



Title	MHDチャネル流れの解析的研究 : 2次元磁場をよぎるMHD流れと乱流境界層
Author(s)	及川, 俊一
Degree Grantor	北海道大学
Degree Name	博士(工学)
Dissertation Number	乙第4516号
Issue Date	1994-03-25
DOI	https://doi.org/10.11501/3076836
Doc URL	https://hdl.handle.net/2115/32673
Type	doctoral thesis
File Information	4516.pdf



MHD チャネル流れの解析的研究

– 2次元磁場をよぎるMHD流れと乱流境界層 –

北海道大学工学部原子工学科

及 川 俊 一

1 9 9 4 年 3 月

第1章 序 論	1
1・1 本研究の目的と特徴	2
1・2 MHD発電に関する研究開発の現状	5
1・2・1 オープンサイクルMHD発電の意義と現状	5
1・2・2 クローズドサイクルMHD発電の意義と現状	14
1・2・3 液体金属MHD発電の意義と現状	16
1・3 本論文の構成	18
1章の参考文献	20
第2章 電磁流体に対する支配方程式系	21
2・1 緒 言	22
2・2 記 号	23
2・2・1 シンボル	23
2・2・2 添 字	25
2・2・3 省略語	26
2・3 電気場の支配方程式	27
2・3・1 無限分割電極近似	28
2・4 熱流体場の支配方程式	30
2・4・1 準一次元近似方程式系	30
2・4・2 放物近似三次元方程式系	31
2・5 乱流モデル(turbulence model)	33

2・5・1 混合距離モデル*2*3*4(mixing length model)	33
2・5・2 高レイノルズ数 $k - \varepsilon$ モデル	37
2・6 数値解析手法	40
2・6・1 有限要素法の特徴	41
2・6・2 時間積分法	43
2章の参考文献	45
第3章 S F C型磁界配位	47
3・1 緒 言	48
3・1・1 電極の有限分割効果	49
3・1・2 冷電極での電流集中現象	50
3・2 電極境界層モデルと基礎方程式	51
3・3 定常放電状態に及ぼす磁界分布の影響	53
3・4 S F C磁界の近似発生法	56
3・4・1 無限長導体近似（空心コイル）	56
3・4・2 強磁性体の空間配置	58
3・5 クレセントコイルによる一様（U F C）磁界発生	60
3章の参考文献	62
第4章 S F C型M H D発電機の三次元特性	63
4・1 緒 言	64

4・2	MHD発電機内の三次元現象	65
4・2・1	局所ホール電流	65
4・2・2	MHD二次流れ	66
4・3	解析モデルおよび仮定	67
4・3・1	電気場の支配方程式	67
4・3・2	流体場の支配方程式	68
4・4	解析結果および考察	71
4・4・1	ホール電流	73
4・4・2	ファラデー電流	73
4・4・3	電極電位降下	79
4・4・4	二次流れ分布	79
4・4・5	温度及び軸方向速度の分布	80
4・5	結 論	86
4 章	の参考文献	87
第 5 章	高導電率プラズマを用いる MHD 発電機 ..	90
5・1	緒 言	91
5・2	支配方程式系	93
5・2・1	印加磁界	93
5・2・2	熱流体場の支配方程式	93
5・2・3	乱流モデル：高レイノルズ数 $k - \varepsilon$ モデル	96
5・2・4	電気場の支配方程式	98

5・3	計算結果	100
5・3・1	CASE-Aチャンネル	100
5・3・2	CASE-Bチャンネル	103
5・4	結 論	107
5章の参考文献		108
 第6章 乱れたプラズマに対する一般化オーム則 ..110		
6・1	緒 言	111
6・2	速度・温度乱れの表現	113
6・2・1	磁界印加のない場合	113
6・2・2	磁界印加された場合 (MHD条件)	115
6・3	一般化オームの式の乱れモデル	117
6・3・1	温度乱れのみの影響	118
6・3・2	速度乱れのみの影響	122
6・3・3	温度・速度乱れの影響	122
6・4	簡単な数値例	127
6・5	減衰速度の見積	129
6・5・1	乱れ速度の見積	129
6・5・2	解法1	131
6・5・3	解法2	133
6・5・4	数値計算	135

6・6 結 言	138
6章の参考文献	141
第7章 結 論	143
7・1 平均流れと電磁場の相互作用	144
7・2 流体乱れと電磁場の相互作用	145
7・3 本研究の結論	147
謝 辞	148
A P P E N D I X	149
A : 一般化オームの式の導出	151
B : 準一次元MHD方程式の導出	156
C : $k-\varepsilon$ 法の境界条件（高レイノルズ数）	161
D : 面積座標の性質	164
E : クランク・ニコルソン法	167
F : 矩形断面無限長コイルの作るSFC磁界	169
G : クレセントコイルの断面積	174

第1章 序 論

1-1 節 本研究の目的と特徴

本研究は、オープンサイクルMHD発電チャンネル内で生ずる現象を主として電磁場と熱流体場の相互作用現象として捉え、外部印加磁界の整形によりチャンネル内の不安定性を含む電磁流体相互作用を直接的に制御あるいは抑制することにより発電特性を改善する事を主な目的としている。

燃焼ガスプラズマを利用するMHD発電機は、蒸気タービンやガスタービンを有する発電機に比べ機械的回転部分を持たないため、より高温の燃焼ガスを利用できる直接発電システムである。また、その排出ガスの温度は十分高温であることから、これらタービン発電機のトッパとして使用すると熱力学的に高い総合発電効率が得られることが期待されている。また、導電率を上げるために使用されるカリウム化合物などのシード物質による自己脱硫作用、燃料の効率的利用による単位電気出力あたりに排出される二酸化炭素の抑制など、環境に対する影響も少ない。しかしながら、高温燃焼ガスからの直接発電は、電極材料の電気的および熱的耐久性を低下させること、シード物質あるいは石炭燃焼時に発生するスラグおよびその構成物質の電極壁面への析出・付着による電気的特性への悪影響、集中アーク放電による電流輸送モードが電極材料の寿命の観点から望ましくないことなどにより未だにMHD発電機が実用化されていない。これらMHD発電機の耐久性・信頼性を損なっている現象は全て電極境界層内の現象であることから、MHD発電機の実用化のポイントは電極境界層現象の解明・制御にあるといえる。これは以下の簡単なオーダー評価によっても理解される。すなわち、現在考えられている大型の商用MHD発電機の出力密度は、 20 MW/m^3 とされているのに対して、現在でも主流部では、導電率 $\sigma \sim 10 \text{ S/m}$ 以上、流速 $U \sim 1000 \text{ m/s}$ 程度、磁束密度 $B \sim 5 \text{ T}$ 以上を実現することは容易であり、これらの条件で期待される出力密度は、負荷整合時（負荷抵抗と発電機内部抵抗が等しい場合で最大出力が得られる条件）には

$$P = \frac{1}{4} \sigma U^2 B^2 = 62.5 \text{ MW/m}^3$$

となり、 60 MW/m^3 以上となることから了解される。

本研究では、この観点から冷電極を持つオープンサイクルMHD発電機の電極境界層における電気的および流体力学的諸特性の改善を目的とした外部磁界配位であるSFC磁界（Shaped B-Field Configuration）の有効性について、従来型の一様磁界（Uniform B-Field Configuration:以下UFCと略）との比較において論ずる。

SFC磁界についての詳細は3章で述べるが、ここで簡単にその概要・特徴を説明する。MHD発電の基本原理は導電性流体（導電率 σ ）を磁界 B の中で速度 V で運動させることにより電流を誘起し、電力を取り出すことにある。ここで導電率は有限であるため常にジュール発熱の形で発生電力の損失が存在する。冷電極を持つオープンサイクルMHD発電機ではこのジュール損失の大部分は電極境界層内で発生する。この理由は単に境界層内で起電力を構成する速度 V が主流部に比べ遅く（壁面上では0）導電率が低いことだけにあるのではなく、以下に述べるようにホール効果によって境界層内の磁界強度と共に発電機内部抵抗が増大するためである。ここでファラデー結線のMHD発電機を考えると、導電率の低い電極境界層内で主流部と同程度の強磁界が印加されていると、電流の連続性より負荷電流へ寄与する電流成分（ファラデー電流）は（絶縁壁境界層内を除き）発電チャンネル内ではほぼ一様であるのに対し、ホール効果による電流（ホール電流）は、主流部ではホール電界によりほぼ打ち消されているが電極近くではホール電界が電極面上で短絡されているためホール効果が直接ホール電流を駆動し、その大きさはファラデー電流と同程度以上となる。このホール電流は電極面に沿った電流成分であるから、電流は磁界が電極面上で強いほど冷電極境界層内での電流パスを長くし、その結果発電機内部抵抗を高め、電極電圧降下、ジュール損失を増加させる。従って電極境界層は発生電力の損失領域としてしか働かず、その損失割合は電極境界層内の磁界強度と共に増大する。そこで、印加磁界としてチャンネル内で一様とするのではなく、電力発生領域である主流部では強くし、ホール効果に伴うジュール損失を低減させるため電極近くで弱める分布としてSFC磁界が粥川らによって提案されている（3章参照）。

さらに本研究で対象としている冷電極乱流温度境界層には、温度勾配に伴う導電率の空間勾配とそれに直交した磁界が同時に存在している。磁界による流体変

動、あるいはレイノルズ応力の抑制効果は、古くから主として液体金属を用いた実験・理論的解析がなされていたが、液体金属の導電率は空間勾配をほとんど持たないため、アルカリシード燃焼ガスプラズマMHDと液体金属MHDでは、乱流減衰に関する性質は（液体金属MHDにおいて乱流減衰を特徴付ける無次元数である磁気相互作用パラメタがほぼ同程度の範囲にあるにも関わらず）かなり異なると予想される。

またオープンサイクルMHDにおける作動流体の動作温度範囲（1000 K～3000 K）ではその導電率は温度の12乗程度に比例するため、シード物質の電離・再結合の過程が非常に速く行われて、完全に熱平衡状態であると見なせる場合でも導電率の時間（あるいはアンサンブル）平均値は温度の時間平均値で見積もった導電率とは一致せず、この違いは温度変動が強いほど、また導電率の温度依存性が非線形になるほど大きくなる。以上のことは、乱流の弱電離プラズマを作動流体とする場合の支配方程式系、特に次式で示される一般化オーム則に対して乱流モデル化が必要であることを意味している。

$$J = \sigma (E + V \times B) - \mu_e J \times B$$

ここで、右辺第2項はホール効果を表している。

そこで本研究では、上述したSFC磁界によるMHD発電特性の改善方の提案に加え、冷電極温度境界層（磁界および導電率勾配が存在する）内における乱流減衰過程をプラントルの混合距離仮説に基づいてモデル化し、一般化オーム則の乱れモデルを構成している。

1-2 節 MHD 発電に関する研究開発の現状^{*1*2}

高温の導電性流体を強磁界を横切らせて走らせるとき、発生する起電力を使って外部の負荷に電力を供給するのがMHD発電の原理である。高温領域はMHD発電機で、中低温領域は蒸気タービンあるいはガスタービンで複合発電を構成することにより、高い発電効率が得られる。

現在、発電用ガスタービンにおける最高温度は1300℃程度であり、化石燃料の火炎温度約2000℃に較べて700℃程度の開きがある。さらに高い効率を持つ発電システムをめざすには、この高温領域を取り込むことが必要となる。しかし、これは回転機械では困難でありMHD発電の導入によってはじめて可能となる。

本節ではMHD発電を、ガスプラズマを用いるオープンサイクルおよびクローズドサイクルMHD発電機にわけ、これらの意義および現状について述べると共に液体金属MHD発電についても若干ふれる。

1-2.1 オープンサイクルMHD発電の意義と現状

オープンサイクルMHD発電は燃焼ガスをそのまま発電流路内に導くもので、作動気体が高温化（3000 K程度）できる点に特色がある。従ってこの高温により高い効率がもたらされる。燃焼ガスに導電性を与えるため、電離ポテンシャルの低いカリウム等のアルカリ金属の化合物（たとえば炭酸カリウム、水酸化カリウム等）を重量比で1%程度シードする。これにより5～10 S/m程度の導電率をもたせることができる。一方3000 K程度の高温燃焼ガスを得るには、燃焼機内に送り込む空気を予熱したり酸素を富化したりする。この予熱温度を高くし、2000 K以上にするのが望ましいが、それには高温の熱交換器が必要である。クリーン燃料では問題が少ないが、石炭燃焼ではスラグがこの熱交換器内に入ることやシード物質の問題もあり、当初は空気予熱用熱交換器の温度は1400℃程度にし、40%程度の酸素富化をする方式がとられる。スラグ条件下で

2000 Kの熱交換器が可能になれば石炭燃焼オープンサイクルMHD発電の総合熱効率は50%程度になるといわれている。石炭燃焼オープンサイクルMHD発電システム例を図1-1に示した。サイクロン燃焼器などで微粉炭を燃焼させ、シード物質を投入したのち、燃焼ガスはMHD発電機に導かれる。発電機を出た作動流体は熱交換器、ボイラを経たあと大気に捨てられる。シード物質は99%以上回収されなければならない。このときには、石炭中の硫黄分が硫化カリウムの形になり、シード回収と同時に硫黄分が除去できるのが特色である。窒素酸化物は熱交換器やボイラなどでの長い滞在時間を利用して順次分解されてゆくので大きな問題はないとされている。燃焼ガス中に含まれるスラグは燃焼器中で90%程度除去されるが、なお残りは発電機や熱交換器、ボイラの方へキャリーオーバーされる。発電機内の電極表面の温度を適切に選べば表面に厚さ1mm程度のスラグ層が形成され、これが特に陽極の電極材料を保護する役割をするといわれている。

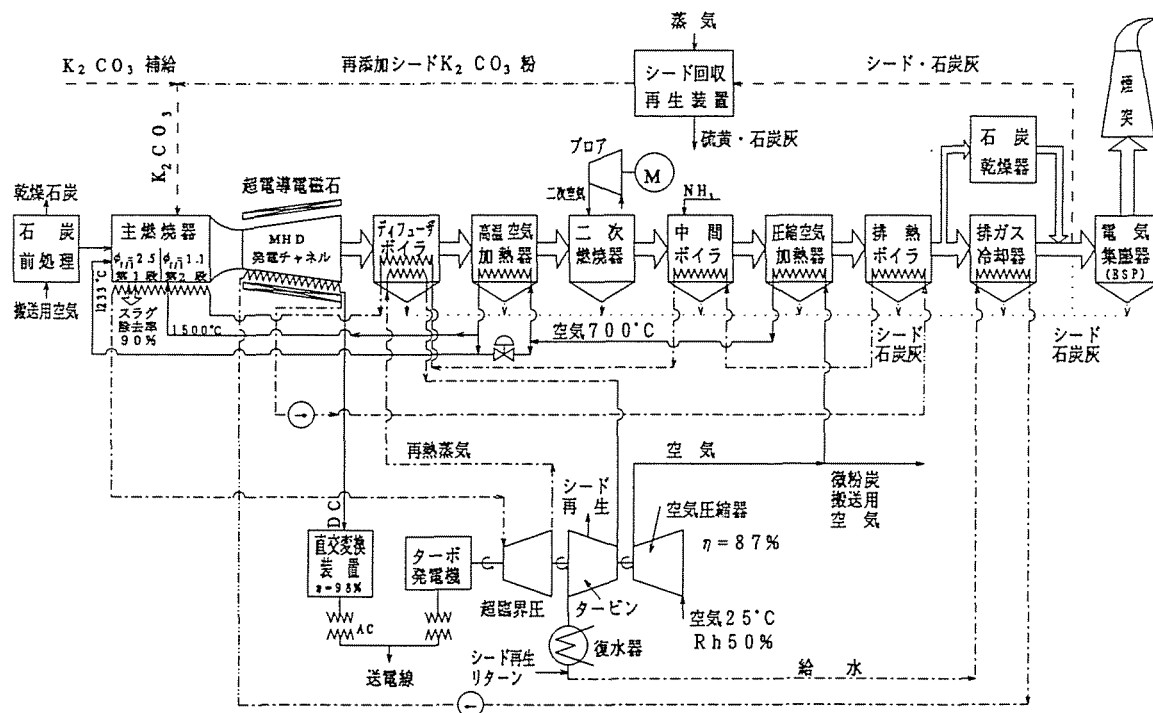


図1-1 石炭燃焼MHD/汽力プラントシステムの構成

石炭燃焼オープンサイクルMHD発電については、燃焼器、寿命の長い発電回路、高温熱交換器、シードの処理、超伝導マグネット等のコンポーネントの開発がまず必要であり、現在この開発が米国を中心に進められている。システム的には直交変換器と負荷との整合性、硫黄分の処理などの問題がある。米国のDOE（エネルギー省:Department of Energy）が1975年にまとめたECAS^{*3}（先進発電技術の評価:Energy Conversion Alternative Study）あるいはそれを引き継いだEPRIの研究^{*4}でもオープンサイクルMHD発電は、石炭との組み合わせの場合、総合効率において最も高い変換法であり、発電単価も低く、環境性も良いとの評価が出されている。ソ連での評価も同様であり、これがソ連、米国においてまずオープンサイクルMHD発電に先進発電技術の中で最も高いプライオリティをおいている理由である。

残る最大の問題は信頼性で、果たして5000～10000時間の運転時間まで到達できるかどうか焦点である。発電回路の材料については絶縁材料には、電融マグネシア系材が良いこと、電極材料としてはジルコニア系材料では陰極に ZrO_2-CeO_2 、陽極には $ZrO_2-LaCaCrO_2$ が良い結果を示している。金属電極ではCu-W合金が特に陰極に適していることが明らかにされている。陽極はスラグの付着によりこれが保護されるとされるが、一方スラグと導電極の間に酸化を促進する電気化学反応が起こるため白金のキャップで銅表面を保護することなどが試みられている。しかしなお改良の余地は大きくこれを2000時間以上耐久性をもたせる構造上、材料上の研究が必要である。

日本でも工業技術院から電気共同研究会が委託を受けオープンサイクルMHD発電の計画策定と開発指針を与えるベースをなしてきた昭和42年度～昭和50年度には石油及び天然ガス燃焼の発電システムについて^{*5}、また昭和53年度～昭和57年度には石炭燃焼の発電システムの概念設計と技術及び経済評価などの研究^{*6}が行われた。概念設計は現状技術をベースにしたきわめて保守的なものであったがいずれのシステムでも、在来火力や原子力並の発電単価で50%近い熱効率となることが見積もられた。また同時にMHD開発にはきわめて大規模な開発が必要なことを明らかにしている。

一方、燃料電池や高温ガスタービンなどの新発電方式は比較的小規模で開発が

可能なため最近の開発の進展がめざましい。このため実用化までの開発期間の長いMHD発電では、当初目標とした40%台の熱効率では魅力が乏しいと見るむきもある。このような中長期的な展望にたち、将来のより高性能のMHD発電システム像の検討が最近発表されている。また、開発経費の軽減と早期実用化をめざして、既存火力にMHDを結合する、いわゆるレトロフィット (Retrofit) システムが各国で検討されている。

レトロフィットシステムは既設の小型火力発電所にMHD発電設備を併設して、既存の設備の一部を利用する。このため、敷地開発に制限を伴うがMHDプラントの建設費を軽減でき開発期間も短縮できる。また旧形の既設発電所の発電容量の増加と効率の改善ができる適当な選択と設計により技術的なリスクを増やすことなくMHD技術の商用的な実用化可能性を実証でき、同時に電力事業者へのMHD発電技術の移転を可能にする。従ってレトロフィットシステムは、最初の商業発電の実証プラントとして最も現実性があり、アメリカ、イタリア、インド、ユーゴスラビアおよび中国などで検討されている。これをまとめたものが表1-1である。

以下、日本、アメリカ、ソ連を中心にオープンサイクルMHD発電システムの各要素要素技術の開発の現状について述べる。これまでの試験研究結果から、高温空気加熱器を除けば、一般に商用MHD発電プラントの開発には技術的なリスクが残されているが重大な技術的障壁はないものと認識されている。高温空気加熱器には当面熱効率を犠牲にして、酸素富化方式による代替が考えられており、商用化の準備として各構成機器の技術データベースの蓄積やプロトタイプの概念設計が行われており、比較的最小規模での総合試験と開発が行われている。しかし、一方ではガスタービンなど競合技術開発の進展にともない、コンパクトで、さらに高効率の高性能MHD発電システムを目指した開発も強く望まれている。各構成要素の開発課題をまとめると次のようになる。

(1) 石炭燃焼器 石炭燃焼器はMHD発電システムの中で最初の構成機器であり、その機能は石炭と酸化剤を高温・高圧の一樣な導電性のプラズマに変換することである。燃焼器の性能はプラント全体の効率に大きく影響する。その主要なパラメタは燃焼効率、熱損失割合、スラグ除去率、プラズマ導電率などであ

りそれぞれのパラメタは、99%以上、3～5%以下(500MWtクラスで)、70～90%、6S/m以上などの値が要求されている。さらに5～6atm以上の圧力のもとで最低10000時間程度の耐久性が必要であるとされている。

最も開発が進んでいるアメリカのTRW社のCDIF用50MWt燃焼器では、これまで行われた200時間以上の運転によりその設計性能はすでに実証され、10MWtおよび20MWtの燃焼器の数百時間の試験結果を含めると、主な運転パラメタおよび形状パラメタに関する性能データがほぼ蓄積されてきている。

表1-1 代表的なオープンサイクルMHDレトロフィットシステム^{*1}

国 名	アメリカ		イタリア		インド	ユーゴスラビア
名 称	Sholz	Corette	ケース1	ケース2		Kakanj-III
既設プラント 容 量	46 MWe	166 MWe	75 MWe	320 MWe	100 MWe	110 MWe
燃 料	石 炭	石 炭	天然ガス	天然ガス	石 炭	天然ガス
結合方式	蒸気結合	蒸気結合	ガス結合	蒸気結合	蒸気結合	ガス結合
熱 入 力 MHD 既 設	192 MWt —	250 MWt 265 MWt	230-240 —		149 MWt 155 MWt	373 MWt —
MHD出力	24.4 MWe	28 MWe	33 MWe	10 MWe	20-22 MWe	52.5 MWe
蒸気タービン 出 力	50.0 MWe	185 MWe	68 MWe	320 MWe	100 MWe	110 MWe
熱効率 %	31(net)	36(gross)	38		30.9(net)	
酸素富化率	40 %	36 %	38 %		酸素富化	35 %
酸化剤 予熱温度	788 °C	649 °C	1700 °C	1523 °C	850 °C	723 °C
蒸気条件 圧 力 温 度	865 psia 900 F	1800 psig 1000/1000 F		169 atg 566/538°C	1400 psi 1000 F	1910 psi 995/995 F
最大磁界	~6T(SCM)	4.5T(SCM)	6T(SCM)	5T(SCM)	銅 鉄	6T(SCM)
M H D 抽 出 率	(~12%)	(~10%)			10~12%	14.5 %

また、これらの試験を通して燃焼器の耐久性を制限する特別な現象は観測されていない。しかし燃焼器性能の厳密な評価は簡単でなく、均質な高導電率燃焼ガスプラズマを発生させるには、運転条件の最適化など研究課題が残されている。

また、さらに研究が必要な課題は、熱入力に対する形状のスケーリング、スラグの連続排出と電気絶縁および構成材料の耐用性などである。異なった炭種に対する経験の蓄積や高圧水での器壁の冷却なども次の開発課題である。なお、燃焼器に続く加速ノズルの設計については、既存の設計技術を磁界との相互作用を含めたものに拡張しなければならない。

(2) 発電チャンネル 発電チャンネルはMHD発電機を中心機器であり、最も重要な開発課題である。その性能は、発電性能として20～25%以上のエンタルピ抽出率と60～70%以上の等エントロピ効率、耐久性として数千時間以上の信頼性が要求されている。エンタルピ抽出率は、熱入力300MW規模のアメリカHPDE装置で3.8Tの磁界において理論的に予想される約12%が達成され、耐久性についてはAVCO社のマークVIとVIIで、それぞれ一台のチャンネルでは500時間、個々の陽極では1300時間の耐久性が実証されて、陽極と陰極とも数千時間までの寿命を推定できるようになっている。しかしHPDEの実験はトルエン燃焼の短時間(約10秒)であり抽出効率はまだ目標値の約1/2である。また 等エントロピ効率の検証はまだ行われていない。

従って、エンタルピ抽出率と等エントロピ効率の実証が再重要開発課題の一つである。こうエンタルピ抽出に伴い大きくなる三次元的相互作用の解明も重要である。これらの発電機性能パラメタは大型化と共に向上でき目標値が達成できるものと予測されている。これまでに行われた各種実験において発電機の大型化を阻害する現象は発見されていない。

電極は10000時間以上試験されたが完全なチャンネルとして長時間発電時に生じる問題点、たとえば隣接陰極間短絡と陰極近傍の絶縁壁の損傷など十分に解明されていない問題の解決が必要である。さらに炭種の違いによる影響、特に異なるスラグによる影響の解明が必要である。出力統合と負荷制御などの電力調整は、現状の技術で解決できるが損失と建設費を低減する最適化が重要である。

MHD 発電チャネルと下流の熱シード回収システムをつなぐディフューザは、チャネルを出た高速のガスの運動エネルギーを静圧に変換し、効率的な MHD 発電を可能にすると共に、下流システムに入るガス流速を適度の大きさに下げる役目を持ち重要である。これまでに超音速と亜音速の両領域のディフューザが設計され、C D I F のテストからディフューザ性能の三次元解析も行われているが、さらに発電チャネル内の多次元的な流れ解析と合わせて、高効率ディフューザの設計技術の確立が必要である。

(3) 超伝導電磁石 商用プラントには磁界 5 ～ 7 T、蓄積エネルギーとして数 ～ 1 0 G J の規模の鞍型超伝導電磁石の開発が必要である。わが国では E T L マーク V において 4. 5 T、6 0 M J のレーストラック形磁石を建設した実績を持ち、アメリカでは C F F F 用の 6 T、1 6 8 M J の鞍形磁石を建設し、設計仕様を試験確認している。商用化に対して、超大型という点を除けば MHD 用電磁石の技術水準は最新の超伝導技術の範囲内にあり問題は少ないが建設費の低減とその大きさにともなう新しい製造技術の開発が必要である。

(4) 空気（酸化剤）加熱器 石炭燃焼の MHD 排ガスを用いる直接加熱方式の高温空気加熱器の開発は長い時間と多額の費用が必要であると考えられているが、成熟した MHD 発電システムを実現するためには不可欠であるとされている。その開発課題は、

1. 石炭スラグおよびシードを含有する高温燃焼ガスに対する耐食耐熱性能を有する蓄熱材料の開発、
2. 蓄熱体やガス流路に堆積するシード・スラグの除去法開発、
3. 高温耐シード耐スラグ高温弁の開発、などである。

(5) ボトミングシステム オープンサイクル MHD 発電機出口での高温熱エネルギーの回収・利用及び使用済みシード（カリウム）の回収・再生は、プラントの高効率化と運転費の低減のために必要である。熱・シード回収システムにおける主な技術課題は次のようにまとめられる。N O_x、S O_xレベルの低減。媒じん（シード化合物およびアッシュ）の捕集・除去。材料劣化（コロージョン）

特性の把握。伝熱面でのスラッシングおよびファウリング特性の把握。輻射熱伝達特性の把握。シード化合物の回収技術（システム内でのマスバランス）。シード再生技術。

（6）高性能発電システム 長期的な観点に立ち、将来より高性能な発電システムを実現するために次のような研究開発が望まれている。

- ① 高性能酸化剤加熱システムの開発：加熱温度の向上（1700 K以上）、燃料改質などと結合した再熱システムの開発
- ② 低熱損失、高圧力高性能燃焼器の開発：高温器壁材の開発と器壁への熱損失の高効率回収
- ③ 高性能コンパクトMHD発電機の開発：高温壁発電チャネル材料、特に高温高電流密度電極材料の開発、高ホール電圧に耐える絶縁、特に電極絶縁の開発、器壁への熱損失の高効率回収、高磁界コンパクトディスク発電機の検討
- ④ 高磁界（10 T程度）超伝導電磁石の開発
- ⑤ 高効率ディフューザの開発

ここで述べた各構成機器の開発現状を表1－2にまとめた。

表 1-2 オープンサイクルMHD発電システムの要素技術開発の現状*¹

要素技術	特 性	実用目標	技術 見通	現 在 到 達 レ ベ ル (国 ; 装 置)
発電チャ ネル	発電特性 (エンタルピー 抽出率)	20~25 %	○	11.6% (10秒) (米国;HPDE) 7. % (30分) (ソ連;U-25) 4.8% (1分) (日本;Mk-II)
	耐 久 性	4000~8000 時間以上	○	1300h (油+ash) (米国;AVCO Mk-II) 250h (天然ガス) (ソ連;U-25) 430h (油+SO ₂) (日本;Mk-II)
燃 焼 器	高 負 荷 燃 焼	≤3000 K 500~2000MW	○	300MWt (天然ガス) (ソ連;U-25) 50MWt (微粉炭) (米国;CDIF) 25MWt (油) (日本;Mk-V)
高温空気 加熱器	間接加熱	1300~2000K 流量500kg/s クリーン燃料	◎	1470K, 40kg/s (ソ連;U-25) 1970-2320 K, 0.4-1.2kg/s (同;U-02) 1650 K, 15kg/s (日本;製鉄熱風炉)
	直接加熱	同 上 対シート・スラグ	△	基礎研究段階 (米国) 1770K, 対シート性 (日本;Mk-II) 対スラグ性基礎研究 (日本)
超 伝 導 マ グ ネット	磁束密度 蓄積エネルギー	5~6 T ~15 GJ	○	6T, 168MJ (米国;CFFF) 5T, 34MJ (米国;U25-B) 4.5T, 60MJ (日本;Mk-V)
シート・サイクル	回 収	95%以上	○	~90% (米国;CFFF) 99.9% 以上 (日本;Mk-VI, Mk-VII)
	再 生	経済的プロセス	○	概念設計と経済計算 (日本, 米国) (既存化学工業技術を適用可能)
環境保全	SO _x	規制値以下	○	<1ppm (日本;Mk-VII) 脱硫効率 90% 以上 (米国;CFFF)
	NO _x		○	100ppm 以下 (日本;Mk-VII) 0.2 lb/MBtu 以下 (米国;CFFF)
	ダ ス ト		○	22 mg/Nm ³ 以下 (日本;Mk-VII) 規制値以下の制御 (米国;CFFF)

電気学会MHD発電技術専門委員会「MHD発電技術開発の現状」*¹より転載

1-2.2 クローズドサイクルMHD発電の意義と現状

クローズドサイクルMHD発電には、希ガス（アルゴンまたはヘリウム）を作動流体とするものと液体金属を作動流体とするものがあるが、後者はその加速法などにまだ問題があり、現在は希ガスを作動流体とするものが注目されている。希ガスを熱交換器で加熱したあと、金属カリウムやセシウムの蒸気をこれにシードし、発電流路に導く。発電流路を出た作動ガスはボイラ（蒸気タービンをボトムリングする場合）かあるいは再生器（再生システムにする場合）を通ったあと圧縮器で圧縮され熱交換器にもどされる。作動流体は循環するのでクローズドサイクルと呼ばれる。

従って、元来最も適するのは原子炉と組み合わせることであるが、高温ガス炉のヘリウム出口温度が1000℃を超えることは核分裂生成物質のリークの問題につながるため困難であることが次第に明らかになり、現在では高温ガス炉との組み合わせは考えられない。ただし、長期的にはヘリウム出口温度があがることも考えられ、また核融合炉では荷電粒子の持つエネルギーを利用することによりヘリウム出口温度を十分高くすることが可能と思われるので長期的には原子力との組み合わせが考えられる。

化石燃料とクローズドサイクルMHD発電との組み合わせが現実的であるが、このとき希ガスの最高温度は熱交換器の最高温度で決まる。セラミック蓄熱体熱交換器でクリーン燃料を使用すれば2100Kまでは可能であるといわれている。問題は石炭との組み合わせである。スラグキャリオバの条件下で蓄熱型熱交換器の温度がどの程度まで上げ得るか、目づまりを起こさないか、蓄熱体にクラックが入らないか、またそれを真空引きしたあと、アルゴンガスを流した場合アルゴンに含まれる不純物がどの程度になるかなどが課題となっている。しかし、石炭をいったんガス化した後燃焼器に導き、燃焼ガスを熱交換器に通すのがより現実的と考えられている。ガス化は、発電所内で行い、ガス化炉から出た低カロリーガスは高温のクリーンアップシステムで処理されたあと燃焼器に導かれる。ガス化の過程でのエネルギーの損失をできるだけ小さくしなければならないが10～20%程度の損失は避けられないと考えられている。ガス化－希ガスMHD発電システムを図1-2に例示した。

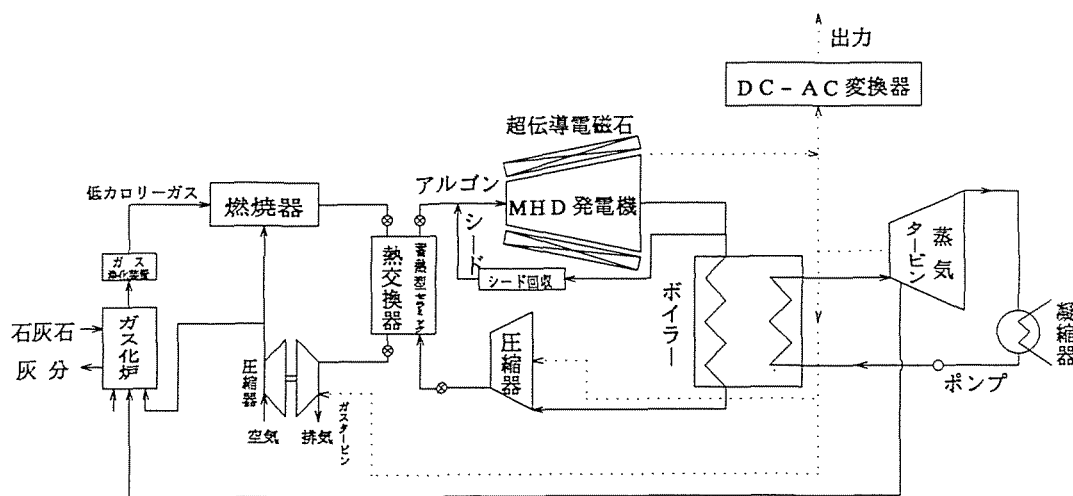


図 1 - 2 石炭ガス化クローズドサイクルMHD発電システム

したがって、クローズドサイクルの熱効率をできるだけ大きくすることが望ましく総合効率において50%にするにはこの熱効率を55～60%にする事が必要となる。

シードした希ガスを作動気体とするときには、非平衡電離という現象を使う。起電力によって駆動された電流のジュール加熱により電子温度を作動気体の温度より高めて電離を促進させ高い導電率を得る。しかしこのとき電離不安定が起これ、現実的には作動気体の導電率とホールパラメタを下げってしまう。東工大では、この電離不安定を、シード率を 10^{-5} 程度に低くし、シード物質を完全電離することにより抑えることができ、高導電率、高ホールパラメタのプラズマを生成することが可能となっている^{*7}。このシード率はオープンサイクルMHD発電に較べて約100分の1程度であること、また非平衡電離を利用することでガス温度はオープンサイクルに較べ約1000℃程度低く、さらに反応性の低い希ガスを用いるなどの条件から、材料に関する信頼性も高いと考えられている。

希ガスを用いたクローズドサイクルMHD発電機の発電実験は、ブローダウン装置と衝撃波管装置で行われている。ブローダウン装置は最初オランダのアイントホーベン工科大学 (Eindhoven University of Technology : 以下EUTと略)

で熱入力 5 MW の装置が建設され、ファラデー形で発電実験が行われてきた。その後、東工大で熱入力 3 ～ 6 MW のディスク形発電機が設置された。

EUT のファラデー形発電機内の放電は、空間的に集中し、いわゆるストリーマと呼ばれるひも状の放電となっている。さらに数個のストリーマが上流から下流へと移動し、発電出力がストリーマの数と関係しており、シード率を下げた時にはストリーマの数が減少して出力が低下する。このように EUT の実験では電離不安定を許容しながらもシード率を高めることによって性能の向上をはかっている。EUT の実験では、熱入力を絶対零度基準で評価したエンタルピー抽出率は 12.9 % を記録した^{*8}。

東工大のブローダウン装置 FUJI-1 では EUT と異なり、低シード率でシードを完全電離させプラズマの揺らぎを極力小さくし高性能のディスク形発電機を開発する事を目的としている。1988 年 10 月に行った DISK-F3 による実験では、熱入力を室温基準で評価したエンタルピー抽出率で 15.6 %、出力密度 71 MW/m³ が得られている^{*9}。

1-2.3 液体金属 MHD 発電の意義と現状

液体金属 MHD 発電には重力形の自然循環システムと自己循環形の加速ノズル-分離器-ディフューザからなるシステムの二種類に大別される。重力形の自然循環システムについてはイスラエルの ETGAR シリーズの開発が進展している。ETGAR-5 での導電性作動流体として熔融鉛が、熱力学的作動流体としては蒸気が用いられる。

蒸気は石炭燃焼ボイラでつくられ、温度 390℃、圧力 30 気圧である。ETGAR-5 はイスラエルのネゲブの磷酸肥料工場の敷地内におかれ、工場の蒸気要求に応じて、コジェネレーション方式から電力専用方式に切り替えることができる。同システムで発生される電力は、DC から AC へ変換されイスラエルの国内電力系統へ供給される予定となっている。同システムの仕様を表 1-3 に示す。この表からも分かるように ETGAR-5 では不確かさと開発リスクを避けるために動作保証がすでになされているプロセス、材料および既存の技術のみを用いて設計されているが、それ以後の研究開発プログラムでは種々の試みが計画され

表 1-3 E T G A R-5 のパラメタ^{*10}

Cycle high temperature	480 °C
Steam temperature at boiler exit	390 °C
Steam generator (boiler) mass flow rate	1.5 kg/s
Cycle high pressure	30 bar
Total heat input	5.07 MW
Condensing mode of operation :	.
Cylce low temperature	0.09 bar
Condensor cooling water inlet temperature	29 °C
Net electric power	1.4 MW
AC net electric power	1.3 MW
Electric plant AC efficiency	25.4 %
Cogeneration mode of operation :	
AC nett electric power	250 kW
Steam mass flow rate	1.5 kg/s
Process of steam deklivery options :	
A. Superheated steam conditions	5 bar/480°C
Mass flow rate	1.5 kg/s
B. Saturated steam conditions	5 bar/152°C
Mass flow rate	1.9 kg/s

