たっての基本仮定事項を列挙し、コンクリート部分の変位、および鉄筋とコンクリート間の相対変位を基本独立変数に選んだ場合の、RC棒部材のための全ポテンシャル・エネルギー汎関数を導いた。

(2) 前項で得た汎関数から、変分原理を用いて、この問題を支配する基礎微分方程式を導き、さらに、ここで得た微分方程式を変形することによって、周知の“1次元基本付着方程式”が容易に誘導されることを明示し、この全ポテンシャル・エネルギー汎関数に基づいて展開される有限要素解析が、既往の1次元基本付着方程式を近似的に解くことと等価であることを示して、その理論的位置付けを明らかにした。

(3) 前掲の全ポテンシャル・エネルギー汎関数に基づき、要素内の設定変位として、1次と3次の各形状関数をそれぞれ採用した場合の2種の有限要素を用いて定式化し、数種のモデル試験体の数値計算例を掲げて、両要素解に及ぼす要素分割数の影響を調べ、さらに既往の理論解との比較・検討により本有限要素解2種の妥当性を検証した。

第3章「補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート梁部材の解析」では、第2章で展開した鉄筋とコンクリート間の付着すべり問題のための基本的な考え方を、弾性領域にあるRC梁の曲げの問題への拡張・適用について論じた。第3章で取り扱った内容を要約し列挙すると以下のようになる。

(1) 理論展開のための基本仮定事項を掲げ、補強筋とコンクリート間の付着すべりを考慮した場合の、軸力と曲げを受けるRC梁部材のための、微小変形理論による全ポテンシャル・エネルギー汎関数を導き、さらに、この汎関数と変分原理により、従来明らかにされていなかった「補強筋の付着すべりを厳密に考慮に入れた場合」のRC梁の基礎微分方程式を誘導した。

(2) 先の汎関数に基づき、高次および低次の2種の変位関数要素を用いて、有限要素法への定式化を行った。

(3) 前項において展開した2種の有限要素解析法を用いて、単配筋を有する数種のモデル単純支持RC梁の数値計算例を掲げ、次のような結論を得た。

即ち、高次関数要素による解析結果から、① 付着係数 K_b の値は、内力として計算される曲げモーメントと剪断力には全く影響を与えないが、梁の鉛直変位と鉄筋応力および付着応力の各分布形状に大きな影響をおよぼし、付着係数 K_b が 10kgf/cm^3 より小さくなると、実質的には付着無しの“アンボンド状態”に対応し、また、 K_b の値が 10^4kgf/cm^3 以上では、ほぼ“完全付着状態”と見做すことができること、従って、② 梁の補強筋に通常の異形鉄筋(K_b の値が 10^4kgf/cm^3 より大きな値をとることは実験的に周知の事実である)を用いる限り、弾性領域にあるRC梁に対する従来の“完全付着の仮定”は十分妥当なものであること、また、高次関数要素と低次関数要素の解の比較から、③ 低次関数要素を用いても十分な精度が得られること、などを明らかにした。

第4章「補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の解析」では、コンクリート部分には法線保持を仮定し、補強筋とコンクリート間の付着すべりを考慮した場合の、弾性領域にあるRC床板の曲げについて論じた。第4章の内容を要約し列記すると次のようになる。

(1) 理論展開のための基本仮定事項を列挙し、微小変形理論による「x, y 2方向直交配筋を有するRC床板」のための全ポテンシャル・エネルギー汎関数を求め、更に、変分原理を用いて、補強筋の付着すべりを考慮した場合のRC床板の曲げを支配する基礎微分方程式を導いた。

(2) 理論の適用範囲を微小変形領域から幾何学的非線形領域にまで拡張するため、前項と同様、エネルギー原理を用いて理論展開を行い、有限変形理論に基づく「 x, y 2方向直交配筋を有するRC床板」のための全ポテンシャル・エネルギー汎関数、および基礎微分方程式を導いた。

(3) 前項(1)と(2)の理論に基づき、さらに、鉄筋の配筋方向が直交 x, y 2方向のみならず、各鉄筋層が任意の方向を有する場合をも取り扱い得るように拡張して有限要素法への定式化を行い、それぞれ微小変形理論、および有限変形理論によるRC床板のための有限要素方程式を誘導した。

(4) 前項(3)で展開した微小変形理論、および有限変形理論による有限要素解析法を用いて、2, 3のモデルRC床板の数値計算を行い、次のような結論を得た。

即ち、微小変形理論による“ x, y 直交配筋を有する単純支持正方形RC床板”の解析結果から、① 付着係数 K_b の値のRC床板の力学性状におよぼす効果は、第3章で論じたRC梁部材の場合と同程度であり、 K_b の値が 10 kgf/cm^3 より小さくなると事実上付着なしの“アンボンド状態”に対応し、また、 K_b の値が 10^4 kgf/cm^3 より大きくなると、ほぼ“完全付着状態”と見做すことができる。しかし、曲げモーメントについては、梁の場合とは異なり、その変動幅は、曲げモーメントの全体量からすれば極く僅かではあるが、 K_b の値の変化に伴って変動すること。② 配筋方向のみを「 x, y 直交配筋」から「斜め45度直交配筋」に変更した場合、鉄筋による補剛の効果は、「 x, y 直交配筋」のそれより優れており、床板全体の剛性も「斜め45度直交配筋」の方が大きくなること、等を明らかにした。

また、有限変形理論による“ x, y 直交配筋を有する周辺拘束正方形RC床板”の解析結果から、① 通常の付着係数値($K_b=10^4 \sim 10^5 \text{ kgf/cm}^3$)をもつ異形鉄筋の場合、拘束端近傍における鉄筋の応力と付着応力の分布形状は、完全付着の場合とは著しく異なったものとなること、② 拘束端内部での鉄筋の付着すべりの床板全体の力学性状におよぼす影響は無視し得るほど小さいこと、等を明らかにした。

第5章「曲線テンドンを有するプレストレストコンクリート梁部材の解析」では、テンドンとコンクリート（またはシース）間に付着すべりを許し、コンクリート断面には平面保持を仮定した場合の、“曲線形状テンドンを有するポストテンションPC梁部材”の弾性曲げについて論じた。第5章の内容を要約すると次のようになる。

(1) 理論展開に際しての基本仮定事項を列挙し、テンドンの緊張力と曲げを受ける曲線テンドンを有するPC梁の、微小変形理論による全ポテンシャル・エネルギー汎関数を

導き、次いで、テンダンの緊張時からグラウチング完了後の梁の挙動までを一貫して取り扱って得るP C梁のための基礎微分方程式を誘導した。

(2) 前項の理論に基づき有限要素法への定式化を行い、原汎関数に忠実に従う“厳密な有限要素方程式”と、 $\sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}=1$ なる近似仮定を導入した“簡略化有限要素方程式”の2種を導いた。

(3) 緊張作業終了後、テンダンを梁本体に定着する際に生ずる「アンカースリップに起因するプレストレス力の減少区間」を求めるための、簡便で精度の高い新たな計算手法を提案し、さらに、緊張力導入時の「テンドンとシース間の摩擦」と「アンカースリップ」によるプレストレス力の減少が、P C梁の変形挙動への影響を考慮することが可能な、初期応力法に基づく解析手法を提示した。

(4) 前項で展開した2種の有限要素を用いて、2, 3のP C梁の数値計算を行い、次のような結論を得た。

即ち、“厳密な有限要素方程式”による、「テンダンの緊張・定着完了後のP C梁の力学性状に対応する曲線配筋を有するR C梁」としての解析結果から、① 梁の挙動は、補強筋の曲線形と付着係数の値に左右されるが、付着係数値が同一の場合、梁の補強の効果は配筋曲線の湾曲度の小さいものほど大きく、付着係数値が変動する場合には、付着係数の増大に伴う梁の剛性の改善の効果は、配筋曲線の大きいものほど大である。また、配筋曲線形の如何に拘わらず、第3章の直線配筋をもつR C梁のときと同様、付着係数 K_b の値が 10kgf/cm^2 以下では、アンボンド状態として、また K_b が 10^4kgf/cm^2 以上では、ほぼ完全付着状態として取り扱うことが可能であること、② 前項で展開した簡略化有限要素解と厳密な有限要素解の比較より、 $\sqrt{1+(dh_{s,i}/dx)^2}=1$ なる近似仮定を導入した簡略化有限要素解でも、精度上ほとんど問題なく実用に供しうることを、等を明らかにした。

また、曲線テンダンを有するP C梁としての計算例から、① P C梁の緊張解析を行う場合、緊張力導入時に生ずる梁の鉛直変位の、テンドン曲線におよぼす影響は無視し得るが、シースによるコンクリート断面の欠損は、梁の剛性の評価に少なからぬ影響をおよぼすので正確にはこれを考慮する必要があること、② 設計規準等に採用されている慣用の近似解析法は、通常的设计計算上必要とされる十分な精度を有していること、等を指摘し明らかにした。

第6章「曲線テンダンを有するプレストレスコンクリート床板の解析」では、テンドンとコンクリート間に付着すべりを許容し、コンクリート部分には法線保持を仮定した場

合の、“曲線テンドンを有するP C床板”の弾性曲げの問題について論じた。第6章の内容をとり纏めて略記すると以下のようになる。

(1) 理論展開に当たっての基本仮定事項を明示し、テンドンが直交する x 、 y 2方向にそれぞれ滑らかな曲線を描いて配置されている場合の、微小変形理論によるP C床板の全ポテンシャル・エネルギー汎関数を導き、さらにこれを用いてテンドンの付着すべりを考慮した場合の、曲線テンドンを有するP C床板のための基礎微分方程式を誘導した。

(2) 前項の理論をより一般化するため、①各テンドン層の配置方向が直交する x 、 y 2方向のみならず、それぞれが任意の方向を有する場合にも対処し得るように、さらに、②板厚がドロップパネル状に突然変化する「変厚床板」をも矛盾なく取り扱い得るように拡張して、有限要素法への定式化を行い、より適用性の広いP C床板のための有限要素方程式を導いた。

(3) テンドンへの緊張力導入時に生ずるテンドンとコンクリート間の摩擦作用、及び定着時のアンカースリップによるセットロスが、P C床板の変形・応力におよぼす影響を考慮するため、第5章でP C梁の緊張解析用に開発した基本手法を、P C床板の問題にも適用可能なように拡張・発展させた。

(4) 前項(2)、(3)で展開したP C床板のための有限要素解析法を用い、我が国の建築の分野では、その設計環境が殆ど未整備の状態にある“フラットタイプのP Cスラブ”を取り挙げ、数種のモデルスラブの数値計算例を掲げて若干の検討・考察を行い、次のような結論を得た。

即ち、① テンドンのスラブ内配分の方法は、ACI方式よりもFIP方式の方が優れていること、② 建物の平面計画上における幾多の利点を有するフラットタイプのP Cスラブの、我が国における普及を促進するためには、テンドンの必要最小被り厚の軽減を許す何らかの緩和措置が望まれること、③ 我が国においてしばしば用いられている「全スラブパネルが同一のテンドンプロファイルを有するタイプのフラットスラブ」は、外梁を追加することによって、十分とは言えないまでも、実用に供し得る程度にまでスラブの力学性能を改善し得ること、および、④ Column Lineに沿ってフラットビーム状の厚肉部を有するタイプの「変厚フラットスラブ」の有用性、などを明らかにした。

第7章「補強材の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート部材の材料非線形解析への一二の拡張と適用の試み」では、第2章から第6章において展開してきた“弾性領域”における、補強材の付着すべりを考慮に入れたコンクリート構造部材のための有限要素解析法

を、コンクリートの亀裂や補強材の降伏を伴う“材料非線形領域”にまで拡張することを意図して、その最も基本的な一二の問題への拡張・適用を試みた。第7章で記述した内容の要点を列記すると次のようになる。

(1) まず、鉄筋コンクリート構造部材における材料非線形付着すべり問題の最も単純な例として、軸方向力のみを受けるRC棒部材を対象にして、①コンクリートの引張り亀裂と圧縮側における非線形な応力-歪性状、②鉄筋の弾・塑性性状、③鉄筋とコンクリートとの繰り返し載荷を含む非線形な付着応力-すべり変位モデルなどを設定し、さらに、④亀裂要素を導入することによって、荷重の増大とともに、コンクリートに断続的に生ずる亀裂現象と、これに伴う亀裂幅の拡大の様相を、計算を中断することなしに連続して追跡し得る新たな解析手法の開発を行った。

(2) 次に、前項(1)で述べた基本手法を、RC梁部材の材料非線形解析にも適用し得るように拡張するため、亀裂近傍の引張り側コンクリートの剛性を低減するための簡略化手法を導入し、亀裂発生後の補強筋の付着すべり作用を含む梁の挙動を、より実際に近い形で追跡することが可能な解析手法の提案を行った。

(3) 前項(1)と(2)で記述した2種の材料非線形解析法を用い、それぞれが対象とする各々の問題について若干の数値計算例を示し、既往の実験結果との比較等により、個々の解析手法の妥当性の検討・考察を行い、次のような結論を得た。

即ち、「軸方向力のみを受けるRC棒部材」に関する数値計算例では、まず、既往の実験との比較より、①本解析手法は、引抜き載荷および両引き載荷（除荷を含む）を受けるRC棒部材の実験結果を、十分な精度で追跡することができること、さらにまた、両引きモデル試験体を対象にした亀裂の発生を伴う場合の解析結果から、②新・旧亀裂間の亀裂発生時の荷重差が大きい場合には、付着応力の載荷履歴の影響により、亀裂幅は新しい方が古いものより小さくなること、③解析の際に載荷履歴を無視すると、コンクリートと付着の各応力分担が過大評価され、新・旧の別無く亀裂幅は全ての位置で等しい値となること、などの知見を得た。

また、「曲げを受けるRC梁部材」に関する数値計算例では、RC及びPRC梁に関する既往の実験並びに解析結果と、本解析値との比較・検討を行って、本非線形解析法が、RC（PRC）梁部材の、補強筋の付着すべり作用を含む“より詳細な材料非線形挙動”を追跡するための、有用な解析手法の一つとなり得る可能性のあることを示した。

第8章「研究の総括と今後の課題」では、本論文の各章で得た結果を総括し、さらに、

本研究に引き続いて進展させるべき今後の研究課題とその方向について述べた。

8. 2 今後の課題

本論文は、コンクリート構造部材を対象にした“より適用性の広い理論解析手法”を確立するために行ったものであり、本研究によって、従来明らかにされていなかった「直線配筋を有するRC梁とRC床板」、および「曲線テンドンを有するPC梁とPC床板」のための、補強材の付着すべりを考慮した場合の基礎微分方程式を初めて導いた。また、これらのコンクリート構造部材の全てについて、有限要素法への定式化を行い、主としてこれら各構造部材の弾性挙動を中心にして、個々の部材の基本的な力学性状を明らかにした。さらにまた、コンクリート部材の内でも最も単純な構造である「直線配筋を有するRC棒部材とRC梁部材」については、コンクリートの亀裂や鉄筋の降伏現象を含む、より複雑で重要な補強材の付着すべり作用に支配される材料非線形挙動をも取り扱い得るように解析手法を発展させ、既往の実験結果との比較により、ここで新たに提案された本非線形解析手法の妥当性と有用性についての検証を行った。

しかしながら、既に言及したように、コンクリート構造部材において、補強材の付着すべりが重要な問題となるのは、コンクリートに引張り亀裂が発生した後の非弾性領域においてであり、従って、本論文で提案されたこれらの基本手法の全てが、材料非線形解析、更には長期時間依存変形を含む非線形解析にまで拡張されて初めて、「補強材の付着すべりを考慮にいたした本来の意義が発揮される」と言うことであろう。このような将来を見据えた研究展望の観点からすれば、本論文によって得られた研究成果は、未だ極く初歩的で基礎的な段階に留まっていることは明白である。

以下においては、本研究を継承し、更に発展させる際に必要となる幾つかの問題点と、今後の研究課題について論及して、本論文の結びとする。

(1) 本論文では、補強材の付着すべり作用がより重要な役割を果たすことになる「材料非線形問題」については、RC棒とRC梁部材の僅か2種の部材への適用についてのみ論じたが、今後は、RC床板、PC梁、およびPC床板の材料非線形解析、さらには、これら各部材の長期時間依存解析へと発展させることが必要である。

(2) 第7章のRC梁部材の材料非線形解析においては、平面保持の仮定がもたらす矛盾点を克服するため、亀裂近傍の引張り側コンクリートの剛性を、他の部分より低減して

表示する「一簡略化手法」を導入した新たな解析法を展開して、一応の成果を得ることができたが、この方法によって評価された引張り側コンクリートの応力分布が、実際の応力状態をどの程度反映しているかは、比較し得る有効な実験結果が見当らぬため、今のところ不明である。従って、この部分の実際の応力状態を正確に把握するためにも、実験に基づくより詳細な検討が必要である。さらにまた、補強材の付着すべりを考慮に入れて、RCおよびPC床板の材料非線形解析を試みる際にも、同様な問題が生じることになるが、「平面的な広がりをもつ床板に、梁部材のための仮定がそのまま適用し得るかどうか」なども、新たに検討しなければならない課題の一つとなろう。

(3) 本論文では、直線配筋を有するRC梁、および、曲線テンドンを有するPC梁とPC床板については、微小変形理論に基づく場合のみについて理論展開を行った。しかしながら、スパンー部材丈比(=スパン長/部材丈)が比較的小さなRC梁部材については、剪断変形が問題となる場合も有り得るので、今後、鉛直剪断変形の影響を考慮して定式化を計る必要性があり、また、スパンー部材丈比が他のRC部材に比して格段に大きくなるPC梁とPC床板については、幾何学的非線形領域をも取り扱い得る有限変形理論に基づいて定式化し、解析を行う(特に、材料非線形領域を対象とする場合)必要がある。