ている。一方、自己循環型の LMMHD（液体金属 MHD）発電システムについては、二相流部で生ずる損失の低減に関して地道な基礎研究が続けられており、損失機構の解明、損失低減の条件や方法などに多くの知見が得られている。^{*11} またこの形のシステムを MHD 圧縮機としてプラズマ MHD システムと組み合わせる新しい応用も考えられている。

LMMHD 直流発電機に固有の低電圧－大電流出力密度の対策の一つとして開発された誘導型 LMMHD 発電機が、本質的に高い流速を要求することから、液体金属の大きな摩擦損失を招くことが明らかになり、対策が考えられている^{*11}。

1-3 節 本論文の構成

第 1 章は、MHD 発電技術に関する在来の研究と、現在認識されている問題点を整理し、本研究の目的と意義について述べている。

第 2 章では、電磁流体が従う電気場及び熱流体場の支配方程式系を示し、それらに対する数値解析手法について概説している。

第 3 章では、冷電極を持った MHD 発電機に対して内部抵抗及び放電特性の観点から有効であると考えられている 2 次元 2 成分の印加磁界分布形状、いわゆる SFC 型磁界配位が理想的に実現された場合の基本特性について説明している。また、理想的な SFC 磁界配位は、電子の数密度と磁界（の発電有効成分）が空間的に相似であることが必要でため実際に発生させることが困難であることから、近似発生法を、超伝導電磁石を用いる場合と、通常の銅鉄マグネットのギャップ空間に強磁性体を配置させその減磁・増磁効果を用いる場合の 2 通りの方法をしめし、磁界計算法について説明している。

第 4 章では、電気場と熱流体場に対する 3 次元解析による SFC 型 MHD 発電機の電氣的及び流体力学的特性に関する評価を行っている。本解析により、SFC 型 MHD 発電機は、従来型の一様磁界印加の場合に比較して、ホール効果によって発生し、発電機としては無効電流成分であるホール電流の抑制、電極壁への熱及び電流集中の緩和、MAT 不安定性あるいは、電極境界層剥離現象の抑制などの効果があることについて示した。また、一様磁界印加の場合について知られていた絶縁壁（側壁）境界層での速度が主流部よりも速くなる、いわゆる速度オーバーシュート現象が、SFC 型 MHD 発電機では電極境界層においても生ずることを示し、そのメカニズムについて SFC と UFC の違いについて説明している。

オープンサイクル MHD 発電機は、クローズドサイクルの場合と異なり大型機ほど効率が高くなり、電磁界と流体の相互作用も強くなる。

そこで第 5 章では、小型の実験機を用いて商用規模の大型機でのみ生ずるとされている強相互作用条件を模擬するため提案されている方法を概説し、その中からカーボン燃焼を用いた高導電率プラズマを利用した場合の 3 次元解析結果について述べている。高導電率プラズマは、一般に高移動度プラズマとなるため、電

極近くでのホール効果を抑制する事を目的とした S F C 型 M H D 発電機では、通常の石炭・石油などの炭化水素系燃料を用いた場合よりも U F C 型に較べた電気出力の増大傾向が強くなることが明らかにした。

第 6 章では、これまで（本論文の第 4 章、第 5 章の数値計算を含め）M H D 発電機の数値解析分野においてほとんど考慮されていなかった作動流体の乱流特性を考慮した一般化オーム則の乱流モデル化を行っている。導出された一般化オーム則より、磁界印加時には、温度勾配が定常電流を駆動しその電流に対するローレンツ制動力によって温度勾配に反平行な乱れ速度成分が選択的に減衰を受け、その結果温度勾配に平行な定常流が駆動されることを明らかにし、電極境界層での温度及び速度を減少させることを示した。さらにこの効果を支持する測定結果を併せて示すと共に乱れ速度に対する運動方程式を解くことにより、この定常流の大きさを表す式およびレイノルズ応力の減衰テンソルを導出した。このテンソルは、温度勾配がない場合に従来液体金属を作動流体として導かれた表式に一致することを示した。

参考文献

- *¹ 電気学会MHD発電技術専門調査委員会編「MHD発電技術開発の現状」
電気学会技術報告（Ⅱ部）第309号，1989／9
- *² 文部省科学研究補助金総合研究(A)，"新MHD発電システムに関する研究，"
成果報告書（昭和55年3月）
- *³ G. R. Seike, et al., "A Summary of the ECAS Performance and Cost
Results for MHD System," Proc. of 15th Symp. Engng. Aspects,
III. 2. 1. 1(1976)
- *⁴ "Comparative Study and Evaluation of Advanced Cycle Systems,"
EPRI Report AF-664, Feb. (1978)
- *⁵ MHD発電システム専門委員会：「MHD発電システム」、電気共同研究
（1979－3）
- *⁶ MHD発電システム専門委員会：委託研究報告書，"MHD発電システムの研
究，" 電気共同研究会（1983－3）
- *⁷ H. Yamasaki et al., : "High Enthapy Extraction Experiments with the
FUJI-1 Disk Generator," Proc. of 27th Symp. Engng. Aspects MHD,
Nevada, 1989.
- *⁸ W. J. M. Balemans and L. H. Th. Rietjens, "High Enthalpy Extraction
Experoments with the Eindhoven Blow-down Facility," Proc. of 9th Int.
Conf. on MHD Power Gen., Tsukuba, Vol. II, p. 330(1986)
- *⁹ H. Yamasaki et al., "FUJI-1 Experiments," Proc. DOE and TIT Work
Shop, TIT, 1, Nov(1988)
- *¹⁰ H. Branover, : "The Status of Israel's MHD Program,"
Proc. of 26th Symp. Engng. Aspects of MHD, 2. 1. 1(1988)
- *¹¹ F. Jousselein, : "Liquid Metal MHD Power Generation In France,"
第10回エネルギー利用と直接発電シンポジウム，北海道大学，243(1988)

第2章 電磁流体に対する支配方程式系

2-1 節 緒 言

本章では、本論文で使用する記号およびMHD発電チャネル内を流れる弱電離プラズマ流体现象を記述する電気および流体場に対する支配方程式系について示し、それら方程式系に対する解析手法について概説する。

2-2 節 記 号

2-2.1 シンボル

- A : van Driest 定数、26
磁界によるレイノルズ応力の減衰の比例係数
熱流束の補正関数
- B : 磁束密度、[T]
- β : ホールパラメタ ($\mu_e B$)
流体魂の運動の特性時間の比
- C_f : 摩擦係数
- C : 乱流モデルの定数
 $C_1 = 1.44$
 $C_2 = 1.92$
 $C_D = 0.09$
 $C = 5.5$ (なめらかな壁面の場合)
- c : 比熱、[J/kg/K]
- D : van Driest の減衰関数
乱流減衰関数
- E : 電界ベクトル、 $-\nabla\phi$ 、[V/m]
- E : $\exp(\kappa C)$
- e : 電荷素量、 1.6022×10^{-19} [C]
- G : G-ファクタ
- γ : 比熱比、 c_p/c_v
- ξ : 壁面からの距離、[m]
- Ha : ハルトマン数、($Ha^2 = \sigma B^2 L^2 / \mu$)
- h : エンタルピ、[J/kg]
- ε : 誘電率、[F/m]
全エネルギー密度 $= \rho u^2 / 2 + \rho C_v T$ [J/m³]

	乱流エネルギーの散逸率、 $[W/m^3]$
J	電流密度、 $[A/m^2]$
K	負荷率 $= E_y / u B_z$
k	乱れのエネルギー $[J/kg]$
κ	カルマン定数、0.41
χ	磁気相互作用パラメタ (Stuart 数)、 Ha^2 / Re
l	混合距離、乱れの空間スケール $[m]$
M	分子量 $[kg/kmol]$
m	粒子の質量、 $[kg]$
$\dot{m}$	質量流量、 $[kg/s]$
μ	移動度、 $[1/T]$ 粘性係数、 $[kg/m/s]$ 透磁率、 $[H/m]$
n	粒子数密度、 $[個/m^3]$
ν	動粘性係数、 $[m^2/s]$ 衝突周波数、 $[1/s]$
P	プラントル数
p	圧力、 $[Pa]$
R	普遍ガス定数、8314.4 $[J/K/kmol]$
R	ガス定数、 R/M
Re	レイノルズ数、(無次元量: UL/ν)
ρ	質量密度、 $[kg/m^3]$ 電荷密度、 $[C/m^3]$
S_t	スタントン数
σ	導電率、 $[S/m]$ 乱流モデルの定数 (プラントル数)
T	温度、 $[K]$
t	時間、 $[s]$
τ	応力、 $[Pa]$ 平均自由時間、 $[s]$

U	: 拡散速度、平均速度の軸方向成分
$\mathbf{V}$	: 速度ベクトル、 $[\text{m}/\text{s}]$
$\hat{\mathbf{v}}$	: $y-z$ 断面内の速度ベクトル、 $[\text{m}/\text{s}]$
u	: 速度の x 成分、 $[\text{m}/\text{s}]$
v	: 速度の y 成分、 $[\text{m}/\text{s}]$
w	: 速度の z 成分、 $[\text{m}/\text{s}]$
x	: x -座標、 $[\text{m}]$
y	: y -座標、 $[\text{m}]$
z	: z -座標、 $[\text{m}]$

2-2.2 添 字

c	: 電荷(electric charge)
e	: 電子(electron) 乱れの散逸率
f	: 摩擦(friction)
H	: 重粒子 (イオン+中性粒子)
i	: イオン(ion)
k	: 乱れのエネルギー
l	: 層流(laminar)
n	: 中性粒子(neutral particle)
p	: 壁面に隣接する考察点 定圧変化
s	: 粒子の種類、($s = e, i, n$)
t	: 乱流(turbulent)
$t r$	: テンソルの転置(transpose)
v	: 定積変化
w	: 壁面(wall)
x	: x -成分
y	: y -成分

- z : z - 成分
 $'$: 乱れ成分
 $-$: 時間平均、アンサンブル平均
 $+$: 無次元化 (摩擦速度基準)
 $\wedge$: $y - z$ 2次元量
 $*$: 摩擦速度

2 - 2. 3 省略語

- A E D C : A r n o l d E n g i n e e r i n g u e r d e v e l o p m e n t C e n t e r
 A N L : A r g o n n e N a t i o n a l L a b o r a t o r y
 A V C O : A v c o E v e r e t t R e s e a r c h L a b o r a t o r y
 C C M H D : C l o s e d - C y c l e M H D
 C D I F : C o m p o n e n t D e v e l o p m e n t I n t e g r a t i o n F a c i l i t y
 C F F F : C o a l F i r e d F l o w F a c i l i t y
 C O M : C o a l O i l M i x t u r e
 D O E : D e p a r t m e n t o f E n e r g y
 E C A S : E n e r g y C o n v e r s i o n A l t e r n a t i v e S t u d y
 E S P : E l e c t r o s t a t i c P r e c i p i t a t o r
 E T L : E l e c t r o t e c n i c a l L a b o r a t o r y
 H P D E : H i g h P e r f o r m a n c e D e m o n s t r a t i o n E q u i p m e n t
 L M M H D : L i q u i d M e t a l M H D
 M A T I : M a g n e t o a e r o t h e r a I n s t a b i l i t y
 M H D : M a g n e t o h y d r o d y a m i c s
 O C M H D : O p e n - C y c l e M H D
 S F C : S h a p e d B - F i e l d C o n f i g u r a t i o n
 U F C : U n i f o r m B - F i e l d C o n f i g u r a t i o n
 U T S I : U n i v e r s i t y o f T e n n e s s e e S p a c e I n s t i t u t e

2-3 節 電気場の支配方程式

MHD 発電チャネル内の電気場を記述する支配方程式系^{*1}は、作動流体が弱電離ガスプラズマである時には、以下のようになる。

一般化オーム則(Generlized Ohm's law) (A p p e n d i x - A 参照)

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \mu_e \left\{ \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_e + \frac{m_e n_e}{e} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{J}}{n_e} \right) \right\} \quad (2-1)$$

ここでスカラー導電率 σ は、次式で表される。

$$\sigma = \frac{n_e e^2 \tau_{eH}}{m_e} = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_{eH}} = n_e e \mu_e \quad (2-2)$$

マックスウェル方程式系 (Maxwell's equations)

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad (2-3)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad (2-4)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho^e) + \nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2-5)$$

ここでオープンサイクル MHD 発電機で成立する次の仮定をおく。

- ① プラズマは電氣的に中性 ($\rho^e \doteq 0$) である。
- ② 変位電流及び電子の圧力勾配による電流をを無視する。
- ③ 印加磁場は、時間的に一定である。
- ④ 磁気レイノルズ数は 1 に比べ十分小さく誘導磁場を無視する。
- ⑤ 電氣的な時定数は、熱流体場の時定数に比べ十分短い。

このとき、電気場の支配方程式系 (2-1) ~ (2-5) は、以下のよう表わされる。

一般化オームの式

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \mu_e \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (2-1')$$

定常マックスウェル方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = 0$$

または

$$\mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (2-3')$$

電流連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (2-5')$$

2-3.1 無限分割電極近似

ファラデー結線MHD発電機において、流れ方向（x方向とする）に連続した板状の1対の電極構造を採用した場合、連続電極ファラデー型MHD発電機と呼ばれる。この場合には、x方向の電界（ホール電界） E_x は、電極によって強制的に短絡されることになり $E_x = 0$ の条件を課すことになる（厳密には電極表面だけで $E_x \equiv 0$ であるが近似的には流路内でほぼ成り立つとしても良い）。この場合には、電極板を帰路とする無用の循環電流が発生し、発電効率を低下させる^{*2}ことになる。

そこでその対策として、流れ方向に電極を分割し、できるだけホール電流を抑えようとする電極構造が一般に採用され、分割電極ファラデー型MHD発電機と呼ばれる。この電極分割（電極間高さに対する1つの分割された電極の流れ方向の幅）を無限に細かくしていったときの極限を無限分割電極近似と呼ばれる。この近似のもとでは、ホール電界 E_x は断面内で一定値となることが示される。現実の有限分割電極でも、電極のごく近傍を除いてほぼ成立する。従って本研究でのy-z面内での2次元解析および放物近似3次元解析では電気場に対し、無限分割電極近似を採用している。

そのとき電気場の支配方程式系（2-1）～（2-5）は、ポテンシャル ϕ を用いて次式で表される。

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma_{yx} (E_x + v B_z - w B_y) + \sigma_{yy} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y} - u B_z \right) \right. \\
& \quad \left. + \sigma_{yz} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} + u B_y \right) \right] \\
& + \frac{\partial}{\partial z} \left[\sigma_{zx} (E_x + v B_z - w B_y) + \sigma_{zy} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y} - u B_z \right) \right. \\
& \quad \left. + \sigma_{zz} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} + u B_y \right) \right] = 0
\end{aligned}
\tag{2-6}$$

ここで、 σ_{ij} はテンソル導電率の i, j 成分 ($i, j = x, y, z$) であり、磁界が y および z 成分を持つときは次式で表される。

$$\{\sigma\} = \frac{\sigma}{1 + \beta_y^2 + \beta_z^2} \begin{bmatrix} 1 & -\beta_z & \beta_y \\ \beta_z & 1 + \beta_y^2 & \beta_y \beta_z \\ -\beta_y & \beta_z \beta_y & 1 + \beta^2 \end{bmatrix} \tag{2-7}$$

2-4 節 熱流体場の支配方程式

MHD 発電チャネル内の乱流状態にある熱流体場を記述する支配方程式系は、以下のようになる。

質量保存則 (Mass conservation law)

$$\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (2-8)$$

運動量保存則 (Momentum conservation law)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} - \nabla \cdot \left\{ (\mu_i + \mu_t) \{ \nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^{\text{tr}} \} \right\} \\ = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (2-9)$$

エネルギー保存則 (Energy conservation law)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla h - \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{\mu_i}{P_i} + \frac{\mu_t}{P_t} \right) \nabla h \right\} \\ = \mathbf{V} \cdot \nabla p + \mathbf{J}^2 / \sigma + (\mu_i + \mu_t) \Phi' \end{aligned} \quad (2-10)$$

ここで $(\mu_i + \mu_t) \Phi' \equiv \Phi$ は、散逸関数(dissipation function)とよばれ、軸方向の速度勾配が、断面内の変化に比べ小さいとき、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \Phi' = 2 \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right\} + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (2-11)$$

状態方程式 (Equation of state)

$$p = \rho \frac{R}{M} T = \rho R T \quad (2-12)$$

2-4.1 準一次元近似方程式系 (Appendix-B 参照)

N-S 方程式系に対して準一次元近似を行うと

質量保存則

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\rho u}{A} \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (2-13)$$

運動量保存則

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\rho u^2}{A} \frac{\partial A}{\partial x} - \langle J_y B_z \rangle + f = 0 \quad (2-14)$$

エネルギー保存則

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \{(\varepsilon + p)u\}}{\partial x} + \frac{(\varepsilon + p)u}{A} \frac{\partial A}{\partial x} - \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle + q = 0 \quad (2-15)$$

ここで A 、 f 、 q 、 ε は、それぞれチャネル断面積、摩擦損失、熱損失、全エネルギー密度を表す。詳しくは Appendix-B を参照。

2-4.2 放物近似三次元方程式系

MHD 発電ダクト内の流れ場は、非常に方向性が強く衝撃波や境界層の剥離現象が生じない条件のもとでは、近似的に下流の影響が上流へ伝わらないとして、軸方向の二次微分を無視する、いわゆる放物近似^{*3*4*5*6*7}を用いることができる。この仮定は、流体場の軸方向 (x 方向) の変化が断面内変化に較べ十分小さいことに対応している。

このとき、定常流れ場の場合に熱流体場を記述する支配方程式は以下のように放物化される。

質量保存則

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u) + \hat{\nabla} \cdot (\rho \hat{\mathbf{v}}) = 0 \quad (2-16)$$

運動量の式

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} u - \hat{\nabla} \cdot (\mu_{eff} \hat{\nabla} u) \\ = -\frac{d\bar{p}}{dx} + J_y B_z - J_z B_y \end{aligned} \quad (2-17)$$

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial \hat{\mathbf{v}}}{\partial x} + \rho \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} \hat{\mathbf{v}} - \hat{\nabla} \cdot \left[\mu_{eff} \{ \hat{\nabla} \hat{\mathbf{v}} + (\hat{\nabla} \hat{\mathbf{v}})^{tr} \} \right] \\ = -\hat{\nabla} p + (\mathbf{J} \times \mathbf{B}) \end{aligned} \quad (2-18)$$

エネルギー式

$$\begin{aligned} \rho u \frac{\partial h}{\partial x} + \rho \hat{\mathbf{v}} \cdot \hat{\nabla} h - \hat{\nabla} \cdot \left\{ \left(\frac{\mu_l}{P_l} + \frac{\mu_t}{P_t} \right) \hat{\nabla} h \right\} \\ = \frac{J^2}{\sigma} + u \cdot \nabla p + \Phi \end{aligned} \quad (2-19)$$

但し、 $\bar{p}$ および p はそれぞれ断面内の平均圧力（ $\bar{p}(x)$ ： x のみの関数）、および局所圧力（ $p(y, z)$ ： y および z の関数）である。また、 $\hat{\cdot}$ のついたベクトル量および演算子は（ y, z ）面内の2次元量であることを表すものとする。
たとえば、

$$\hat{\mathbf{v}} = \{0 \quad v \quad w\}^{tr}, \quad \hat{\nabla} = \left\{0 \quad \frac{\partial}{\partial y} \quad \frac{\partial}{\partial z}\right\}^{tr}$$

本研究では、解析手法としては、 $y-z$ 断面内では三角形一次要素を用いた有限要素法、軸方向には、クランク-ニコルソンによる陰解法を用いた。これら解析手法については、2-6節で詳しく述べる。

2-5 節 乱流モデル(turbulence model)

乱流現象を解析することは、層流現象に較べその工学的重要性は格段に大きい。しかし、その本質的な三次元非定常性のため現在のスーパーコンピュータを用いても完全な現実的正当性（あるいは妥当性）を持ったモデルは存在しない。この理由は、現実的な乱流（の本質的な）解析に必要な記憶容量や計算速度はいずれも現在利用できる計算機的能力より何桁も高いからである。

Launder and Spalding^{*8}によれば良い乱流モデルとは、つぎの2つの条件を満たすものである。

- ① 十分な普遍性(universality)を持つこと
- ② そのモデルを構築あるいは使用に当たって、あまり複雑(complex, complexity)でないこと

ここで、普遍性とはそのモデルで使用される経験的な定数および関数が個々の流れによらずただ一とうり(a single set of empirical constants and functions)であることである。また複雑さは、モデルが扱う微分方程式の数であり、N本の微分方程式を扱う乱流モデルはN方程式モデルと呼ばれる。一般に①と②の要請は相反する条件となる。

現在最もよく使われる乱流モデルは、簡単な流れの場合は、プラントルの混合距離仮説に基づく混合距離モデル（0方程式モデル）および2方程式 $k-\varepsilon$ モデルがある。

2-5.1 混合距離モデル^{*9*10*11}(mixing length model)

乱流粘性 ν_t の次元は（速度）×（長さ）であり、一般的には乱れのスケールで表現しなければならない。簡単のために、この乱れのスケールを平均流特性に関連づけて、乱れの輸送方程式を使う代わりに代数方程式で与えるのがゼロ方程式モ

デルであり、Prandtlによる混合距離仮説は、最も有名である。

流れの特性長さを l とし、乱れ特性時間を平均流特性時間 $(|\partial U / \partial \xi|)^{-1}$ に比例すると考えれば、乱れ特性速度は $l^2 |\partial U / \partial \xi|$ となる。その結果、乱流粘性の表示が次のように求まる。

$$\nu_t = l^2 \left| \frac{\partial U}{\partial \xi} \right| \quad (2-20)$$

混合距離 l は、流体塊が初めの運動量を保って移動する ξ 方向距離として考えることができる。式(2-20)では、 l だけを与えれば ν_t が求まり、境界層や自由乱流などいろいろな流れ形式についての l の経験式が出されている。

壁境界層での標準的な混合距離表示は次のようになる。慣性底層では l は ξ に比例するとして $l = \kappa \xi$ とおく。壁面では粘性のために乱れは消失し $l \rightarrow 0$ となるから、壁に近い粘性底層、移行層では分子粘性による補正を加える。このような内挿でよく使われる l の標準形は、Van Driest(1956)による次のようなものである。

$$l = \kappa \xi G(\xi) \quad (2-21)$$

$$G(\xi) = 1 - \exp\left(-\frac{\xi^+}{A}\right) \quad (2-22)$$

ここで、 $\kappa = 0.41$ はKarman定数である。指数関数部は減衰関数と呼ばれるもので、簡単な境界層については $A = 26$ であるが、物性値変化、表面粗さ等の効果を取り入れたいろいろな関数が提案されている。外層では l を剪断層の厚さ δ に比例するとして $l = C \delta$ と与えるか、あるいは ν_t を一定値として与える。

乱流であっても壁面に非常に近い領域では層流底層と呼ばれる層流粘性が支配的な領域($0 \leq \xi^+ \leq \sim 30$)での補正関数を表している。なめらかな壁に対しては $A^+ = 26$ 程度であり、粗い壁に対しては壁粗さを $\Delta \xi$ とすると $A^+ \rightarrow 0$ となり、混合距離は、

$$l = \kappa (\xi + \Delta \xi) \quad (2-23)$$

となる^{*12}。

Cebeci-Smithモデル

壁境界層に用いるゼロ方程式モデルではCebeci-Smithモデルが最もよく整備されている。このモデルでは低レイノルズ数効果、遷移、吹き出し、圧力勾配、表面曲率等の経験補正を含み、定常境界層の他管内流、非定常境界層にも使用することができる。

このモデルは壁近くの内層（添え字 i ）では次のような混合距離表示を用いている。

$$(\nu_t)_i = \ell^2 \frac{\partial U}{\partial \xi} \gamma_{tr} \gamma \quad (2-24)$$

$$\gamma_{tr} = 1 - \exp(-H(x - x_{tr})) \left| \frac{dx}{U_e} \right| \quad (2-25)$$

x_{tr} は遷移開始点を示し、係数 H は $Re_{x_{tr}}$ を遷移レイノルズ数として

$$H = \frac{1}{1200} \times \frac{U_e^3}{\nu^2} Re_{x_{tr}}^{-1.34} \quad (2-26)$$

で与える。実用計算では全面で乱流というよりも、 $x = 0$ から計算を開始して層流、遷移、乱流の3領域を一度に計算しなければならないことも多い。通常は、遷移点で急激に層流から乱流に切り替えるが、遷移領域の長さは例えば $Re_{x_{tr}}$ を完全に乱流になる位置のレイノルズ数とした経験式

$$\Delta Re_x \equiv Re_{xi} - Re_{x_{tr}} = 60 Re_{x_{tr}}^{2/3} \quad (2-27)$$

からもわかるように、 $Re_{x_{tr}}$ が低いほど遷移領域も長くなる。このような場合には γ_{tr} が重要となる。

もう一つの γ は、境界層の外層に現れる乱れの間欠性を表すもので、乱流部は時間割合 γ だけ現れ、 $1 - \gamma$ は、外部ポテンシャル流れが占める。

$$U/U_e = 0.995 \quad (2-28)$$

となる ξ の値を ξ_0 として、 γ をつぎの経験式で与える。

$$\gamma = \frac{1}{1 + 5.5 \left(\frac{\xi}{\xi_0} \right)^6} \quad (2-29)$$

Aは次式に示すように、強い圧力勾配 p^+ および吹出し v_w^+ の効果が計算できるようになっている。

$$A = \frac{2.6}{N} \quad (2-30)$$

$$N = \sqrt{\left[\frac{p^+}{v_w^+} \{1 - \exp(-11.8 v_w^+)\} + \exp(-11.8 v_w^+) \right]} \quad (2-31)$$

$$p^+ = \frac{\nu U_e}{u_*^3} \frac{dU_e}{dx}, \quad v_w^+ = \frac{v_w}{u_*} \quad (2-32)$$

$p^+ = 0$ 、 $v_w^+ = 0$ の場合には $N = 1$ となって A は Van Driest の原式に帰着する。

乱流粘性の外層公式は速度欠損形式を用いた次の形で与える。

$$(\nu_t)_o = \alpha \left| \int_0^\infty (U_e - U) d\xi \right| \gamma_{tr} \gamma \quad (2-33)$$

速度分布に極大がなく $U_e - U$ がつねに正であれば積分は $U_e \delta^*$ となって

$$(\nu_t)_o = \alpha U_e \delta^* \gamma_{tr} \gamma \quad (2-34)$$

とおける。 δ^* は排除厚さを表す。また α は経験定数で、 $Re_\theta \geq 5000$ ならば一定値 0.0168 となる。 θ は運動量厚さを表す。 α が小さいときは、低レイノルズ数効果をいれた次式を用いる。

$$\alpha = 0.0168 \frac{1.55}{l + \Pi} \quad (2-35)$$

$$\Pi = 0.55 [l - \exp(-0.243 Z_1^{1/2} - 0.298 Z_1)] \quad (2-36)$$

ただし、 $Re_\theta > 425$ 、 $Z_1 = Re_\theta / 425 - 1$

内層と外層の境界は ν_t の連続性から判断し、壁面 $\xi = 0$ から計算を進めて $(\nu_t)_i$ が $(\nu_t)_o$ よりも大きくなったときに外層の公式に切り替える。

このようにCebeci-Smithモデルは低レイノルズ数効果、遷移、圧力勾配、壁からの吹き出し等の効果を含み、3次元境界層、非定常境界層等の広範囲の流れ計算に用いられている。

2-5.2 高レイノルズ数 $k-\varepsilon$ モデル^{*13*14*15*16*17}

k -方程式 : 乱れのエネルギー

$$\rho \mathbf{V} \cdot \nabla k - \nabla \cdot \left(\frac{\mu_k}{\sigma_k} \nabla k \right) = G - \rho \varepsilon \quad (2-37)$$

$$\sigma_k = 1.0, \quad G = \mu_t \Phi'$$

ε -方程式 : 乱れの散逸率

$$\rho \mathbf{V} \cdot \nabla \varepsilon - \nabla \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) = C_1 G \frac{\varepsilon}{k} - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (2-38)$$

ここで、 $\sigma_\varepsilon = 1.3$ 、 $C_1 = 1.44$ 、 $C_2 = 1.92$ である。

乱流粘性 μ_t : (Prandtl-Kolmogorov Law)

$$\mu_t = C_D \rho \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad C_D = 0.09 \quad (2-39)$$

$k-\varepsilon$ モデルでは、このように乱流粘性係数を与えるために k と ε に対してモデル化された2本の輸送方程式を解くことになる。この方程式系は楕円型偏微分方程式でありN-S方程式と共に境界条件を与える必要があるが、この(高レイノルズ数) $k-\varepsilon$ モデルは流体がいたるところ乱流状態になっている場合に成立する微分方程式であり、壁面近くでの層流底層では成立しない。従って、境界条件として壁面での条件を用いても意味がない。そこで通常は壁面近くでは低レイノルズ数 $k-\varepsilon$ モデルを解き高レイノルズ数モデルと接続するかまたは、いわゆる「壁関数」^{*18}を用いて壁面近くでの非常に細かいメッシュを用いた計算を回

避する、のどちらかが利用される。いずれの方法でも計算モデルの予測精度は大差が無いとされている^{*13}。従って本研究では、壁面でのメッシュ数を多くしなくとも良い高レイノルズ数モデルに境界条件として壁関数を用いる方法を採用した。

境界条件 (Appendix-C 参照)

$\xi^+ > 30$ ($\xi^+ = \frac{u_* \xi_p}{\nu}$) なる点 (壁面からの距離) ξ_p に対して

$$k_p = \frac{u_*^2}{C_D^{1/2}} \quad (2-40)$$

$$\varepsilon_p = \frac{u_*^3}{\kappa \xi} \quad (2-41)$$

$$\begin{aligned} u_p &= \frac{u_*}{\kappa} \ln \xi^+ + C \\ &= \frac{u_*}{\kappa} \ln (E \xi^+) : \text{対数 (壁) 法則} \end{aligned} \quad (2-42)$$

ただし

$$\begin{aligned} \kappa &= 0.41 && : \text{カルマン定数} \\ C &= 5.5 && : \text{なめらかな壁面するとき} \\ E &= \exp(\kappa C) \end{aligned}$$

$$\tau_w = \frac{u_p}{\xi_p} \frac{\kappa \mu \xi_p^+}{\ln(E \xi_p^+)} \Delta : \text{壁摩擦 (応力)} \quad (2-43)$$

$$u_* = \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2} : \text{摩擦速度} \quad (2-44)$$

$$q_w = \frac{\rho u_* (h_p - h_w)}{\frac{P_t}{\kappa} \ln(E \xi_p^+) + A(P_t, P_1)} : \text{熱流束} \quad (2-45)$$

ここで、 A は、層流底層および緩和層内の伝熱抵抗と関連する温度の対数分布則の定数項を表し次式で表される^{*19}。

$$A(P_t, P_i) = 5.0 \left\{ \left(\frac{P_i}{P_t} \right)^{0.75} - 1 \right\} \\ \times \left\{ 1 + 0.28 \exp \left(-0.007 \frac{P_i}{P_t} \right) \right\} \quad (2-46)$$

乱流モデル定数のまとめ

$P_i = 0.7$	層流プラントル数
$P_t = 0.9$	乱流プラントル数
$\sigma_k = 1.0$	乱流エネルギーのプラントル数
$\sigma_\epsilon = 1.3$	乱流エネルギーの散逸率のプラントル数
$C_1 = 1.44$	
$C_2 = 1.92$	
$C_D = 0.09$	
$\kappa = 0.41$	カルマン定数
$C = 5.5$	なめらかな壁面
$E = \exp(\kappa C)$	

ここで注意しなければならないのは、これらの経験定数は、磁界が存在しない場合に得られた値でありMHDプラズマに適用できるかどうかは厳密には調べられていないことである。磁界が存在する場合の乱流モデルに関しては6章で議論する。

2-6 節 数値解析手法^{*20*21}

数理解析学においては、物理現象は、一般に数理モデルで与えられる。数理モデルとしては方程式が用いられることが多い。さらにこの方程式は偏微分方程式の形をとるのが一般的である。本研究で扱うMHD発電チャンネル内現象も2階または1階の（二次元または三次元）偏微分方程式系である。そこで本節では、本研究で扱う偏微分方程式の数値解析手法として採用した有限要素法を中心に微分方程式とその近似解法について概説する。

流体力学・熱伝導の数値解析は、もともと差分法（Finite Difference Method :FDM）の独壇場であった。一方、有限要素法（Finite Element Method :FEM）は固体力学や構造解析の分野で発展した数値解析法である。有限要素法がはじめて工学上の問題に用いられたのは1950年代の米国の航空機設計技術者たちによってであった。その後、有限要素法が変分法の近似解法への応用、すなわちリッツ法の考え方と結合されるに至って固体力学・構造解析への応用は大きな飛躍を遂げた。1960年代の後半からは、この有限要素法が流体力学・熱伝導あるいは電磁界問題の解析手法としてその有用性が認められるにいたったが、これは偏分法の拡張としての重みつき残差法を基本とする近似解法、すなわちガラーキン法を代表とする近似解法が有限要素法と結合されたことが大きく貢献している。たとえば、流体力学において最も重要なナヴィエーストークス方程式には汎関数が存在しないことが知られており、このことから変分法に基づく近似解法であるリッツ法を用いることが不可能であった。しかし、重みつき残差法に基づく近似解法であるガラーキン法を用いることにより有限要素法の定式化が可能となった。

ここで差分法と有限要素法の比較をしておく。両者に共通することは連続体を細かく分割（離散化）し多数の独立点における物理量を変数とする（多元代数）連立方程式を解くことにより離散的に連続体中の物理量を求めようとする事である。差分法では支配方程式に現れる微分量を近似するのに独立点間の物理量の差を用いている。すなわち、微分方程式の未知関数に関するテイラー展開近似を用いて離散化が行われている。一方の有限要素法では小さく分割された要素内で適当に表現された近似内挿関数に対して誤差を最小にするという手法によって、有限

要素方程式を導出している。すなわち、変分法あるいは重み付き残差法を用いる離散化が行われる。また、差分法では原則として直交格子点を採用せざるを得ないのに対し、有限要素法では三角形などの任意形状を要素として採用することができる。このことにより有限要素法によれば任意の境界形状を表現できることになる。さらに、差分法では取扱いが不便なノイマン型境界条件（変数の微分量が指定される境界条件）についても、有限要素法では自然境界条件として容易に取り扱うことができる。また、有限要素法では近似内挿関数を任意に選択できることから与えられた物理問題に対して最適な選択が可能となっている。

有限要素法は、以上の議論から分かるように一般に汎用性に優れている。一方の差分法は、強い非線形問題（たとえば乱流や衝撃波など）には一般に、計算時間などの点からも有利であるといわれている。

最近注目を集めている境界要素法^{*22}（Boundary Element Method :BEM）は、重み付き残差法の一形態として発展してきているが、この方法は古くから微分方程式を解くためのスタンダードな方法の一つであった積分方程式を用いた定式化に基づいている。積分方程式は、解析対象領域の境界だけで記述されるので領域全体を扱う FDM や FEM に比べ扱う空間の次元が 1 次元下がるため解くべき微分方程式によっては非常に有効な解析法となっている。

これらの他、MHD チャンネル内の電気現象を等価回路を用いて解析する手法も確立されている^{*23*24}。

2-6.1 有限要素法の特徴^{*25}

本研究で用いた有限要素法の特徴を差分法との比較において列挙すれば以下のようになる

- 1) 差分法は基本的に直交格子を用いて表される領域を対象としているのに対して有限要素法では任意形状の有限要素に着目した解析法である。

このことは解析手法そのものの特徴であって、得られた数値解の安定性や収束性についての差異が生ずるという性質ではない。しかし、この違いにより 2) 以降の特色が生じる。

2) 用いる近似法として差分は直接的近似であるのに対して、有限要素法は間接的近似である。

差分法は、基礎式に含まれる微分を直接差分で置き換えることにより近似式を得るのに対して、有限要素法では基礎式を一旦重み付き残差方程式に変換しこれを近似するという間接的方法を用いている。このように、有限要素法では多少複雑な手順を踏まなければならないが、重み付き残差法定式には微係数で与えられる境界条件を自然に満足させることができ、またエネルギー原理など物理的意義づけを行うことができる。

3) 差分法は、原則的に規則的に配置された正方格子を前提としているが、有限要素法では任意配置の領域分割（点）でよい。

このことは、有限要素法は有限要素に着目してから全体方程式を作成することと、重み付き残差式という間接的手法を用いることの両方に起因しており、差分法との本質的な差異となっている。この特徴によって、実際の問題を解く場合たいへん都合の良い性質となっている。すなわち、現象が複雑に且つ急激に変化する領域は分割を細かくし、変化の緩やかな領域では粗くすることが容易にできる。差分法の場合には最も急激に変化する部分に合わせて分割幅を決めるか、バウンダリフィット法による領域変換を用いなければならない。これらにより、有限要素法では分割点の総数を減少させることができ、計算機による計算時間の短縮・記憶容量の節約を容易に行うことができる。

4) 有限要素法で扱い得る境界条件は、差分法に較べて自然に代入することができる。

たとえば、微係数で与えられた境界条件や、斜めに傾斜した境界の処理について、差分法では特別に近似式を作成しなければならないが、有限要素法では重み付き残差方程式の自然境界条件として処理される場合が多く、特別な処理を必要とせず境界条件を代入することが可能となっている。

5) 有限要素法では汎用プログラムの作成が容易である。

境界条件の代入に対し、特別な処理が不要であり、また分割点の選択が任意であることから入力データの作成だけで処理される汎用プログラムの作成が可能となる。

- 6) 有限要素法によって離散化された方程式は、直交格子分割点に限定すれば、差分法の離散化方程式に一致する。

実際に等間隔二次元問題で、等間隔 4 角形要素を用いて、構成した有限要素方程式は、差分式に一致する。しかし、分割が不規則になると普通の差分式とは十分な対応が付かない変則的なものが得られることが多い。この意味で、有限要素法による方程式は不規則な格子に対しても差分近似式に対応するものを求めることを可能にした手法といえる。

2-6.2 時間積分法

N-S 方程式を時間依存で解く場合や、放物近似を採用する場合には方程式は、放物型となり、一般に安定な「時間積分」法を使用することが必要である。本研究では、MHD 項を含む定常 N-S 方程式を軸方向に放物化し、軸方向を時間軸のように扱い「軸方向」積分法としてクランク-ニコルソン法を用いた。以下では「時間積分法」について概説する。