(4) 本論文では、RC棒部材に始まり、コンクリート構造の主要な構成要素である個々の部材(直線配筋を有するRC梁とRC床板、および、曲線テンドンを有するPC梁部とPC床板)について別個に論じてきたが、実際の建造物では、これらが単独で使用されることはなく、各部材は構造全体を構成する要素として組み合わせられ、接合されて一体として用いられることになる。従って、補強材の付着すべり作用が支配的要因の一つとなる「亀裂発生後の材料非線形領域」においては、これら各部材の接合部の挙動を精度よく表示し得る「有効な力学モデルの開発」が極めて重要な問題となる。また最近では、労働力確保の困難に起因する省力化の要請から、プレキャスト部材を採用する構造が増加しており、結果として、①プレキャスト部材間の接合部、②プレキャスト部材と後打ちコンクリート構造部との接合部、などを的確に表現することが可能な力学モデルの構築が、緊急な課題となっている。しかし、これらの問題に対する詳細な研究は、極めて少ないのが現状のようである。従って、これらコンクリート構造部材(プレキャスト部材を含めた)間の「補強材の付着すべりを加味した“より精度の優れた力学モデル”を開発する」と言う重要、且つ困難な仕事が残されている。

[既発表論文リスト]

1. 本論文に関係する論文

[1] 主論文

- 1) 上田正生, 土橋由造: 軸力を受ける鉄筋コンクリート棒部材の材料非線形解析, 土木学会論文集 No.360/V-3, 1985, 8.
- 2) 上田正生, 土橋由造: 補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリートはり部材の曲げ変形解析, 土木学会論文集 No.372/V-5, 1986, 8.
- 3) 上田正生, 土橋由造: 補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の変形挙動解析 (その1 線形領域における基礎微分方程式と数値計算例), 日本建築学会構造系論文報告集, 第371号, 1987, 1.
- 4) 上田正生: 補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の変形挙動解析 (その2 幾何学的非線形領域における基礎微分方程式と数値計算例), 日本建築学会構造系論文報告集, 第385号, 1988, 3.
- 5) 上田正生: 曲線テンドンを有するP C梁部材の基礎微分方程式と有限要素法による数値計算例, コンクリート工学論文集, 第1巻 第1号, 1990, 1.
- 6) 上田正生: 曲線テンドンを有するプレストレストコンクリートスラブの基礎微分方程式と有限要素法による数値計算例, コンクリート工学論文集, 第2巻 第2号, 1991, 7.

[2] 英文論文

- 1) M.Ueda, A.Suginome and M.Hirose: Finite elements for evaluation of stiffness of post-tensioned type prestressed concrete beams, Transaction of JCI, No.10, 1988, 12.
- 2) M.Ueda: Bending of R/C beam members with curved reinforcement with its bond-slip involved, Bulletin of the faculty of Engineering, Hokkaido University, No.145, 1988, 12.
- 3) M.Ueda, T.Yamamoto and H.Ide: On the finite elements for prestressed concrete slabs with curved tendons, Transaction of JCI, No.11, 1989, 12.
- 4) M.Ueda, T.Wada and M.Hirose: Prestressing analysis of prestressed concrete beams including anchorage slip, Bulletin of the faculty of Engineering, Hokkaido University, No.150, 1990, 5.
- 5) M.Ueda: Governing equations for prestressed concrete beams with curved tendons and some examples of numerical calculation by means of the finite ele-

[3] 関連論文

- 1) 上田正生, 土橋由造: 鉄筋コンクリート部材の材料非線形付着すべり解析, 土木学会北海道支部論文報告集, 第40号, 1984,2.
- 2) 上田正生, 土橋由造, 川田孝之, 和田俊良: 鉄筋の付着すべりを考慮したR C床板の弾性解析, 日本建築学会北海道支部研究報告集 構造系, No.57, 1984,3.
- 3) 上田正生, 土橋由造: 引張り力を受けるR C部材の付着すべり挙動解析, 土木学会北海道支部論文報告集, 第41号, 1985,2.
- 4) 上田正生, 土橋由造: 鉄筋の付着すべりを考慮したR C梁部材の曲げについて, 土木学会北海道支部論文報告集, 第41号, 1985,2.
- 5) 上田正生, 土橋由造: 補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の曲げについて(基礎微分方程式の誘導), 日本建築学会北海道支部研究報告集 構造系, No.58, 1985,3.
- 6) 上田正生, 土橋由造: 補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の幾何学的非線形曲げについて, 土木学会北海道支部論文報告集, 第42号, 1986,2.
- 7) 上田正生, 土橋由造: 補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート梁部材の材料非線形解析, 土木学会北海道支部論文報告集, 第42号, 1986,2.
- 8) 上田正生, 土橋由造, 松下昌尚: 補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の幾何学的非線形解析, 日本建築学会北海道支部研究報告集 構造系, No.59, 1986,3.
- 9) 上田正生, 土橋由造: 鉄筋位置が材軸にそって滑らかに変化するR C梁部材の曲げについて(補強筋の付着すべりを考慮した場合の基礎微分方程式), 日本建築学会北海道支部研究報告集 構造系, No.59, 1986,3.
- 10) 上田正生: 補強筋の付着すべりを考慮した曲線形状配筋を有するR C梁部材の曲げについて, 土木学会北海道支部論文報告集, 第43号, 1987,2.
- 11) 上田正生, 和田俊良: 補強筋の付着すべりを考慮した曲線形状配筋を有するR C床板の曲げについて, 日本建築学会北海道支部研究報告集 構造系, No.60, 1987,3.
- 12) 上田正生, 松倉満智子, 松宮寿彦: Tendonの付着すべりを考慮したプレストレストコンクリート梁部材の変形解析, 日本建築学会北海道支部研究報告集 構造系, No.60, 1987,3.
- 13) 上田正生: 補強筋の付着すべりを考慮した曲線形状配筋を有するR C梁部材の曲げについて(その2), 土木学会北海道支部論文報告集, 第44号, 1988,2.
- 14) 上田正生, 広瀬雅明: 曲線形状Tendonを有するP C梁部材の有限要素解析, 土木学会北海道支部論文報告集, 第44号, 1988,2.
- 15) 上田正生, 広瀬雅明: 補強筋の付着すべりを考慮した曲線形状配筋を有するR C梁

部材のための簡略化有限要素解析について，日本建築学会北海道支部研究報告集 構造系，No.61，1988,3.

- 16) 上田正生，松倉満智子：Tendonの付着すべりを考慮したプレストレストコンクリート梁部材の変形解析－2，日本建築学会北海道支部研究報告集 構造系，No.61,1988,3.
- 17) 上田正生，杉野目章，広瀬雅明：緊張完了後のポストテンションP C梁の剛性評価のための有限要素について，コンクリート工学年次論文報告集，第10巻 第3号，1988,6.
- 18) 上田正生：曲線テンドンを有するP Cスラブの有限要素解析，土木学会北海道支部論文報告集，第45号，1989,2.
- 19) 上田正生，広瀬雅明：アンカースリップの影響を考慮したP C梁部材の緊張解析，土木学会北海道支部論文報告集，第45号，1989,2.
- 20) 上田正生，松倉満智子，山本俊彦：曲線テンドンを有するP Cスラブのための一有限要素について，日本建築学会北海道支部研究報告集 構造系，No.62,1989,3.
- 21) 上田正生，和田俊良，中江玲子：P C梁の緊張力導入時におけるアンカースリップ量の一評価法，日本建築学会北海道支部研究報告集 構造系，No.62,1989,3.
- 22) 上田正生，和田俊良，広瀬雅明：アンカースリップの影響を考慮したP C梁部材の緊張解析，コンクリート工学年次論文報告集，第11巻 第2号，1989,7.
- 23) 上田正生，山本俊彦，井手斉：アンボンドP Cスラブの有限要素解析，コンクリート工学年次論文報告集，第11巻 第2号，1989,7.
- 24) 上田正生，松倉満智子，和田俊良，山本俊彦：R Cラーメンに支持された連続P Cスラブの力学性状について，日本建築学会北海道支部研究報告集 構造系，No.63,1990,3.
- 25) 上田正生，和田俊良，松倉満智子：任意方向のテンドン配置を有するP Cスラブのための有限要素について，日本建築学会北海道支部研究報告集 構造系，No.63,1990,3.
- 26) 上田正生，松倉満智子，和田俊良：緊張力導入時におけるフラットタイプのP Cスラブの力学性状について，日本建築学会北海道支部研究報告集 構造系，No.64,1991,3.

[4] 講 演

- 1) 上田正生，土橋由造：補強筋のすべりを考慮したR C床板の弾性解析，日本建築学会大会学術講演梗概集（関東），1984,10.
- 2) 上田正生，土橋由造：補強筋のすべりを考慮したR C床板の曲げについて（基礎微分方程式の誘導），日本建築学会大会学術講演梗概集（東海），1985,10.
- 3) 上田正生，土橋由造：補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の曲げ

について（第2報 幾何学的非線形領域における支配微分方程式），日本建築学会大会学術講演梗概集（北海道），1986, 8.

- 4) 上田正生，土橋由造，松倉満智子：補強筋の付着すべりを考慮した鉄筋コンクリート床板の曲げについて（第3報 有限要素法による幾何学的非線形解析），日本建築学会大会学術講演梗概集（北海道），1986, 8.
- 5) 上田正生：補強筋の付着すべりを考慮した曲線形状配筋を有する鉄筋コンクリート梁部材の有限要素解析，日本建築学会大会学術講演梗概集（近畿），1987, 10.
- 6) 上田正生，松倉満智子：Tendonの付着すべりを考慮したPrestressed Concrete梁部材の曲げ解析，日本建築学会大会学術講演梗概集（近畿），1987, 10.
- 7) 上田正生，中川 修：補強筋の付着すべりを考慮した曲線形状配筋を有する鉄筋コンクリート床板の曲げについて，日本建築学会大会学術講演梗概集（近畿），1987, 10.
- 8) 上田正生：Anchor Slipの影響を考慮したポストテンションP C梁部材の有限要素解析，日本建築学会大会学術講演梗概集（関東），1988, 10.
- 9) 上田正生，松倉満智子：補強筋の付着すべりを考慮した曲線形状配筋を有するR C梁部材のための簡略化有限要素，日本建築学会大会学術講演梗概集（関東），1988, 10.
- 10) 上田正生，松倉満智子：曲線テンドンを有するP Cスラブの有限要素解析（その1 汎関数と有限要素法への定式化），日本建築学会大会学術講演梗概集（九州），1989, 10.
- 11) 上田正生，松倉満智子，和田俊良，山本俊彦：曲線テンドンを有するP Cスラブの有限要素解析(その2 数値計算例)，日本建築学会大会学術講演梗概集(九州)，1989, 10.
- 12) 上田正生，和田俊良：曲線テンドンを有するP C梁部材の幾何学的非線形解析(第1報 有限要素法による定式化)，日本建築学会大会学術講演梗概集（中国），1990, 10.
- 13) 上田正生，松倉満智子，山本俊彦：任意方向に曲線テンドンを有するP Cスラブのための有限要素法による定式化，日本建築学会大会学術講演梗概集（中国），1990, 10.
- 14) 松倉満智子，上田正生，山本俊彦：緊張力導入時におけるP Cフラットプレートノ力学性状について，日本建築学会大会学術講演梗概集（東北），1991, 10.

2. 本論文に直接関係しない論文

[1] 主要な論文

- 1) 土橋由造，内山武司，上田正生：積層要素による床板の弾塑性解析(その1 鋼版の

大変形弾塑性挙動について), 日本建築学会論文報告集, 第266号, 1978, 4.

- 2) 内山武司, 上田正生, 土橋由造: 鉄筋コンクリート床板の弾塑性解析, 日本建築学会論文報告集, 第276号, 1979, 2.
- 3) Y.Dobashi, T.Uchiyama and M.Ueda: Elasto-plastic analysis of large deflection of plates, Theoretical & Applied mechanics, No.27, 1979, 3.
- 4) 上田正生, 土橋由造: 鉄筋コンクリート床版の非線形解析, 日本建築学会論文報告集, 第283号, 1979, 9.
- 5) Y.Dobashi, T.Uchiyama and M.Ueda: Material nonlinear analysis of reinforced concrete slabs in consideration of cracking effect, Theoretical & Applied mechanics, No.28, 1980, 1.
- 6) 土橋由造, 上田正生: 周辺を拘束した鉄筋コンクリート床版の圧縮膜効果について (圧縮破壊後のコンクリートの応力逓減を考慮した材料非線形解析と実験との比較), 日本建築学会論文報告集, 第296号, 1980, 9.
- 7) 土橋由造, 上田正生: ひびわれ障害の発生した出隅を有する R C 片持スラブの調査と模型床版の実験, 日本建築学会論文報告集, 第297号, 1980, 11.
- 8) 和田俊良, 山本俊彦, 上田正生: 片持ち水平加力を受ける壁式プレキャスト構造の有限要素材料非線形解析, 構造工学論文集, Vol.37 B, 1991, 3.

[2] その他の論文

- 1) 木暮敬二, 上田正生, 磯部重光, 青山 護, 高橋正直: トラフィカビリティーの研究 (第5報 装軌車両の沈下による走行抵抗について), 防衛庁技術研究本部技報, No.603号, 1974, 10.
- 2) 内山武司, 上田正生, 土橋由造: 積層モデルによる鉄筋コンクリート床版の弾塑性解析 (その5 特殊な境界条件をもつ床版), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 44, 1975, 9.
- 3) 内山武司, 上田正生, 土橋由造: 積層モデルによる階段の弾塑性解析 (その2 鉄筋コンクリート階段への適用), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 44, 1975, 9.
- 4) 土橋由造, 井野 智, 内山武司, 駒木根洋一, 上田正生: 鉄筋コンクリート床版の実験 (その1 破壊性状について), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 44, 1975, 9.
- 5) 上田正生, 内山武司, 土橋由造: 特殊な形状をもつ周辺固定床版の等分布荷重時に於ける弾塑性解析及び振動について (その1 二等辺三角形版), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 44, 1975, 9.
- 6) 上田正生, 内山武司, 土橋由造: 特殊な形状をもつ周辺固定床版の等分布荷重時に於ける弾塑性解析及び振動について (その2 直角三角形版), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 44, 1975, 9.

- 7) 上田正生, 内山武司, 土橋由造: 特殊な形状をもつ周辺固定床版の等分布荷重時に於ける弾塑性解析及び振動について (その3 等脚台形版), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 44, 1975, 9.
- 8) 上田正生, 磯部重光, 青山 護: 回転剪断試験装置を用いた装軌車両の簡易推進力推定法について (その1 基本的な考え方), 土木学会北海道支部論文報告集, 第32号, 1976, 2.
- 9) 上田正生, 磯部重光, 青山 護: 回転剪断試験装置を用いた装軌車両の簡易推進力推定法について (その2 実験による検討), 土木学会北海道支部論文報告集, 第32号, 1976, 2.
- 10) 土橋由造, 井野 智, 内山武司, 上田正生, 川治正則, 方波見明宏: 最近調査した大撓み発生床スラブの実態調査, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 46, 1976, 3.
- 11) 土橋由造, 内山武司, 上田正生: 有限素片混合法による床版の有限変形解析 (無孔, 及び有孔の等分布荷重をうける周辺固定の正方形床版), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 45, 1976, 3.
- 12) 土橋由造, 内山武司, 上田正生: 積層モデルを用いた有限素片法による鉄筋コンクリート床スラブの弾塑性解析, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 45, 1976, 3.
- 13) 内山武司, 上田正生, 土橋由造: 積層モデルによる階段の弾塑性解析 (その3 V字型跳出し階段への適用), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 45, 1976, 3.
- 14) 上田正生, 内山武司, 土橋由造: 剪断変形を考慮した床版の解析, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 46, 1976, 9.
- 15) 上田正生, 内山武司, 土橋由造: 大変形理論による直交異方性床版の有限素片解について, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 46, 1976, 9.
- 16) 土橋由造, 内山武司, 上田正生: 大撓み式と微小変形式による鉄筋コンクリート各種床版の弾塑性解析, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 46, 1976, 9.
- 17) 土橋由造, 内山武司, 上田正生: 積層モデルによる床版の弾塑性解の精度について, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 46, 1976, 9.
- 18) 土橋由造, 井野 智, 内山武司, 上田正生, 服部 隆, 駒木根洋一: 鉄筋コンクリート床版の実験 (厚さの異なる無筋床版の破壊実験), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 46, 1976, 9.
- 19) 土橋由造, 井野 智, 内山武司, 上田正生, 川治正則, 坂尻公也: 鉄筋コンクリート床版の実験 (日の字型変厚版の破壊実験), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 46, 1976, 9.
- 20) 土橋由造, 内山武司, 上田正生: 等分布荷重を受ける周辺固定鋼製床版の弾塑性挙動について, 土木学会北海道支部論文報告集, 第33号, 1977, 2.
- 21) 内山武司, 上田正生, 土橋由造: 扁平螺旋殻理論による螺旋階段の解析 (外縁自由,

- 他辺固定の階段)，日本建築学会北海道支部研究報告集，No. 47, 1977, 3.
- 22) 内山武司，上田正生，土橋由造：扁平螺旋殻理論による螺旋階段の解析（周辺固定の階段），日本建築学会北海道支部研究報告集，No. 47, 1977, 3.
- 23) 内山武司，上田正生，土橋由造：扁平螺旋殻理論による螺旋階段の解析（二直線単純支持，二円弧自由の階段），日本建築学会北海道支部研究報告集，No. 47, 1977, 3.
- 24) 土橋由造，内山武司，上田正生：床版の弾塑性挙動について（積層板で構成される床版基本式の有限素片法への適用），日本建築学会北海道支部研究報告集，No. 47, 1977, 3.
- 25) 土橋由造，内山武司，上田正生：床版の弾塑性挙動について（大変形弾塑性理論の実験による検証），日本建築学会北海道支部研究報告集，No. 47, 1977, 3.
- 26) 土橋由造，井野 智，内山武司，上田正生，服部 隆，大橋佳幸：床版の弾塑性挙動について（厚さの異なるコンクリート床版の実験），日本建築学会北海道支部研究報告集，No. 47, 1977, 3.
- 27) 土橋由造，井野 智，内山武司，上田正生，服部 隆，駒木根洋一：床版の弾塑性挙動について（中央部に方形開孔をもつコンクリート床版の実験），日本建築学会北海道支部研究報告集，No. 47, 1977, 3.
- 28) 土橋由造，井野 智，内山武司，上田正生，坂尻公也：床版の弾塑性挙動について（溶接金網を用いたコンクリート床版の実験），日本建築学会北海道支部研究報告集，No. 47, 1977, 3.
- 29) 土橋由造，井野 智，内山武司，上田正生，山本忠広：床版の弾塑性挙動について（田の字型変厚コンクリート床版の実験），日本建築学会北海道支部研究報告集，No. 47, 1977, 3.
- 30) 土橋由造，井野 智，内山武司，上田正生，山田陽一：床版の弾塑性挙動について（回の字型変厚コンクリート床版の実験），日本建築学会北海道支部研究報告集，No. 47, 1977, 3.
- 31) 土橋由造，上田正生，坂尻公也：鉄筋コンクリート床版の終局強度設計について（Park及びJohansenのLimit Analysisと実験との比較），日本建築学会北海道支部研究報告集，No. 47, 1977, 3.
- 32) 土橋由造，井野 智，内山武司，上田正生，服部 隆，川治正則，松山輝男：鉄筋コンクリート床スラブに於ける大撓み発生原因の究明とその対策，北海道開発調整報告，1977, 3.
- 33) 土橋由造，内山武司，上田正生：積層有限素片弾塑性解析法による螺旋階段の解について，日本建築学会北海道支部研究報告集，No. 48, 1977, 8.
- 34) 土橋由造，坂尻公也，井野 智，内山武司，上田正生，永山和美：鉄筋コンクリート床版の終局強度設計法について（鉄筋比の異なる床版の実験），日本建築学会北海道支部研究報告集，No. 49, 1978, 3.