いま、非定常問題（あるいは楕円型方程式に放物近似を行った場合）に対して有限要素法（あるいは差分法でもよい）を適用し全節点についてたてた方程式を次のように表す。

$$[M] \{\dot{u}\} + [S] \{u\} = \{b\} \quad (2-47)$$

ここで、 u は解を求めるべき未知量であり、 $\cdot$ は時間微分を表す。

強制項 $b = 0$ の時、この式の時間積分法として、以下の方法がある。

I. θ 法 (陰解法)

$$\left(\frac{1}{\Delta t} [M] + \theta [S]\right) \{u^{n+1}\} = \left(\frac{1}{\Delta t} [M] - (1 - \theta) [S]\right) \{u^n\} \quad (2-48)$$

ここで、 $0 < \theta \leq 1$ なる定数であり、第 n 時間点における u の値を u^n で表している。 $\theta \neq 0$ は全て陰解法である。

II. クランク-ニコルソン法 (陰解法: $\theta = 0.5$)

$$\left(\frac{1}{\Delta t} [M] + \frac{1}{2} [S]\right) \{u^{n+1}\} = \left(\frac{1}{\Delta t} [M] - \frac{1}{2} [S]\right) \{u^n\} \quad (2-49)$$

III. 後退オイラー法 (陰解法: $\theta = 1$)

$$\left(\frac{1}{\Delta t} [M] + [S]\right) \{u^{n+1}\} = \left(\frac{1}{\Delta t} [M]\right) \{u^n\} \quad (2-50)$$

IV. 準陽的オイラー法

$$[M] \{u^{n+1}\} = [M] \{u^n\} - \Delta t [S] \{u^n\} \quad (2-51)$$

V. 陽的オイラー法

$$[\bar{M}] \{u^{n+1}\} = [M] \{u^{n-1}\} - \Delta t [S] \{u^n\} \quad (2-52)$$

VI. 陽的リープ・フロッグ法

$$[\bar{M}] \{u^{n+1}\} = [\bar{M}] \{u^{n-1}\} - 2 \Delta t [S] \{u^n\} \quad (2-53)$$

VII. 2 段階陽的解法

$$[\bar{M}] \{u^{n+1/2}\} = [M] \{u^n\} - \frac{\Delta t}{2} [S] \{u^n\} \quad (2-54)$$

$$[\bar{M}] \{u^{n+1}\} = [M] \{u^n\} - \Delta t [S] \{u^{n+1/2}\} \quad (2-55)$$

ここで、 $[\bar{M}]$ は集中質量行列 (lumped mass matrix) を表している。

参考文献

- *¹ M. Mitchner and C. H. Kruger, Partially Ionized Gases, Wiley, (1973)
- *² たとえば：関口 忠, 現代プラズマ理工学, オーム社, 1979
- *³ D. W. Roberts and C. K. Forester, "Parabolic Procedure for Flows in Ducts with Arbitrary Cross Sections," AIAA J., Vol.17, Jan.(1979).
- *⁴ E. Hairer, "Unconditionally Stable Explicit Methods for Parabolic Equations," Mumerische Mathematik, Vol.35, pp57-68(1980).
- *⁵ N. Satofuka, "A New Explicit Scheme for the Munarical Solution of Parabolic Differential Equations," Proc. 2nd National Symp. on Numerical Methods in Heat Transfer, Univ. of Maryland, Sept(1981).
- *⁶ 及川, 粥川, "S F C型MHD発電機の三次元特性," 電気学会論文誌, Vol. 108-B , pp.111-118, (1988).
- *⁷ S. Oikawa, et al., "Improvement of Coupled Fluid and Electrodynamic Characteristics of MHD Channel by Shaped Two-Dimensional Magnetic Field," Magnetohydrodynamics; An International Journal, Vol.2, No.1, pp. 65-77, (1989).
- *⁸ B. E. Launder and D. B. Spalding, "The Numerical Computaion of Turbulent Flows," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , Vol.3, pp.269-289(1974)
- *⁹ T. Cebeci and K. C. Chang, "Calculation of Incommpressible Rough-Wall Boundary Layer Flows," AIAA J., Vol.16, pp.730-735(1978).
- *¹⁰ T. C. Lin, R. J. Bywater, "Turbulence Models for High-Speed, Rough-Wall Boundary Layers," AIAA J., Vol.20, pp.325-333(1982).
- *¹¹ 日本機械学会編, 流れの数値シミュレーション, コロナ社, (1988)
- *¹² B. L. Liu, et al., "Three-Dimensional Fluid and Electrodynamic Modeling for MHD DCW Channels," AIAA 21st A.S.Meeting, AIAA-83-0464, 1983.
- *¹³ 日本機械学会編 : 熱と流れのコンピュータアナリシス, コロナ社, (1986)
- *¹⁴ R. S. Amano, "A Study of Turbulent Flow Downstream an Abrupt Pipe

- Expansion," AIAA J., Vol.21, pp.1400-1405, October(1983).
- *¹⁵ Sherif H. El. Tahry, "k- ϵ Equation for Compressible Reciprocating Engine Flows," J. of Energy, Vol.7, pp.345-353, July-August(1983).
- *¹⁶ 石川, 卯本, "MHD 発電機内に誘起される二次流れについての考察," 電気学会論文誌, vol.105-B, pp.296-302, (1985).
- *¹⁷ G. D. Tong, Finite Element Flow Analysis, ed. T. Kawai, pp.227-236, Tokyo Univ. Press(1978)
- *¹⁸ P. Bradshow, T. Cebeci and J. Whitelaw, Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow, Academic Press, (1981).
- *¹⁹ S. P. Vanka, et al., "Three-Dimensional Analysis of MHD Generators and Diffusers," Report ANL/MHD-82-4, Argonne National Lab., (1982).
- *²⁰ 矢川, 流れと熱伝導の有限要素法入門, 培風館, (1983).
- *²¹ 菊地, 有限要素法概説, サイエンス社, (1980).
- *²² C. A. Brebbia, The Boundary Element Method for Engineers, Pentech Press Limited(1978), 神谷紀夫, 田中正隆, 田中喜久昭共訳, 境界要素法入門, (1980).
- *²³ 吉田, 卯本, "ダイアゴナル形MHD 発電機の準二次元解析," 電気学会論文誌, Vol.99-A, pp.105-112, (1979).
- *²⁴ 吉田, 卯本, 青木, "オープンサイクルファラデー形MHD 発電機の特長改善," 電気学会論文誌, Vol.102-B, pp.95-102, (1982).
- *²⁵ 川原, 有限要素法流体解析, 日科技連, (1985)

第3章 SFC型磁界配位

3-1 節 緒 言

高圧弱電離のMHDプラズマにおけるストリーマやアークの発生は熱電氣的的不安定性現象としてとらえられる。すなわち、プラズマに対するジュール加熱効果と熱輸送効果のバランスを考えると、前者が後者より多い場合熱電離が促進され局所的な電流集中がストリーマあるいはアークに移行すると考えられる。

電子と中性粒子の衝突が比較的少ない希ガスプラズマを用いる非平衡型MHD発電等では、電子流体からの熱損失を抑えジュール加熱効果を多くすることが非平衡性を保ち導電率を高くする上で本質的な要請であり、エネルギーバランスの観点からは熱電氣不安定性の起こり易いプラズマであることが理論的にも実験的にも確認されている。

一方、電子温度と中性粒子温度が等しい熱平衡型MHD発電等では、電極から十分離れた領域での電流密度は比較的低く一般にストリーマの無い拡散放電状態にあるが、電極の近傍では低温殿境界層やホール効果のために電流密度が局所的に高められ、容易に集中放電やアークに移行する。このため、MHD発電では内部抵抗の増大による発電特性の低下や動作の不安定、電極材料の損傷等が起こり、特に冷電極を用いた長時間運転発電機の実用化に対して大きな障害となっている。

電極と境界層プラズマの温度差が大きくなると熱輸送の増加に比較して導電率の低下によるジュール加熱効果が増大して不安定にいたり易くなると考えられるが、この問題の近似的な解析がD. O l i v e r^{*1}により行われている。また、岡崎ら^{*2}は同じ問題をより詳細に扱い熱的には良導体で電氣的には不良導体の電極を利用することが不安定抑制の観点から有効であると述べている。

ホール効果を考慮した理論はD. O l i v e r^{*3}により電極温度との関係を中心として近似的に議論され、さらにT. K o n^{*4}、およびN. K a y u k a w a^{*5}により数学的により厳密な理論が展開されている。さらに文献(4)では不安定性に及ぼす諸パラメタを検討し、小沢・粥川^{*6}が別の観点から提案した不均一印加磁界(SFC型)の採用が放電形態の制御に対して最も効果的であることを提案している。

3-1.1 電極の有限分割効果

前章で述べたようにオープンサイクルファラデー形MHD発電機では、ホール効果によるプラズマ内部の短絡電流を防止するため、一般に分割電極が使用される。電極の分割ピッチについては、ホール電流を極力抑えるという目的からより細かい分割が望まれるが、その場合負荷数が多くなりコスト高となるほか、隣接する電極間の絶縁が難しく発電チャンネル自体の信頼性そのものに問題が生ずる。従ってファラデー形MHD発電機ではある程度の電極幅、スペーサ幅を持った有限分割電極が使用されることになる。

有限分割電極チャンネルの場合、ホール電流は電極ピッチごとに見た場合全体としてホール電流は零となるが、電極ピッチの1つを見た場合局所ホール電流が表れることになる。電極近傍で起こる様々な現象はこのホール電流の存在に起因している。たとえば次のような現象である。

1) 陽極の上流端・陰極の下流端への電流集中

これは、有限幅を持つ電極近傍でホール電界が電極によって短絡されることに起因する。

2) 隣接電極間絶縁破壊現象：ホールブレイクダウン

この理由はホール電流による電圧降下により（流れに沿って）隣接する電極間に生ずる電位差が電極間の絶縁耐力を超えた場合下流電極から上流電極への短絡電流が発生するためである。この現象は絶縁破壊電流の通路によって、隣接電極近傍のプラズマを通る場合をファストブレイクダウン、隣接電極間の絶縁スペーサを介して生ずる場合をスローブレイクダウンの2種類に分けられる。

これらの理由によって有限分割電極ではホール電流の存在が非常に重要となり、印加磁界が強くなり、また電極電流値が大きくなるにつれて電流集中、隣接電極間ブレイクダウンなどの現象は顕著となり実用大型規模の発電チャンネルでも重要な問題となる。

3-1.2 冷電極での電流集中現象

一般のMHD発電チャネルでは、主に電極材料の寿命の観点から電極壁を強制冷却している。このため発電チャネル内を流れる作動流体には温度境界層が存在する。この低温度境界層の存在により次のような現象が存在する。

1) 電極近傍での電位降下（電極電位降下）

ここで扱う弱電離プラズマの導電率は、温度に対して1/2乗程度の非常に強い非線形依存性がある。温度境界層では導電率勾配が存在し大きな電圧降下を生ずる。主流部で発生した大きな電流はこの低導電率領域を通り電極に出入りしなければならないので拡散放電では電流を維持することができず、負荷電流の増大と共に微細アーク放電、さらに集中アーク放電へとその放電形態が変化し、電極損傷へと結びつく。

2) 熱電気不安定性による集中アークの発生

低温度境界層における局所ジュール加熱は、熱の逃げが不十分であると電流の集中とそれに伴う導電率上昇に正帰還ループが形成され電極損傷に結びつく。

3-2 節 電極境界層モデルと基礎方程式

図 3-1 に座標系と定常拡散放電状態の境界層モデルを示す。電氣的に中性な熱平衡プラズマを考え磁気レイノルズ数 (Magnetic Reynolds Number)

$$R_m = \mu_0 \sigma u L = \frac{B_{ind.}}{B_{app.}}$$

が 1 に比べ十分小さく、誘導磁界 $B_{ind.}$ が印加磁界 $B_{app.}$ に比較して無視できる場合、MHD プラズマにおける熱電気場の現象は次式で記述される。

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = \nabla \cdot (\kappa \nabla T) - \frac{J^2}{\sigma} \quad (3-1)$$

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \mu_e \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (3-2)$$

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad (3-3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (3-4)$$

ただし、一般化オーム則 (3-2) でホール効果に対するイオンの寄与を無視している。また、 $D/Dt = \partial/\partial t + \mathbf{V} \cdot \nabla$ 、 κ 、 σ 、 μ_e はそれぞれ熱伝導率、導電率、電子の移動度であり、 $\mathbf{J}$ 、 $\mathbf{E}$ 、 $\mathbf{V}$ 、 $\mathbf{B}$ はそれぞれ電流密度、電界強度、プラズマ速度、磁束密度である。

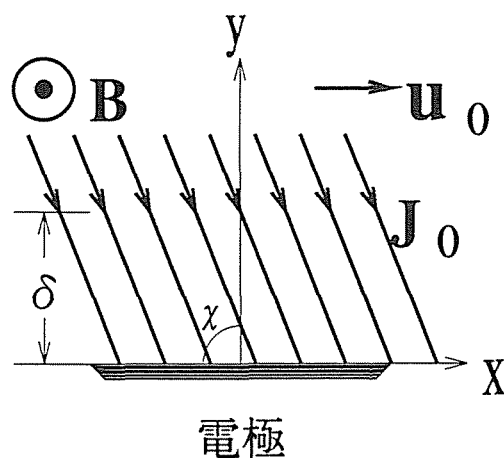


図 3-1 定常拡散放電電極境界層モデル

移動度および導電率は熱電離を考え式 (3-5)、式 (3-6) で与えられる。
また熱伝導率は簡単のため以下の計算では定数とする。

$$\mu_e = \frac{e}{m_e} \sqrt{\left(\frac{\pi m_e}{8 k_B T}\right)} \cdot \frac{k_B T}{\varepsilon_s p} \left(\frac{1 - \varepsilon_s}{\varepsilon_s} Q_g + Q_s\right)^{-1} \quad (3-5)$$

$$\sigma = e \sqrt{\left(\frac{\varepsilon_s p}{k_B T}\right)} \cdot \mu_e \left(\frac{2 \pi m_e k_B T}{h^2}\right)^{3/4} \exp\left(-\frac{e \phi_s}{2 k_B T}\right) \quad (3-6)$$

ただし、 e 、 m_e 、 k_B 、 h は電荷素量、電子質量、ボルツマン定数、プランク定数であり、 Q_g 、 Q_s 、 ε_s 、 ϕ_s は電子-中性原子、電子-シード原子間の衝突断面積、シード率、電離ポテンシャルである。

3-3 節 定常放電状態に及ぼす磁界分布の影響^{*7}

まず文献 [7] に従って、定常熱電気場の状態と印加磁界分布の影響を調べておく。境界層に温度分布がある場合、一般に式 (3-2)、(3-3)、(3-4) の解として空間的に不均一な電気伝導現象がみられる。

ここで y 方向の乱れに比較して x 方向の乱れが少ないものとする、式 (3-3) および式 (3-4) から

$$J_{y0}(y) = \text{CONST.} \equiv J_{y\infty}$$

$$E_{x0}(y) = \text{CONST.} \equiv E_{x\infty}$$

となる。添え字 0 は定常境界層の量、 ∞ は電極から十分離れた主流部の量を示す。従って、定常電流、電位分布は

$$\nabla \times \{\mathbf{k} \phi_z(x, y)\} = \mathbf{J}_0$$

$$-\nabla \phi(x, y) = \mathbf{E}_0$$

で定義される流れ関数 ψ と電位関数 ϕ により次式で求められる。

$$\begin{aligned} \phi_z(x, y) = & -J_{y0} + E_{x0} \int \sigma_0(y) dy \\ & - J_{y0} \int \mu_{e0}(y) B_0(y) dy \end{aligned} \quad (3-7)$$

$$\begin{aligned} \phi(x, y) = & -E_{x0}x + E_{x0} \int \mu_{e0}(y) B(y) dy \\ & - J_{y0} \int \frac{1 + \mu_{e0}^2(y) B^2(y)}{\sigma_0(y)} dy - \int u_0(y) B_0(y) dy \end{aligned} \quad (3-8)$$

ここで、ホール電流

$$I_H = \int \int J_{x0}(y) dy dz = 0$$

なる状態（ファラデー結線の条件）を考えると、ホール電界強度は

$$E_{x0} = \frac{\langle \mu_{e0} B_0 \rangle J_{y0}}{\langle \sigma_0 \rangle}$$

で与えられる。従って、局所ホール電流密度は

$$J_x(y) = \left\{ \frac{\langle \mu_{e0} B_0 \rangle}{\langle \sigma_0 \rangle} \sigma_0(y) - \mu_{e0}(y) B_0(y) \right\} J_{y0} \quad (3-9)$$

で求められ、さらにこれより局所ホール電流が零となる印加磁界分布として

$$B_0(y) = \frac{\mu_{e0} B_0}{\sigma_0} \frac{\sigma_0(y)}{\mu_{e0}(y)} \quad (3-10)$$

ただし、 $\langle \rangle$ は y の全領域に亙る平均値

$$\langle \sigma_0 \rangle = \frac{1}{D} \int_0^D \sigma_0(y) dy$$

などを表す。この式（3-10）を厳密な S F C 型磁界配位（Shaped B-Field Configuration）という。

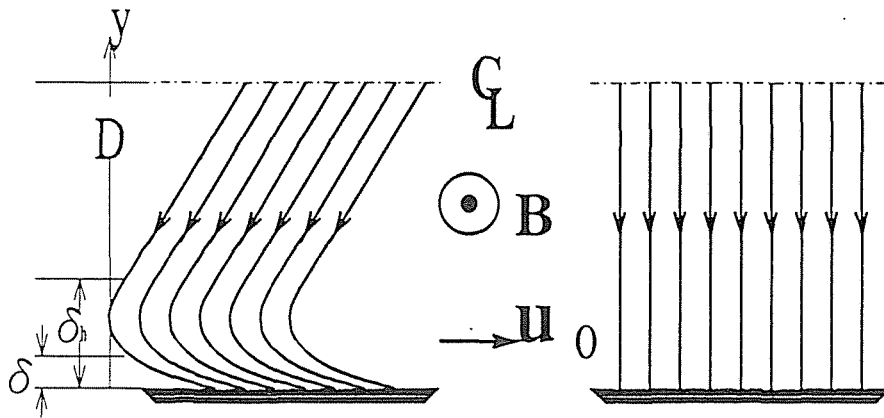


図 3-2 一様磁界（左）と S F C 磁界（右）における定常電流分布

$$T_\infty = 2500 \text{ K}, U_\infty = 500 \text{ m/s}, \beta = 2, T_w = 1500 \text{ K}$$

図 3-2 に、境界層領域 ($0 \leq y \leq \delta_n$) における温度分布を $1/10$ 乗則で近似した場合の電流分布を一様磁界

$$B_0(y) = \text{CONST.} \equiv B_\infty$$

と式 (3-10) で表わされる SFC 磁界の場合について示す。

次に温度分布は厳密には式 (3-1) を解かねばならない。しかし、不安定性領域は一般に $\delta \sim 10^{-3} \text{m}$ ときわめて狭く、境界層内の平均温度 T_0 で表わすとすれば、式 (3-1) は次式のように近似される*1。

$$\frac{\partial T}{\partial t} = \frac{2\alpha}{\delta^2}(T(\delta) - T) + \frac{2\alpha}{\delta^2}(T_w - T) + \alpha_x \frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - u \frac{\partial T}{\partial t} + \frac{J^2}{\rho C_p \sigma} \quad (3-11)$$

ただし、 α は熱拡散率 $\kappa / \rho C_p$ 、 $T(\delta)$ 、 T_w はそれぞれ境界層端、電極表面の温度を表わす。従って式 (3-9) を考慮し、次式で定義されるホールパラメタ

$$\beta \equiv \mu_e B$$

を用いると x 方向の熱流が無い場合の定常温度は次のように求められる。

$$T_0 = \frac{1}{2} (T(\delta) + T_w) + \frac{1}{4} \frac{\delta^2 J_{y0}^2}{\kappa \sigma_0 (T_0)} \left[1 + \left(\frac{\langle \beta_0 \rangle}{\langle \sigma_0 \rangle} \beta_0 \right)^2 \right] \quad (3-12)$$

ここで、 J_{y0} はプラズマ抵抗と外部負荷の等しい負荷整合条件 (負荷率 $K = 0.5$) の場合、

$$J_{y0} = -\frac{1}{2} \langle \sigma_0 \rangle \langle u_0 B_0 \rangle G^{-1} \quad (3-13)$$

で与えられ、 G は G -ファクタと呼ばれる量であり σ_0 、 β_0 に空間不均一がある場合の抵抗の増加を表し次式で定義される。

$$G = \langle \sigma_0 \rangle \left\langle \frac{1 + \beta_0^2}{\sigma_0} \right\rangle - \langle \beta_0 \rangle^2 \quad (3-14)$$

ここで、 $G \geq 1$ である。

3-4 節 S F C 磁界の近似発生法

前節で導入された G-ファクタは、空間不均一性の全く無い理想プラズマに対しては

$$G = 1$$

であり、通常の場合は

$$G \geq 1$$

である。磁界分布が、式 (3-10) で与えられる厳密な S F C であれば

$$G = \langle \sigma \rangle \langle \frac{1}{\sigma} \rangle$$

となる。しかし磁界分布を式 (3-10) で与えられるように整形することは、困難であり、現実には近似的にしか実現できない。そこで本節では S F C 磁界の近似発生法を、

①空心コイル（超伝導または液体窒素冷却）を用いた場合

②強磁性体の空間配置による方法

について述べる。

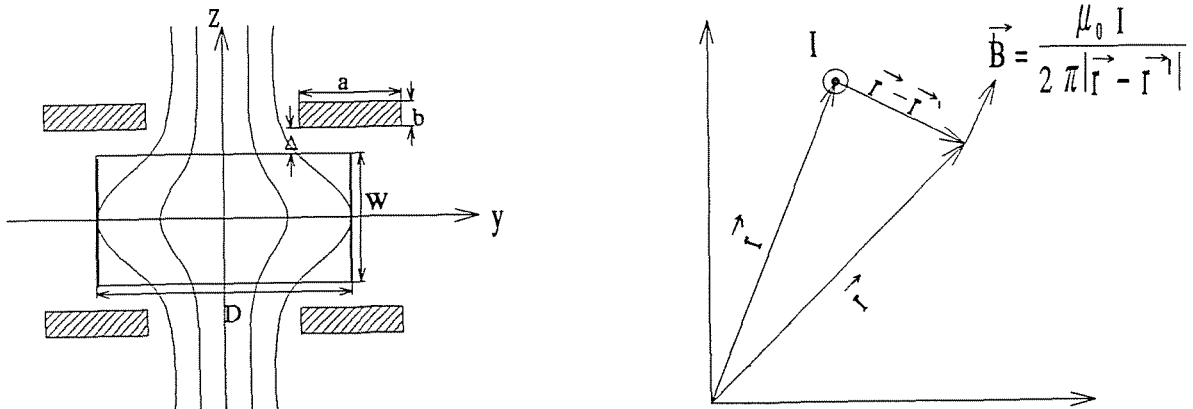
3-4.1 無限長導体近似（空心コイル）

無限長の直線電流 $\delta \mathbf{I} = J_c \delta \mathbf{S}$ により発生する磁界 $\mathbf{b}$ は、次式で与えられる。

$$\mathbf{b}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 \delta \mathbf{I}}{2\pi} \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \quad (3-15)$$

従って、断面積を持った無限長導体の作る磁界 $\mathbf{B}$ は、この磁界を断面で積分し

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \int d\mathbf{S}' \times \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')^2} \quad (3-16)$$



$S_c = a b$: コイル面積 Δ : コイルチャンネル間隔

D : 電極間間隔 W : 絶縁壁間隔

図 3-3 積分領域

積分領域が図 3-3 に示すように $y-z$ 面内にあるとき磁界の y および z 成分は、

$$B_y(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \iint dy' dz' \frac{(z - z')}{(y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$B_z(\mathbf{r}) = \frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \iint dy' dz' \frac{-(y - y')}{(y - y')^2 + (z - z')^2}$$

これらの被積分関数の不定積分をそれぞれ $G(\mathbf{r}; i, j)$ および $F(\mathbf{r}; i, j)$ とおくと

$$\begin{aligned} G(\mathbf{r}; i, j) &= (y - y_i') \log \sqrt{\{(y - y_i')^2 + (z - z_j')^2\}} \\ &\quad + (z - z_j') \tan^{-1} \{(y - y_i') / (z - z_j')\} \end{aligned} \quad (3-17)$$

$$\begin{aligned} F(\mathbf{r}; i, j) &= (z - z_j') \log \sqrt{\{(y - y_i')^2 + (z - z_j')^2\}} \\ &\quad + (y - y_i') \tan^{-1} \{(z - z_j') / (y - y_i')\} \end{aligned} \quad (3-18)$$

ただし、 i および j は定積分の上端及び下端に対応する矩形コイルの縁の座標
(y_i, z_j) を代表するインデックスであり、負号がついた場合には座標自身が

負であることをしめす。つまり、

$$\pm i \rightarrow \pm y_i, \text{ および } \pm j \rightarrow \pm z_j$$

さらにこれらを $G(i, j)$ 、 $F(i, j)$ と略記すると、2 系統(4 断面)のコイルにより発生する磁界 B は

$$\begin{aligned} B_y(\mathbf{r}) = & \frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \{ +G(1, 1) - G(1, 2) - G(2, 1) + G(2, 2) \\ & + G(-1, 1) - G(-1, 2) - G(-2, 1) + G(-2, 2) \\ & - G(-1, -1) + G(-1, -2) + G(-2, -1) - G(-2, -2) \\ & - G(1, -1) + G(1, -2) + G(2, -1) - G(2, -2) \} \\ & (3-19) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_z(\mathbf{r}) = & - \frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \{ +F(1, 1) - F(1, 2) - F(2, 1) + F(2, 2) \\ & + F(-1, 1) - F(-1, 2) - F(-2, 1) + F(-2, 2) \\ & - F(-1, -1) + F(-1, -2) + F(-2, -1) - F(-2, -2) \\ & - F(1, -1) + F(1, -2) + F(2, -1) - F(2, -2) \} \\ & (3-20) \end{aligned}$$

で表される (APPENDIX-F 参照)。

3-4.2 強磁性体の空間配置

ここでは、磁界発生装置として通常の (常伝導) 銅鉄マグネットを考える。簡単のためにポールピースは一様に磁化しているものとし、これ以外に磁界発生のソース項は無いとする。すなわち、全ての磁界はポールピース表面の一様面磁荷のみによって作られるとする。

磁界を観測する点を $\mathbf{r}$ 、ポールピースの微小表面積素 $d\mathbf{S}$ 、表面磁荷 σ_m 、磁

荷の存在する領域を Ω' とすると、磁界 $\mathbf{B}$ は

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi} \int_{\Omega'} \frac{\sigma_m dS'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3}$$

ここで、

$$\mathbf{R} = \mathbf{r} - \mathbf{r}', \quad R = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|$$

$$X = x - x', \quad Y = y - y', \quad Z = z - z'$$

とすると、ポールピースの表面が平面でありの解析幾何学的表現が $(x' = \xi')$ 面にあるとするととき。 x' に関する積分を実行すると

$$B_x(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_m}{4\pi} \int_{\xi_a}^{\xi_b} d\xi' \left\{ \frac{1}{\sqrt{\{(x-x_0)^2 + Y^2 + Z^2\}}} - \frac{1}{\sqrt{\{(x+x_0)^2 + Y^2 + Z^2\}}} \right\}$$

$$B_y(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_m}{4\pi} \int_{\xi_a}^{\xi_b} d\xi' \frac{(y-y')}{Y^2 + Z^2} \\ \times \left\{ \frac{X+X_0}{\sqrt{\{(x+x_0)^2 + Y^2 + Z^2\}}} - \frac{X-X_0}{\sqrt{\{(x-x_0)^2 + Y^2 + Z^2\}}} \right\}$$

$$B_z(\mathbf{r}) = \frac{\sigma_m}{4\pi} \int_{\xi_a}^{\xi_b} d\xi' \frac{(z-z')}{(y-y')^2 + (z-z')^2} \\ \times \left\{ \frac{X+X_0}{\sqrt{\{(x+x_0)^2 + Y^2 + Z^2\}}} - \frac{X-X_0}{\sqrt{\{(x-x_0)^2 + Y^2 + Z^2\}}} \right\}$$

3-5 節 クレセントコイルによる一様 (UFC) 磁界発生

$y-z$ 平面内の原点に中心がある場合の楕円の標準形は、長径と短径を r_1 および r_2 として、

$$\left(\frac{y}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{r_2}\right)^2 = 1$$

で与えられる (図 3-4 参照)。

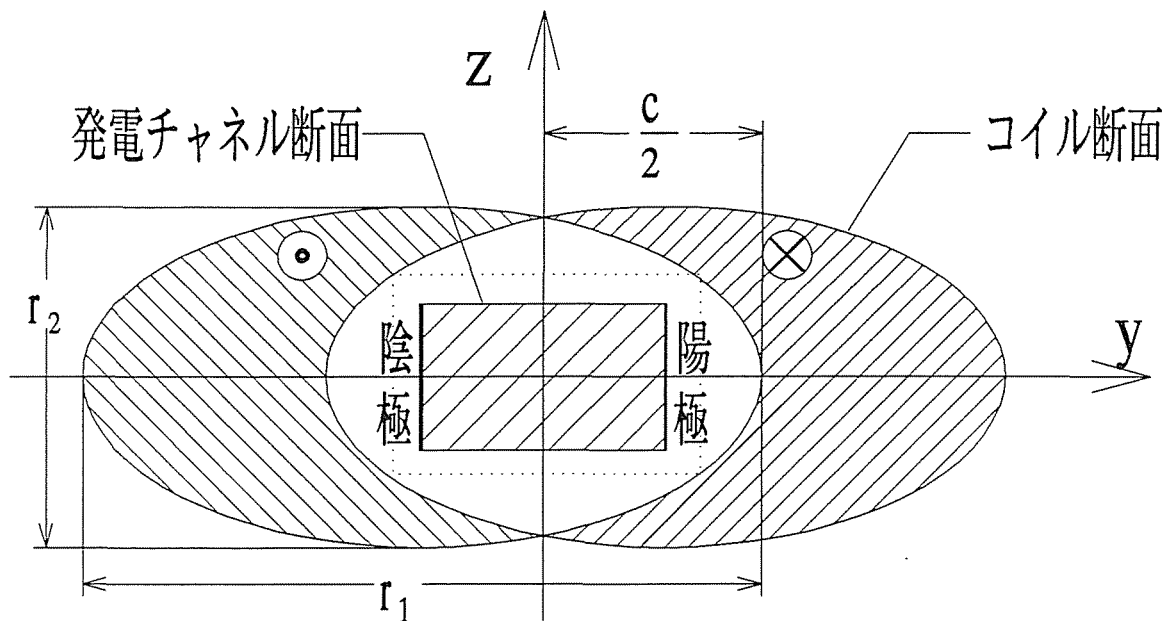


図 3-4 クレセントコイルを用いた一様磁界 (UFC) の発生

ここで、2つの楕円を y 軸方向にそれぞれ $\pm c/2$ ずつずらして配置すると楕円の方程式は、

$$\left(\frac{y + c/2}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{r_2}\right)^2 = 1 \quad (3-21)$$

および

$$\left(\frac{y - c/2}{r_1}\right)^2 + \left(\frac{z}{r_2}\right)^2 = 1 \quad (3-22)$$

となる。ここで2つの楕円を無限長導体の断面と考え、互いに反対（±x）方向に一樣な電流を流すと、2つの楕円の重なった空間（電流はまったく流れない空洞となる）にはz方向に一樣な磁界

$$B_z = \frac{\mu_0 J_c c}{1 + r_1 / r_2} \quad \text{テスラ} \quad (3-23)$$

が得られる*⁸。ただし μ_0 、 J_c はそれぞれ真空中の透磁率、コイルの電流密度である。また電流が実際に流れているコイルの全断面積は次式で与えられる。

$$S_c = 4 r_1 r_2 (\sin \theta \cos \theta + \theta) \quad (3-24)$$

ただし、 $\theta = \sin^{-1} c / 2 r_1$ である（APPENDIX-G参照）

この式（3-24）において $\theta = 0$ は、 $c = 0$ すなわち2つの楕円が完全に重なりコイル電流がまったく流れないことに対応している。また $\theta = \pi / 2$ は2つの楕円の重なり部分が全く無いことになるので、面積としてはこの2つの楕円の面積すなわち

$$S_c (\theta = \pi / 2) = 2 \pi r_1 r_2 \quad (3-25)$$

となることが確かめられる。

参考文献

- *¹ D. A. Oliver, "Constricted Discharge in Magnetohydrodynamic Plasma, AVCO Everett Research Lab. Report, July(1975)
- *² 岡崎, 他, "MHD発電用プラズマの冷電極近傍の熱不安定性, 電磁流体シンポジウム論文集, p. 98, 東京(1976)
- *³ D. A. Oliver, : Proc. of 15th Symp. Engng. Aspect of MHD, Philadelphia, May(1976)
- *⁴ T. Kon, Proc. of 16th Symp. Engng. Aspect of MHD, Pittsburg, May(1977).
- *⁵ N. Kayukawa, "Electrothermal Stability of Magnetohydrodynamic Plasma under Two-Component Magnetic Field," J. of Propulsion and Power, Vol. 2, No. 1, pp. 31-37, Jan-Feb. (1986).
- *⁶ Ozawa, Y., et al., Proc of Int. Conf. on MHD Elec. Power Gen. 1, Washington D.C., June(1975)
- *⁷ 小澤, 粥川, 昆, 谷津, 青木, "熱平衡MHDプラズマにおける熱電気不安性とその抑制", 北海道大学工学部研究報告, vol. 86, pp. 91-101(1978)
- *⁸ R. J. Rosa, Magnetohydrodynamic Energy Conversion, Hemisphere Publ. Corp., p. 118, (1987).