- 35) 土橋由造, 坂尻公也, 井野 智, 内山武司, 上田正生, 佐藤宏生: 鉄筋コンクリート床版の終局強度設計法について (Park理論の日型変厚床版への拡張と実験), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 49, 1978, 3.
- 36) 土橋由造, 坂尻公也, 井野 智, 内山武司, 上田正生, 塩谷 広: 鉄筋コンクリート床版の終局強度設計法について (井型変厚床版の実験), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 49, 1978, 3.
- 37) 土橋由造, 坂尻公也, 井野 智, 内山武司, 上田正生: 鉄筋コンクリート床版の終局強度設計法について (矩形床版の実験), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 49, 1978, 3.
- 38) 土橋由造, 坂尻公也, 井野 智, 内山武司, 上田正生, 中代治郎: 鉄筋コンクリート床版の終局強度設計法について (自由辺を有する種々な床版の実験その1), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 49, 1978, 3.
- 39) 土橋由造, 坂尻公也, 井野 智, 内山武司, 上田正生: 鉄筋コンクリート床版の終局強度設計法について (自由辺を有する種々な床版の実験その2), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 49, 1978, 3.
- 40) 土橋由造, 坂尻公也, 井野 智, 内山武司, 上田正生, 駒木根洋一: 実大コンクリート田型変厚床版の実験, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 49, 1978, 3.
- 41) 上田正生, 土橋由造: 鉄筋コンクリート床版の非線形解析, 土木学会北海道支部論文報告集, 第35号, 1979, 2.
- 42) 上田正生, 土橋由造, 田畑裕士: 初期応力法による鉄筋コンクリート床版の非線形解の性状, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 50, 1979, 3.
- 43) 上田正生, 土橋由造, 岡崎 晃: 初期応力法による床版の微小変形弾塑性解析, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 50, 1979, 3.
- 44) 土橋由造, 内山武司, 上田正生, 坂尻公也, 蝦沢正俊, 高城照雄: 繰返し単調載荷実験に於ける周辺拘束スラブの諸性状について, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 50, 1979, 3.
- 45) 土橋由造, 内山武司, 上田正生, 坂尻公也, 蝦沢正俊, 福田智朗: 鉄筋コンクリート床版の面内圧縮力と拘束梁の変形について, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 50, 1979, 3.
- 46) 土橋由造, 内山武司, 上田正生, 坂尻公也, 桜沢幸隆: 鉄筋コンクリート片持スラブの実験, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 50, 1979, 3.
- 47) 土橋由造, 内山武司, 上田正生, 杉野目章, 八木淳一: コンクリート床スラブ補強筋の応力について, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 50, 1979, 3.
- 48) 上田正生, 土橋由造: 繰返し載荷を勘案したコンクリートの非線形応力-歪モデルについて, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No. 51, 1979, 8.
- 49) 土橋由造, 井野 智, 内山武司, 上田正生, 蝦沢正俊, 坂尻公也: ひびわれの発生

した出隅を有する鉄筋コンクリート片持スラブの調査，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.51, 1979, 8.

- 50) 土橋由造，井野 智，上田正生，蝦沢正俊，坂尻公也：鉄筋コンクリート囲型変厚版の実用化試験，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.51, 1979, 8.
- 51) 土橋由造，井野 智，上田正生，蝦沢正俊：火災を受けた鉄筋コンクリート建物の被害調査例，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.51, 1979, 8.
- 52) 上田正生，土橋由造：周辺を拘束した鉄筋コンクリート床版の圧縮膜効果について，土木学会北海道支部論文報告集，第36号，1980, 2.
- 53) 上田正生，土橋由造，村山範裕：二軸圧縮領域において応力低減を考慮した鉄筋コンクリート床版の非線型解析，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.52, 1980, 3.
- 54) 上田正生，土橋由造，坂尻公也，高橋範行：周辺の拘束度が鉄筋コンクリート床版の変形及び耐力性状におよぼす影響について，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.51, 1979, 8.
- 55) 土橋由造，井野 智，上田正生，蝦沢正俊，坂尻公也：出隅を有する鉄筋コンクリート片持床版の実験，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.52, 1980, 3.
- 56) 上田正生，土橋由造，坂尻公也，山沢恭一：鉄筋コンクリート変厚床版の変形挙動と耐力性状について（その1 田型変厚床版の数値実験），日本建築学会北海道支部研究報告集，No.52, 1980, 3.
- 57) 上田正生，土橋由造：鉄筋コンクリート床版の変形・耐力性状に及ぼす力学的性質と鉄筋比及びスパン・版厚比の影響，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.53, 1980, 9.
- 58) 土橋由造，井野 智，内山武司，上田正生，坂尻公也：種々な拘束条件の鉄筋コンクリート床版の実験，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.53, 1980, 9.
- 59) 上田正生，土橋由造，杉野目章：鉄筋コンクリート変厚床版の変形挙動と耐力性状について（その2 日型変厚床版の数値実験），日本建築学会北海道支部研究報告集，No.53, 1980, 9.
- 60) 上田正生，土橋由造：鉄筋コンクリート変厚床版の変形挙動と耐力性状について（その3 目型変厚床版の数値実験），日本建築学会北海道支部研究報告集，No.53, 1980, 9.
- 61) 土橋由造，上田正生，山本俊彦：比較的大スパンの実大田型変厚床版の載荷実験，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.53, 1980, 9.
- 62) 上田正生，土橋由造：コンクリートのクリープ及び乾燥収縮のための一モデルについて，土木学会北海道支部論文報告集，第37号，1981, 2.
- 63) 井野 智，土橋由造，上田正生，坂尻公也，福本雅之：新築建物における日，目型変厚床版の載荷試験，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.54, 1981, 3.
- 64) 上田正生，土橋由造，杉野目章，角谷俊次：RC床版の変形・耐力性状に及ぼす鉄

- 筋の歪硬化及び面内剪断力の分担の影響について，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.54，1981,3.
- 65) 上田正生，土橋由造，筒井幸嗣，辻 健司：鉄筋コンクリート変厚床版の変形挙動と耐力性状について（その4 囲型変厚床版の数値実験），日本建築学会北海道支部研究報告集，No.54，1981,3.
- 66) 上田正生，土橋由造，森広和幸：変動応力下のコンクリートのクリープ解析モデル，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.54，1981,3.
- 67) 坂尻公也，土橋由造，井野 智，上田正生，蝦沢正俊，新林光一：鉄筋コンクリート模型日型変厚床版の実験（厚肉巾と版厚比の異なる場合），日本建築学会北海道支部研究報告集，No.54，1981,3.
- 68) 坂尻公也，土橋由造，内山武司，上田正生，蝦沢正俊，伊藤 稔：周辺拘束度の異なる各種鉄筋コンクリート床版の変形挙動と耐力性状について，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.54，1981,3.
- 69) 坂尻公也，土橋由造，井野 智，上田正生：収縮ひびわれの発生したコンクリート製模型床版の変形挙動と耐力性状について，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.54，1981,3.
- 70) 坂尻公也，土橋由造，内山武司，上田正生，田村友朗：短辺長を一定とした辺長比の異なる三辺拘束一辺自由版の実験，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.54，1981,3.
- 71) 上田正生，土橋由造：コンクリートのクリープ解析のための一モデル，日本コンクリート工学年次講演会論文集，第3号，1981,6.
- 72) 土橋由造，上田正生：周辺固定及び二対辺固定一方向RC床版の撓み性状について，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.55，1982,3.
- 73) 上田正生，土橋由造，引地俊一：材料非線型RCスラブ解析における基準面設定位置の解におよぼす影響，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.55，1982,3.
- 74) 上田正生，土橋由造，三好 修：鉄筋コンクリート正六角形床版の一計算例，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.55，1982,3.
- 75) 上田正生，土橋由造，日野正熙，国分 守：鉛直荷重を受ける中央部薄肉フラットスラブの力学性状，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.56，1983,3.
- 76) 上田正生，土橋由造，日野正熙：柱接合部のモーメント伝達に於ける中央部薄肉フラットスラブの有効巾，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.56，1983,3.
- 77) 日野正熙，坂尻公也，土橋由造，井野 智，内山武司，上田正生：PRC床版とRC床版の比較実験，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.56，1983,3.
- 78) 上田正生，土橋由造，井野 智，川田孝之：細隙を有する床版の弾塑性変形と耐力性状，日本建築学会北海道支部研究報告集，No.56，1983,3.
- 79) 上田正生，土橋由造，内山武司，松倉満智子：有孔床版の弾塑性変形と耐力性状，

日本建築学会北海道支部研究報告集, No.56, 1983, 3.