第4章 SFC型MHD発電機の三次元特性

4-1節 緒言

MHD発電機内の電磁流体现象は、本質的に三次元現象である。商用の大型機で、超伝導電磁石を用いる場合の強相互作用条件になるほど三次元的現象が顕著になると考えられる。三次元現象の中で最も重要であるとされているのはMHD二次流れである。S. L. Girshick and C. H. Kruger^{*1}はMHD二次流れの存在を実験的に指摘した。その後米国の大型装置HPDEにおいて観測された陽極中央部への激しい電極損傷^{*2}は、このMHD二次流れによるものであるとされている。この二次流れによる電極損傷は米国のSTD社の研究者によって三次元数値解析により予測されていた^{*3}。

これまでにつくられたMHD発電チャンネル内現象の三次元解析コードは、米国では前述のSTD社^{*2*3*4}を始め、アルゴンヌ国立研究所(ANL)^{*5*6}、テネシー宇宙科学研究所(UTSI)^{*7}があり、これらはすべて差分法(FDM)を用いている。同様に差分法を用いた解析コードはソ連の高温研究所^{*8}のG. Yu Alekseevにより作成されている。日本においては、京都大学の石川^{*9*10*11}、北海道大学の及川^{*12*13*14}。の三次元MHD解析コードは有限要素法(FEM)を用いたものである。また電子技術総合研究所の野村は、C-0法による三次元差分解析コード^{*15}を開発している。また京都大学の原ら^{*16}は、周期境界条件を用いた電極1ピッチの三次元有限要素法解析を行い、電極の有限分割効果を無限分割電極近似との比較において示している。

4-2節 MHD発電機内の三次元現象

オープンサイクルファラデー型MHD発電機における主要な損失機構としては、冷電極境界層内における電極電位降下とそれに伴うジュール損失など境界層、特に電極境界層内で生ずる損失が重要である。特に電極境界層内で発生するジュール損失は、磁界が強くなる程増大する。この理由は、ホール効果によりファラデー型MHD発電機としては無効電流であるホール電流が生じ抵抗の高い電極境界層内で電流が曲げられる結果、実効的な内部抵抗が増大する^{*17}ためである。

この点に着目して著者らは、電極境界層内におけるホール電流を抑制するために電極近くで磁界の発電有効成分 (B_z 成分) を弱める磁界配位を提案している。このとき、 B_z が局所的に減少している領域では、磁束の連続性から電極面に垂直な磁界成分 (B_y 成分) が現れる。そのため電極境界層内でのホール効果が弱められることと共に、 B_y のない場合に比べテンソル導電率の y y 成分が増加することで発電機の実効的な内部抵抗が減少し、さらにアーク放電へ移行するときの臨界電流密度が上昇することを理論および実験により示してきた^{*18*19*20*21*22}。我々は、この磁界分布をShaped B-Field Configuration (略してSFC) と呼んでいる。これに対して従来型の一様磁界配位をUniform B-Field Configuration (略してUFC) と呼ぶことにする。

本章では、ファラデー結線MHD発電機に対して放物近似三次元の定常Navier-Stokes 方程式と、一般化オームの式および定常Maxwell方程式を解き、印加磁界がSFC型とUFC型の両者について電気場、熱流体場の比較を行うことによりMHD発電機の発電性能およびMAT不安定性に及ぼすSFC磁界配位の影響を調べている。

4-2.1 局所ホール電流

ファラデー結線のMHD発電機においても局所的なホール電流は存在し、このホール電流の空間的不均一性によってダクト断面内に二次流れが駆動される。発電機が大型になり流体と電磁界の相互作用が強くなるにつれて、この二次流れ

による対流の影響によって電極壁への局所的な熱流束の増大や、それに伴う温度上昇、および電流集中を引き起こすことにより電磁流体場が不安定となる、いわゆるMagnetothermal Instability(MATI)が発生することが知られている*³。

4-2.2 MHD二次流れ

N-S方程式の回転をとり粘性項が無視できるとき渦の保存則は、

$$\rho u \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} = \mathbf{B} \cdot \nabla J_x \approx B \frac{\partial J_x}{\partial z}$$

ここで Ω_x は、渦度(vorticity)ベクトル $\boldsymbol{\Omega}$ のx-成分であり、ホール電流 J_x が $\sigma u B$ に比例するので

$$\Omega_x \sim \left(\frac{x B^2}{\rho u} \right) \frac{\partial (\sigma u)}{\partial z}$$

と変形できる。従って二次流れを抑えるためには、

- ① 壁温と主流温度の差を小さくする
- ② Bを小さくする

の両者が考えられる。セラミックを使用した高温壁の利用により①は満たされるが、超音速流を用いることでも①、②の両者共にその傾向を満足できる。また、複数負荷の最適ダイアゴナル運転条件では各単位発電機の前半部と後半部でホール電流 J_x の符号が逆転するので石川、卯本*⁹は超音速複数負荷ダイアゴナル形発電機を採用することを提案している。

4-3節 解析モデルおよび仮定

4-3.1 電気場の支配方程式

電気場の支配方程式は電子の圧力勾配とイオンスリップを無視した一般化オームの式と定常 Maxwell 方程式である。磁気レイノルズ数は1に比べて十分小さいために印加磁界に対して誘導磁界は十分小さく、これを無視することが出来る。さらに無限分割電極近似を採用することによって、電氣的諸量に関し、電位 ϕ を除いて軸方向（x 方向）への変化は、断面内変化に比べ十分小さいとして無視している。その結果、電氣的諸量の軸方向変化は、熱流体場の軸方向変化から発生する。この時ホール電界は無限分割電極近似のオーダーでダクト断面内で一定値となる。以上の仮定より電気場の支配方程式をまとめると以下の様になる^{*13}。

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial y} \left[\sigma_{yx} (E_x + v B_z - w B_y) + \sigma_{yy} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y} - u B_z \right) \right. \\ & \quad \left. + \sigma_{yz} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} + u B_y \right) \right] \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\sigma_{zx} (E_x + v B_z - w B_y) + \sigma_{zy} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial y} - u B_z \right) \right. \\ & \quad \left. + \sigma_{zz} \left(-\frac{\partial \phi}{\partial z} + u B_y \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (4-1)$$

$$\{\sigma\} = \frac{\sigma}{1 + \beta_y^2 + \beta_z^2} \begin{bmatrix} 1 & -\beta_z & \beta_y \\ \beta_z & 1 + \beta_y^2 & \beta_y \beta_z \\ -\beta_y & \beta_z \beta_y & 1 + \beta_z^2 \end{bmatrix} \quad (4-2)$$

但し、 u 、 v 、 w は速度の x 、 y 、 z 成分であり B_y 、 B_z は磁束密度、 σ および σ_{ij} はそれぞれスカラー導電率、テンソル導電率の i j 成分（ i 、 $j = x$ 、 y 、 z ）を示している。また E_x は、ダクト断面内で一定値をとるホール電界である。

境界条件および付帯条件は、電極結線をファラデー型として次式で表される。

$$\phi = \text{const.} \quad (\text{電極壁上}) \quad (4-3)$$

$$J_z = 0 \quad (\text{絶縁壁上}) \quad (4-4)$$

$$I_{\text{Hall}} = \int \int_{\text{断面}} J_x dy dz = 0 \quad (4-5)$$

但し、 J_x および J_z はそれぞれホール電流密度および電流密度の z 成分であり、 I_{Hall} はダクト断面内を通過する正味のホール電流である。

図4-1に解析に用いた矩型断面ダクトおよびSFC磁界発生用超伝導コイル配置と無限長コイルの場合に解析された磁界分布^{*19}を示す。本解析では、磁界分布の違いによる電気場及び熱流体場のへの影響を調べることを目的であるため、ダクトの広がり角やアスペクト比(D/W)あるいは、SFCコイルの位置およびアスペクト比(a/b)等に関して電気出力を最大とするような最適化は行っていない。本解析では、 $D/W=2$ 、 $a/b=5$ を採用した。また、UFC磁界はクレセント型コイル^{*17}、SFC磁界は、矩型断面のレーストラック型コイルの、ヘルムホルツ型配置により発生している。このとき全コイル電流およびコイル断面積は、両者で同一としている。

4-3.2 流体場の支配方程式

作動流体は、乱流状態にある圧縮性粘性流体とし、軸方向運動量の式における圧力勾配は、断面内で一定値であるとみなし、この値は計算された質量流量が数値条件として与えた値と等しくなるように繰り返し計算により決定した。

MHD発電ダクト内の流れ場は、非常に方向性が強く衝撃波や境界層の剥離現象が生じない条件のもとでは、近似的に下流の影響が上流へ伝わらないとして、軸方向の二次微分を無視する、いわゆる放物近似^{*5*9*23*24*25}を用いることができる。

以上の仮定より、流体場を記述する支配方程式は以下のようになる。

質量保存則 (Mass conservation law)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (4-6)$$

運動量保存則 (Momentum conservation law)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} - \nabla \cdot \left\{ (\mu_l + \mu_t) \{ \nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^{\text{tr}} \} \right\} \\ = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (4-7)$$

エネルギー保存則 (Energy conservation law)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla h - \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{\mu_l}{P_l} + \frac{\mu_t}{P_t} \right) \nabla h \right\} \\ = \mathbf{V} \cdot \nabla p + \mathbf{J}^2 / \sigma + (\mu_l + \mu_t) \Phi' \end{aligned} \quad (4-8)$$

ここで $(\mu_l + \mu_t) \Phi' \equiv \Phi$ は、散逸関数(dissipation function)とよばれ、軸方向の速度勾配が、断面内の変化に比べ小さいとき、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \Phi' = 2 \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (4-9)$$

状態方程式 (Equation of state)

$$p = \rho \frac{R}{M} T = \rho R T \quad (4-10)$$

但し、 $\bar{p}$ および p はそれぞれ断面内の平均圧力 ($\bar{p}(x)$: x のみの関数)、および局所圧力 ($p(y, z)$: y および z の関数)であり、 h はエンタルピ、 Φ は、散逸関数である。また、 μ_{eff} は実効粘性係数であり、層流粘性係数 μ_l と、乱流粘性係数 μ_t との和で与えられる。 Pr_l および Pr_t は、それぞれ層流および乱流のプラントル数を表している。

乱流粘性係数については修正 van-Driestモデル^{*24}を用いた。また密度、層流粘性係数、導電率、電子の移動度などは、文献[9]に従って、圧力およびエンタルピの関数として与えた。

解析手法としては、 y - z 断面内では三角形一次要素を用いた有限要素法、軸方向には、Crank-Nicolsonによる陰解法を用いた。

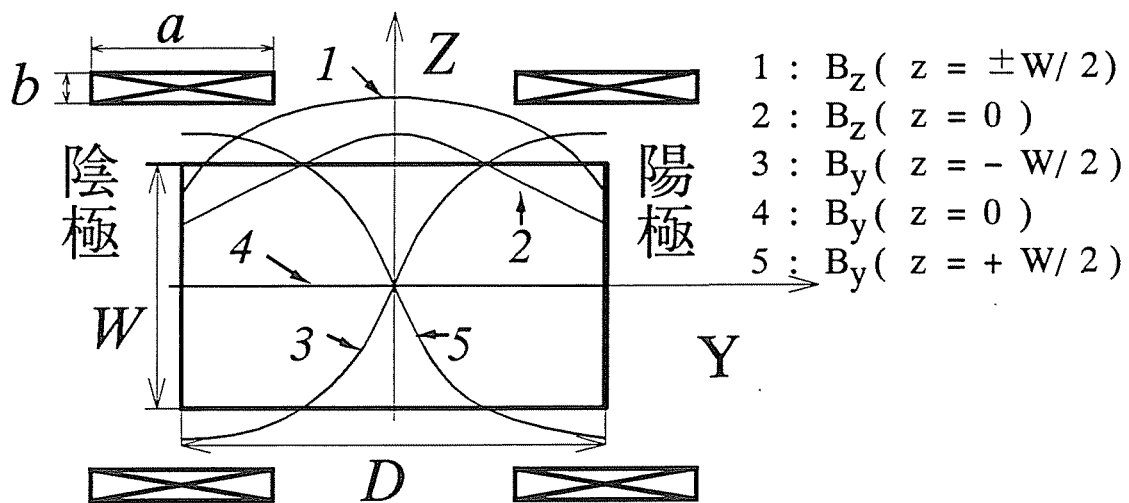


図4-1 座標系及びSFC型MHD発電機のコイル配置と磁場分布

Fig.4-1 Coordinate system, coil arrangement for the SFC-Type MHD

Generator and distributions of magnetic field.

また、本解析は放物近似を採用しているために境界層の剥離現象が発生するとそれ以上計算を進めることが不可能となるために、解析対象の発電ダクト長には限度があることも原因である。

著者らの行った衝撃波管を用いたSFC型MHD発電実験^{*21}では、ダクトアスペクト比 D/W が1.8及び2.6の場合の負荷整合時の出力密度の改善率は、UFCに比べそれぞれ63%および115%であった。

この実験は、磁界強度、電流レベル、ダクトアスペクト比あるいは壁の広がり角などの諸条件が異なっているため本解析結果との定量的な比較は適当ではないと考えられる。しかし、この実験での生成プラズマの持続時間が、約1 msecと短いために電気場と熱流体場の相互作用が十分には行われていないと考えられるので、本解析で同様に熱流体場が電気場とそれほど影響を及ぼしあっていない入口部分での電気出力密度をUFCとSFCで比較するとその改善率は、約20%であった。またこのダクトに対する $D/W = 2.6$ の負荷整合時の解析がLiu et al.^{*24}によって行われ入口での出力改善は約50%であった。本解析のSFC磁界コイルは、チャンネルの軸に平行に置かれていると仮定しているため、入口に近いほど

電極境界層での B_z は十分に低下していない。このことが本解析の出力改善率がこれらの実験値、あるいは解析値より低い理由であると考えられる。

4-4.1 ホール電流

ダクト入口から 3 m および 9 m におけるホール電流密度 J_x の分布を図 4-2 および図 4-3 に示す。 J_x は、ファラデー型 MHD 発電機においては、ジュール損失を増大させるだけの無効電流であり、また、このジュール損失の大部分は低温の電極境界層において発生する。図 4-2 および図 4-3 より、コア部分では、UFC よりも SFC の方が大きなホール電流が流れているが、境界層での値に比べると十分小さい。更に、コア部分の抵抗は、境界層に比べると極端に小さいために、この領域でのホール電流のジュール損失への寄与は、無視できる程小さい。 $x = 3$ m および 9 m においては、平均の負荷電流密度 $\langle J_y \rangle$ あたりの電極境界層における最大ホール電流密度 J_{xMAX} 即ち、 $J_{xMAX} / \langle J_y \rangle$ の最大値を比較すると、UFC で 0.87 および 1.47 であり、また SFC では 0.56 および 0.56 となり、何れの場合でも SFC のほうが負荷電流あたりのホール電流、即ち、ジュール損失が少ないことがわかる。これらの理由は、SFC 磁界の z -成分が、電極境界層において弱められていると共に、磁界の y 成分の存在により、 y y 成分のテンソル導電率 σ_{yy} が改善されているためである^{*22}。

4-4.2 ファラデー電流

ダクト入口から 3 m および 9 m におけるファラデー電流密度の分布を図 4-4 および図 4-5 にそれぞれ示す。UFC では、絶縁壁境界層内で減少する以外はほぼ平坦な分布となっているのに対して、SFC では、電極端部近くのほうが中央部分よりも若干大きな電流が流れている。これは、電極端部において磁場の y 成分が 3.5 テスラ程度の値を持つためにテンソル導電率 σ_{yy} が電極端部において増大しているためである。

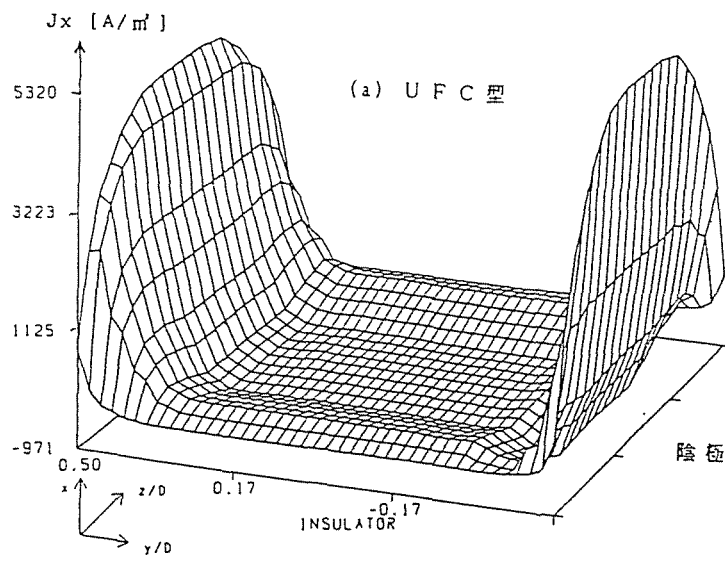


図4-2 (a) ホール電流密度分布 (UFC) ($x = 3$ m)

Fig.4-2(a) Hall current distributions at $x=3$ [m] for the UFC-Type.

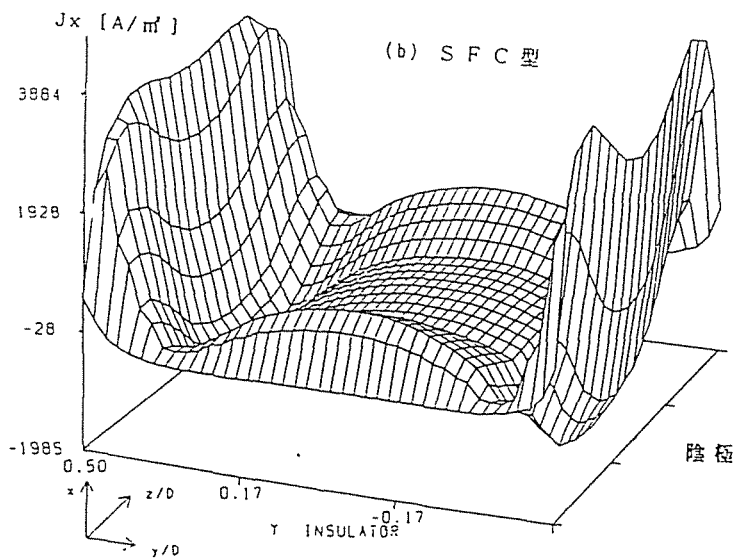


図4-2 (b) ホール電流密度分布 (SFC) ($x = 3$ m)

Fig.4-2(b) Hall current distributions at $x=3$ [m] for the SFC-Type.

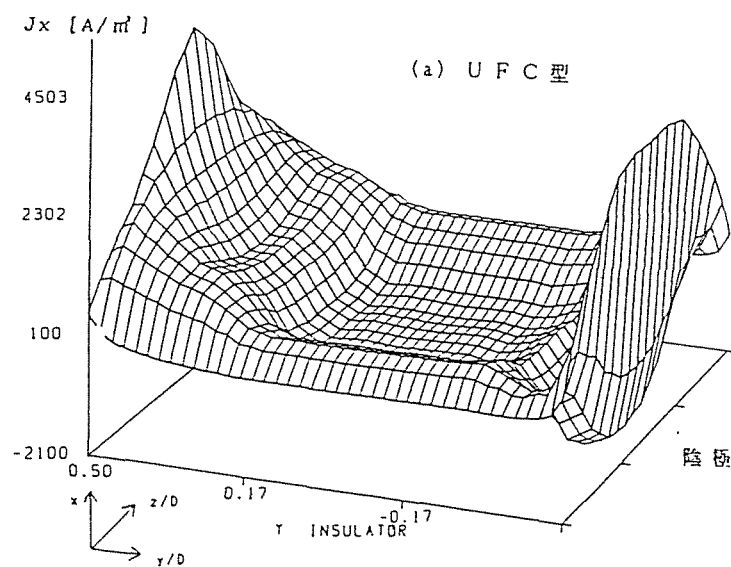


図4-3 (a) ホール電流密度分布 (UFC) ($x = 9 \text{ m}$)

Fig.4-3(a) Hall current distributions at $x=9 \text{ [m]}$ for the UFC-Type.

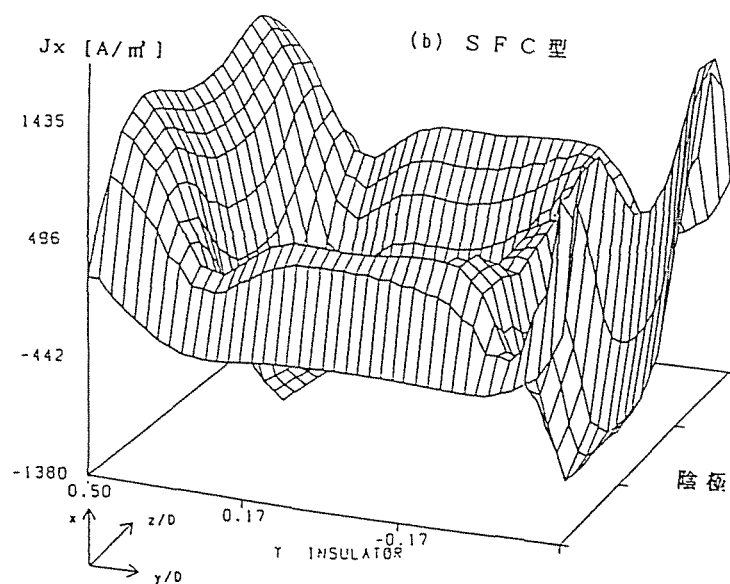


図4-3 (b) ホール電流密度分布 (SFC) ($x = 9 \text{ m}$)

Fig.4-3(a) Hall current distributions at $x=9 \text{ [m]}$ for the SFC-Type.

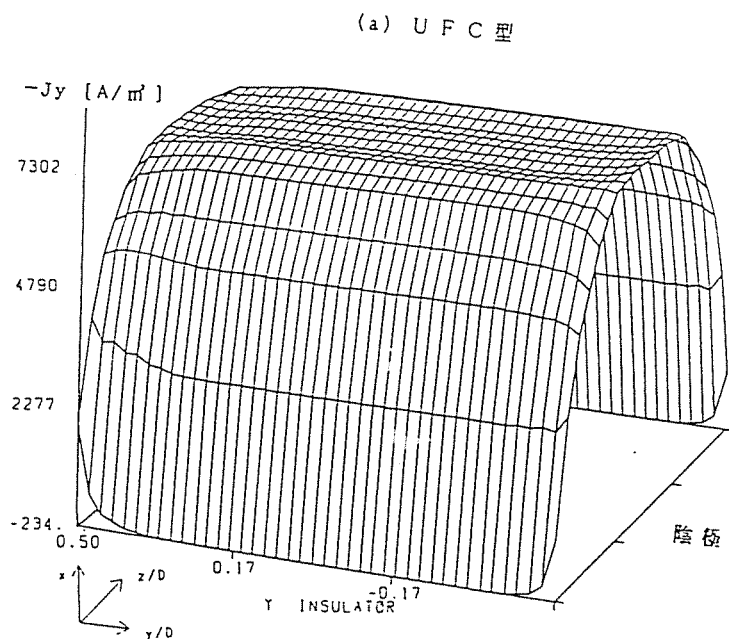


図4-4 (a) ファラデー電流密度分布 (U F C) ($x = 3 \text{ m}$)
 Fig.4-4(a) Faraday current distributions at $x=3 \text{ [m]}$ for the UFC-Type.

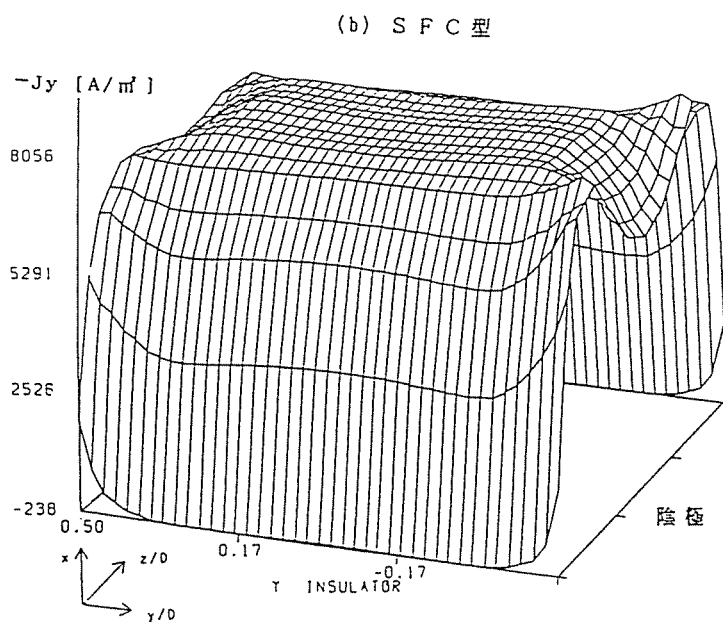


図4-4 (b) ファラデー電流密度分布 (S F C) ($x = 3 \text{ m}$)
 Fig.4-4(b) Faraday current distributions at $x=3 \text{ [m]}$ for the SFC-Type.

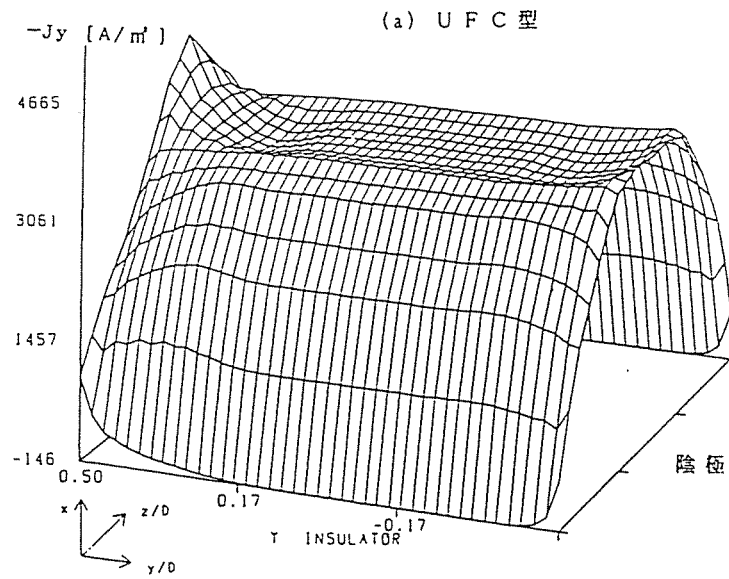


図 4 - 5 (a) ファラデー電流密度分布 ($x = 9 \text{ m}$)

Fig.4-5(a) Faraday current distributions at $x=9 \text{ [m]}$ for the UFC-Type.

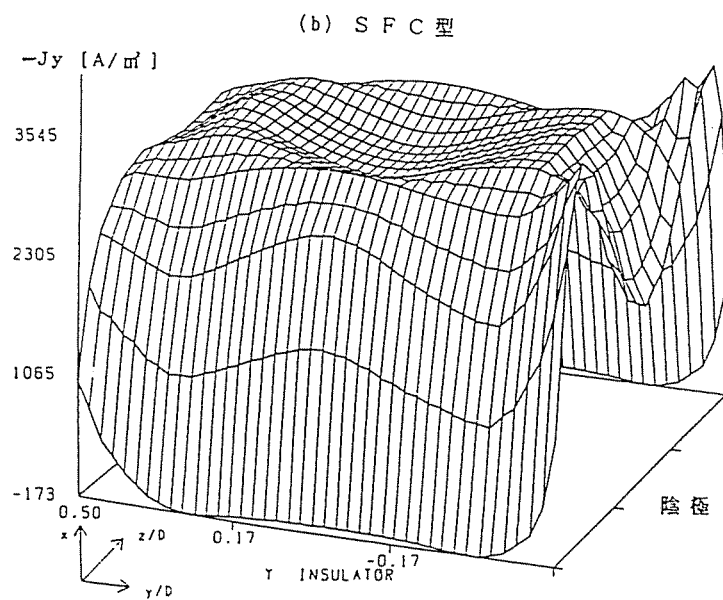
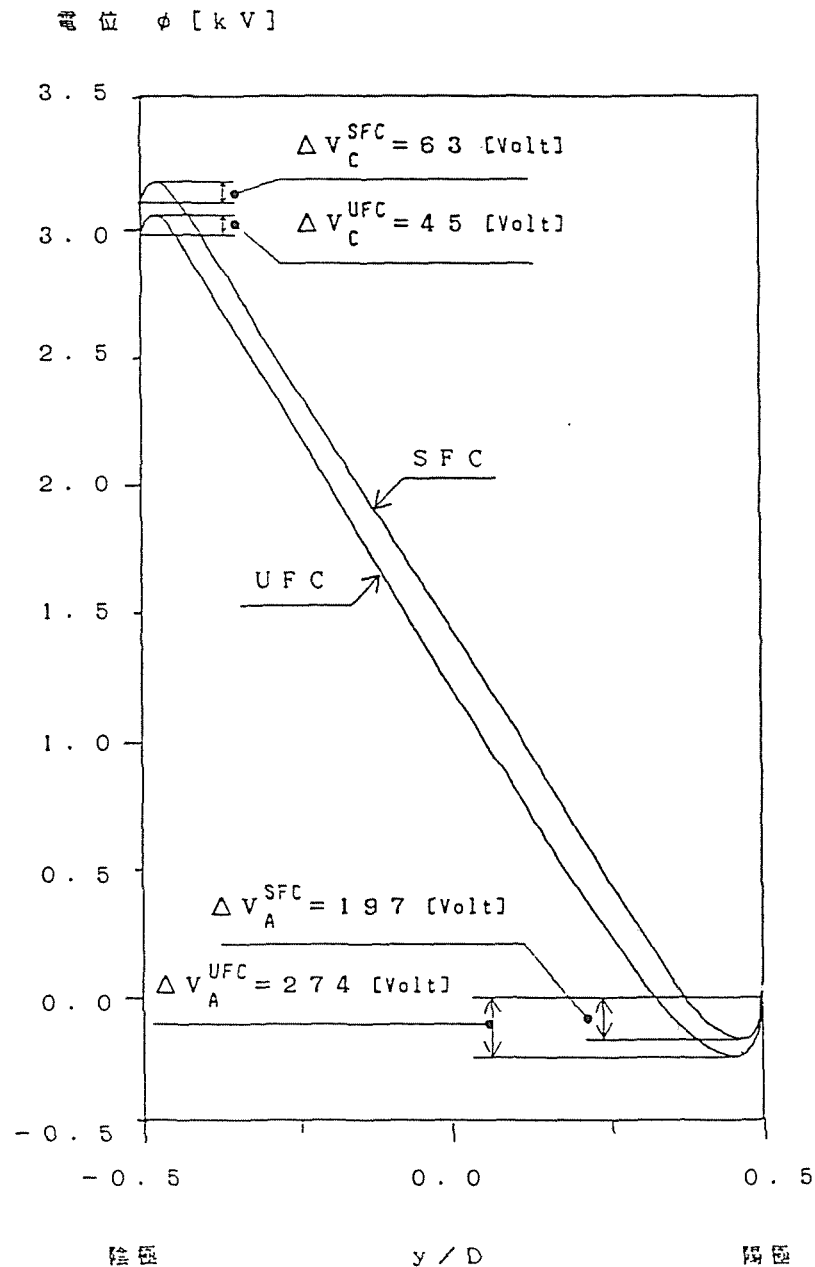


図 4 - 5 (b) ファラデー電流密度分布 (S F C) ($x = 9 \text{ m}$)

Fig.4-5(b) Faraday current distributions at $x=9 \text{ [m]}$ for the SFC-Type.

図4-6 電極電位降下 ($x = 9$ m)Fig.4-6 Electrode potential drops at $x=9$ [m].

しかし後流 $x = 9$ mの分布を比較するとUFCでは、ホール電流の空間的不均一で駆動された二次流れによる低速流体の対流の影響で、陽極中心近傍において軸方向速度成分が強い減速を受け、局所的に温度が上昇することにより、 J_y および、 J_x が集中することになる。

4-4 節 解析結果および考察

表4-1に、解析に用いた数値条件を示す。発電機入口での速度及び温度の分布は、乱流 1/7 乗則で与えた。また、以下の図4-1においては、座標 y および z は、すべて電極間隔 D によって規格化している。

表4-1 数 値 条 件
Table 4-1. Numerical Conditions.

熱入力	W_t	787	MWt
質量流量	m_0	144	Kg/sec
入口主流温度	T_0	2700	K
入口淀み点温度	T_s	2835	K
入口主流速度	U_0	800	m/sec
入口マッハ数	M_0	0.93	
入口静圧	p_0	4.00	atm
入口淀み点圧力	p_s	6.52	atm
入口境界層厚さ	δ	0.05	m
壁温度	T_w	1000	K
ダクト断面積	$D \times W$	0.5~1.0	m^2
ダクトアスペクト比	D/W	2	
ダクト長	L	12	m
負荷率	K	0.7	
磁界用コイル全断面積	S_{coil}	4×0.1	m^2
磁界用コイル電流密度	I_{coil}	10^8	A/ m^2
磁界用コイルアスペクト比	a/b	5	
磁束密度（一様磁界）	B_z	5.27	Tesla

本解析における電気出力およびエンタルピ抽出率は、UFC型で、94 [MWe]および 11.9 % であり、SFCで102 [MWe]および 13.0 % であった。これらの値は、実用システムの要請の半分程度であるが、このように出力が少ない理由は、前節で述べたように本解析ではダクトの形状（広がり角とアスペクト比）やSFCコイル配置に関して最適な条件には必ずしもなっていないことによる。

4-4.3 電極電位降下

MHD発電チャネルの断面内では、電位 ϕ は電極境界層内で極値をとる。入口から9 mの位置での電極電位降下 ΔV をこれらの極値と電極電位との差で定義して図4-6に示す。陰極側ではSFCの方が電位降下が大きい但其の絶対値は陽極側に比べかなり小さい。陽極側では、逆にUFCの方が大きい。従って、SFC型、UFC型共に電極電位降下による損失の大部分は陽極側で発生するが、電極間の非対象性の少ないSFCが電極電位降下による損失の点でも有利であるといえる。

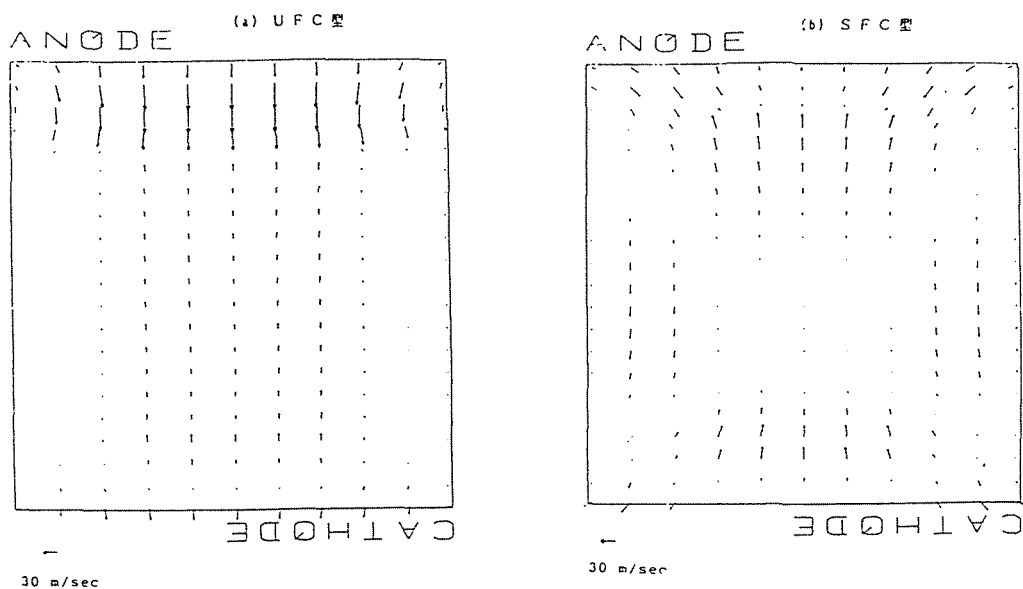


図4-7 断面内二次流れ（左：UFC、右SFC）（ $x = 6 \text{ m}$ ）

4-4.4 二次流れ分布

ダクト入口から6 mにおける二次流れ分布を図4-7に示す。二次流れは J_x に作用する z 方向への非一様な y 方向ローレンツ力によって駆動され、電極境界層内における強い二次流れの存在は、境界層の剥離や、電極壁への局所的電流集中や熱負荷の増大^{*3*25}を引き起こすため好ましくない。

SFCでは、 J_x および B_z が共に電極境界層で抑制され、更に、ローレンツ力の断面分布が複雑に分布し、流れを一方向に駆動しにくい。このため、SFCで

は、電極境界層内、特に陽極近傍での二次流れは、U F Cに較べ弱い。

4-4.5 温度及び軸方向速度の分布

入口から9 mにおける温度分布を図4-8、図4-9に、軸方向速度成分の分布を図4-10、図4-11に示す。このとき各図中で、(a)は、陰極側からみた図であり、(b)は、陽極側からみた図を表している。電極境界層におけるU F Cの二次流れの方向に従って、陽極側では、壁近傍の低温、低速流体が主流方向へ運ばれるために温度及び速度の各境界層は、陰極側に較べ厚くなる。特に、U F Cの速度場は陽極中心近傍で急激な減速を受けることで、図4-12に示すように壁摩擦係数が極端に低下し境界層の剥離現象が起こり易くなっている。

速度場のオーバーシュート現象は、流体を押し戻す力である軸方向ローレンツ力 ($J_y B_z$) が局所的に減少している領域で生じる^{*5}。U F Cでは、 J_y が局所的に減少している絶縁壁境界層側のみに発生するのに対してS F Cでは、 B_z が抑制されている電極境界層側にも発生する^{*22}。このためS F Cでは壁摩擦が大きい(図4-12)ために、電極境界層で境界層剥離現象が起こりにくく、電極壁への熱伝達が促進される(図4-13)ことで電極壁への局所熱流束や電流の集中が起こりにくいと考えられる。

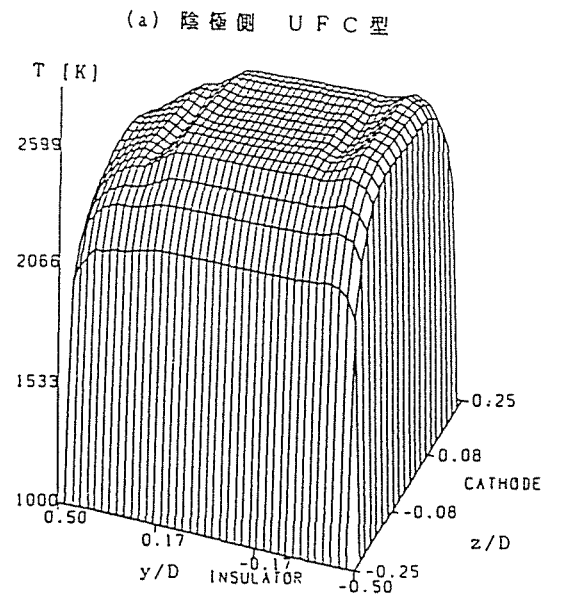


図4-8 (a) U F C型の温度分布 (陰極側) ($x = 9$ m)
 Fig.4-8(a) Profile of static temperature for the UFC-Type
 at $x=9$ [m] near cathode

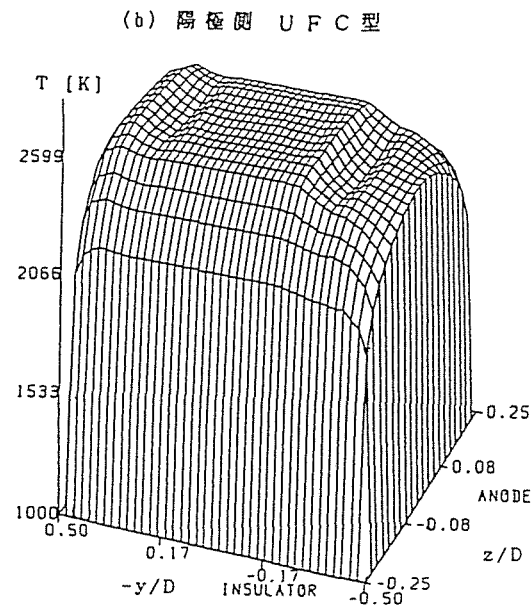


図4-8 (b) U F C型の温度分布 (陽極側) ($x = 9$ m)
 Fig.4-8(b) Profile of static temperature for the UFC-Type
 at $x=9$ [m] near anode.

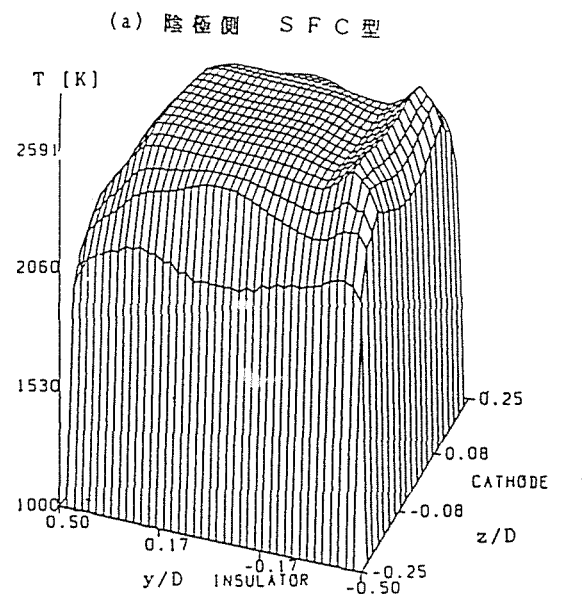


図4-9 (a) SFC型の温度分布 (陰極側) ($x = 9 \text{ m}$)
 Fig.4-9(a) Profile of static temperature for the SFC-Type
 at $x=9 \text{ [m]}$ near cathode.

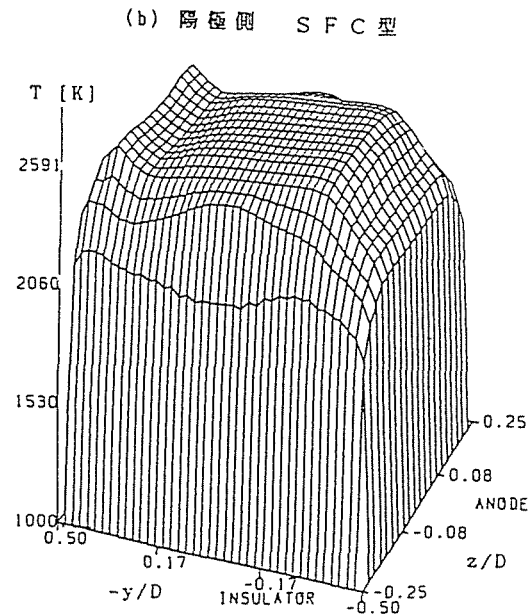


図4-9 (b) SFC型の温度分布 (陽極側) ($x = 9 \text{ m}$)
 Fig.4-9(a) Profile of static temperature for the SFC-Type
 at $x=9 \text{ [m]}$ near cathode.

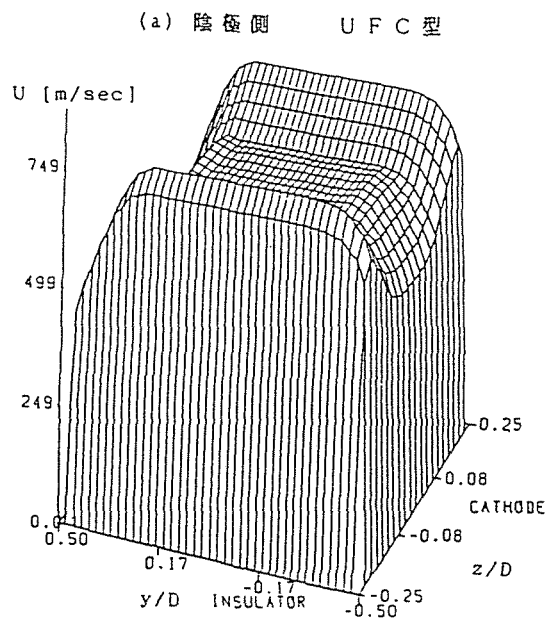


図4-10(a) UFC型の軸方向速度成分の分布(陽極側)($x = 9$ m)

Fig.4-10(a) Profile of x-component velocity for the UFC-Type
at $x=9$ [m] near cathode

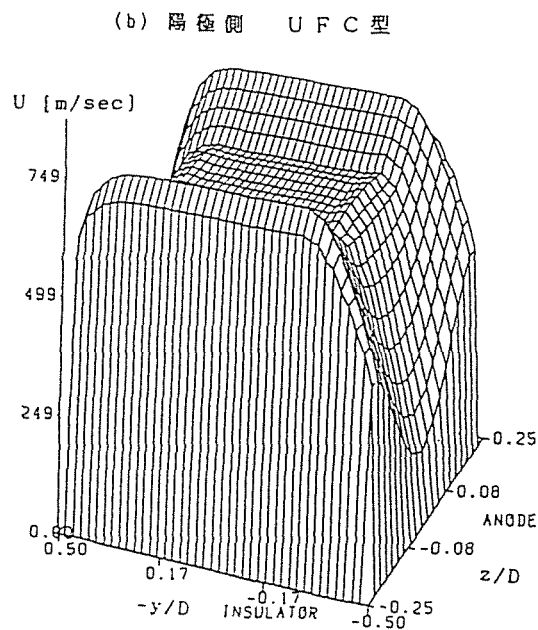


図4-10(b) UFC型の軸方向速度成分の分布(陰極側)($x = 9$ m)

Fig.4-10(b) Profile of x-component velocity for the UFC-Type
at $x=9$ [m] near anode.

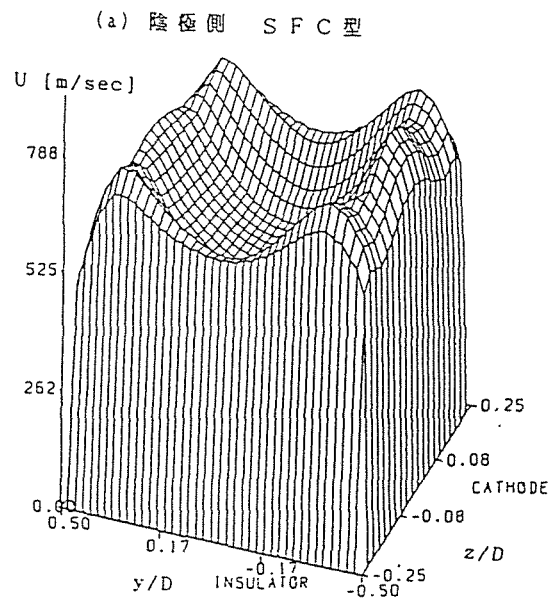


図4-11(a) SFC型の軸方向速度成分の分布(陰極側)($x = 9$ m)

Fig.4-11(a) Profile of x-component velocity for the SFC-Type
at $x=9$ [m] near cathode.

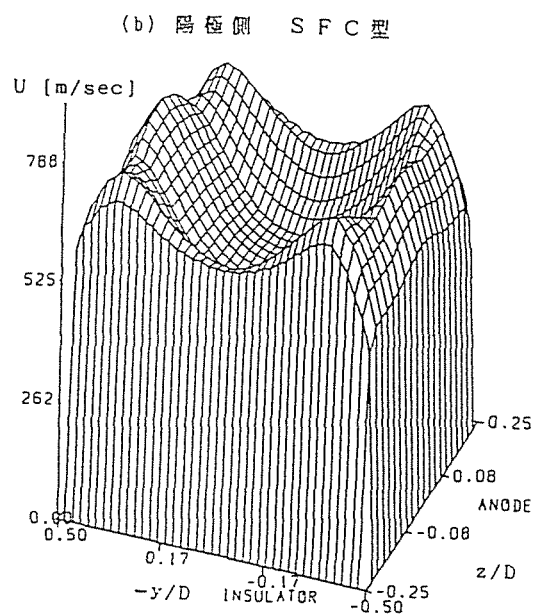


図4-11(b) SFC型の軸方向速度成分の分布(陽極側)($x = 9$ m)

Fig.4-11(a) Profile of x-component velocity for the SFC-Type
at $x=9$ [m] near anode.

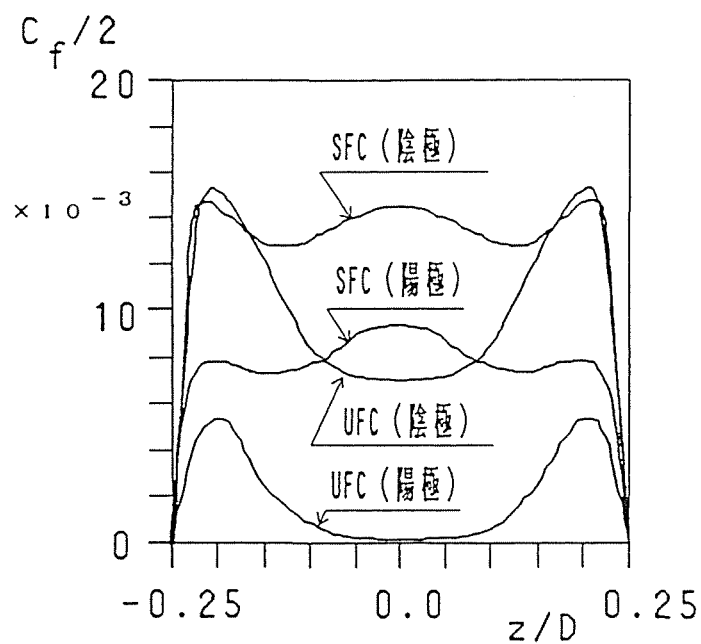


図4-12 壁摩擦係数の比較 ($x = 9$ m)

Fig.4-12 Comparison of friction coefficient at $x=9$ [m].

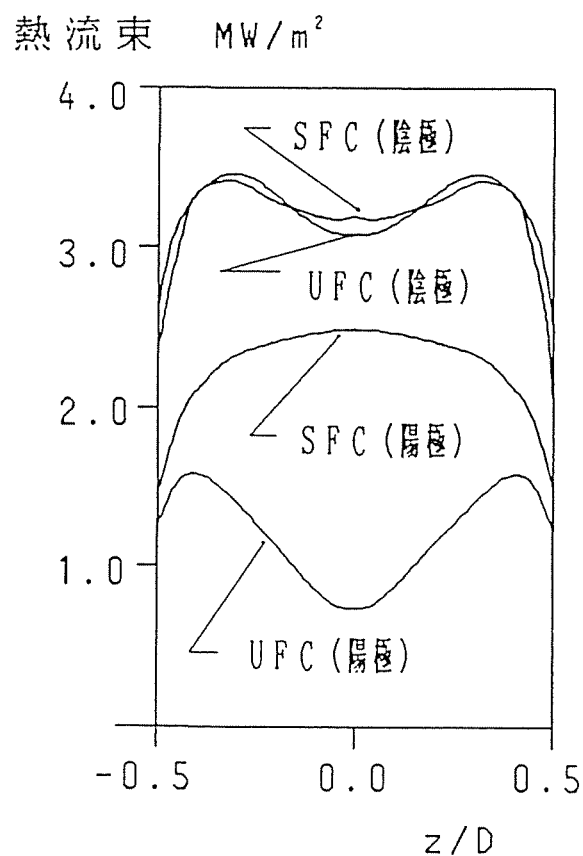


図4-13 熱流束の比較 ($x = 9$ m)

Fig.4-13 Comparison of heat fluxes on electrode at $x=9$ [m].

4-5節 結 論

電気出力約100MW_eのファラデー型MHD発電機に関して印加磁界がSFC型と、従来型のUFC型について放物近似三次元解析を行い両者の電気場及び流体場について比較した。その結果をまとめると以下ようになる。

- (1) ファラデー型MHD発電機では無効電流であるホール電流は、SFC磁界配位によって抑制される。
- (2) UFCの場合に、大型のファラデー型MHD発電機で発生する陽極中心部への電流集中現象は、SFC型では起こらない。
- (3) SFCでは、電極境界層内、特に陽極近傍における二次流れが弱い。また、そのため軸方向速度成分の境界層剥離も生じにくい。
- (4) 絶縁壁境界層側での速度のオーバーシュートに加え、SFCでは電極壁側にも発生する。その結果、電極壁への熱伝達が促進されることで集中アークへの移行を抑える効果があると予想される。

商用規模の大型MHD発電機では、今回の解析よりもより相互作用が強くなると考えられる。MATや境界層の剥離現象などの不安定性の発達は、電極境界層でのローレンツ力の不均一性により促進されるので、より相互作用の強い条件のもとでも上で述べたSFCの優位性は保たれると考えられる。

参考文献

- *1 S. L. Girshick and C. H. Kruger, "Evidence of Secondary Flow in Faraday MHD Generators," Proc. 21st Symp. Engng. Aspects MHD, pp. 3.5.1-3.5.11, 1983.
- *2 S. T. Demetriades et al., "Progress in Analytical Modeling of MHD Generators II," *ibid.*, pp. 3.1.1-3.1.20, 1983.
- *3 S. T. Demetriades et al., "On the Magnetoaerothermal Instability," AIAA 19th Aerospace Science Meeting, Paper No. AIAA-81-0248, 1981.
- *4 S. T. Demetriades et al., "Progress in Analytical Modeling of MHD Generators," Proc. 12th Symp. Engng. Aspects MHD, pp. I.5.1-I.5.13, 1972.
- *5 S. P. Vanka and R. K. Ahluwalia, "Three-Dimensional Flow and Heat Transfer Development in MHD Channels," AIAA 19th Aerospace Science Meeting, Paper No. AIAA-81-0247, 1981.
- *6 S. P. Vanka et al., "Three-Dimensional Analysis of MHD Generators and Diffusers," ANL Report, ANL/MHD-82-4, 1982.
- *7 B. L. Liu et al., "Simplified Three Dimensional Fluid and Electrodynamic Calculations for an MHD Generator Loading Analysis," AIAA/ASME 3rd Joint Thermophysics Conference, Paper No. AIAA-82-0291, 1982.
- *8 G. Yu Alekseev, et al., "The Analyses of Three Dimensional Flow in Large Scale MHD Generators," Proc. of 9th Int. Conf. MHD Elec. Power Gen., Vol. II, pp. 404-417, Tsukuba, 1986.
- *9 石川, 卯本, "MHD発電機に誘起される二次流れについての考察," 電気学会論文誌, Vol. 106-B, p. 296, 1985.
- *10 M. Ishikawa et al., "Three Dimensional Interaction in Faraday Channel," *ibid.*, pp. 429-438.
- *11 M. Ishikawa and J. Umoto, "Three-Dimensional Analysis of Faraday Type MHD Generator for Presumed Next Pilot Plant," Proc. 25th Symp.

- Engng. Aspects MHD, p. 7. 3. 1, 1987.
- *12 S. Oikawa, et al., "Three-Dimensional Calculation of Large Scale SFC-Type MHD Generator," Proc. of 9th INT. Conf. MHD Elec. Power Gen., Vol. II, pp. 439-448, Tsukuba, 1986.
 - *13 及川, 粥川, "S F C型MHD発電機の三次元特性," 電気学会論文誌, Vol. 108-B, pp. 111-118, 1988
 - *14 S. Oikawa, et al., "Improvement of Coupled Fluid and Electrodynamic Characteristics of MHD Channel by Shaped Two-Dimensional Magnetic Field," Magnetohydrodynamics; An International Journal, Vol. 2, No. 1, pp. 65-77, 1989
 - *15 野村, "MHD発電チャネル三次元計算の新方法," 電気学会論文誌, Vol. 108, pp. 501-508, 1988.
 - *16 原 武久, "有限要素法によるMHD発電機の三次元解析," 電気学会論文誌, Vol. 99, pp. 385-392, 1979.
 - *17 R. J. Rosa, "Magnetohydrodynamic Energy Conversion," MacGraw-Hill, 1963.
 - *18 Y. Ozawa & N. Kayukawa : "Performance Improvement of MHD Generator by Transversally Shaped Distribution of Magnetic Induction," 7th Int. Conf. on MHD Elec. Power Generation, Vol. 2, p. 516, 1980.
 - *19 N. Kayukawa et al., : "Transversally Shaped Field Configuration and Output Performance Evaluation for Slagged Rectangular MHD Channel with Superconducting Coil System," 8th Int. Conf. MHD Elec. Power Generation, Vol. 1, pp. 179-182, 1983.
 - *20 N. Kayukawa, et al., "Electrical Characteristics of an MHD Generator Having Transversally Shaped Configuration of the Magnetic Induction, Journal of Energy, Vol. 7, No. 3, p. 280, 1983.
 - *21 N. Kayukawa : "Power Generation Tests of the Improved Shaped B-Field MHD Generator," AIAA Journal of Propulsion and Power, Vol. 1, No. 4, July-August, pp. 309-310, 1985.
 - *22 及川、他 : 『S F C型MHD発電機の流れ場電気場連成解析』, 電学論,

106卷-B, p. 286, 昭和61年.

- *23 D. W. Roberts and C. K. Forester, : "Parabolic procedure for Flows in Ducts with Arbitrary Cross Sections," AIAA Journal, Vol. 17, No. 1, pp. 33-40, 1979.
- *24 B. L. Liu, et al., "Three-Dimensional Fluid and Electrodynamic Modeling for MHD DCW Channels," AIAA 21st A. S. Meeting, AIAA-83-0464, 1983.
- *25 C. D. Maxwell, et al., "Three-Dimensional Effects in Large Scale MHD Generators," AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference, AIAA-81-1231, 1981.
- *26 B. L. Liu, et al., "Coupled Fluid and Electrodynamic Analysis on MHD Channel with Nonuniform Magnetic Field," IEEE Trans. on Plasma Science, Vol. PS-14, pp. 444-453, 1986.

第5章 高導電率プラズマを用いるMHD発電機

5-1 節 緒 言

MHD 発電は化石燃料を用いる、小型・高効率さらに環境的にも受け入れられ易い潜在的可能性を持った発電システムである。第 1 章でも示したように、燃焼プラズマ MHD 発電は本来 $50 \sim 60 \text{ MW}_e/\text{m}^3$ 程度の発電能力を有している。しかし現実には、システムの信頼性・耐久性など種々の制限条件によりその発電性能は低下する。電極アーク現象や、隣接電極間ブレイクダウン現象により平均電流密度およびホール電界はそれぞれ 0.3 A/cm^2 、 30 V/cm 程度が上限であると言われている。これらの制限条件により、平均電力密度は 10 から $20 \text{ MW}_e/\text{m}^3$ が上限となる。この場合、ベースロード発電所として考えられている MHD 発電機に必要な発電機ボリュームあるいは励磁用の超伝導コイルの建設コストはかなり大きくなる。従って、出力密度の改善は、オープンサイクル MHD 発電機の実用化のための大きな要請の一つとなっている。

Ozawa et al.^{*1} は、電極近くで磁界の発電有効成分を低減することでアーキングプロセスだけでなく、電極電圧降下及び電流の不均一性の抑制するための SFC 型磁界配位を提案している。衝撃波管を用いた Kayukawa^{*2*3} による実験では、SFC 磁界配位による発電室力の改善率は $50 \sim 100\%$ にもなり、著者による二次元^{*4} 及び三次元解析結果^{*5*6*7} とともに定性的に一致した。

Kayukawa^{*8} は、線形摂動解析により集中アーク放電開始条件を明らかにし、SFC 磁界配位の優位性を示した。

超伝導マグネットを用いる商用規模の大電流・高出力の強相互作用線形 MHD 発電機では、電磁場と熱流体場の結合が強くなり、速度オーバシュート現象、断面内の MHD 二次流れ現象、電極間の非対称分布それにとまなう種々の不安定性現象^{*9} が生ずることが知られている。流れの不均一性が上流から下流に向かって発達すると電磁空力的不安定性 (magnetoaerothermal instability)^{*10} がチャンネルの下流部に発生する。この場合チャンネルサイズやホール電流の局所的方向によって陽極部あるいは陰極部に大きな電流集中^{*11} が発生し、この電流によるローレンツ制動力によって流れの境界層が電極面から剥がれる、いわゆる境界層剥離現象を起こし、熱流束の局所的な集中・電極面破壊が起こり易くなる。

これらについての理論的な予想,^{*12*13}あるいは実験的な観測^{*14}は数多くなされているが、その抑制法あるいは解決法に関しては、ほとんど提案がなされていないのが現状である。Doss et al.^{*15}は、断面内の対流及び不安定性を引き起こす軸方向渦度の強度および方向に関するファラデーチャネルのローディングの効果を議論した。またMaxwell et al.^{*16}は、M A T不安定性の発生を抑制するには従来考えられているような平板型ではなく、V型の電極構造が効果的であることを示した。

以上の観点から本章では、小型の実験機でも強相互作用現象が模擬出来ると考えられる炭素燃焼ガスプラズマを想定した三次元電磁流体場の解析により、これらの不安定性現象のS F C磁界配位による抑制効果について示し、併せて、商用規模の発電機の特長についても調べている。

表 5 - 1 数値条件

Fuel	Case-A		Case-B		
	Carbon	Kerosine	Carbon	Kerosine	
Mass flow rate	0.90	0.62	228.1	161.3	kg/s
Thermal input power	5.01	4.99	1133.9	1096.4	MWth
Channel aspect ratio D/W	3.00	3.00	3.00	3.00	
Channel effective length	0.80	0.80	12.00	12.00	m
Cross sectional area D×W					
at entrance A_{in}	75.0	75.0	0.48	0.48	cm ²
at exit A_{out}	93.5	93.5	1.16	1.16	cm ²
Inlet static pressure	1.20	1.04	3.50	3.50	atm
Inlet average temp.	2773	2773	2741	2741	K
Inlet average velocity	650	750	827	827	m/s
Inlet boundary layer					
thickness	0.01	0.01	0.02	0.02	m
Wall temperature	1000	1000	1400	1400	K
Load factor K	0.50	0.50	0.80	0.70	
Magnetic field strength					
UFC (const.)	3.95	3.95	6.27	6.27	T
SFC	(see Fig. 2(a))		(see Fig. 2(b))		

5-2 節 支配方程式系

ここでは、一定の断面アスペクト比を持った線形MHD発電チャネルを仮定する。熱入力約5 MWth（以下ではCASE-Aとする）および約1 GWth（以下ではCASE-Bとする）の発電チャネルの断面積・有効長は、それぞれ75 cm²、80 cmおよび、0.48 m²、12 mである。また電極高さDと絶縁壁間隔Wはアスペクト比D/W=3と固定しながら入り口から出口まで直線的に広がっている。5 MWthチャネル（CASE-A）では、入り口から1 mでの断面積は201 cm²であり、他のパラメタは、表5-1に示す。

5-2.1 印加磁界

SFC磁界は、4本の矩形断面超伝導コイルにより発生されている。その基本的設計思想は、①コア部ではB_zを強くし、②ホール効果およびそれに関連する種々の出力低下要因を抑制するために電極境界層でB_zをできるだけ弱くする。そのための磁場コイル配置を図5-1に示す。また各チャネル出口でのB_z断面分布を図5-2に示す。B_zはy軸およびz軸に関して対称であり、B_yはチャネルの中心点に関して対称である。この図よりさきに述べた要請①および②は、CASE-AおよびCASE-B両方のチャネルの出口では満足されている。しかしCASE-Bチャネルでは、その大きな壁広がり角のため要請②は入り口付近では必ずしも満たされていない。

5-2.2 熱流体場の支配方程式

MHD発電チャネル内の熱流体場の分布は、放物近似・三次元圧縮性ナビエーストークス方程式系^{*17}を解くことで計算できる。放物近似では衝撃波や境界層剥離現象が生じない条件のもとでは、ダクト流れをよく近似できるといわれている。

従って本解析では境界層剥離点を越えて計算を進める事はできない。このとき熱流体場を記述する支配方程式系は以下のようになる。

質量保存則 (Mass conservation law)

$$\rho \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{V}) = 0 \quad (5-1)$$

運動量保存則 (Momentum conservation law)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} - \nabla \cdot \left\{ (\mu_i + \mu_t) \{ \nabla \mathbf{V} + (\nabla \mathbf{V})^{\text{tr}} \} \right\} \\ = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \end{aligned} \quad (5-2)$$

エネルギー保存則 (Energy conservation law)

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial h}{\partial t} + \rho \mathbf{V} \cdot \nabla h - \nabla \cdot \left\{ \left(\frac{\mu_i}{P_i} + \frac{\mu_t}{P_t} \right) \nabla h \right\} \\ = \mathbf{V} \cdot \nabla p + \mathbf{J}^2 / \sigma + (\mu_i + \mu_t) \Phi' \end{aligned} \quad (5-3)$$

ここで $(\mu_i + \mu_t) \Phi' \equiv \Phi$ は、散逸関数(dissipation function)とよばれ、軸方向の速度勾配が、断面内の変化に比べ小さいとき、次式で表わされる。

$$\begin{aligned} \Phi' = 2 \left\{ \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} \\ + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 \end{aligned} \quad (5-4)$$

状態方程式 (Equation of state)

$$p = \rho \frac{R}{M} T = \rho R T \quad (5-5)$$

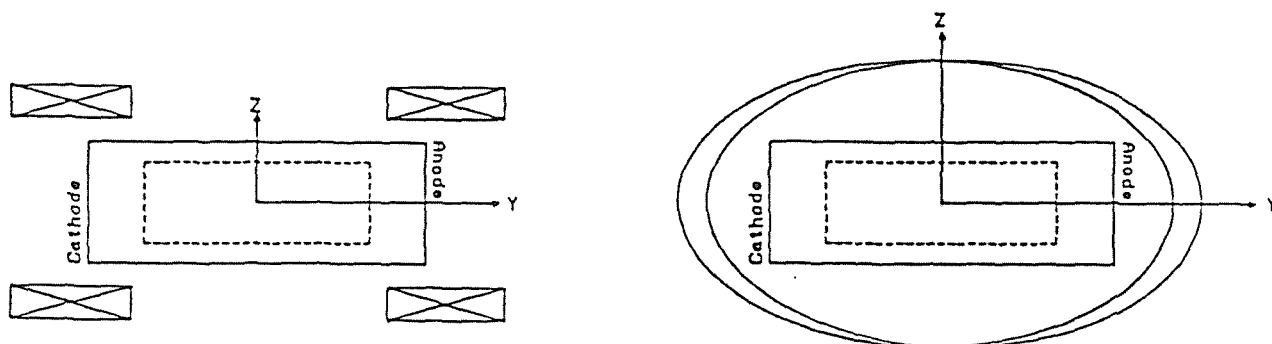


図 5 - 1 MHD発電機断面図 (CASE-B)
SFC型 (左) およびUFC型 (右)

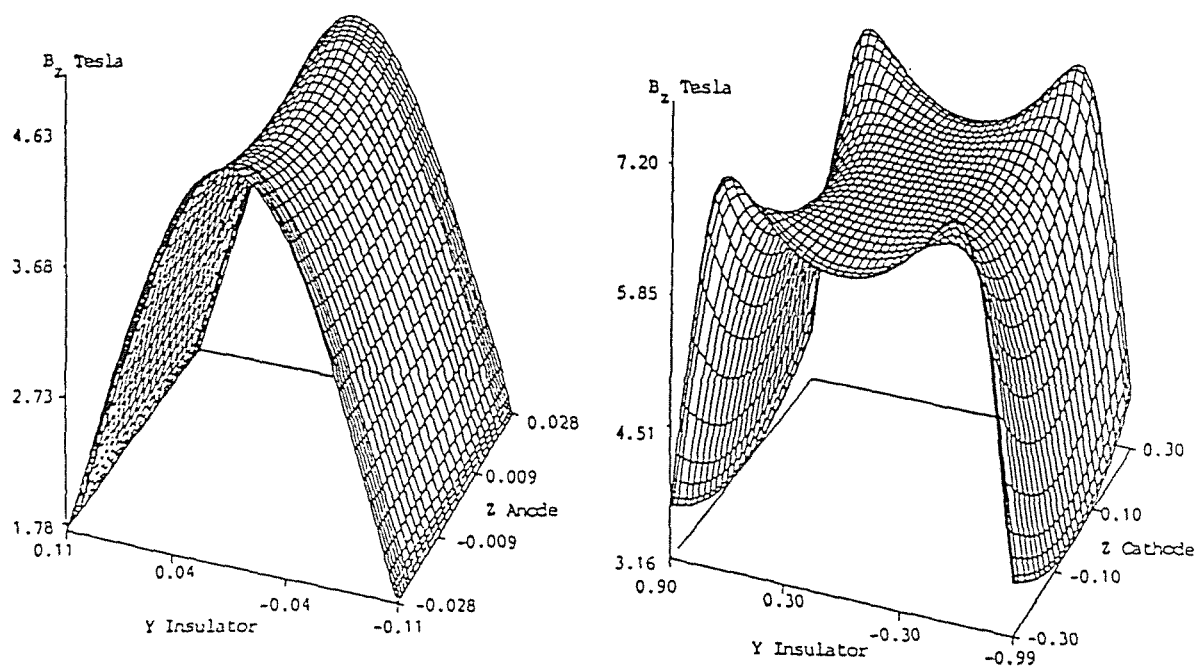


図 5 - 2 SFC磁界分布 (CASE-B)

乱流モデル：高レイノルズ数 $k - \varepsilon$ モデル

k - 方程式 : 乱れのエネルギー

$$\rho \mathbf{V} \cdot \nabla k - \nabla \cdot \left(\frac{\mu_k}{\sigma_k} \nabla k \right) = G - \rho \varepsilon \quad (5-6)$$

$$\sigma_k = 1.0, \quad G = \mu_t \Phi'$$

ε - 方程式 : 乱れの散逸率

$$\rho \mathbf{V} \cdot \nabla \varepsilon - \nabla \cdot \left(\frac{\mu}{\sigma_\varepsilon} \nabla \varepsilon \right) = C_1 G \frac{\varepsilon}{k} - C_2 \rho \frac{\varepsilon^2}{k} \quad (5-7)$$

ここで、 $\sigma_\varepsilon = 1.3$ 、 $C_1 = 1.44$ 、 $C_2 = 1.92$ である。

乱流粘性 μ_t : (Prandtl-Kolmogorov Law)

$$\mu_t = C_D \rho \frac{k^2}{\varepsilon}, \quad C_D = 0.09 \quad (5-8)$$

$k - \varepsilon$ モデルでは、このように乱流粘性係数を与えるために k と ε に対してモデル化された 2 本の輸送方程式を解くことになる。この方程式系は楕円型偏微分方程式であり $N - S$ 方程式と共に境界条件を与える必要があるが、この（高レイノルズ数） $k - \varepsilon$ モデルは流体がいたるところ乱流状態になっている場合に成立する微分方程式であり、壁面近くでの層流底層では成立しない。従って、境界条件として壁面での条件を用いても意味がない。そこで通常は壁面近くでは低レイノルズ数 $k - \varepsilon$ モデルを解き高レイノルズ数モデルと接続するかまたは、いわゆる「壁関数」^{*18} を用いて壁面近くでの非常に細かいメッシュを用いた計算を回避する、のどちらかが利用される。いずれの方法でも計算モデルの予測精度は大差が無いとされている^{*13}。従って本研究では、壁面でのメッシュ数を多くしなくとも良い高レイノルズ数モデルに境界条件として壁関数を用いる方法を採用した。

5-2.3 境界条件 (Appendix-C 参照)

$\xi^+ > 30$ ($\xi^+ = \frac{u_* \xi_p}{\nu_1}$) なる点 (壁面からの距離) ξ_p に対して

$$k_p = \frac{u_*^2}{C_D^{1/2}} \quad (5-9)$$

$$\varepsilon_p = \frac{u_*^3}{\kappa \xi} \quad (5-10)$$

$$\begin{aligned} u_p &= \frac{u_*}{\kappa} \ln \xi^+ + C \\ &= \frac{u_*}{\kappa} \ln (E \xi^+) : \text{対数 (壁) 法則} \end{aligned} \quad (5-11)$$

ただし

$$\begin{aligned} \kappa &= 0.41 && : \text{カルマン定数} \\ C &= 5.5 && : \text{なめらかな壁面のとき} \\ E &= \exp(\kappa C) \end{aligned}$$

$$\tau_w = \frac{u_p}{\xi_p} \frac{\kappa \mu \xi_p^+}{\ln(E \xi_p^+)} \Delta : \text{壁摩擦 (応力)} \quad (5-12)$$

$$u_* = \left(\frac{\tau_w}{\rho} \right)^{1/2} : \text{摩擦速度} \quad (5-13)$$

$$q_w = \frac{\rho u_* (h_p - h_w)}{\frac{P_t}{\kappa} \ln(E \xi_p^+) + A(P_t, P_1)} : \text{熱流束} \quad (5-14)$$

ここで、 A は、層流底層および緩和層内の伝熱抵抗と関連する温度の対数分布則の定数項を表し次式で表される^{*19}。

$$\begin{aligned} A(P_t, P_1) &= 5.0 \left\{ \left(\frac{P_1}{P_t} \right)^{0.75} - 1 \right\} \\ &\quad \times \left\{ 1 + 0.28 \exp \left(-0.007 \frac{P_1}{P_t} \right) \right\} \end{aligned} \quad (5-15)$$

$$\dot{m} = \int \int_{\text{断面}} \rho u \, dy \, dx = \text{一定} \quad (5-16)$$

熱力学輸送量および導電率、電子移動度などは圧力および温度（あるいはエンタルピ）の関数としてカーボン燃焼ガスの化学平衡計算のガステーブルよりフィッティングしたものを用いた。

5-2.4 電気場の支配方程式

電気場の支配方程式はイオンスリップを無視した一般化オームの式と定常 Maxwell 方程式である。磁気レイノルズ数は 1 に比べて十分小さいために印加磁界に対して誘導磁界は十分小さく、これを無視することが出来る。さらに無限分割電極近似を採用することによって、電気的諸量に関し、電位 ϕ を除いて軸方向（x 方向）への変化は、断面内変化に比べ十分小さいとして無視している。その結果、電気的諸量の軸方向変化は、熱流体場の軸方向変化から発生する。この時ホール電界は無限分割電極近似のオーダーでダクト断面内で一定値となる。以上の仮定より電気場の支配方程式をまとめると以下の様になる。

一般化オームの式

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \mu_e \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (5-17)$$

定常マックスウェル方程式

$$\nabla \times \mathbf{E} = \mathbf{0} \quad \text{または} \quad \mathbf{E} = -\nabla \phi \quad (5-18)$$

電流連続の式

$$\nabla \cdot \mathbf{J} = 0 \quad (5-19)$$

$$\{\sigma\} = \frac{\sigma}{1 + \beta_y^2 + \beta_z^2} \begin{bmatrix} 1 & -\beta_z & \beta_y \\ \beta_z & 1 + \beta_y^2 & \beta_y \beta_z \\ -\beta_y & \beta_z \beta_y & 1 + \beta_z^2 \end{bmatrix} \quad (5-20)$$

但し、 u 、 v 、 w は速度の x 、 y 、 z 成分であり B_y 、 B_z は磁束密度、 σ および σ_{ij} はそれぞれスカラー導電率、テンソル導電率の i j 成分（ i 、 $j = x$ 、 y 、 z ）を示している。また E_x は、ダクト断面内で一定値をとるホール電界である。

境界条件および付帯条件は、電極結線をファラデー型とすると、次式で表される。

$$\phi = \text{const.} \quad (\text{電極壁上}) \quad (5-21)$$

$$J_z = 0 \quad (\text{絶縁壁上}) \quad (5-22)$$

$$I_{\text{Hall}} = \int \int_{\text{断面}} J_x dy dz = 0 \quad (5-23)$$

また、負荷率 K (loading factor)は次式で定義される。

$$K = \frac{\phi_c - \phi_a}{\langle u B_z \rangle D} \quad (5-24)$$

ここで、 $\langle \cdot \rangle$ は物理量の断面内平均を、 D は電極間隔表している。また、添え字 c および a は陰極(cathode)および陽極(anode)を表す。

5-3 節 計算結果

5-3.1 CASE-A チャンネル

図 5-3 は CASE-A の場合の電気諸量及び熱流体諸量も断面平均値の軸方向方向変化を表している。また表 5-2 は入口から出口までの前電気出力を磁界分布と燃料ごとにまとめたものである。UFC の場合に比べ SFC の電気出力は、カーボン燃焼及び灯油燃焼ガスではそれぞれ 44.4% および 25.6% 改善されていることが分かる。これは SFC において電極近くで B_z が弱く B_y が成分が発生していることで実効的な導電率（導電率テンソルの $y-y$ 成分：次式）

$$\alpha_{yy} = \frac{1 + \beta_y^2}{1 + \beta_y^2 + \beta_z^2} \sigma \quad (5-25)$$

が改善されているためである。

表 5-2 チャンネル A の積分電気出力

Table 5-2 Integrated power output of the Case-A channel

F u e l	S F C	U F C
Carbon	296 kWe	205 kWe
Kerosine	113 kWe	90 kWe

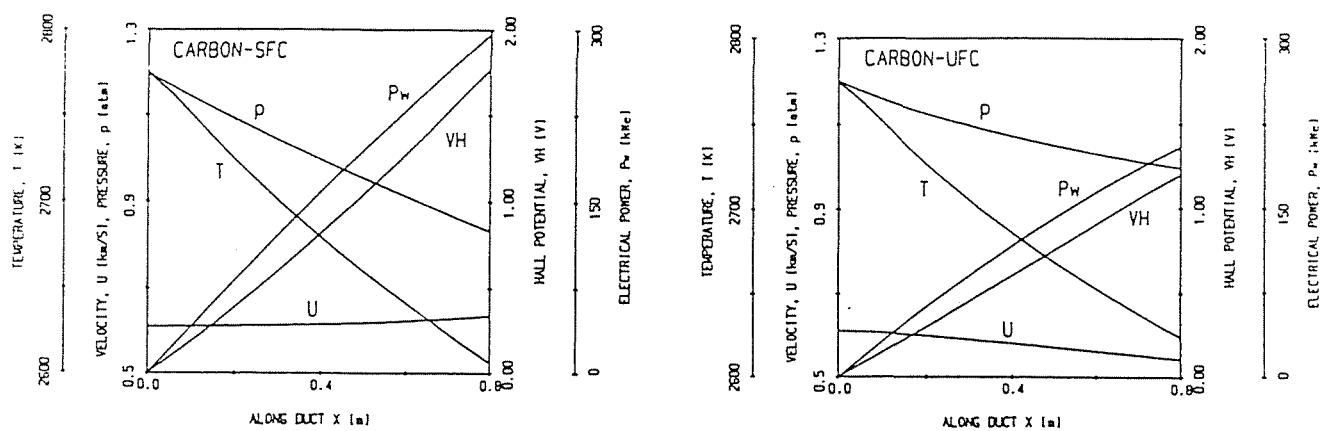


図 5 - 3 (a) カーボン燃焼時の電気および流体諸量の軸方向分布
C A S E - A チャンネル : S F C 型 (左) および U F C 型 (右)

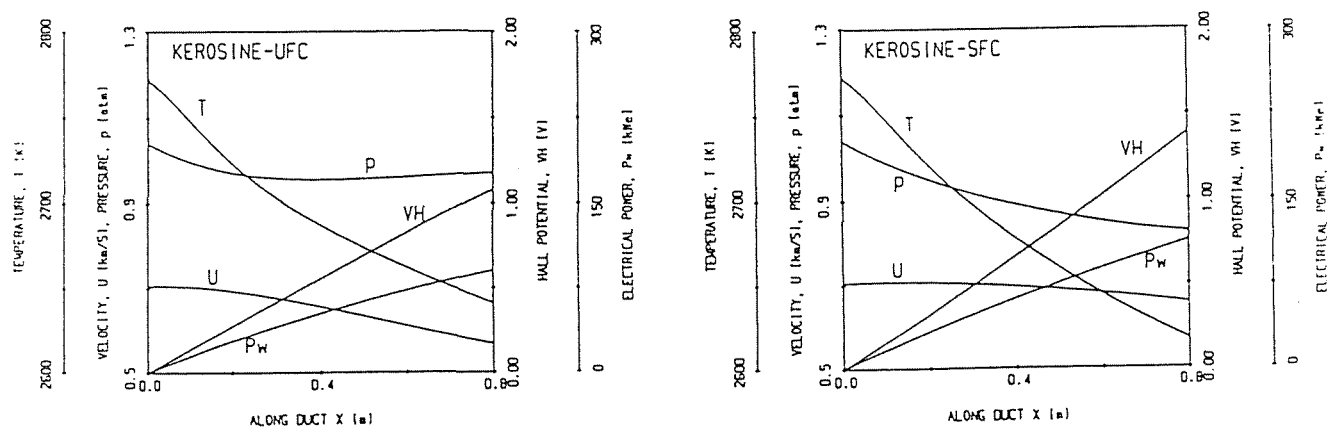


図 5 - 3 (b) ケロシン燃焼時の電気および流体諸量の軸方向分布
C A S E - A チャンネル : S F C 型 (左) および U F C 型 (右)