- 80) 上田正生, 土橋由造, 内山武司, 川田孝之: 鉄筋コンクリート中央部薄肉床スラブの破壊性状, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.56, 1983, 3.
- 81) 上田正生, 土橋由造, 和田俊良: 鉄筋コンクリートラーメン部材の長期変形解析, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.56, 1983, 3.
- 82) 上田正生, 土橋由造, 和田俊良, 坂尻公也: 新R C構造規準の版厚算定式に従い設計したスラブの耐力性状, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.57, 1984, 3.
- 83) 上田正生, 土橋由造, 川田孝之, 日野正熙, 和田俊良: T-beam効果を考慮した田型変厚床版の応力性状, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.57, 1984, 3.
- 84) 和田俊良, 上田正生, 土橋由造: ひびわれ後のコンクリートの引張剛性を考慮したR C部材の短期材料線形解析, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.57, 1984, 3.
- 85) 和田俊良, 上田正生, 土橋由造: ひびわれ後のコンクリートの引張剛性を考慮したR C部材の長期変形挙動解析, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.57, 1984, 3.
- 86) 土橋由造, 上田正生, 和田俊良, 湯原俊太郎, 日野正熙: 周辺を強固に補剛した鉄筋コンクリート床版の一実験(その1 四辺拘束の等厚版), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.57, 1984, 3.
- 87) 土橋由造, 内山武司, 上田正生, 湯原俊太郎, 大津 聡: 周辺を強固に補剛した鉄筋コンクリート床版の一実験(その2 三辺拘束一辺自由版), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.57, 1984, 3.
- 88) 土橋由造, 井野 智, 上田正生, 川田孝之, 日野正熙, 中川 修: 周辺を強固に補剛した鉄筋コンクリート床版の一実験(その3 日・田型変厚版), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.57, 1984, 3.
- 89) 土橋由造, 内山武司, 上田正生, 川田孝之, 坂尻公也: 周辺を強固に補剛した鉄筋コンクリート床版の一実験(その4 二辺拘束二辺自由版), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.58, 1985, 3.
- 90) 日野正熙, 坂尻公也, 土橋由造, 井野 智, 上田正生, 川田孝之: 比較的大スパンの変厚フラットスラブの設計例, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.58, 1985, 3.
- 91) 森広和幸, 大橋正昭, 上田正生: N大学体育館の構造計画について, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.62, 1989, 3.
- 92) 和田俊良, 上田正生: 片持つ水平加力を受ける壁式プレキャスト壁の有限要素非弾性解析, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.63, 1990, 3.
- 93) 和田俊良, 上田正生: 片持ち水平加力を受ける壁式プレキャスト壁の有限要素法による数値計算例, 日本コンクリート工学年次論文報告集, 第12巻第2号, 1990, 6.
- 94) 梶原恵治, 山本俊彦, 上田正生: アウトケーブル2方向スラブの実験的研究, プレストレストコンクリートの発展に関するシンポジウム論文集, 第30回, 1990, 10.

- 95) 和田俊良, 山本俊彦, 上田正生: 片持ち水平加力を受ける壁式プレキャスト構造の有限要素材料非線形解析, 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.64, 1991, 3.
- 96) 坂尻公也, 日野正熙, 上田正生, 内山武司, 土橋由造: 周辺固定 R C 日型変厚版の終局耐力について (その 1 厚肉断面を変化させた実験による検討), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.64, 1991, 3.
- 97) 坂尻公也, 日野正熙, 上田正生, 内山武司, 土橋由造: 周辺固定 R C 日型変厚版の終局耐力について (その 2 終局耐力式の誘導), 日本建築学会北海道支部研究報告集, No.64, 1991, 3.

[3] 講 演

- 1) 木暮敬二, 磯部重光, 上田正生: 装軌車両の推進力に関する一考察, 土木学会講演会概要集Ⅲ, 第29号, 1974, 10.
- 2) 土橋由造, 内山武司, 上田正生: 鉄筋コンクリート床版の弾塑性解析, 土木学会講演会概要集Ⅰ, 第31号, 1976, 10.
- 3) 土橋由造, 内山武司, 上田正生: 任意面を基準とした中央部薄肉式の解について, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (中国), 1977, 10.
- 4) 土橋由造, 上田正生, 坂尻公也: 鉄筋コンクリート床版の終局強度式の実験的検討 (その 1 平版及び開口版), 日本建築学会大会学術講演梗概集 (中国), 1977, 10.
- 5) 土橋由造, 上田正生, 坂尻公也: 鉄筋コンクリート床版の終局強度式の実験的検討 (その 2 変厚版), 日本建築学会大会学術講演梗概集 (中国), 1977, 10.
- 6) 土橋由造, 内山武司, 上田正生: 床版の大変形弾塑性解析, 応用力学連合講演会論文抄録集, 1977, 11.
- 7) 土橋由造, 内山武司, 上田正生: 鉄筋コンクリート床版の材料非線型解析, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北海道), 1978, 9.
- 8) 土橋由造, 内山武司, 上田正生: 鉄筋コンクリート床スラブの補強筋応力について, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北海道), 1978, 9.
- 9) 土橋由造, 坂尻公也, 上田正生, 田畑裕士: 鉄筋コンクリート矩形床版の終局耐力, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北海道), 1978, 9.
- 10) 土橋由造, 坂尻公也, 内山武司, 上田正生: 中央部薄肉床版の終局荷重について, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北海道), 1978, 9.
- 11) 土橋由造, 内山武司, 上田正生: 鉄筋コンクリート床スラブの材料非線型解析, 応用力学連合講演会論文抄録集, 1978, 11.
- 12) 上田正生, 土橋由造: 周辺拘束床スラブの圧縮膜効果について, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), 1979, 9.
- 13) 土橋由造, 上田正生, 蝦沢正俊: 一方向繰返し載荷実験における周辺拘束床スラブの諸性状, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), 1979, 9.

- 14) 土橋由造, 内山武司, 上田正生, 坂尻公也: ラーメンに組み込まれた鉄筋コンクリート床版の実験, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), 1979, 9.
- 15) 上田正生, 内山武司, 土橋由造, 坂尻公也: 出隅を有する鉄筋コンクリート片持床版の実験, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), 1980, 9.
- 16) 上田正生, 土橋由造, 杉野目章: 鉄筋コンクリート日型変厚床版の数値実験, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), 1980, 9.
- 17) 上田正生, 土橋由造: 材料非線型有限要素法による鉄筋コンクリート床版の解析, 土木学会講演会概要集 I, 第35号, 1980, 9.
- 18) 上田正生, 土橋由造: 鉄筋コンクリート床版の変形・耐力性状に及ぼす力学的性質と鉄筋比, スパン・版厚比の影響, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (九州), 1981, 9.
- 19) 森広和幸, 上田正生, 土橋由造: 鉄筋コンクリート囲型変厚床版の数値実験, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (九州), 1981, 9.
- 20) 筒井幸嗣, 上田正生, 土橋由造: 周辺固定の鉄筋コンクリート中央部薄肉床版の数値実験, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (九州), 1981, 9.
- 21) 上田正生, 土橋由造, 和田俊良: 鉄筋コンクリート周辺固定二方向床版と二対辺固定他辺自由一方向版の撓み性状, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (東北), 1982, 10.
- 22) 上田正生, 土橋由造: 鉄筋コンクリート正多角形床版の設計版厚について, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (東北), 1982, 10.
- 23) 上田正生, 土橋由造, 日野正熙: 中央部薄肉型フラットスラブの水平荷重時における有効巾について, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), 1983, 10.
- 24) 大津 聡, 上田正生, 土橋由造: 細隙を有する R C 床版の弾塑性変形と耐力性状に関する数値実験, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), 1983, 10.
- 25) 坂尻公也, 上田正生, 土橋由造: 開口床版の弾塑性変形と耐力性状に関する数値実験, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), 1983, 10.
- 26) 川田孝之, 上田正生, 土橋由造: 中央部薄肉床スラブのひびわれ性状と終局耐力について, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), 1983, 10.
- 27) 和田俊良, 上田正生, 土橋由造: 中央部薄肉型フラットスラブの鉛直荷重時における力学性状, 日本建築学会大会学術講演梗概集 (北陸), 1983, 10.
- 28) 松山輝男, 土橋由造, 井野 智, 上田正生: 周辺を強固に補剛した鉄筋コンクリート床版の一実験 (その1 四辺拘束の等厚版), 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), 1984, 10.
- 29) 日野正熙, 土橋由造, 内山武司, 上田正生: 周辺を強固に補剛した鉄筋コンクリート床版の一実験 (その3 日・田型変厚版), 日本建築学会大会学術講演梗概集 (関東), 1984, 10.
- 30) 川田孝之, 上田正生, 土橋由造, 日野正熙: 日・田型変厚版の弾性時における膜効