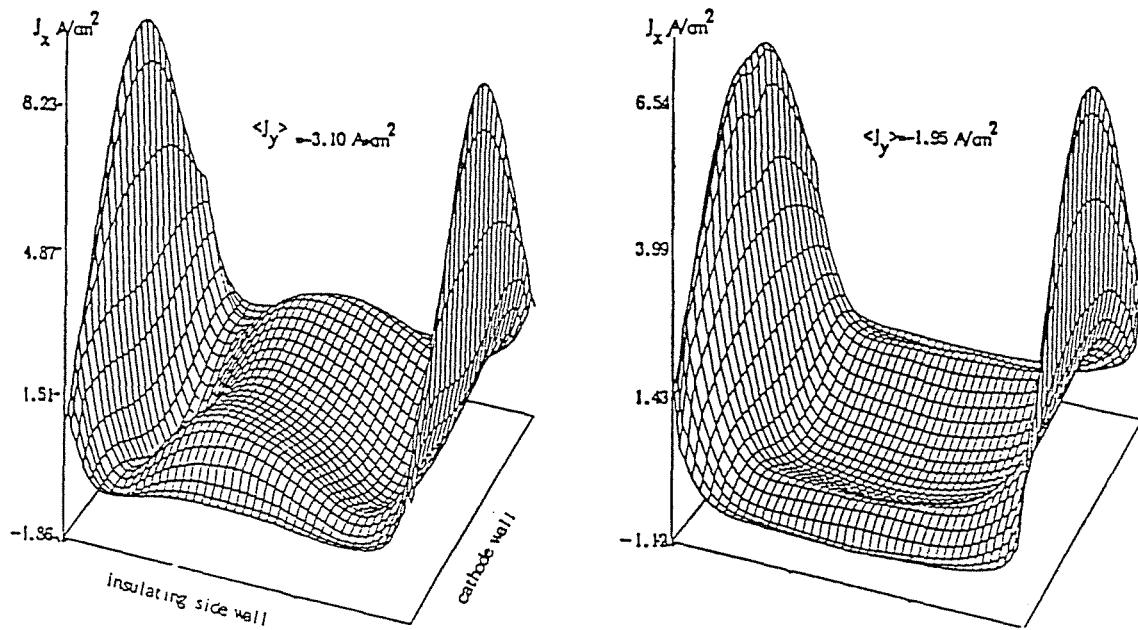


図 5-4 CASE-Aチャンネルのホール電流分布（カーボン燃焼）
SFC型（左）およびUFC型（右）

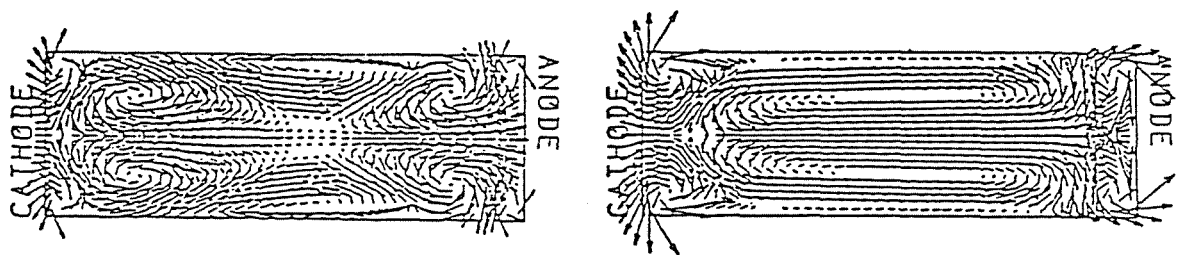


図 5-5 CASE-Aチャンネルの二次流れ分布（カーボン燃焼）
SFC型（左）およびUFC型（右）

次にホール電流密度分布と二次流れ分布を図 5-4、図 5-5 に示す。軸方向渦度の生成と消滅は、チャンネル形状（壁の拡がり角）、乱流粘性効果（等方及び非等方乱れ）、密度勾配（圧縮性）さらに MHD 体積力の不均一効果によりもたらされる。これらのなかで最も重要な二次流れ渦発生メカニズムは磁場方向へのホール電流の不均一性である。MHD 体積力以外の渦の生成・消滅機構がない場合の定常渦度の x -成分（ Ω_x ）の満たす方程式は定常 N-S 方程式の回転をとることで次式で表される。

$$\rho u \frac{\partial \Omega_x}{\partial x} = \mathbf{B} \cdot \nabla J_x \approx B \frac{\partial J_x}{\partial z} \quad (5-26)$$

SFC では電極境界層内でのホール電流の大きさ及びその磁場方向への不均一性が UFC に比べ抑制され、中心部では逆に強められていることで、軸方向渦度すなわち断面内二次流れ流速は電極境界層内で弱く、中心部では強い。SFC の渦度の特徴的な点はその強度分布の他に、渦セルの数である。すなわち、UFC では通常 6 個の渦セルが発生する^{*11*12*20}とされており、本解析結果もそのようになっている。これに対して SFC では、10 個の渦セルが生じている。これは SFC でのチャンネルの角部分での比較的大きな y -成分磁場が関連している。

電極境界層内で二次流れが弱いことは、MAT 不安定性や境界層剥離現象、電流・熱流束の電極面への局所的集中現象など好ましくない現象を抑える効果が期待できる。

5-3.2 CASE-B チャンネル

図 5-6 は CASE-B の場合の電気諸量及び熱流体諸量も断面平均値の軸方向方向変化を表している。また表 5-3 は入口から出口までの前電気出力を磁界分布と燃料ごとにまとめたものである。表中の $L_{0.9}$ は、出口静圧が 0.9 atm となるまでの入口からの距離である。出口圧力が、対気圧に比べ低すぎる場合チャンネルの後流に接続されるディフューザで圧力を大気圧以上に回復できなくなる可能性が生ずる。そこで本解析では、あらかじめ与えたチャンネル長（12 m）に

表 5-3 チャンネル B の発電特性

	F U E L				
axial	C A R B O N				K E R O S I N E
location	S F C		U F C		S F C U F C
x, meter	Pout, MW	η , %	Pout, MW	η , %	Pout, MW η , % Pout, MW η , %
Lsp = 6.8	173.4	15.3	135.7	12.0	-----
L = 12.0	311.4	27.5			153.5 14.0 141.8 12.9
L0.9= 13.0	-----				171.0 15.6 -----
for SFC			Boundary Layer		
L0.9= 13.9	360.0	31.7	Separation		-----
for SFC					
L0.9= 14.9	-----				----- 179.0 16.3
for UFC					

関係なく計算は静圧=0.9 atmの点まで進めた。CASE-Bチャンネルの速度基準相互作用パラメタ S_u は4~10とCASE-Aチャンネル($S_u \approx 0.4 \sim 1$)に較べかなり高く、カーボン燃焼ガスを用いたUFC印加の場合に $L_{sp}=6.8$ mで陽極中央部において境界層剥離が生じた。本解析は放物近似を用いているためこの点を越えて計算を進めることはできない。この現象はSFCチャンネルでは生じにくい。その理由は、SFCチャンネルの電極境界層では B_z が弱いために軸方向ローレンツ力(境界層剥離はこの力で引き起こされる)も弱くなっているからである。さらに後述するように、SFCの電極境界層領域は相対的加速領域となっていることも電極境界層剥離が生じにくい原因である。

SFCによる電極境界層剥離現象の抑制のメカニズムは以下のように説明される軸方向ローレンツ力 $J_y B_z$ の不均一性は図5-7のように速度オーバーシュート現象を引き起こす。ファラデー電流密度の分布と同様に冷電極をもったUFC型MHD発電機では軸方向ローレンツ力の不均一性は絶縁壁境界層のみに存在する。しかし、SFCでは電極境界層での B_z の抑制効果により軸方向ローレンツ力は電

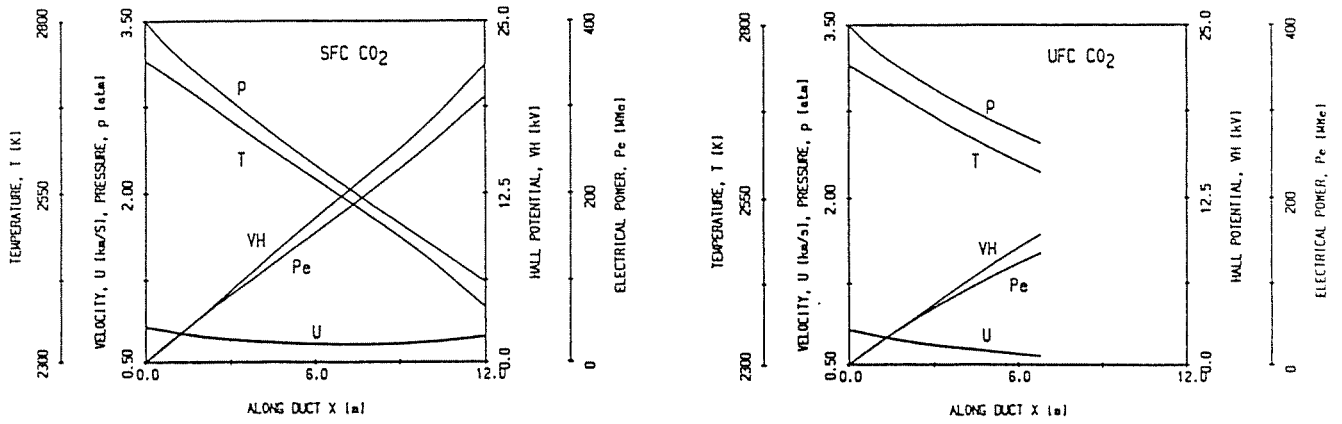


図 5 - 6 (a) カーボン燃焼時の電気および流体諸量の軸方向分布
C A S E - B チャンネル

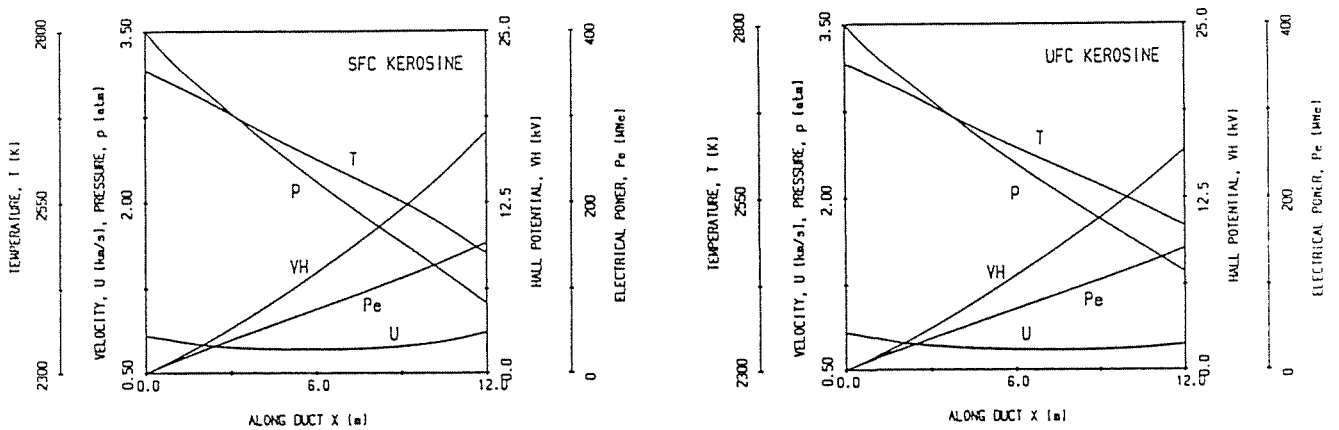


図 5 - 6 (b) ケロシン燃焼時の電気および流体諸量の軸方向分布
C A S E - B チャンネル

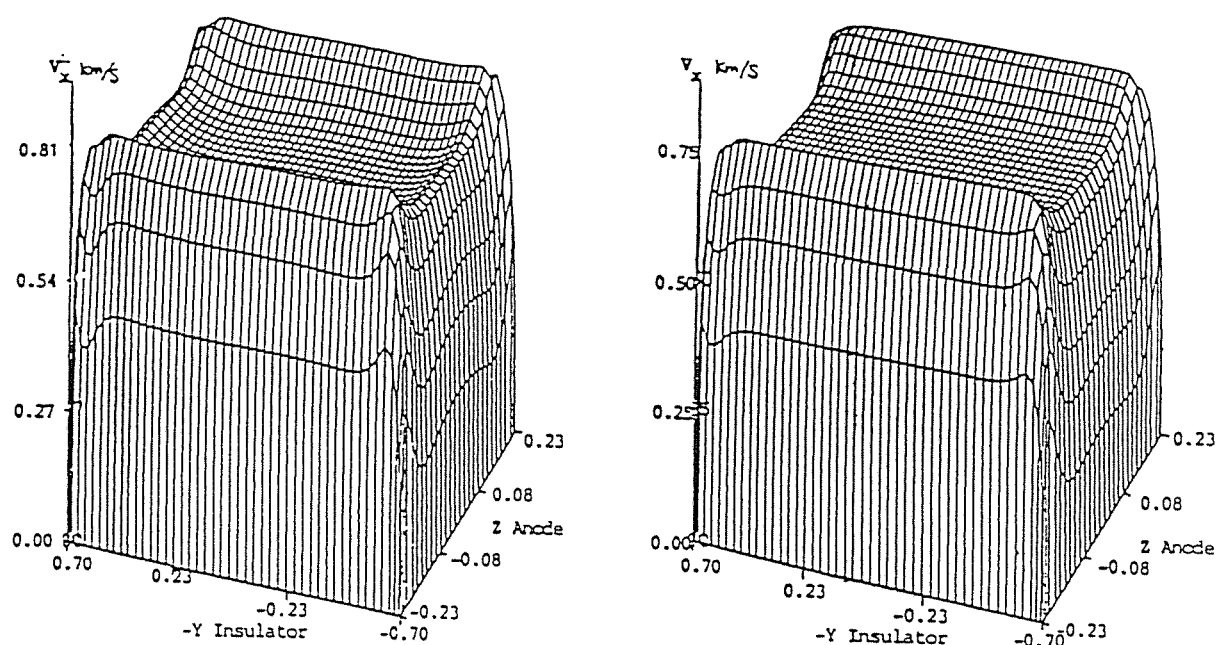


図 5 - 7 カーボン燃焼時の軸方向速度成分の断面内分布
CASE - B チャンネル

極近くにおいても弱くなっている。このような領域は（コア部分からみて）相対的には加速領域と見なせるため、SFCでは絶縁壁境界層だけでなく電極境界層内においても速度オーバーシュート現象が発生することになる。

5 - 4 節 結論

小型機（熱入力 5 MW 程度）及び商用規模（熱入力 1 0 0 0 MW 程度）の MHD 発電機の三次元解析を行い S F C 磁界印加と従来型の一様磁界（U F C）印加の場合の特性の違いをカーボン燃焼ガスプラズマ及び灯油燃焼ガスプラズマを作動流体として調べた。その結果、以下の結論が得られた^{*21*22}。

- 1) S F C 磁界は、電磁空力的（M A T）不安定性や境界層剥離につながるホール電流の電極境界層内での不均一を抑制できる。またこのことは発電機内部抵抗の減少を意味するため高密度発電が可能となる。
- 2) S F C では絶縁壁境界層だけでなく電極境界層も相対的加速領域であるため、境界層剥離が生じにくい
- 3) U F C では通常 6 個の渦セルが発生するのに対して S F C では、1 0 個の渦セルが生じる。

参考文献

- *¹ Y. Ozawa, et al., "Performance Improvement of MHD Generator by Transversally Shaped Distribution of Magnetic Induction," Proc. 7th Int. Conf. on MHD Elec. Power Gen., Vol. 2, pp. 516-523(1982).
- *² N. Kayukawa, et al., Electrical Characteristic of an MHD Generator Having Transversally Shaped Distribution of Magnetic Induction," Journal of Energy, Vol. 7, pp. 280-284, 1983.
- *³ N. Kayukawa, "Power Generation Tests of the Improved Shaped B-Field MHD Generator, J. Propulsion and Power, Vol. 1, pp. 309-310, 1985.
- *⁴ 及川俊一, 粥川尚之, 山崎初男, "S F C型MHD発電機の流れ場電気場連成解析," 電気学会論文誌, Vol. 106-B, pp. 286-292, 1986.
- *⁵ 及川俊一、粥川尚之, "S F C型MHD発電機の三次元特性," 電気学会論文誌, Vol. 108-B, pp. 111-118, 1988.
- *⁶ S. OIKAWA & N. KAYUKAWA, "Three-Dimensional Characteristics of SFC-Type Generator," Electrical Engineering in Japan, Vol. 108, pp. 75-83, 1988.
- *⁷ S. Oikawa, et al., "Improvement of Coupled Fluid and Electrodynamics Characteristics of an MHD Channel by Shaped Two-Dimensional Magnetic Field," Magnetohydrodynamics; An Int. Journal, Vol. 2, pp. 65-77, 1989.
- *⁸ N. Kayukawa, "Electrothermal Stability of Magnetohydrodynamic Plasma under Two-Component magnetic field, J. Propulsion and Power, Vol. 2, pp. 31-37, 1986.
- *⁹ S. T. Demetriades, et al, "On the Magnetoaerothermal Instability," AIAA 19th Aerospace Science Meeting, Paper No. AIAA-81-0248, 1981.
- *¹⁰ C. D. Maxwell, et al., "Coupled Electrical and Fluid Calculations in the Cross Plane in Linear MHD generator," Proc. 16th SEAM, 1977.
- *¹¹ C. D. Maxwell, et al., "Three-Dimensional Effects in Large Scale MHD Generators, AIAA 14th Fluid and Plasma Dynamics Conference, AIAA-81-1231, 1981

- *¹² S.P. Vanka, et al., "Three-Dimensional Flow and Heat Transfer Development in MHD Channels," *ibid.* AIAA-81-0247, 1981.
- *¹³ S.L. Girshick, et al., "Measurements of Secondary Flow in an MHD Channel, Proc. 22nd SEAM, 1984.
- *¹⁴ V.M. Goldfarb, et al., "Measured Heat Flux Asymmetries on the Electrode walls of the Mark IV Generator," Proc. 23rd SEAM, Appendix A of Paper No.38, (1985)
- *¹⁵ E.D. Doss, et al., "Three-Dimensional Flow Development in MHD Generators at Part Load," *Journal of Energy*, Vol.7, p.289, 1983.
- *¹⁶ J.T. Maxwell, et al., "Consideration of Optimal Boundary Configuration for Linear MHD Generators," Proc. 22nd SEAM, 1984.
- *¹⁷ B.L. Liu, et al., "Coupled Fluid and Electrodynamics Analysis on MHD Channel with Nonuniform Magnetic Field," *IEEE Trans. Plasma Science*, Vol.PS-14, pp.444-453, 1986.
- *¹⁸ S.V. Patankar & D.B. Spalding, "A Calculation Procedure for Three-Dimensional Parabolic Flows, *Int. J. Heat Mass Transfer*, Vol.15, pp.1787-1805, 1972.
- *¹⁹ S. P. Vanka, et al., "Three-Dimensional Analysis of MHD Generators and Diffusers," Report ANL/MHD-82-4, Argonne National Lab., (1982).
- *²⁰ 石川, 卯本, "MHD 発電機に誘起される二次流れについての考察," *電気学会論文誌*, Vol.106-B, p.296, 1985.
- *²¹ S. Oikawa, et al., "Improvement of Coupled Fluid and Electrodynamics Characteristics of an MHD Channel by Shaped Two-Dimensional Magnetic Field," *Magnetohydrodynamics; An Int. Journal*, Vol.2, pp.65-77, 1989.
- *²² S. Oikawa, et al., "Suppression of Magnetoaerothermal Instability by the SFC-type magnetic Field Distribution," *Int. J. of Applied Electromagnetics in Materials*. (to be published)

第6章 乱れたプラズマに対する一般化オーム則

6-1 節 緒 言

速度、温度、圧力等の流体基本量は、原理的にはNavier-Stokesの方程式（N-S方程式）を直接（乱流モデルを用いずに）解くことによって知ることができる。しかし、MHD発電機や、多くの工学的装置で遭遇する流れは、レイノルズ数が非常に高いために乱流状態となっている。このような場合には、乱流が本質的に三次元非定常現象であることを考えると、たとえ平均的な流れ場が定常であり、空間座標に関して対称性を持っている場合でも三次元非定常解析をレイノルズ数に比例して小さな時間・空間刻みを用いた膨大な計算を行わねばならない。現実には現在のスーパーコンピュータを用いたとしても、通常の工学的装置に対してこの計算を実行することは、記憶容量及び計算時間の両面から殆ど不可能である。

そこで数値流体力学の分野では、①工学装置全体の乱流特性を解明することを考えず、乱流現象あるいは乱流渦の構造そのものの解明を目的とした乱流モデルを確立する、あるいは、②工学的に重要な量、例えばある伝熱面での熱流束あるいは熱伝達率などは、時々刻々の変化は重要でなくその時間平均値を知れば十分なことが多い。その場合には、流体の時間平均温度の分布のみを計算できる乱流モデルがあればよい。①の例としては、大渦シミュレーション（Large Eddy Simulation; LES）^{*1}があり、②はレイノルズ応力をモデル化してN-S方程式の中で乱流の影響を乱流粘性係数として導入する手法が一般的となっている。例としては、混合距離モデル^{*2}、代数応力モデル^{*3}、 $k-\varepsilon$ 法^{*4}等がある。

一方、電磁流体の電気的基本方程式の一つである一般化オームの式は、作動流体の速度、導電率及び移動度を含み導電率及び移動度を介して流体温度、圧力に依存している。これまでのMHD発電チャネル内の電磁流体場の解析では、電気的諸量の時定数は、流体場のそれに比べ十分短く、流体場に関して非定常解析を行わねばならない状況であっても電気場は十分速く流体場に追従するので、電気的方程式としては定常の式を使用してきた。しかし、上述したように乱流モデルを導入したN-S方程式から得られる流体量（温度、速度、圧力）は、乱流渦の時間・空間スケールですでに平均化されており、乱れの存在を考慮してその値が

計算されている。従って、乱れたプラズマにおける一般化オームの式に温度、速度、圧力の乱れの影響を考慮した乱れモデルを導入する必要がある。

モデル化に当たっては磁場が導電性流体流れの境界層分布に与える影響について知る必要がある。この影響については液体金属を用いた研究が古くからなされており1937年には Hartmann & Lazarus^{*5} によって絶縁壁付近の層流速度分布の測定が行なわれ磁場に垂直な壁面（MHD発電機では側壁）上で速度分布が平坦化し、両端では大きな勾配を持つことが示された。この傾向は電流密度の増大とともに顕著となり様々なMHD流れを抑制する力の結果によるもので、ハルトマン効果として知られている。1974年には Hua & Lykoudis^{*6} が絶縁壁上での水銀の乱流抑制を計測し、その結果から磁場の下での乱れ速度と磁場が無いときの速度の比と磁気相互作用パラメタ（スチュアート数） $\chi = Ha^2 / Re$ との間に

$$D = \exp(-A \cdot \chi)$$

なる関係式を導いた。1980年には Rankin^{*7} によって燃焼ガスプラズマにおける乱流が測定され、磁場による乱流抑制については特定の条件において確認されたが、液体金属の場合に比べて磁場の影響は小さかった。又、平均速度分布については、絶縁壁上で負荷条件下で分布が平坦化するのに対して、負荷開放条件下では変化しないことを確認した。このようなハルトマン効果による平均速度分布の平坦化に加えて、乱流混合の抑制によって、乱流速度分布が変化することが示された。

本章では、一般化オーム則の乱れモデルを構成し、温度及び速度の変動が、導電率及び起電力の実効的な変化をもたらすことを理論的に示している。また、この‘起電力の実効的な変化’は、温度の空間勾配に沿った変動速度の選択的な乱流減衰を引き起こすことから磁界に直交した面内でも温度勾配が存在する場合には、この面内においても乱れ速度の分布関数が非等方になり、温度勾配の方向に定常流が発生することを示している。さらに、この電気場の乱れモデルを用いた数値解析を行い、モデル化の導入による電流密度、ポテンシャルの分布の変化を示すと共に、乱れ速度に対する運動方程式を解くことにより磁界と温度勾配が同時に存在するときの平均的な乱れ速度の大きさ、上述した定常流の定量的な見積、およびレイノルズ応力テンソルの評価を併せて行っている。

6-2 節 速度・速度乱れの表現

6-2.1 磁界印加のない場合

一般化オームの式をモデル化する前に速度・温度の乱れの空間特性について与えておく。壁乱流の場合、この壁に沿う方向の時間平均速度成分 (U_0 とする) の分布は、壁からの距離 (y とする) によって、内層部、外層部及び主流部に分けられる。それぞれの領域における平均速度分布及び乱れ速度・温度分布を与えるために、以下に示す摩擦速度を用いた速度及び距離の無次元化を行っておく。

$$\text{摩擦速度} : U^* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad , \quad \tau_w = \rho \frac{C_f}{2} U_c^2$$

$$\text{無次元化速度} : U^+ = \frac{U_0}{U^*}$$

$$\text{無次元化距離} : y^+ = \frac{y U^*}{\nu}$$

$$\text{渦粘性係数} : \nu_T = l^2 \left| \frac{\partial U_0}{\partial y} \right| \quad \dots \quad \text{混合距離モデル}$$

$$l = \kappa y \left(1 - \exp \left(- \frac{y^+}{A^+} \right) \right)$$

$$\text{または、} \nu_T = C_D \frac{k^2}{\varepsilon} \quad \dots \quad k - \varepsilon \text{ モデル}$$

乱れ速度 (の実効値、標準偏差)

$$u = \nu_T / l \quad (6-1)$$

乱れ温度 (の実効値、標準偏差)*⁸

$$t = -(\gamma - 1) M^2 \frac{T_c}{U_c} u \quad (6-2)$$

但し、 δ : 境界層厚さ、 C_f : 摩擦係数、 τ_w : 壁摩擦応力、 ν : 動粘性係数

(分子粘性)、 U_e : 主流速度、 T_e : 主流温度、 ν_T : 渦粘性係数、 l : 渦の空間スケール (混合距離モデルでは混合距離)、 γ : 比熱比、 M : マッハ数、 U_e : 主流速度、 T_e : 主流温度。 $k-\varepsilon$ モデルでは、 l は陽に現れず、渦粘性 ν_T を (乱れの運動エネルギー k とその散逸率 ε の輸送方程式を解き)、 k と ε の代数式として与えるので問題はないが、混合距離モデルでは外層部及び主流部での l または ν_T のどちらかは一定値として与えることになる。 l を一定値として与える場合、平均温度の勾配の存在しない主流部を仮定する計算においては流体乱れが完全に零となってしまう、実験事実^{*9}と矛盾する。本研究では、混合距離モデルを用いる場合には、外層部及び主流部では渦粘性 ν_T を一定値として与える手法を選択した。当然のことながら、 $k-\varepsilon$ モデルを適用する場合には、このような仮定は不要である。混合距離モデルでは、粘性底層のごく薄い領域を除いて乱れ速度の実効値 u は、コア領域を含めて次式で表される。

$$u = \nu_T / \kappa y \quad (6-3)$$

また対数法則の一つとして、 $1/n$ 乗則を採用すると (プラントル数 ~ 1 の場合) 境界層内での平均速度・温度の分布は、

$$\frac{U_0(y)}{U_e} = \frac{T_0(y) - T_w}{T_e - T_w} = \left(\frac{y}{\delta}\right)^{1/n} = \xi^{1/n} \quad (6-4)$$

ただし、 $\xi = y/\delta$ 、 $n = 7$ であり δ は境界層厚さである。

従って、速度乱れおよび温度乱れの実効値は各領域ごとに以下のように表現できる。

内層部 : $0 < \xi \leq \lambda$

$$\frac{u}{U_e} = \frac{\kappa}{n} \xi^{1/n} \quad (6-5.1)$$

$$\frac{t}{T_e} = -(\gamma - 1) M^2 \frac{\kappa}{n} \xi^{1/n} \quad (6-5.2)$$

外層部 : $\lambda < \xi \leq 1$ 、および主流部 : $1 < \xi$

$$\frac{u}{U_e} = \frac{\kappa}{n} \lambda^{1+1/n} / \xi \quad (6-6.1)$$

$$\frac{t}{T_e} = -(\gamma - 1) M^2 \frac{\kappa}{n} \lambda^{1+1/n} / \xi \quad (6-6.2)$$

ただし λ は、境界層厚さで規格化した内層と外層の切り替わる場所の壁面からの距離を表している。

また速度 U および温度 T は、任意の点での平均速度 U_0 、平均温度 T_0 とし u 、 t がそれぞれ速度及び温度の標準偏差であるとして、次式に示す確率分布関数に従うものとする。

速度分布関数

$$f(U) = \frac{3}{4\sqrt{5}u} \left\{ 1 - \frac{(U-U_0)^2}{5u^2} \right\} \quad (6-7.1)$$

温度分布関数

$$f(T) = \frac{3}{4\sqrt{5}t} \left\{ 1 - \frac{(T-T_0)^2}{5t^2} \right\} \quad (6-7.2)$$

6-2.2 磁界印加された場合 (MHD条件)

以上は、磁界が印加されていない場合での議論であった。乱流に磁界が印加されると磁界に直交した速度変動を妨げる方向に変動電流が流れ、非等方な乱れの減衰^{*10}が次式に従って生ずる。

$$D = \exp\left(-A \frac{Ha^2}{Re}\right),$$

$$\chi = \frac{Ha^2}{Re} = \frac{\sigma B^2 L}{\rho U}$$

但し、 Ha および Re はそれぞれハルトマン数およびレイノルズ数である。 D は、磁界が印加されていないときのレイノルズ応力に対する磁界 B が印加されたときのレイノルズ応力の比（すなわち磁界によるレイノルズ応力の減衰係数）を表している（Appendix-H参照）。また、 $N = Ha^2/Re$ は磁気相互作用パ

ラメタ（あるいはスチュアート数）と呼ばれている。Aは、実験的に決まる量であるが、磁界に平行な成分と直行した面内では、2 倍の違いがある（直交面内の減衰が大きい）。この式は、本来液体金属（水銀）を用いて絶縁壁側で実験的に求められた関係式であるが、ガスプラズマにおいてもほぼ成立する*⁹という報告がある。

6-3 節 一般化オームの式の乱れモデル

$$\text{一般化オームの式} : \mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \mu_e \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (6-8)$$

$$\text{導電率} : \sigma \rightleftharpoons \sigma_o \cdot (T / T_o)^{1/2} \quad (6-9)$$

$$\text{電子移動度} : \mu_e \rightleftharpoons \mu_{eo} \cdot (T / T_o) \quad (6-10)$$

ここで導電率・移動度の式中の、添え字”o”は、考えている点での時間平均温度 T_o で評価した値を表わす。また T は、乱れを含んだ瞬間温度であり、平均値を T_o とする。ここで圧力変動は、導電率や電子移動度への依存性は弱いのでここでは無視している。また磁界変動は、印加磁界変動と誘導磁界による変動が考えられるがこれらも小さいので無視する。

一般化オームの式(6-8)が流体諸量、特に速度、温度及び電気諸量の一次式で表わされていれば、流体量の乱れが、一般化オームの式に影響を及ぼすことはないが、式(6-8)～(6-10)より、特に一般化オームの式の右辺第一項が導電率を介して温度変動に強く依存し、さらに速度変動にも依存していることがわかる。移動度は温度に関してほぼ一次変化をするため、移動度自体を乱れの時間スケールで平均しても平均温度 T_o で評価した値 μ_{eo} に一致するので以下では、導電率の変化による影響を主として考えることにする。

いま、考察対象領域の任意の点 P で温度及び速度が平均値 T_o 及び U_o の回りに変動している状況を考える。導電率は温度に対する非線形依存性により平均値 $\bar{\sigma}$ は、 σ_o とは異なる。この違いを $\Delta\sigma$ 、瞬時値を σ 、その変動成分 $(\sigma - \bar{\sigma})$ を σ' で表す。

$$\begin{aligned} \sigma &= (\sigma_o + \Delta\sigma) + \sigma' \\ &= \bar{\sigma} + \sigma' \end{aligned}$$

以下では、その他の物理量に対しても同様の表記法を用いる。但し、電気諸量 $\mathbf{J}_o$ 、 $\mathbf{E}_o$ は、速度及び温度に時間的な乱れが全く無いプラズマ中での電流及び電界に対応する。式(6-8)は、導電率テンソル $\{\sigma\}$ を用いて次式で表される。

$$\mathbf{J} = \{\sigma\} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

さらに、

$$\{\sigma\} = \sigma \{s\}$$

$$\{s\} \equiv \frac{1}{1 + \beta_y^2 + \beta_z^2} \begin{bmatrix} 1 & -\beta_y & \beta_z \\ \beta_z & 1 + \beta_y^2 & \beta_y \beta_z \\ -\beta_y & \beta_z \beta_y & 1 + \beta_z^2 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{F} = \{s\} \cdot (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B})$$

なるテンソル $\{s\}$ 、ベクトル $\mathbf{F}$ を導入すると、一般化オームの式 (6-8) は次式となる。

$$\mathbf{J} = \sigma \mathbf{F} \quad (6-8')$$

この式においてさきに述べた表記法を導入すると、以下ようになる。

$$\bar{\mathbf{J}} + \mathbf{J}' = (\bar{\sigma} + \sigma') (\bar{\mathbf{F}} + \mathbf{F}')$$

$$\bar{\mathbf{J}} = \bar{\sigma} \bar{\mathbf{F}} + \overline{\sigma' \mathbf{F}'} \quad (6-11)$$

$$\mathbf{J}' = \bar{\sigma} \mathbf{F}' + \sigma' \bar{\mathbf{F}} + (\sigma' \mathbf{F}' - \overline{\sigma' \mathbf{F}'}) \quad (6-12)$$

6-3.1 温度乱れのみの影響

式 (6-8') と式 (6-11) を較べると乱れたプラズマでは、乱れを考えない式に較べ新たに σ' と $\mathbf{F}'$ (すなわち $\mathbf{E}'$ および $\mathbf{V}'$) の相関量 $\overline{\sigma' \mathbf{F}'}$ を知る必要があることがわかる。この量を評価するために変動成分を表した式 (6-12) を考える。変動量の発生する根本原因は、温度乱れより引き起こされた導電率の変動である。この導電率変動を、変動の基本周期成分と高調波成分に分けて考える。乱流変動のエネルギーは、非線形効果によってより小さな、そして変動周波数の高い乱れに伝達されてゆく (エネルギーカスケード構造) ため、電流あるいは

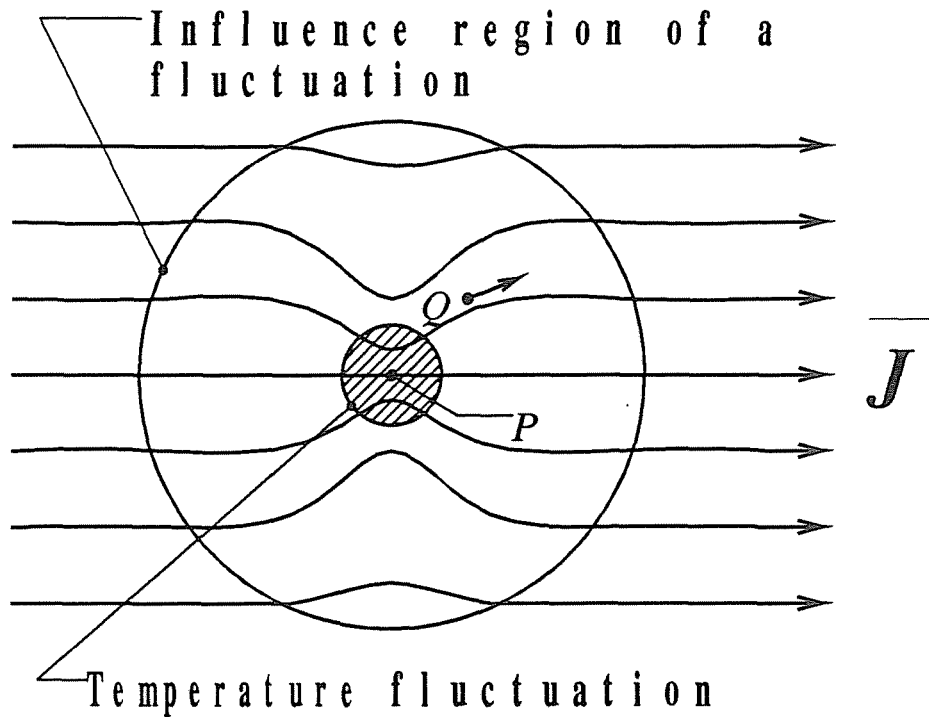


図 6-1 等方的温度乱れモデル

は電界の変動エネルギーも同様に考えることができる。そこで、変動の基本振動成分に添え字“1”をつけると、電流の変動を表す式(6-12)の右辺において基本成分を持っているのは乱れの一次の項のみを含む第一項と第二項になる。従って

$$J_1' = \bar{\sigma} F_1' + \sigma_1' \bar{F}$$

ここで、 σ_1' と F_1' の相関(乱れの時間スケールより十分長い時間平均)を考えるためにこの式の両辺に σ_1' をかけて時間平均をとると、

$$\bar{\sigma} \overline{\sigma_1' F_1'} = - \overline{\sigma_1' \sigma_1'} \bar{F} + \overline{\sigma_1' J_1'} \quad (6-13)$$

式(6-13)の第二項について： σ_1' が等方的な導電率の乱れで、今考えている点のまわりに乱れの空間スケール程度に広がって分布し、考察点の瞬時導電率が極大である状況を考える。そのときの、 J_1' の空間平均をとる。そのときの

値は、導電率の乱れ強度がある値 σ_1' の場合の時間平均値 $\overline{J_1'}$ への寄与に比例すると考えられる。この理由は、温度乱れのみを考えた場合の電流を示している図 6-1 より、乱れが等方的であるとき今考えた影響領域（図中では大きな円内の領域）のどの部分も同じ確率で、乱れ導電率の極値を持つ点が通過するからである。乱れの空間スケール（図中の小さな円内の領域）が十分小さいとき、影響領域中での $\bar{J}$ 、 $\bar{F}$ は、一定値と見なせ、瞬時電流 $(\bar{J} + J')$ の空間分布は、考察点（円の中心）に対して対称に流入／流出する。乱れ電流の空間的対称性より、全考察領域で積分をとると平均電流に直交した成分はゼロになることが示される。

ところが、ここで定式化すべき量は導電率乱れと電流乱れの相関 $\overline{\sigma_1' J_1'}$ あるいは $\overline{\sigma' J'}$ である。そこで以下では、空間的対称性を持った温度乱れ（従って導電率乱れ）とそれに伴って生ずる乱れ電流との相関 $(\overline{\sigma_1' J_1'})$ を考える。ベクトル量 $\overline{\sigma_1' J_1'}$ において平均電流 $\bar{J}$ に垂直な成分の空間積分を、ある（瞬時）電流線に沿って積分すれば空間的対称性により零となることが先に示した図 6-1 よりわかる。従って空間的対称性を持った乱れ温度に対する $\overline{\sigma_1' J_1'}$ の $\bar{J}$ に垂直な成分の空間積分は零となる。換言すれば空間的対称性を持った $\overline{\sigma_1' J_1'}$ の空間積分は、平均電流 $\bar{J}$ に平行であることになる。従って先ほどと同じ議論により実際に必要な相関量（あるいは時間平均）はこの空間平均をすべての（大きさおよび方向からの）乱れについてその確率分布関数による重み付き平均したものであるから、式 (6-13) は次式で表される。

$$\begin{aligned}\overline{\sigma \sigma_1' F_1'} &= - \overline{\sigma_1' \sigma_1'} \bar{F} + \overline{\sigma_1' J_1'} \\ &\approx - \overline{\sigma' \sigma'} \bar{F} + \overline{\sigma' J'} \\ &= - \beta \bar{\sigma} \bar{\sigma} \bar{F} + \alpha \bar{\sigma} \bar{J}\end{aligned}$$