- 果について，日本建築学会大会学術講演梗概集（関東），1984, 10.
- 31) 松倉満智子，上田正生，土橋由造：鉄筋コンクリート規準により設計した床スラブの耐荷性能，日本建築学会大会学術講演梗概集（関東），1984, 10.
 - 32) 和田俊良，上田正生，土橋由造：亀裂後のコンクリートの引張剛性を考慮したRC部材の長期変形挙動解析，日本建築学会大会学術講演梗概集（関東），1984, 10.
 - 33) 日野正熙，坂尻公也，土橋由造，井野 智，上田正生，川田孝之：変厚版のフラットスラブ構造への一適用例，日本建築学会大会学術講演梗概集（東海），1985, 10.
 - 34) 土橋由造，内山武司，上田正生，川田孝之，坂尻公也，大津 聡：強固な補剛架構をもつ鉄筋コンクリート床版の実験（その4 二隣辺固定二辺自由版），日本建築学会大会学術講演梗概集（東海），1985, 10.
 - 35) 和田俊良，山本俊彦，上田正生：片持ち水平加力を受ける壁式プレキャスト壁の有限要素弾性解析，日本建築学会大会学術講演梗概集（九州），1989, 10.
 - 36) 和田俊良，山本俊彦，上田正生：片持ち水平加力を受ける壁式プレキャスト壁の有限要素法による数値計算例，日本建築学会大会学術講演梗概集（広島），1990, 10.
 - 37) 梶原恵治，山本俊彦，上田正生：アウトケーブル2方向スラブの力学性状について，日本建築学会大会学術講演梗概集（東北），1991, 9.
 - 38) 和田俊良，山本俊彦，上田正生：片持ち水平加力を受ける壁式プレキャスト壁の有限要素材料非線形解析－剪断亀裂理論とMohr-Coulomb則による接合部モデルの開発，日本建築学会大会学術講演梗概集（東北），1991, 9.
 - 39) 山本俊彦，梶原恵治，上田正生：リフトアップスラブの押し抜き剪断耐力実験，日本建築学会大会学術講演梗概集（東北），1991, 9.
 - 40) 坂尻公也，日野正熙，上田正生，内山武司，土橋由造：周辺固定RC日型辺厚床版の終局耐力解析と実験（その1 終局耐力式の誘導），日本建築学会大会学術講演梗概集（東北），1991, 9.
 - 41) 坂尻公也，日野正熙，上田正生，内山武司，土橋由造：周辺固定RC日型辺厚床版の終局耐力解析と実験（その2 実験による検討），日本建築学会大会学術講演梗概集（東北），1991, 9.

謝 辞

本論文は、筆者が昭和50年4月以来、北海道大学工学教室において行って来た研究のうち、昭和58年以降の「補強材の付着すべりを考慮したコンクリート構造部材の力学性状」に関する一連の研究を取り纏めたものであります。

未だ研究途上にある未完の仕事に休止符を打ち、曲がりなりにも“脈絡をもたせた一つの論文”としての体裁を整え、書き始めることは、なかなか踏ん切りのつきかねる気の重いことでありました。筆者にその必要を説き、論文を取り纏める勇気を与えて下さったのは、恩師である北大名誉教授・土橋由造博士であります。北大赴任当初は、殆ど門外漢に近かった筆者に、極めて恵まれた研究環境を与えて下さり、長きに渡って、終始暖かく教え、育て頂いた土橋由造先生には、衷心より満腔の感謝を捧げます。

北大教授・内山武司博士には、本論文の執筆の全期間をとおして、懇切なる御指導をいただきました。心より深謝し、ここに篤くお礼を申し上げます。また、本論文をまとめるにあたって、種々貴重なご教示とご助言を賜りました北大教授・柴田拓二博士、小幡 守博士、井野 智博士、角田與史雄博士、佐伯 昇博士に対し、深く感謝の意を表します。特に、井野教授と角田教授には、研究の途上しばしば暖かい激励をいただき、感謝の念に堪えません。また、北見工大教授・長島 弘博士、室蘭工大助教授・杉野目 章博士には、折りに触れ励ましの言葉をいただきました。お礼を申し上げます。

本研究の端緒は、周辺梁を有するRC床板の拘束端近傍に発生する亀裂と、それに起因する「拘束梁からの鉄筋のすべり出し」の影響を的確に評価するための解析手法を、文字どおり“暗中模索”し始めたときに発しますが、この間多くの先達の優れた研究に触発され啓発されて、今日があるのを実感しております。拙いながらも、何とか本論文を書き上げることが出来たのは、正に、これら幾多の先達のお陰であり、その学恩に深く感謝の意を表する次第です。特に、明治大学教授・狩野芳一博士、大阪大学教授・鈴木計夫博士、京都大学教授・森田司郎博士、名古屋大学教授・田辺忠顕博士には、講演会場や書簡を通じて有益なご示唆やご教示を賜りました。ここに記して、心より御礼申し上げます。

平成4年3月

上 田 正 生

A Theoretical Study on the Mechanical Properties of Concrete Members Considering Bond-slip of Reinforcement

Summary

This paper is written on the study made for the purpose of establishing the method of analysis for the concrete structural member that is applicable more widely, in case the bond-slip action itself between the reinforcement and concrete is directly integrated in the theory of analysis, not as the "technic in the numerical analysis" such as the bond-links that have often been used in the finite element analysis with regard to the R/C structures in the past. It is composed of 8 sections. The content of every section is briefly described hereunder.

In Section 1, description is made on the background of this study, the studies in the past with regard to the analytical theory on the concrete structural members are generally reviewed and the purpose of this paper and the outline of this study are stated.

In Section 2, it is presented that the well-known "fundamental one-dimensional bond equation" for a reinforced concrete prismatic member that is subjected to the axial force only can also be derived by applying the principle of total potential energy taking the displacement of its concrete portion u and the relative displacement of the reinforcement S as independent variables. Then, the author reformulates this problem with the finite elements in which the two strict and non-strict types of shape functions are used and furthermore, examines by comparison with the analytical solutions in the past by giving several examples of numerical calculation, thus verifying adequacy of this method of analysis. Also, as

its consequence, the author clarifies the situation of this method of analysis by pointing out that the fundamental way of thinking employed here could be expanded toward the problems of bond-slip of reinforcement in the concrete structural members that are more complicated such as beams and slabs.

In Section 3, discussions are made on the simplest the first example of application of this fundamental method that is developed in the previous Section. Namely, first, choosing the beam member of R/C that is subjected to the axial force and bending, the fundamental differential equation in case the bond-slip is allowed for the reinforcement is derived, applying Bernoulli-Euler hypothesis to the cross section of concrete. Then, the author makes the formulation based upon this theory by the finite elements in which the two strict and non-strict types of shape functions are used and compares and examines the accuracy of both solutions presenting the examples of analyses of R/C beams in the linear range and furthermore, clarifies the influence that the magnitude of the bond coefficient exerts on the flexural property.

In Section 4, discussions are made on the bending of the R/C slab when bond-slip of the reinforcement is allowed and Kirchhoff hypothesis is applied. Namely, the author, based upon the principle of total potential energy similar to the case of the problem mentioned in the previous Section, derives first the fundamental differential equation for each case in which the R/C slab lies in the range of infinitesimal deformation and the geometrically non-linear range respectively. Then, he formulates these problems by means of the finite element method, furthermore, clarifies the influence which the bond-slip of the reinforcement exerts on the mechanical property of the slab in the respective ranges, presenting

the examples of the numerical calculation for the respective R/C slabs in the range of infinitesimal deformation and the geometrically non-linear range.

In Section 5, the author discusses on the problems of the post-tensioned concrete beam that has the tendons of the curvilinear shape. Namely, first of all, he derives the fundamental differential equation for the "P/C beam member that has the curvilinear tendons" by which its behavior can be handled consistently from the time when the tensile force was introduced to the tendons until grouting into the sheaths has been finished under the assumption that bond-slip of the tendons is allowed and Bernoulli-Euler hypothesis holds in the portion of concrete. Then, the author makes its formulation to the finite element method based upon this theory, and furthermore, he proposes a novel method of analysis in which the friction between the tendons and the sheaths when the tensile force is introduced and reduction of prestressing forces that are generated by anchoring slip can be readily taken into consideration. Finally, presenting the examples of numerical calculation for several P/C beam by this method of analysis, the autor clarifies the mechanical properties of beams of this sort and makes investigation on them.

In Section 6, the problems of the "post-tensioned P/C slab that has the curvilinear tendons" are dealt with. Namely, first of all, the author derives the fundamental differential equation by which its behavior can be dealt with consistently from the time when the tensile force was introduced until the grouting has been finished under the assumption that bond-slip of the tendons is allowed and Kirchhoff hypothesis is applied. Then, he formulates this problem by means of the finite element method. Finally, picking up the "P/C slabs of several kinds of the flat type" of

which virtually no design standards have been provided as the objects, the author makes investigation and examination in detail on the mechanical properties of the slabs of this sort.