従って

$$\overline{\sigma' F'} \approx - \beta \bar{\sigma} \bar{F} + \alpha \bar{J} \quad (6-14)$$

ただし α 、 β は無次元の係数でありスカラ量である。 α がスカラ量となるのは乱れの対称性および等方性による。この仮定が成立しない場合にはテンソル量とな

る。 β は本来スカラ量である。

ここで、再び式(6-13)に戻り、その物理的意味を考えることにより、式(6-14)の右辺の2つの項の比較をする。今、考察点での温度が突然上昇し、正の導電率変動 σ' が生じたとする。第1項は、その σ' の自乗に比例して大きくなる。上の議論より第2項の $\overline{\sigma' J'}$ も $\bar{J}$ に比例して大きくなるが乱れ電流 J' を考察点に集中させるためには温度乱れが発生する前の電流線を曲げて、この点を通過するように束ねる必要がある。すなわち、それに対応する電圧降下を補う必要があることになる。

今仮に、非常に強い温度乱れに対して電流乱れが考察点での相関係数が1であるように発生したとして、導電率の乱れ領域内での電圧降下は高々零であるのに対して、考察点で電流が限りなく集中する(相関係数が1である)ためには導電率乱れの存在しない領域の電流を電圧降下に逆らって非常に広い空間にわたって集める必要があることは明かである。ここで考えている温度乱れは速度乱れを伴わないとしているので、このような乱れ電流の発生は現実的でない。従って電流乱れの平均的強さ(あるいは温度乱れと電流乱れの相関量)は温度乱れがどんなに強くとも、温度乱れの空間的大きさによりその強さが制限されることが分かる。すなわち、電流乱れの平均的強さは、温度乱れの空間領域の高々数倍のオーダーでしか空間的には発生しないことが分かる。以上の議論は、以下に示す事実からも了解される。

1) 導電率乱れの領域よりも電流乱れの領域が空間的に広がっている

2) $\overline{\sigma' \sigma'}$ の符号は一定であるが、 $\overline{\sigma' J'}$ の方向(平均電流に対する平行成分の符号)は正負いずれもある

従って、温度乱れのみが存在する場合の一般化オームの式は以下のようになる。

$$\begin{aligned}\bar{J} &= \frac{(1 - \overline{\sigma' \sigma'} / \overline{\sigma \sigma})}{1 - \alpha} \{\bar{\sigma}\} \cdot (\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{B}}) \\ &\doteq (1 - \overline{\sigma' \sigma'} / \overline{\sigma \sigma}) \{\bar{\sigma}\} \cdot (\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{V}} \times \bar{\mathbf{B}}) \quad (6-15)\end{aligned}$$

6-3.2 速度乱れのみの影響

速度乱れ $\mathbf{V}'$ のみが単独に発生した場合には、起電界 $\mathbf{V}' \times \bar{\mathbf{B}}$ による乱れ電流が生ずるが、温度乱れと相関を持たない場合にはその時間平均は零となり、定常電流は駆動しない。但し、前節で示したように瞬間的には乱れ電流は発生しているのでその電流に対するローレンツ制動力のため、磁界に直交した速度乱れは減衰を受ける。ここでは、磁界の乱れを考慮していないが、これは磁気レイノルズ数が 1 に較べ十分小さいからである。このときには、磁界は直流の外部印加磁界のみとなり誘導磁界は印加磁界に較べ磁気レイノルズ数のオーダーで小さい。

6-3.3 温度・速度乱れの影響

これまでは、速度変動と他の乱れ量との相関を考慮していない議論であったが、温度変動は、速度変動によってもたらされることを考えると当然考慮されなければならない。

速度乱れと温度乱れが共存する場合には、温度乱れのみを考慮した場合に零となった項 $\overline{\sigma_i' J_i'}$ の中で速度乱れによって駆動された電流の平均電流への寄与は零にならない。このことを磁界に直交した面内で模式的に示したのが図 6-2 である。この図で上向きのベクトルは、ある瞬間に前述した考察点へ $-\nabla \bar{T}$ (符号に注意) に平行な乱れ速度 $\mathbf{V}'$ が存在した場合の起電界 $\mathbf{V}' \times \mathbf{B}$ による平均的な乱れ電流ベクトルの方向を示している。実際にはホール効果により電流の方向は曲げられるが、ここでの議論に影響はない。同様に下向きの短いベクトルは、 $\bar{T}$ に平行な乱れ速度による時間平均電流を表している。さらに図中上半分及び下半分にある、大きさの異なる 2 つの閉曲線は、あらゆる方向から同じ強さの乱れ速度がある場合に駆動される電流のベクトル軌跡を示す。平均電流への正味の寄与は、 $-\nabla \bar{T} \times \mathbf{B}$ の方向 (あるいは $-\nabla \bar{\sigma} \times \mathbf{B}$) となる。

このように乱れ速度の方向により乱れ電流の大きさが変わる理由は、次のように説明される。ここで速度乱れが等方的であると仮定すると乱れ起電界の時間平均 $\overline{\mathbf{V}' \times \mathbf{B}}$ は完全に零となり、そのことだけを考えれば平均電流は駆動しないよう

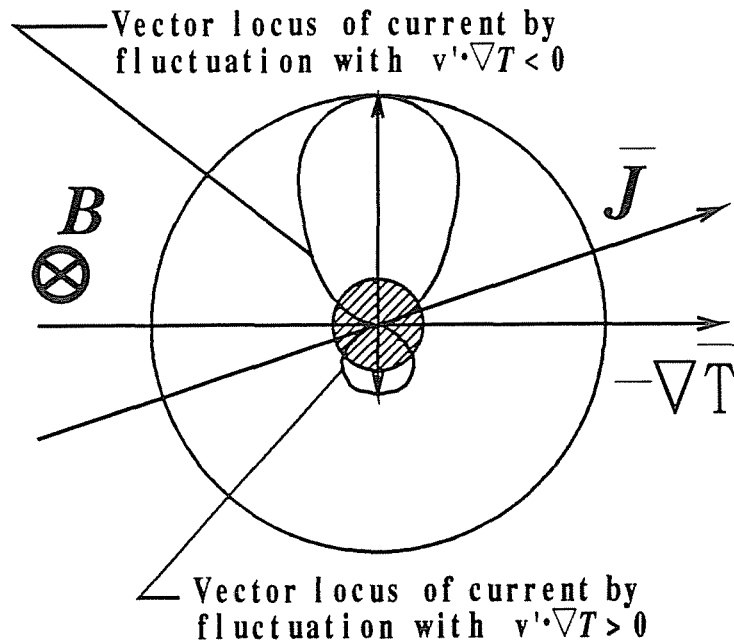


図 6-2 平均温度の空間勾配がある場合の乱れ電流

に思われる。また、乱れ速度により移流されて考察点へやってくる温度乱れは、考察点の平均温度よりも高いこともあれば低いこともある。しかしながら平均的には平均温度 $\bar{T}$ の高い方向から考察点へやってきた場合の瞬間温度は、乱れが逆方向からやって来た場合よりも高くなる。このことに対応して乱れ速度により駆動される電流は、乱れ速度ベクトルと平均温度の空間勾配ベクトルのなす角度に依存することになる。

このとき通常の乱流モデル化と類似した手法^{*5}によって、以下のように相関量 $\overline{\sigma' V'}$ を評価することができる。

$$\begin{aligned}
 \overline{\sigma' V'} &\approx \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{T}} \overline{T' V'} = - \frac{\partial \bar{\sigma}}{\partial \bar{T}} \frac{\nu_t}{P_t} \nabla \bar{T} \\
 &= - \frac{\nu_t}{P_t} \nabla \bar{\sigma}
 \end{aligned} \tag{6-16}$$

但し、 ν_t は渦粘性係数、 P_t は乱流プラントル数である。

従って、速度変動および温度変動の両者を考慮した一般化オームの式は、式

(6-13) の第二項のうち速度変動による変動電流と導電率変動の積の時間平均が $\overline{\sigma' \mathbf{V}'} \times \mathbf{B}$ で与えられることから、最終的に次式で表される。

$$\bar{\mathbf{J}} = \{\bar{\sigma}^*\} \cdot (\bar{\mathbf{E}} + \bar{\mathbf{V}}^* \times \mathbf{B}) \quad (6-17)$$

ここで、

$$\bar{\sigma}^* = \bar{\sigma} \left(1 - \frac{\overline{\sigma' \sigma'}}{\bar{\sigma} \bar{\sigma}} \right) : \text{平均実効 (スカラー) 導電率} \quad (6-18)$$

$$\bar{\mathbf{V}}^* = \bar{\mathbf{V}} - \frac{\nu_t}{P_t} \frac{1}{\bar{\sigma}^*} \nabla \bar{\sigma} : \text{平均実効速度} \quad (6-19)$$

冷電極を用いたオープンサイクルMHD発電機では、電極壁及び絶縁壁近傍で平均温度の勾配が大きくなっている。しかし磁界は絶縁壁面に垂直であるので、絶縁壁近傍での温度勾配は、一般に電流を駆動しない。温度勾配による実効的な起電力は、壁面方向を向くため陽極と陰極では駆動される電流（主として軸方向すなわちホール電流）の向きが逆になる。すなわち陽極近傍では、正のホール電流が駆動されるのに対して陰極近傍では負のホール電流となる。ファラデー型の電極結線の場合、電極近傍のホール電流はいずれの電極でも正の値をとり、断面内に誘起される二次流れによる対流の影響で陽極側が陰極に比べ減速・温度低下を受ける。この結果、陽極の電極電位降下は陰極に比べ大きくなる。電極電位降下はホール電流によって大きくなるので、ここで示された温度勾配による電流の影響はこの傾向をさらに強める方向に働くことになる。

一般に起電力 $\mathbf{V} \times \mathbf{B}$ による電流が受ける力は速度 $\mathbf{V}$ を抑える方向に働くので温度勾配に反平行かつ磁界に直交している変動速度成分は選択的に減衰を受け、その減衰は温度勾配が大きいほど強くなる。電極近くでは $\mathbf{v}'$ の中で電極へ向かう確率がこの減衰によって小さくなるために、磁界が零のときに $\bar{\mathbf{v}}' = 0$ （変動速度の定義）であっても磁界が印加されると定常的に電極壁から主流方向へ向かう流れが生じることになる。その結果、磁界印加（と温度勾配）により生じる電極壁面近傍の低温・低速流体の対流現象によって温度及び速度境界層が厚くなる可能性がある。この現象は、北海道大学の青木ら^{*11*12*13*14}及び、スタンフォード

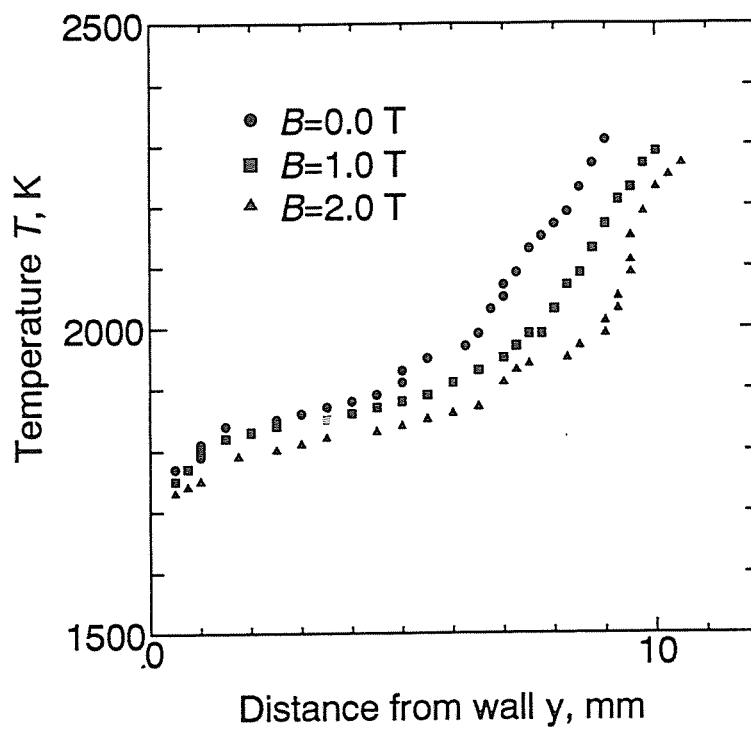


図 6 - 3 磁界による温度境界層の温度変化 - 1 : 青木の実験

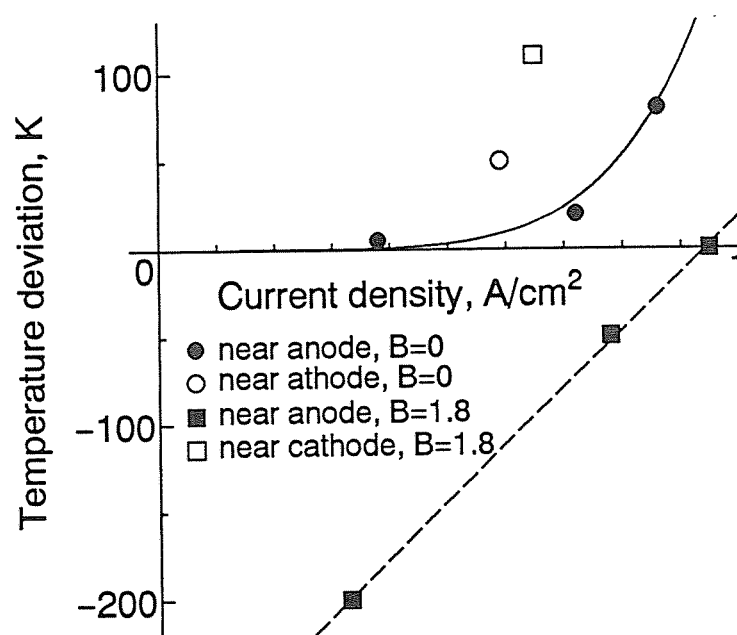


図 6 - 4 磁界による温度境界層の温度変化 - 1 : Jamesの実験

ド大学のJames^{*15*16}によって、実験的に確認されている。

青木らの実験では、3種類の強さの異なる磁界レベル（0、1及び2テスラ）について無負荷時の電極境界層内の温度分布を偏光ラインリバーサル法を用いて測定した。図6-3により磁界印可印加により電極境界層温度が次第に低下しているのがわかる。

James^{*15}はMHD発電モードにおいて外部補助電源を用いて電流レベルを種々変えながら陽極及び陰極の境界層の温度分布を通常のラインリバーサル法により計測し、磁界と電流がともに零の場合の温度分布と比較した（図6-4）。彼は、磁界 B 及び電流 J （ $0.33 \sim 0.95 \text{ A/cm}^2$ ）がともに存在するときの境界層温度分布が両者共に零の場合よりも陽極側で低く測定されることの理由としてホール電流の磁界方向変化率によって駆動される断面内の二次流れが関与しているとしたが、平均電流がもっとも低い場合のジュール熱のみによる温度上昇が電極近くでは数十K程度の時にさらに磁界が印加されていると陽極境界層の温度低下が他のすべての条件の時よりも激しく約200Kとなっていることの説明ができない。従って、少なくとも電流が低い（通常の発電モードでは負荷開放条件に近い）場合には $B = 0$ の温度分布からずれる主な理由はさきに述べた温度勾配に起因する電流に対する制動力が流体を電極壁面から主流方向へ定常的に駆動するメカニズムが支配的であると考えられる。

また、沖中ら^{*17}はMEMを用いたパワースペクトル解析によって乱流の二次元化（スペクトルの波数依存性がある波数領域で $k^{-5/3}$ から k^{-3} へ変化する）が起こることを実験的に示し、その方向を $x-z$ 面であると推測している。この面は、一般に最も乱れの強い電極近傍で v' が減衰されるという本理論と一致する。また、Branover^{*18}は水銀を用いたMHD発電機の電極壁近くの速度測定によってパワースペクトルの k^{-3} 依存性（二次元乱流）を示している。

6-4 節 簡単な数値例

ここでは、前節で得られた乱れたプラズマに対する一般化オームの式と乱れを考慮しないこれまでの式との相違点を簡単なモデル計算により検討する。平均温度で評価した導電率 $\sigma_0 = \sigma(T_0)$ 、平均導電率 $\bar{\sigma}$ 、実効平均導電率 $\bar{\sigma}^*$ 、導電率の自乗の平方根 $\sqrt{(\sigma^2)}$ を、式 (6-5) および式 (6-6) から計算される図 6-5 のような温度・速度の乱れがある場合について空間分布を計算すると、図 6-6 の様になる。ただし、乱れの強さに関しては、スタンフォード大学の M2 チャンネルで測定された速度変動の実効値^{*6}に合うように式 (6-6) の値に若干の修正を加えてある。この図より、任意の場所での平均導電率 $\bar{\sigma}$ は（導電率の温度に対する非線形依存性により）必ずその点の平均温度 T_0 で評価した導電率 σ_0 よりも高くなるがオームの式で実効的に働く $\bar{\sigma}^*$ は、逆に σ_0 よりも低くなる。また $\sqrt{(\sigma^2)}$ は、それらのいずれよりも高い。すなわち、

$$\bar{\sigma}^* \leq \sigma_0 \leq \bar{\sigma} \leq \sqrt{(\sigma^2)} \quad (6-20)$$

図 6-5 には、このときの温度勾配による実効的な速度の変化分（式 (6-19) の右辺第二項）の y -成分をプロットしてある。電極壁面へ向かう実効的な速度成分は、乱れの最も強い $\xi = \lambda$ （内層と外層の境界）において最大となり、この計算条件では、56 m/s で主流の軸方向速度の 7% にもなっている。この仮想的な速度成分は磁界を印加するだけで生じ、電極近傍ではホール電流を駆動しローレンツ力により減衰を受けるので数 10 m/s 程度のオーダの定常的な流れが駆動されるものと推測される。

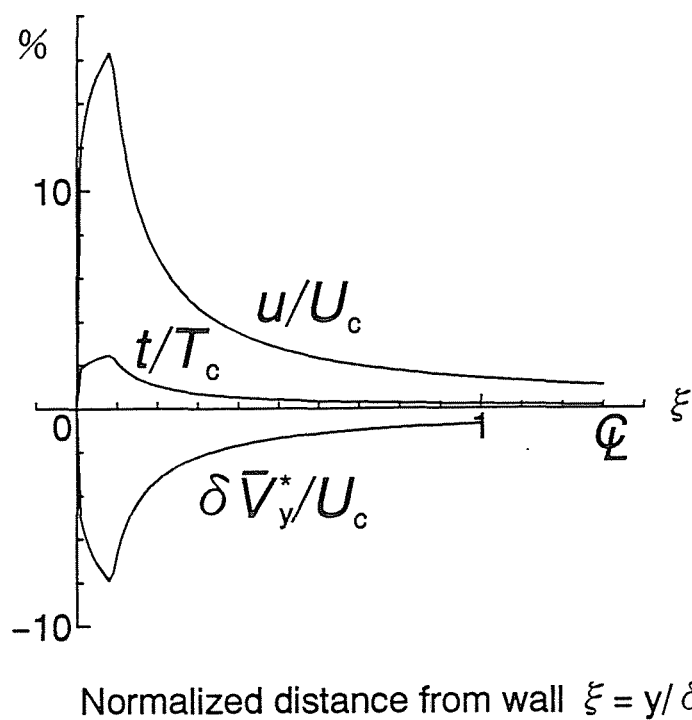


図 6-5 温度・速度乱れ分布

および温度の空間勾配に起因する速度成分（ y - 成分）の空間分布

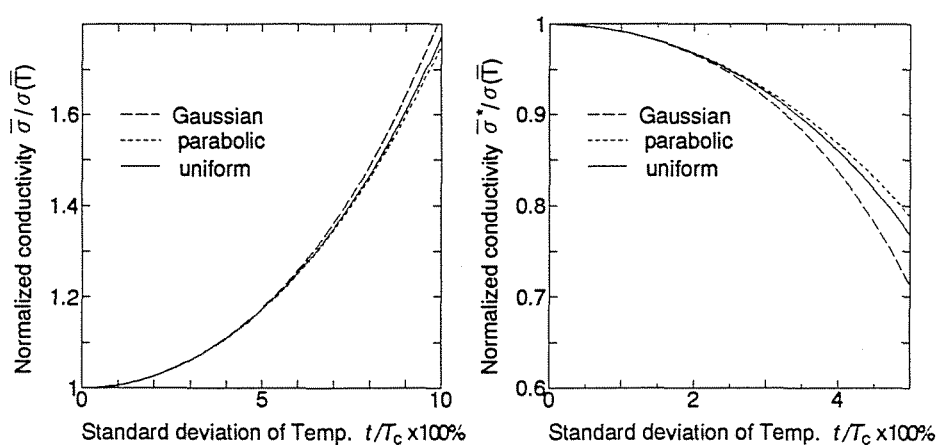


図 6-6 乱れがあるときの（時間）平均導電率 $\bar{\sigma}$ 及び平均実効導電率 $\bar{\sigma}^*$ の温度乱れに対する特性：分布関数はガウス分布、放物分布、矩形分布
S D は温度乱れの標準偏差

6-5 節 減衰速度の見積

前節のモデルから予想され、実験的にも明らかにされたことをまとめると、

- 1) 一般化オームの式で実際に電流輸送に関わる導電率である $\bar{\sigma}^*$ は、導電率変動、すなわち温度変動が大きくなるにつれて低下する。
- 2) 式 (6-19) の右辺第 2 項は、速度変動と温度変動の相関量のモデル化であるので、この実効的な速度が乱流減衰現象によって選択的に減衰することにより、逆方向に定常的な速度成分 v^B が発生する。
- 3) 温度 (導電率) の空間勾配に起因する起電界は、主としてホール電流を誘起し、その方向は、陰極・陽極で逆方向を向くため、電流、ポテンシャルの電極間非対称を引き起こす。
- 4) また、この速度成分による断面内の対流現象により、温度・速度の境界層が厚くなる^{*19*20}。

本節では、2) の磁界印加により発生する定常流の速度を見積もる。

6-5.1 乱れ速度の見積

平均温度に空間勾配がある時、Q 点の温度乱れが速度乱れ v による対流によって P 点に運ばれたときの状況を考える。そのとき P 点の乱れ電流 j およびローレンツ力 f は、以下のように表される。

$$j = K \sigma_q v \times B \quad (6-21)$$

$$f = j \times B \quad (6-22)$$

但し、K は乱れ電流に対する実効的な負荷率である。またこのときの P 点の導電率は、 Δt 秒前の Q 点の流体が移流されてきているので、 σ_q は次式で表される。

$$\sigma_q = \sigma_p + (\theta_q - \Delta t v \cdot \nabla T_p) \frac{\partial \sigma_p}{\partial T} \quad (6-23)$$

ここで、磁界に直交しかつ温度勾配に沿った座標を x^1 、両者に直交する座標を x^2 、磁界に平行な座標を x^3 と定義する。また、 θ は温度変動である。

ここでの議論は、通常の MHD 発電機内では電極境界層内が最も興味のある場所であるため、 (x^1, x^2, x^3) は右手系として $(y, x, -z)$ に対応する。

磁界に直交した面内での乱れ速度 $\mathbf{v}$ の運動方程式は次式となる。

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{\tau} \{1 - (-\theta_a + \Delta t \mathbf{v} \cdot \nabla T_p) \sigma_\tau\} \mathbf{v} \quad (6-24)$$

但し、

$$\tau \equiv \frac{\rho}{K_\sigma B^2}, \quad \sigma_\tau \equiv \frac{\partial \ln \sigma}{\partial T}$$

ここでなすべきことは、微分方程式 (6-24) を初期条件 $\mathbf{v}(t=0) = \mathbf{v}^0$ のもとに解くことであるが、 $\mathbf{v}(-\theta_a + \Delta t \mathbf{v} \cdot \nabla T_p) \sigma_\tau$ の扱いについて 2 通りの方法を考える。

1) 相関量: $\theta \mathbf{v}$ および $\mathbf{v} \mathbf{v}$ を乱流モデルを用いてあらかじめ平均量で表しておく。すなわち、

$$\langle \mathbf{v} \theta \rangle = -\frac{\nu_t}{P_t} \nabla T \quad (6-25)$$

$$\langle \mathbf{v} \mathbf{v} \rangle = -\nu_t \nabla \mathbf{V} \quad (6-26)$$

但し ν_t 、 P_t はそれぞれ渦粘性係数、乱流プラントル数である。

2) 温度変動 θ の強さと速度変動の強さとの相関見積の式を用いて乱れ速度 $\mathbf{v}$ で表し、 $\mathbf{v}^2$ に比例する項として微分方程式を解く。すなわち、

$$\theta \sim -(\gamma - 1) \frac{T_c}{V_c} M^2 \mathbf{v} \quad (6-27)$$

但し γ 、 M 、 T_c 、 V_c はそれぞれ比熱比、マッハ数、コア温度、コア速度*⁴である。以下では上述した 2 通りの方法によって微分方程式 (6-24) を解く。

6-5.2 解法 1

$$\frac{d \mathbf{v}}{d t} = -\frac{1}{\tau} (\mathbf{v} - \mathbf{v}^{\infty}) \quad (6-28)$$

但し、 $\mathbf{v}^{\infty}$ は数学的には、 $t \rightarrow \infty$ としたときの $\mathbf{v}$ の定常（特）解であり次式で表される。

$$\begin{aligned} \mathbf{v}^{\infty} &\equiv \nu_t \left\{ \frac{\mathbf{I}}{P_t} - \Delta t \nabla \mathbf{V} \right\} \cdot \nabla \ln \sigma \\ &\equiv \nu_t \left\{ \frac{1}{P_t} - \Delta t \frac{\partial V_1}{\partial x^1} \right\} \frac{\partial \ln \sigma}{\partial x^1} \end{aligned}$$

ここで $\mathbf{I}$ は単位テンソルである。しかし、この乱れ流体塊は、他の流体塊との衝突・混合によって $\Delta t \sim \ell / v^0$ 程度の時間で消滅する。従って乱れ速度が $\mathbf{v}^{\infty}$ となることはない。但し、 ℓ は混合距離である。

さらに、乱れの強い電極境界層内で考えると上式の括弧内第一項 $\gg$ 第二項である。なぜなら、 $(x^1, x^2) = (y, x)$ を考慮すると、

$$\Delta t \sim \frac{\ell}{v} \sim \frac{1}{|\nabla \mathbf{V}|} \sim \frac{1}{\left| \frac{\partial V_2}{\partial x^1} \right|}$$

であり、

$$\Delta t \frac{\partial V_1}{\partial x^1} \sim \frac{1}{\left| \frac{\partial V_2}{\partial x^1} \right|} \frac{\partial V_1}{\partial x^1} \ll \frac{1}{P_t} \approx 1$$

となるから $\mathbf{e}^1$ を x^1 方向の単位基底ベクトルとして、 $\mathbf{v}^{\infty}$ は近似的に次式となる。

$$\mathbf{v}^{\infty} \sim \frac{\nu_t}{P_t} \frac{\partial \ln \sigma}{\partial x^1} \mathbf{e}^1 \quad (6-29)$$

この速度は、導電率（すなわち温度）の高くなる方向を向いている。この物理的理由は、以下のように説明される。平均温度の高い領域から乱れ速度によって移流された温度乱れと低い領域からの温度乱れを考える。乱れ速度の大きさが同一の場合でも高温領域からの温度乱れは逆方向からの温度乱れよりも確率的には高温であることが多く、誘起される乱れ電流も大きい。平均的にはこの方向の電流

が定常電流として観測され、この定常電流発生に関わる速度乱れが乱流減衰によって抑えられることにより逆方向、すなわち高温領域を向く定常速度が結果として発生することになる。

式 (6-28) を解くと、

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{v}^{\infty} + (\mathbf{v}^0 - \mathbf{v}^{\infty}) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad (6-30)$$

この速度を乱れの平均寿命 Δt で平均すると乱れ速度の平均的な大きさがわかる。

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{v}} &\equiv \frac{1}{\Delta t} \int_0^{\Delta t} \mathbf{v}(t) dt \\ &= D(\chi) \mathbf{v}^0 + (1 - D(\chi)) \mathbf{v}^{\infty} \end{aligned} \quad (6-31)$$

ここで、 α を実験的に決まる係数として無次元量 D 、 χ は

$$D(\chi) \equiv \frac{(1 - e^{-\chi})}{\chi} \quad (6-32)$$

$$\chi \equiv \frac{\Delta t}{\tau} \sim \frac{K H a^2}{\alpha R e} \quad (6-33)$$

である。ただし $H a$ および $R e$ はハルトマン数およびレイノルズ数である。また、 $H a^2 / R e$ は磁気相互作用パラメタあるいは *Stuart* 数とも呼ばれる。

次に、乱れの発生量 $\mathbf{v}^0$ が分布関数 $F(\mathbf{v}^0)$ に従い、その発生量が磁界印加に関わらず変わらないものとすれば、乱れ速度の長時間平均、あるいはアンサンブル平均 $\langle \cdot \rangle$ は、 $\langle \mathbf{v}^0 \rangle = 0$ であるから次式となる。

$$\begin{aligned} \langle \hat{\mathbf{v}} \rangle &\equiv \int_{\Omega} \hat{\mathbf{v}} F(\mathbf{v}^0) d\mathbf{v}^0 \\ &= (1 - D(\chi)) \mathbf{v}^{\infty} \end{aligned} \quad (6-34)$$

これは、磁界と温度勾配が同時に存在するときに発生する定常流であるから、実際の乱れ（時間平均をとると零になる）速度の平均的な大きさ $\hat{\mathbf{v}}^B$ は、

$$\hat{\mathbf{v}}^B \equiv \hat{\mathbf{v}} - \langle \hat{\mathbf{v}} \rangle = D(\chi) \mathbf{v}^0 \quad (6-35)$$

となる。

6-5.3 解法 2

運動方程式の x^1 成分について考える。

$$\frac{d v_1}{d t} = -\frac{1}{\tau} \left\{ v_1 - \frac{v_1 v_1}{v_b} \right\} \quad (6-36)$$

但し、

$$\frac{1}{v_b} \equiv \left\{ (\gamma - 1) M^2 \frac{T_c}{V_c} + \Delta t \frac{\partial T}{\partial x^1} \right\} \sigma_\tau$$

式 (6-36) は Bernoulli 型の常微分方程式であるので、解析的に解けて、

$$v_1 = \frac{v^0 v_b}{(v_b - v^0) \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) + v^0} \quad (6-37)$$

となる。解法 1 と同様に平均乱れ速度 $\hat{v}_1$ およびアンサンブル平均 $\langle \hat{v}_1 \rangle$ を求めると以下ようになる。

$$\begin{aligned} \hat{v}_1 &= \frac{v_b}{\chi} \ln \frac{v_b e^\chi}{(v_b - v_1^0) e^\chi + v_1^0} \\ &\approx D(\chi) v_1^0 + \frac{\chi D(\chi)}{v_b} v_1^0 v_1^0 \quad (\because \chi^2 \ll 1) \end{aligned} \quad (6-38)$$

$$\langle \hat{v}_1 \rangle \approx \chi D(\chi) \langle v_1^0 v_1^0 \rangle / v_b$$

$$\sim \chi D(\chi) \frac{\nu_T \partial \ln \sigma}{P_T \partial x^1} \quad (6-39)$$

であるから、実際の乱れ速度の平均的大きさ $\hat{v}_1^B$ は、次式となる。

$$\hat{v}_1^B \doteq D(\chi) v_1^0 + \chi D(\chi) \left\{ \frac{v_1^0 v_1^0}{v_b} - \left\langle \frac{v_1^0 v_1^0}{v_b} \right\rangle \right\} \quad (6-40)$$

$$\sim D(\chi) v_1^0 \quad (6-41)$$

ここで最後の近似式は、右辺第二項括弧内の平均的大きさが $\langle v_1^0 v_1^0 \rangle$ 程度であることと、式 (6-39) の近似オーダーで成立する。これは、解法 1 および $O(\ln^{*10})$ の与えた式に一致する。

式 (6-40) より温度勾配と磁界の両者が同時に存在する場合のレイノルズ応力の、磁界が存在しない場合のレイノルズ応力に対する比は、次式で表される。

$$\begin{aligned} \frac{\langle \hat{v}_1^B \hat{v}_1^B \rangle}{\langle v_1^0 v_1^0 \rangle} &\sim D^2(\chi) \left\{ 1 - \frac{2 \chi N}{T} \frac{\langle \theta v_1^0 v_1^0 \rangle}{\langle v_1^0 v_1^0 \rangle} \right\} \\ &\sim D^2(\chi) \left(1 - \frac{\alpha' \chi N}{T} \langle \theta^2 \rangle^{1/2} \right) \end{aligned} \quad (6-42)$$

ここで式 (6-39) および $\chi^2 \ll 1$ を使用した。 α' は正の実験的に決まるモデル定数である。 α' が正であることは、温度勾配方向の温度乱れと速度乱れの相関を考慮する事により導かれる。また、 N は次式のように導電率の温度依存性を表すべき乗の指数であり。弱電離ガスプラズマでは、 $1000 \sim 3000$ K の範囲では、 1.2 程度である。

$$\sigma(T) \doteq \sigma_0 \left(\frac{T}{T_0} \right)^N \quad (6-43)$$

このとき $\sigma_T \doteq \frac{N}{T}$ となる。

従って、同じ磁気相互作用パラメタ χ のガスプラズマの場合、金属電極の温度境界層内のように低温で温度乱れ θ の大きな領域ほど、磁界によるレイノルズ応

力の減少は大きいといえる。

6-5.4 数値計算

ここでは、式(6-17)に示した一般化オーム則の乱れモデルを用いて、数値解析を行うが、予備検討結果^{*20}では式(6-18)の平均実効導電率は温度変動がかなり強くならなければ平均温度で見積もった導電率との差違は非常に小さいため、式(6-18)は扱わない。

解析にあたって温度・速度の乱れを考慮した実効的な速度として式(6-19)を使用した。また比較のために、従来行われているように速度として、単純に平均速度を用いた解析及び、乱流減衰による式(6-19)の第2項の減少を考慮した解析の計3通りについて行った。減衰量については、スタンフォード大学のM2チャンネルにおけるLDVによる実測値を用いた。

解析手法としては、三角形一次要素を用いた通常の高次有限要素法(FEM)を使用し、ケロシン燃焼の小型実験機(熱入力5MW)を想定した。計算に用いた数値条件を表6-1に示す。

表6-2、6-3、6-4に乱れモデルを用いた場合、用いない場合、さらに乱れ速度の減衰を考慮した場合それぞれについて磁束密度が2、4、6テスラの場合の電気諸量の電極間非対称性を示す。電極境界層内のホール電流の最大値は、乱れモデルを用いた場合、陰極近くよりも陽極近くで高い。これは、乱れを考慮した一般化オーム則(6-19)の右辺第2項のためである。すなわち、この速度成分による電流は基本的にホール電流であり陰極では負、陽極で正となり、乱れモデルを考慮しない場合の電極近くでのホール電流が両極共に正であるからである。

表 6-1 数値条件

Fuel	Coal + K
Mass flow rate	1.04 kg/s
Thermal input power	6.25 MW _{th}
Channel aspect ratio D/W	3.00
Inlet static pressure	1.50 atm
Inlet average temp.	2778 K
Inlet average velocity	749 m/s
Inlet boundary layer thickness	0.01 m
profile	1/7th law
Wall temperature	
electrode wall	1400 K
insulator wall	1400 K
Load factor K	0.50
Magnetic induction	
UFC (const.)	2.0 Tesla
	4.0 "
	6.0 "

表 6-2 電気諸量の電極間非対称性 B = 2 テスラ

		乱れモデルあり	乱れモデルなし	減衰あり	備考
電極間電圧 V_F [V]		113.			共通
最大電極 電圧降下 δV [V]	陰極	19.5	20.0	19.4	境界層内の 各電極電位 からの偏差
	陽極	20.4		20.4	
最大ホール 電流密度 [A/cm ²]	陰極	0.815	0.845	0.821	場所は上記 δV とほぼ 同じ
	陽極	0.876		0.870	
平均電流 $\bar{J}_y$ [A/cm ²]		-1.438	-1.392	-1.430	

表 6-3 電気諸量の電極間非対称性 $B = 4$ テスラ

		乱れモデルあり	乱れモデルなし	減衰あり	備考
電極間電圧 V_F [V]		225.			共通
最大電極 電圧降下 δV [V]	陰極	53.7	56.2	54.2	境界層内の 各電極電位 からの偏差
	陽極	58.7		58.2	
最大ホール 電流密度 [A/cm ²]	陰極	2.55	2.69	2.58	場所は上記 δV とほぼ 同じ
	陽極	2.83		2.80	
平均電流 $\bar{J}_y$ [A/cm ²]		-2.372	-2.244	-2.330	

表 6-4 電気諸量の電極間非対称性 $B = 6$ テスラ

		乱れモデルあり	乱れモデルなし	減衰あり	備考
電極間電圧 V_F [V]		338.			共通
最大電極 電圧降下 δV [V]	陰極	103.9	109.5	105.0	境界層内の 各電極電位 からの偏差
	陽極	115.1		114.0	
最大ホール 電流密度 [A/cm ²]	陰極	4.26	4.54	4.31	場所は上記 δV とほぼ 同じ
	陽極	4.82		4.76	
平均電流 $\bar{J}_y$ [A/cm ²]		-2.696	-2.550	-2.666	

*減衰ありの場合、速度変動は乱流減衰によってその強度が $D^2 = 0.8$ 倍になったものとした。これに対応して渦粘性係数も D^2 倍とした。

6-6 節 結 言

本章では作動流体が乱流状態にあることを考慮して一般化オームの式に対する温度及び速度の乱れの効果を考察し、乱れたプラズマに対する一般化オームの式を導出した。また、導出したモデルを持ちいた数値計算により発電特性に及ぼす乱れの影響を考察した。

乱れの効果は、導電率の（統計的）分散と渦粘性係数を含んでいる。導出された式を温度乱れのみあるいは速度乱れのみの効果と、温度乱れ・速度乱れの両者からの影響に分けてまとめると以下のようになった。

I. 温度乱れのみの影響

- 1) 温度乱れがあると平均導電率 $\bar{\sigma}$ は増加する。
- 2) 実効平均導電率 $\bar{\sigma}^*$ は温度乱れにより低下する。一般化オーム則で実効的に働くのはこの導電率である。