In Section 7, it is intended to expand the "method of finite element analysis of the concrete structure in the elastic range taking bond-slip of the reinforcement" that has been developed in the previous Sections 2 - 6 toward the more complicated "non-linear range of materials" where cracks in concrete and yielding of the reinforcement are involved, and its application to a few most fundamental problem is attempted. Namely, first of all, as the simplest example, the author picks up the R/C prismatic member that is subjected to the axial force only and proposes a novel method of analysis, thereby tracing of intermittent generation of cracks in the concrete portion and the expanding phenomenon of the crack width as the load increases is made possible. Then, he tries to apply expanding this fundamental method for the non-linear analysis to the non-linear analysis of materials of R/C beams. Finally, applying the method of non-linear analysis for ① the R/C prismatic member and ② the R/C beam member subjected to bending that has been developed in this Section, the author presents several examples of the numerical calculation for the members of every kind and furthermore, verifies adequacy of these two methods of non-linear analysis by comparing them with the test results of these members in the past.

In Section 8, the author summarizes the conclusions gained in the foregoing Sections and states on the problems in analyzing the concrete structures and the direction toward which the future study should proceed.

Eine theoretische Studie der mechanischen Eigenschaften
von Betonfertigelementen unter Berücksichtigung
von Bindungsschlupf der Armierung

Zusammenfassung

Diese Abhandlung beruht auf der Studie für Erstellung einer Analyse-
methode für Betonstrukturelemente, die weitgehender anwendbar ist, wenn
die Bindungsschlupftätigkeit an sich zwischen der Armierung und dem Beton
direkt in die Theorie der Analyse integriert wird, und nicht als die
"Technik in der numerischen Analyse", wie die in der Vergangenheit oft in
der Analyse nach der Methode der finiten Elemente in Bezug auf Stahlbeton
verwendeten Bindungsverbindungen. Die Abhandlung besteht aus 8 Abschnitten.
Nachfolgend wird der Inhalt der einzelnen Abschnitte umrissen.

In Abschnitt 1 wird der Hintergrund dieser Studie beschrieben, es
wird ein allgemeiner Überblick über die in der Vergangenheit in Bezug auf
die analytische Theorie für Betonstrukturelemente durchgeführten Studien
gegeben, und der Zweck dieser Abhandlung und der Umriss dieser Studie
werden gegeben.

In Abschnitt 2 wird gezeigt, daß die allgemein bekannte "fundamentale
eindimensionale Bindungsgleichung" für ein prismatisches Stahlbetonelement
unter einer axialen Kraft auch durch Anwendung des Prinzips der gesamten
potentiellen Energie abgeleitet werden kann, wenn die Versetzung des
Betonteils u und die relative Versetzung S der Armierung als unabhängige
Variable angenommen werden. Dann formuliert der Autor dieses Problem neu
mit den finiten Elementen, wobei die zwei Typen der strikten und nicht
strikten Formfunktionen verwendet werden, und weiterhin führt er Unter-

suchungen durch Vergleich mit den in der Vergangenheit durchgeführten analytischen Lösungen durch, indem er mehrere Beispiele für numerische Berechnungen anführt, und er bestätigt hierdurch die Angemessenheit dieser Analysemethode. Als Konsequenz hiervon klärt der Autor die Situation dieser Analysemethode, indem er aufzeigt, daß die hier verwendete grundlegende Denkart erweitert werden kann zu Problemen von Bindungsschlupf der Armierung inkomplizierteren Betonstrukturelementen wie Träger und Platten.

In Abschnitt 3 wird das erste Anwendungsbeispiel dieser im vorhergehenden Abschnitt entwickelten grundlegenden Methode als das einfachste Beispiel diskutiert. Hierfür wird ein Trägerelement aus Stahlbeton gewählt, das axialen Kräften und Biegung ausgesetzt ist, und die fundamentale Differentialgleichung wird durch die Anwendung der Bernoulli-Euler-Hypothese auf den Betonquerschnitt abgeleitet für den Fall, daß Bindungsschlupf für die Armierung zugelassen wird. Dann führt der Autor die Formulierung auf der Grundlage dieser Theorie mit finiten Elementen durch, wobei die beiden Typen strikter und nicht strikter Formfunktionen verwendet werden, er vergleicht und untersucht die Genauigkeit beider Lösungen unter Anführung von Beispielen für die Analyse von Stahlbetonträgern im linearen Bereich, und er klärt weiterhin den Einfluß der Größenordnung des Bindungskoeffizienten auf die Biege-eigenschaft.

In Abschnitt 4 erfolgt Diskussion der Biegung von Stahlbetonplatten, wenn Bindungsschlupf der Armierung zugelassen und die Kirchhoff-Hypothese angewendet wird. Hierbei leitet der Autor ähnlich wie im Fall des im vorhergehenden Abschnitt angeführten Problems auf der Grundlage des Prinzips der gesamten potentiellen Energie zuerst die grundlegende Differentialgleichung für jeden Fall ab, in dem die Stahlbetonplatten im

Bereich der infinitesimalen Verformung bzw. im geometrisch nichtlinearen Bereich liegt. Dann formuliert er diese Probleme mittels der Methode der finiten Elemente und klärt weiterhin den Einfluß des Bindungsschlupfes der Armierung auf die mechanischen Eigenschaften der Platte in den entsprechenden Bereichen, wobei er Beispiele für die numerische Berechnung für die entsprechenden Stahlbetonplatten im Bereich der infinitesimalen Verformung und im geometrisch nichtlinearen Bereich anführt.

In Abschnitt 5 diskutiert der Autor die Probleme vorgespannter Betonbalken mit kurvenförmigen Spanngliedern. Hierbei leitet er zuerst die grundlegende Differentialgleichung für "Stahlbeton-Balkenelemente mit kurvenförmigen Spanngliedern" ab, wodurch ihr Verhalten einheitlich von dem Zeitpunkt, an dem die Zugkraft zum Spannglied eingeleitet wird, bis zur Beendigung der Mörtelbefüllung in die Hülle gehandhabt werden kann, wobei angenommen wird, daß Bindungsschlupf der Spannglieder zulässig ist und daß die Bernoulli-Euler-Hypothese im Betonabschnitt zutrifft. Dann führt der Autor Formulierung nach der Methode der finiten Elemente auf der Grundlage dieser Theorie durch, und er schlägt weiterhin eine neue Analyseverfahren vor, bei der die Reibung zwischen den Spanngliedern und den Hüllen bei Einleitung der Zugkraft und die durch Verankerungsschlupf verursachte Verringerung der Spannbetonkräfte einfach berücksichtigt werden können. Abschließend präsentiert der Autor Beispiele für numerische Berechnung für verschiedene Spannbetonbalken nach dieser Analyseverfahren, er klärt die mechanischen Eigenschaften von Balken dieser Art, und er untersucht diese.

In Abschnitt 6 werden die Probleme von "im erhärteten Beton gespannten Spannbetonplatten mit kurvenförmigen Spanngliedern" behandelt. Hierbei leitet der Autor zuerst die grundlegende Differentialgleichung ab,

mit der das Verhalten einheitlich von dem Zeitpunkt, an dem die Zugkraft eingeleitet wird, bis zur Beendigung der Mörtelbefüllung behandelt werden kann, wobei angenommen wird, daß Bindungsschlupf der Spannglieder zulässig ist und daß die Kirchhoff-Hypothese angewendet wird. Dann formuliert er dieses Problem mittels der Methode der finiten Elemente. Abschließend greift er "Spannbetonplatten verschiedener Arten vom flachen Typ" auf, für die praktisch keine Entwurfsnormen gegeben sind, und er führt eingehende Untersuchungen der mechanischen Eigenschaften von Platten dieser Art durch.

In Abschnitt 7 wird eine Erweiterung der in den vorhergehenden Abschnitten 2 bis 6 entwickelten "Analyse von Betonstrukturen im elastischen Bereich mit Bindungsschlupf der Armierung nach der Methode der finiten Elemente" auf den komplizierteren "nichtlinearen Bereich von Materialien" geplant, wobei Risse im Beton und Nachgeben der Armierung mitspielen, und es wird ihre Anwendung auf einige höchst grundlegende Probleme versucht. Hierbei greift der Autor zuerst als einfachstes Problem ein prismatisches Stahlbetonelement auf, das nur einer Axialkraft ausgesetzt wird, wodurch Verfolgung der intermittierenden Ribbildung im Betonabschnitt und der Dehnungserscheinung für die Ribbreite mit zunehmender Last ermöglicht wird. Dann versucht er eine Erweiterung dieser grundlegenden Methode für nichtlineare Analyse auf die nichtlineare Analyse der Materialien von Stahlbetonbalken. Abschließend wendet der Autor die in diesem Abschnitt entwickelte Methode der nichtlinearen Analyse auf ① prismatische Stahlbetonelemente und ② Biegung unterworfenen Stahlbeton-Balkenelemente an, er präsentiert einige Beispiele der numerischen Berechnung für Elemente aller Arten, und er bestätigt die Angemessenheit dieser beiden nichtlinearen Analysemethoden, indem er sie mit den in der Vergangenheit erhaltenen Prüfergebnissen für diese Elemente

vergleicht.

In Abschnitt 8 faßt der Autor die in den vorhergehenden Abschnitten erhaltenen Folgerungen zusammen und macht Aussagen zu den Problemen bei der Analyse von Betonstrukturen und der Richtung, in der zukünftige Studien durchgeführt werden sollten.