II. 速度乱れのみの影響

- 3) 温度乱れを伴わない速度乱れのみでは、平均電流を駆動しない。ただし、他のすべての平均電流を駆動しない流体乱れの効果と同様に、ローレンツ制動力による（磁界に直交している）乱れの減衰は生じる。

III. $\nabla \bar{T} \times \mathbf{B}$ の影響（温度乱れと速度乱れの相関）

- 4) 無負荷時においても磁界を印加するだけで、乱れ速度成分が選択的に減衰する事で生ずる定常的な流れによる対流現象によって温度・速度境界層が厚くなる。
- 5) ホール電流分布及び電極電位降下の電極間非対称性を引き起こす。
- 6) 電極面近傍で、 $x-z$ 面での乱流の二次元化の可能性がある。
これは、この領域で y 方向の乱れが乱流減衰を強く受けることが原因

である。

ここで、上記 4) および 6) についてはこれを支持する実験データ^{*13, *15}が報告されている。

さらに電気場の乱れモデルを用いた数値解析を行い、モデル化の導入による電流密度、ポテンシャルの分布の変化を示すと共に、乱れ速度に対する運動方程式を解くことにより磁界と温度勾配が同時に存在するときの平均的な乱れ速度の大きさ、上述した定常流の定量的な見積、およびレイノルズ応力テンソルの評価を行った。

その結果、以下の結論が得られた。

- 1) 同じ磁気相互作用パラメタ χ のガスプラズマの場合、金属電極の温度境界層内のように低温で温度乱れ θ の大きな領域ほど、磁界によるレイノルズ応力の減少は大きい。
- 2) 電極境界層内のホール電流の最大値は、乱れモデルを用いた場合、陰極近くよりも陽極近くで高い。
- 3) 電極電位降下は、陽極降下が陰極降下より大きい。

これらの現象は、全て温度勾配に伴う非等方な乱流減衰現象の結果であり、流体力学の MHD 乱流の観点から見ると非常に興味深い現象である。また、MHD 発電で用いられるガスプラズマに対する磁界の影響を考慮した乱流モデルの構成に対して貢献できると考えられる。

ただし、この現象を現状の MHD 発電工学（発電機を開発するという見地）から見ると負荷がかなり軽い（電気出力が小さい）場合には本章で扱った現象は、考慮すべきであるが、負荷が重くなると、これらの現象は通常の MHD 相互作用の中に埋もれてしまうため、発電機のトータルな特性（電極から取り出される全電流や、全体の電気出力）のみを対象にして、乱流構造や、局所的なローレンツ力の影響などを必ずしも考慮しなくても工学的にはある程度の精度（電極電流・電圧などで数%程度）を持った解析ができる。これは、現状の高温・高速 MHD ガスプラズマの測定技術が、乱流モデルの経験定数を普遍性を持って検証できる

ほど高い精度を持っていないことにも原因がある。

参考文献

- *¹ 桑原邦郎, "乱流のシミュレーション," 日本物理学会誌, **40**-11, p. 644, (1985)
- *² P. Bradshaw, T. Cebeci and J. Whitelaw, Engineering Calculation Methods for Turbulent Flow, Academic Press, (1981).
- *³ B. S. Baldwin and H. Lomax, "Thin Layer Approximations and Algebraic Model for Separated Tubulent Flows," AIAA Paper 78-257, 1978
- *⁴ B. E. Launder and D. B. Spalding, "The Numerical Computaion of Turbulent Flows," Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering , Vol. 3, pp. 269-289(1974)
- *⁵ J. Hartmann and F. Lazarus, "Hg-Dynamics II.," Math-Fys. Medd. Vol. 15, No. 7, (1937).
- *⁶ Hs. M. Hua and P. S. Lykoudis "Turbulence Measurements in a Magneto-Fluid-Mechanic Channel," Nuclear Science and Engineering, Vol. 54, pp. 445-449(1974)
- *⁷ Roy R. Rankin, S. A. Seifl and R. H Eustis, "Study of the Insulating Wall Boundary Layer in a Faraday MHD Generator," AIAA Journal, Vol. 18, No. 9, pp. 1094-1100(1980).
- *⁸ 日本機械学会編, "流れの数値シミュレーション", P. 295(1988), コロナ社
- *⁹ Roy R. Rankin, "Topical Report on Insulating Wall Boundary Layer in a Faraday MHD Channel", Ph.D Thesis , Stanford University(1979)
- *¹⁰ J. G. Olin, "Turbulence Suppression in Magnetohydrodynamic Flows," Department of Mechanical Engineering, Stanford University, SU-IPR Report No. 85, July(1966).
- *¹¹ 青木義明、他 7 名, "MHD プラズマの温度測定", 第 8 回エネルギー利用と直接発電シンポジウム論文集、ECRI-SYM-9, pp. 269-275(1986)
- *¹² Y. Aoki, et al, "Plasma Temperature Profile in the Boundary Layers of an MHD Channel," JJAP, Vol. 25, No. 2, pp. 270-274, Feb(1986).
- *¹³ 青木義明、他 7 名, "MHD プラズマ温度境界層の磁界による影響", 第 9 回

- エネルギー利用と直接発電シンポジウム論文集、ECRI-SYM-10, pp.173-178, (1987).
- *¹⁴ 青木義明、"輻射光によるMHD発電プラズマ温度・速度場の高分解計測法に関する研究," 北海道大学学位論文, (1987).
 - *¹⁵ R. K. James "Joule Heating Effects in the Electrode Wall Boundary Layer of MHD Generators," U.S Dept. of Energy Rept. FE-2341-15; also Ph.D. Thesis, Stanford University, Stanford, Calif., Jan.(1980)
 - *¹⁶ R. K. James and C. H. Cruger, "Joule Heating Effects in MHD Generator Boundary Layers," AIAA Journal, Vol.21, No.5, pp.679-686, May(1983)
 - *¹⁷ 沖中憲之、他5名, "負荷開放時の渦電流とプラズマ乱流スペクトル," 第12回エネルギー利用と直接発電シンポジウム論文集、ECRI-SYM-13, pp.230-240(1990)
 - *¹⁸ H. Branover, Magnetohydrodynamic Flow in Ducts, John Wiley and Sons, (1978).
 - *¹⁹ S. OIKAWA, N. KAYUKAWA & T. ENOTO, "Generalized Ohm's Law for Turbulent Plasmas," Int. J. of Applied Electromagnetics in Materials, Supplement of Vol.2 (in press).
 - *²⁰ 及川, 他, "乱れたプラズマに対する一般化オーム則," 電気学会新・省エネルギー研究会資料, ESC-90-21, 1990.

第 7 章 結 論

本章では、本研究（第 4 章から第 6 章）で得られた結論を述べる。

本論文では、MHD 発電機内の電磁流体相互作用を

①平均流れと電磁場の相互作用^{*4章-5章}： S F C 型磁場配位による電磁流体特性の改善

②流体乱れと電磁場の相互作用^{*6章}： 一般化オーム則と非等方乱流減衰に分けて考察した。

その結果、作動流体が乱流状態にあっても、定格運転時の発電機としての平均的あるいは積分量としての電氣的性能に関しては、流体乱れと電磁場の乱れの相関を考慮しない従来の方法で解析しても大きな誤差を生じないことを明らかにした。これにより、上記①と②のようなアプローチが妥当であったといえる。

ただし、負荷開放あるいはそれに近い状況（軽負荷条件）の場合には、これまで無視されてきた上記②の考察が不可欠であることを示し、一般化オーム則の乱流モデルを構成した。本モデルより、導電率の空間勾配に沿った方向に乱流減衰が非等方となり、これに伴って発生する定常的な質量流およびレイノルズ応力テンソルの定量的な見積もりを行った。このような考察によって、乱流ガスプラズマの電極近くの温度プロファイルが磁場印加によって変化するという実験事実を合理的に説明することが可能となった。

以下では、S F C 磁場の有効性および一般化オーム則のについて得られた結論に関してまとめている。

7-1 節 平均流れと電磁場の相互作用

従来 S F C 磁場配位は、一様磁場配位 (U F C) に比べ、

- ・低温の金属電極境界層内での磁場 (B_z 、すなわちホール効果) を抑制し
- ・磁場に電極直交成分を持たせる (荷電粒子はこの方向に移動しやすい) することで
- ・発電機内部抵抗並びにジュール発熱 (損失) を低減し
- ・ジュール発熱と、移流・拡散による熱移動のアンバランスの結果として生ずる熱電気不安定性を抑制する

ことなどを目的に小澤他および Kayukawa *et al.* により提案され、発電出力の改善効果については衝撃波管を用いた模擬実験によりその改善効果が示されていた。本研究では、三次元数値解析を行い、さらに以下の有効性を示した。

1. S F C では B_z が電極壁近くで抑制されていることで、MHD 相互作用によって発生する断面内二次流れが、抑制され、
2. そのため、断面内二次流れによる高温プラズマの電極方向への対流現象により生ずるとされる電磁空力的不安定性は生じにくい
3. U F C 磁場配位では、絶縁 (側) 壁境界層内のみで生ずるとされていた速度オーバーシュート現象が、S F C では電極境界層内でも生ずる。
4. 3 により、電極面への熱伝達が促進されることで熱電気不安定性および電磁空力的不安定性が抑えられ
5. 境界層剥離が生じにくい。
6. カーボン燃焼プラズマや、水素燃焼プラズマ等の高導電率 (したがって高移動度) プラズマを作動流体とする MHD 発電機では、S F C 磁場による発電出力の改善率が大きい。

以上の解析では、工学的乱流モデルとして中性流体に対して構成されてた通常の乱流モデル (混合距離モデルおよび $k - \varepsilon$ 法) を用いた

7-2 節 流体乱れと電磁場の相互作用

オープンサイクルMHDにおける作動流体の動作温度範囲（1000K~3000K）ではその導電率は温度の12乗程度に比例するため、シード物質の電離・再結合の過程が非常に速く行われて、完全に熱平衡状態であると見なせる場合でも導電率の時間平均値は温度の時間平均値で見積もった導電率とは一致せず、この違いは温度変動が強いほど、また導電率の温度依存性が非線形になるほど大きくなると考えられる。

この観点から、乱流の弱電離プラズマを作動流体とする場合の一般化オーム則に対して乱流モデルを構成した。このモデルより以下の結論が得られる。

1. 温度乱れがあると時間平均平均導電率 $\bar{\sigma}$ は増加する。
2. 実効平均導電率 $\bar{\sigma}^*$ は温度乱れにより低下する。一般化オーム則で実効的に働くのはこの導電率である。
3. 電極境界層内のホール電流の最大値および電極電位降下は、乱れモデルを用いた場合、陰極近くよりも陽極近くで高い（電極間非対称性）。

ただし、これらの現象はオープンサイクルMHD発電機の通常の運転条件ではほとんど影響せず、流体力学的には、以下の結論が重要である。

4. 無負荷時においても磁界を印加するだけで、乱れ速度成分が選択的に減衰する事で生ずる定常的な流れによる対流現象によって温度・速度境界層が厚くなる。

5. 乱れ流体塊に対する運動方程式を解き、上記の定常流 δv の見積もりを行い、レイノルズ応力 T を導いた。

7-3 節 本研究の結論

本論文は、MHD 発電機内の電磁流体现象を、平均流と電磁場の相互作用と変動流体と電磁場の相互作用の 2 つに分け、それぞれの場合の電気的および流体力学的特性についての解析的および理論的研究をまとめたものであり、その主要な成果は次のように要約される。

①電極近傍において磁束密度を低減する S F C 磁場分布を持つ MHD 発電機は、ホール効果による発電無効電流を抑制し、発電機の内部抵抗ならびに電極電位降下を低減することで電気的特性の向上が期待できることを明らかにした。

② S F C 磁場配位を持つ MHD 発電機では、熱電気不安定性および電磁空力的不安定性などの不安定性現象や、境界層剥離現象を抑制し、流体力学的特性を向上することができることを明らかにした。

③ S F C 磁場のもとでの断面内二次流れは、従来型の一様磁場印加では 6 個の渦セルを持つ構造であるのに対し、10 個のセル構造を持ち、電極近くでの渦の流速が遅くなることが電磁空力的不安定性の抑制につながることを示した。

④ S F C 型 MHD 発電機では、絶縁壁境界層だけでなく電極境界層にも速度オーバーシュート現象が発生し、これによる電極面への熱伝達の促進効果により集中アークの発生を抑え得ることを明らかにした。

⑤従来の研究では無視されていた熱流体変動と電磁場変動の相関を考慮した一般化オーム則の乱れモデルを構成し、温度勾配に沿った方向での磁場による非等方乱流減衰現象の結果、低温電極方向から高温の主流へ向かう定常流れが発生することを示し、この流速の定量的な見積もり、およびレイノルズ応力テンソルを導出した。また、この流れが実験機における温度測定によって示唆されていたことを明らかにした。

謝 辞

本研究を進めるに当たり、多大なご指導を賜りました北海道大学工学部粥川尚之教授に衷心より感謝申し上げます。また、種々ご教示賜った同学青木義明助教授、榎戸武揚教授、杉山憲一郎助教授、谷津茂男助手、北川広貴技官に心から感謝いたします。

本論文の図面作成などの協力を得た北海道大学大学院杉山宏君ならびに同工学部倉本孝則君に感謝いたします。

本研究の一部は、文部省科学研究費補助金奨励研究（A）：課題番号60750227、63750251、および02855056により行われ、さらに、北海道大学工学部附属直接発電実験施設ならびに同学部附属先端電磁流体実験施設の補助のもとに行われたことを付記し、感謝の念を表す次第である。また、本研究における三次元計算の全てと、図形処理の一部は、北海道大学大型計算機センタのHITAC M-200、M-280、M-680、M-682、S-810/10及び、S-820/80及び核融合研究所におけるFACOM M-380、VP-200/Eを用いて行われた。

最後に、日頃討論して頂いた北海道大学エネルギー変換工学講座ならびに先端電磁流体実験施設の諸氏にも厚く御礼申し上げます。

APPENDIX

APPENDIX 目 次

- A : 一般化オームの式の導出
- B : 準一次元MHD方程式の導出
- C : $k - \varepsilon$ 法の境界条件（高レイノルズ数）
- D : 面積座標の性質
- E : クランク・ニコルソン法
- F : 矩形断面無限長コイルの作るSFC磁界
- G : クレセントコイルの断面積
- H : 乱流速度減衰関数Dの導出

APPENDIX-A

一般化オームの式 (2-1) の導出

$$\mathbf{J} = \sigma (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \mu_e \left\{ \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla p_e + \frac{m_e n_e}{e} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{J}}{n_e} \right) \right\} \quad (2-1)$$

実験室系に対して相対速度 $\mathbf{V}$ で移動している系が感ずる実効電界 $\boldsymbol{\varepsilon}$ は、

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}$$

で与えられる。固体中の場合とは異なり電磁流体中を流れる電流 $\mathbf{J}$ は、この実効電界 $\boldsymbol{\varepsilon}$ (および導電率 σ) だけでは決まらず、 $\boldsymbol{\varepsilon}$ のほかに他の流体力学輸送量にも影響を受ける。この関係を示したものが「一般化オームの式」である。以下ではこの一般化オームの式を導出する。

まず s 種粒子の運動量保存則を考える。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho_s \mathbf{u}_s) + \nabla \cdot (\rho_s \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s) = -\nabla \cdot \mathbf{p}_s^* + e_s n_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B}) - \mathbf{M}_s \quad (A-1)$$

ただし、 $\rho_s = m_s n_s$ は s 種粒子の質量密度、 $\mathbf{u}_s$ は s 種粒子の連続体近似におけるマクロ速度、 $\mathbf{p}_s^*$ は s 種流体の圧力テンソル (pressure tensor) を表しており、 $e_s n_s (\mathbf{E} + \mathbf{u}_s \times \mathbf{B})$ は s 種粒子への電磁力、 e_s および n_s は s 種粒子の電荷および粒子密度であり、 $\mathbf{M}_s$ は s 種粒子型の粒子と衝突して単位時間・単位体積あたりに失う運動量の平均値である。

ここで、 f_s を s 種粒子の速度分布関数とすると s 種粒子の圧力テンソル $\mathbf{p}_s^*$ は次式で与えられる。

$$\mathbf{p}_s^* = \rho_s \int (\mathbf{c} - \mathbf{u}_s)(\mathbf{c} - \mathbf{u}_s) f_s(\mathbf{c}) d\mathbf{c} = \rho_s \overline{(\mathbf{c} - \mathbf{u}_s)(\mathbf{c} - \mathbf{u}_s)}$$

衝突が支配的なガスの場合、通常は $\mathbf{p}_s^*$ の代わりに次の量を考えるのが便利である。

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_s &= \rho_s \overline{(\mathbf{c} - \mathbf{u})(\mathbf{c} - \mathbf{u})_s} = \rho_s \overline{(\mathbf{c} - \mathbf{u} + \mathbf{U}_s)(\mathbf{c} - \mathbf{u} + \mathbf{U}_s)} \\ &= \mathbf{p}_s^* + \rho_s \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s \end{aligned} \quad (\text{A-2})$$

ここで、 $\mathbf{U}_s = \mathbf{u}_s - \mathbf{u}$ は s 種粒子の拡散速度(diffusion velocity)であり、衝突が支配的であるときは、 $\mathbf{p}_s$ と $\mathbf{p}_s^*$ は同じであると考えて良い。従ってガス全体の圧力テンソルは次式となる。

$$\mathbf{p} = \sum_s \mathbf{p}_s \quad (\text{A-3})$$

粒子種の異なる粒子との相互作用項である $\mathbf{M}_s$ の厳密な取扱いは運動学(kinetic theory)によらねばならないが、ここでは2種の粒子間の弾性衝突(elastic collision)のみを考える事にする。そのとき、

$$\mathbf{M}_s \doteq n_s \bar{\nu}_{sr} m_{sr} (\mathbf{U}_s - \mathbf{U}_r) \quad (\text{A-4})$$

ここで、 $m_{sr} = \frac{m_s m_r}{(m_s + m_r)}$ は換算質量(reduced mass)であり $\bar{\nu}_{sr} = n_r \bar{g}_{sr} \bar{Q}_{sr}$ は s 種粒子と r 種粒子との平均運動量輸送衝突周波数である。

これからは、簡単のためにプラズマの構成粒子は電子、イオンおよび中性粒子の3種類からなるものとする。このとき、それぞれの流体に対する運動量保存則は

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} (m_e n_e \mathbf{u}_e) + \nabla \cdot m_e n_e (\mathbf{u}_e \mathbf{u}_e - \mathbf{U}_e \mathbf{U}_e) \\ &= -e n_e (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{p}_e \\ &\quad - n_e m_e \bar{\nu}_{ei} (\mathbf{U}_e - \mathbf{U}_i) - n_e m_e \bar{\nu}_{en} (\mathbf{U}_e - \mathbf{U}_n) \end{aligned} \quad (\text{A-5.1})$$

$$\frac{\partial}{\partial t} (m_i n_i \mathbf{u}_i) + \nabla \cdot m_i n_i (\mathbf{u}_i \mathbf{u}_i - \mathbf{U}_i \mathbf{U}_i)$$

$$\begin{aligned}
&= -e n_i (\mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}) - \nabla \cdot \mathbf{p}_i \\
&\quad - n_i m_i \bar{\nu}_{ie} (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_e) - n_i m_i \bar{\nu}_{in} (\mathbf{U}_i - \mathbf{U}_n) \quad (\text{A-5.2})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial}{\partial t} (m_n n_n \mathbf{u}_n) + \nabla \cdot m_n n_n (\mathbf{u}_n \mathbf{u}_n - \mathbf{U}_n \mathbf{U}_n) \\
&= -\nabla \cdot \mathbf{p}_n - n_n m_n \bar{\nu}_{ne} (\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_e) - n_n m_n \bar{\nu}_{ni} (\mathbf{U}_n - \mathbf{U}_i) \quad (\text{A-5.3})
\end{aligned}$$

電荷密度 ρ^c および電流密度 $\mathbf{J}$ を粒子数密度と拡散速度を用いて表すと

$$\rho^c = e(n_i - n_e) \quad (\text{A-6.1})$$

$$\mathbf{J} = e(n_i \mathbf{U}_i - n_e \mathbf{U}_e) \quad (\text{A-6.1})$$

であるから、式 (A-5) をすべて加え合わせるとプラズマ流体全体の (1 流体近似) 運動量保存則が得られる。

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{u}) + \nabla \cdot (\rho \mathbf{u} \mathbf{u}) = -\nabla \cdot \mathbf{p} + \rho^c \boldsymbol{\varepsilon} + \mathbf{J} \times \mathbf{B} \quad (\text{A-7})$$

但し、この式を導く際に以下に示す関係式を使用した。

$$\begin{aligned}
n_s \bar{\nu}_{sr} &= n_r \bar{\nu}_{rs} \\
\rho \mathbf{u} &= \sum_s \rho_s \mathbf{u}_s \\
\sum_s \rho_s \mathbf{u}_s \mathbf{u}_s &= \rho \mathbf{u} \mathbf{u} + \sum_s \rho_s \mathbf{U}_s \mathbf{U}_s \\
\rho_e \mathbf{U}_e + \rho_i \mathbf{U}_i + \rho_n \mathbf{U}_n &= 0 \quad (\text{A-8})
\end{aligned}$$

$$n_e = \frac{e(\rho_e + \rho_i) - m_i \rho^c}{e(m_e + m_i)}, \quad n_i = \frac{e(\rho_e + \rho_i) - m_e \rho^c}{e(m_e + m_i)} \quad (\text{A-9.1})$$

$$\mathbf{U}_e = \frac{-m_i \mathbf{J} - e \rho_n \mathbf{U}_n}{e n_e (m_e + m_i)}, \quad \mathbf{U}_i = \frac{m_e \mathbf{J} - e \rho_n \mathbf{U}_n}{e n_i (m_e + m_i)} \quad (\text{A-9.2})$$

式 (A-5.1) $\times (-e/m_e)$ と式 (A-5.2) $\times (e/m_i)$ をたし合わせて

$$\frac{m_i m_e}{e^2 (\rho_e + \rho_i)} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho^c \mathbf{u} + \mathbf{J}) + \nabla \cdot (\rho^c \mathbf{u} \mathbf{u} + \mathbf{u} \mathbf{J} + \mathbf{J} \mathbf{u}) \right\}$$

$$\begin{aligned}
&= \varepsilon - \left\{ \frac{m_e \bar{\nu}_{ei}}{n_i e^2} + \frac{m_e m_{in}}{e^2 (\rho_e + \rho_i)} (\nu_{en} + \frac{m_e m_{in}}{m_i m_i} \nu_{in}) \right\} \mathbf{J} \\
&\quad - \frac{(m_i - m_e)}{e (\rho_e + \rho_i)} (\rho^c \varepsilon + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) + \frac{\nabla \cdot (m_i \mathbf{p}_e - m_e \mathbf{p}_i)}{e (\rho_e + \rho_i)} \\
&\quad - \frac{(m_i - m_e)}{e (\rho_e + \rho_i)} (\rho^c \varepsilon + \mathbf{J} \times \mathbf{B}) + \frac{\nabla \cdot (m_i \mathbf{p}_e - m_e \mathbf{p}_i)}{e (\rho_e + \rho_i)} \\
&\quad - \rho^c \frac{m_e \bar{\nu}_{ei}}{n_i e^2} \frac{\rho_n \mathbf{U}_n}{(\rho_e + \rho_i)} - \frac{\rho_n}{(\rho_e + \rho_i)} \mathbf{U}_n \times \mathbf{B} - \frac{\rho}{(\rho_e + \rho_i)} \\
&\quad \times \frac{m_{ei}}{e} \left\{ (\bar{\nu}_{en} - \frac{m_{in}}{m_i} \bar{\nu}_{in}) - \frac{\rho^c m_i}{\rho e} (\bar{\nu}_{en} - \frac{m_e m_{in}}{m_i m_i} \bar{\nu}_{in}) \right\} \mathbf{U}_n
\end{aligned} \tag{A-10}$$

ここでプラズマが電氣的に中性 ($\rho^c \approx 0$) であるとし、 $m_e \ll m_i$ 及び $\mu_e \gg \mu_i$ の条件を考えると、

式 (A-10) の $\mathbf{J}$ の係数 = $1/\sigma$

となる。ただし $\sigma = \frac{n_e e^2}{m_e \nu_{eH}}$ 、 $\nu_{eH} \equiv \nu_{ei} + \nu_{en}$ である。

次に、電子の衝突周波数 ($1/\nu_{eH}$) がプラズマ振動の時間スケールより十分長いとすれば式 (A-10) の左辺は零で置き換えることができるので

$$\varepsilon + \frac{\nabla \mathbf{p}_e}{e n_e} = \frac{\mathbf{J}}{e} + \frac{\mathbf{J} \times \mathbf{B}}{e n_e} + \frac{m_e \bar{\nu}_{en}}{e} \frac{\rho_n \mathbf{U}_n}{\rho_i} - \mathbf{B} \times \frac{\rho_n \mathbf{U}_n}{\rho_i}$$

従って

$$\frac{\rho_n \mathbf{U}_n}{\rho_i} \sim \frac{-(\rho_n/\rho)^2}{n_e m_{in} \nu_{in}} (\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \nabla \mathbf{p}_e) - \frac{\rho_n}{\rho} \sqrt{\left(\frac{m_e}{m_{in}}\right)} \frac{\mathbf{J}}{e n_e}$$

弱電離プラズマでは $\rho_n \approx \rho$ 、

$$\mathbf{J} = \sigma \left(\varepsilon + \frac{\nabla \mathbf{p}_e}{e n_e} \right) - \mu_e \left\{ \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \frac{m_e n_e}{e} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\mathbf{J}}{n_e} \right) \right\}$$

参考文献 - A

M. Mitchner and C. H. Kruger, Partially Ionized Gases, Wiley, 1973

APPENDIX-B

準一次元MHD方程式系の導出

N-S方程式系に対して準一次元近似を行うと（文献）

連続の式

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\rho u}{A} \frac{\partial A}{\partial x} = 0 \quad (\text{B-1})$$

運動量保存則

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u^2 + p)}{\partial x} + \frac{\rho u^2}{A} \frac{\partial A}{\partial x} - \langle J_y B_z \rangle + f = 0 \quad (\text{B-2})$$

エネルギー保存則

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \frac{\partial \{(\varepsilon + p)u\}}{\partial x} + \frac{(\varepsilon + p)u}{A} \frac{\partial A}{\partial x} - \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle + q = 0 \quad (\text{B-3})$$

状態方程式

$$p = \rho R T \quad (\text{B-4})$$

ただし、

$$f = 2 C_f \rho u^2 / D_h \quad : \quad \text{摩擦損失} \quad (\text{B-5})$$

$$q = 4 S_t \rho u C_p (T_s - T_w) / D_h \quad : \quad \text{熱損失} \quad (\text{B-6})$$

$$\varepsilon = \rho u^2 / 2 + \rho C_v T \quad : \quad \text{全エネルギー密度} \quad (\text{B-7})$$

$$C_f = 0.07696 \operatorname{Re}^{-0.2} \quad : \quad \text{摩擦係数} \quad (\text{B-8})$$

$$S_t = 0.65 C_f \operatorname{Pr}^{-2/3} \quad : \quad \text{スタントン数} \quad (\text{B-9})$$

$$D_h = C / 4 A \quad : \quad \text{水力直径} \quad (B-10)$$

また ρ 、 u 、 p 、 T 、 A 、 C はそれぞれ流体の密度、速度、圧力、温度、チャンネルの断面積および周囲長さである。これらの流体力学量から次の諸量を定義する。

$$\text{エンタルピー} \quad : \quad h = C_p T \quad (B-11)$$

$$\text{淀み点エンタルピー} \quad : \quad h_s = h + \frac{u^2}{2} \quad (B-12)$$

$$\text{レイノルズ数} \quad : \quad Re = \frac{\rho u x}{\mu} \quad (B-13)$$

$$\text{プラントル数} \quad : \quad Pr = \frac{\mu C_p}{Re} \quad (B-14)$$

$$\text{境界層厚さ} \quad : \quad \delta = 0.37 x Re^{-0.2} \quad (B-15)$$

$$\text{比熱比}(C_p/C_v) \quad : \quad \gamma = \frac{\log \frac{p_s}{p}}{\log \frac{p_s h}{h_s p}} \quad (B-16)$$

$$\text{マッハ数} M \quad : \quad M^2 = \frac{2 \left(\frac{h_s}{h} - 1 \right)}{\gamma - 1} \quad (B-17)$$

定常解析 ($\partial/\partial t = 0$) では式 (B-1) ~ (B-3) は以下のようにになる。

連続の式

$$\frac{d(\rho u)}{dx} + \frac{\rho u}{A} \frac{dA}{dx} = 0 \quad (B-1')$$

運動量保存則

$$\frac{d(\rho u^2 + p)}{dx} + \frac{\rho u^2}{A} \frac{dA}{dx} - \langle J_y B_z \rangle + f = 0 \quad (B-2')$$

エネルギー保存則

$$\frac{d\{(\varepsilon + p)u\}}{dx} + \frac{(\varepsilon + p)u}{A} \frac{dA}{dx} - \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle + q = 0 \quad (B-3')$$

このままでは、 ρ 、 u 、 p 、 ε 、 T 、 A と変数が多すぎるので上で与えた補助関係式を用いて ρ 、 u 、 A の3個の変数に関する常微分方程式系とすると以下のようになる。

$$\frac{1}{u} \frac{d u}{d x} + \frac{1}{\rho} \frac{d \rho}{d x} + \frac{1}{A} \frac{d A}{d x} = 0 \quad (\text{B}-1'')$$

$$\rho u \frac{d u}{d x} + \frac{d p}{d x} = \langle J_y B_z \rangle - f \quad (\text{B}-2'')$$

$$\rho u^2 \frac{d u}{d x} + \rho u \frac{d h}{d x} = \langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle - q \quad (\text{B}-3'')$$

さらに変形すると

$$u \frac{d u}{d x} + \frac{u^2}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \right) \frac{d p}{d x} + \frac{u^2}{\rho} \left(\frac{\partial \rho}{\partial T} \right) \frac{d T}{d x} = - \frac{u^2}{A} \frac{d A}{d x} \quad \equiv F_1$$

$$u \frac{d u}{d x} + \frac{1}{\rho} \frac{d p}{d x} = \frac{\langle J_y B_z \rangle - f}{\rho} \quad \equiv F_2$$

$$u \frac{d u}{d x} + \left(\frac{\partial h}{\partial p} \right) \frac{d p}{d x} + \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right) \frac{d T}{d x} = \frac{\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle - q}{\rho} \quad \equiv F_3$$

これを行列表示すると

$$\begin{bmatrix} u & \frac{u^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} & \frac{u^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \\ u & \frac{1}{\rho} & 0 \\ u & \frac{\partial h}{\partial p} & \frac{\partial h}{\partial T} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{d u}{d x} \\ \frac{d p}{d x} \\ \frac{d T}{d x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \frac{d u}{d x} \\ \frac{d p}{d x} \\ \frac{d T}{d x} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u & \frac{u^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial p} & \frac{u^2}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} \\ u & \frac{1}{\rho} & 0 \\ u & \frac{\partial h}{\partial p} & \frac{\partial h}{\partial T} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

となる。これを

$$\frac{d\zeta}{dx} = A^{-1} f$$

とおき、いま熱力学的関数の独立変数は (T, p) であり作動流体は実在気体であるとする、

$$\rho = \frac{p}{R(T, p)T} \quad : \quad \text{完全ガスでは } R = \text{一定}$$

$$h = C_p(T, p) T \quad : \quad \text{完全ガスでは } C_p = \text{一定}$$

より

$$\begin{aligned} \det A &= \frac{u^3}{\rho} \left\{ \frac{1}{u^2} \frac{\partial h}{\partial T} + \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial h}{\partial p} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial T} - \frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial h}{\partial T} \right\} \\ &\equiv \frac{u^3}{\rho} \Delta \end{aligned}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\Delta} \begin{bmatrix} \frac{1}{u^3} \frac{\partial h}{\partial T} & -\frac{1}{u} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial h}{\partial p} \right) & -\frac{1}{\rho u} \frac{\partial \rho}{\partial T} \\ \rho \frac{\partial h}{\partial T} & \frac{\rho}{u^2} \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{\partial \rho}{\partial T} & \frac{\partial \rho}{\partial T} \\ \frac{1}{u^2} \left(\rho \frac{\partial h}{\partial p} - 1 \right) & -\frac{\rho}{u^2} \frac{\partial h}{\partial p} + \frac{\partial \rho}{\partial p} & \frac{1}{u^2} - \frac{\partial \rho}{\partial p} \end{bmatrix}$$

であるので

$$\frac{du}{dx} = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{1}{u^3} \frac{\partial h}{\partial T} F_1 - \frac{1}{u} \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{\partial \rho}{\partial T} \frac{\partial h}{\partial p} \right) F_2 - \frac{1}{\rho u} \frac{\partial \rho}{\partial T} F_3 \right\}$$

$$\frac{dp}{dx} = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{\rho}{u^2} \frac{\partial h}{\partial T} F_1 + \left(\frac{\rho}{u^2} \frac{\partial h}{\partial T} - \frac{\partial \rho}{\partial T} \right) F_2 + \frac{\partial \rho}{\partial T} F_3 \right\}$$

$$\frac{dT}{dx} = \frac{1}{\Delta} \left\{ \frac{1}{u^2} \left(\rho \frac{\partial h}{\partial p} - 1 \right) F_1 + \left(\frac{\partial \rho}{\partial p} - \frac{\rho}{u^2} \frac{\partial h}{\partial p} \right) F_2 + \left(\frac{1}{u^2} - \frac{\partial \rho}{\partial p} \right) F_3 \right\}$$

となる。

ここで、作動流体が理想気体の場合は、 $p = \rho R T$ 、 $h = C_p T$ 、 M をマッハ数、

γ を比熱比として

$$\begin{bmatrix} u & \frac{d u}{d x} \\ \frac{1}{\rho} & \frac{d p}{d x} \\ C_p & \frac{d T}{d x} \end{bmatrix} = \frac{1}{1-M^2} \begin{bmatrix} 1 & -\gamma M^2 & (\gamma-1) M^2 \\ -1 & 1+(\gamma-1) M^2 & -(\gamma-1) M^2 \\ -1 & \gamma M^2 & 1-\gamma M^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \end{bmatrix}$$

ただし

(B-18)

$$\langle J_y B_z \rangle = \frac{\langle \sigma \rangle}{G} \langle u \rangle \langle B \rangle^2 (K-1) \quad (B-19)$$

$$\langle \mathbf{J} \cdot \mathbf{E} \rangle = \frac{\langle \sigma \rangle}{G} \langle u B \rangle^2 (K-1) K \quad (B-20)$$

APPENDIX-C

$k - \varepsilon$ 法の境界条件*1 (高レイノルズ数)

$100 > \xi^+ > 30$ (ここで $\xi^+ = \frac{u_* \xi_p}{\nu}$) なる点 (壁からの距離) ξ_p に対して

対数法則

$$u_p = \frac{u_*}{\kappa} \ln \xi^+ + C = \frac{u_*}{\kappa} \ln (E \xi^+) \quad (C-1)$$

が成立することが知られている。この式は、壁関数を用いる場合の流速に対する境界条件でもある。ただし、この時の「境界」は壁そのものではなく、壁に最も近い (流体の存在する) 格子点 p である。

ここで壁乱流を考え、この領域で乱流拡散 $u_i' u_j'$ が小さくレイノルズ応力が一定であるとき $k - \varepsilon$ 方程式 (2-14) における

$$(\text{生成項}) = (\text{消滅項})$$

すなわち

$$\nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) = \varepsilon \quad (C-2)$$

ここで式 (2-16) より

$$\left(\nu_t \frac{\partial U}{\partial \xi} \right)^2 = C_D k^2 \quad (C-3)$$

$$(\text{剪断応力})^2 = (\text{壁応力})^2 = \rho u_*^2$$

従って、乱れの運動エネルギー k に対する境界条件は次式となる。

$$k_p = \frac{u_*^2}{C_D^{1/2}} \quad (C-4)$$

また、

$$\begin{aligned} \varepsilon &= \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right)^2 \\ &= \nu_t \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \cdot \left(\frac{\partial U}{\partial \xi} \right) \\ &= u_*^2 \cdot \frac{u_*}{\kappa \xi} = \frac{u_*^3}{\kappa \xi} \end{aligned} \quad (C-5)$$

従って乱れの散逸率 ε に対する境界条件は次式となる。

$$\varepsilon_p = u_*^2 \cdot \frac{u_*}{\kappa \xi} = \frac{u_*^3}{\kappa \xi} \quad (C-6)$$

参考文献－C

*¹C. D. Tong, Finite Element Flow Analysis, ed. by T. Kawai, pp.227-236,
Tokyo Univ. Press(1978)

APPENDIX-D

面積座標の性質

L_1 、 L_2 、 L_3 を三角形 T に関する面積座標とすると、次式が成立する。

$$\begin{aligned} I(l, m, n) &\equiv \int \int_T L_1 L_2 L_3 dx dy \\ &= \frac{2S l! m! n!}{(l+m+n+2)!} \end{aligned} \quad (D-1)$$

ここで、 l 、 m 、 n は非負整数、 S は三角形の面積である。以下ではこの公式を証明する。

いま、 $X=L_1$ 、 $Y=L_2$ とおくと、 $L_3=1-X-Y$ となり、 $I(l, m, n)$ は、次のようにかける。

$$I(l, m, n) \equiv \int \int_T X^l Y^m (1-X-Y)^n dx dy \quad (D-2)$$

ところで、 $x = \sum_{i=1}^3 x_i L_i$ および $y = \sum_{i=1}^3 y_i L_i$ であるから、積分変数を (x, y) から (X, Y) へ変換するために必要なヤコビアンは次式で表される。

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(X, Y)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial X} & \frac{\partial y}{\partial X} \\ \frac{\partial x}{\partial Y} & \frac{\partial y}{\partial Y} \end{vmatrix} = D \quad (D-3)$$

但し、 $|D| = 2S$ である。よって、 $0 \leq L_1, L_2, L_3 \leq 1$ に注意すれば、

$$I(1, m, n) \equiv 2S \int_0^1 X^1 dx \int_0^{1-X} Y^m (1-X-Y)^n dy \quad (D-4)$$

ここで、 $X \neq 1$ に対し、 $\eta \equiv \frac{Y}{1-X}$ なる変換を施すと、

$$\int_0^{1-X} Y^m (1-X-Y)^n dy = (1-x)^{m+n+1} \int_0^1 \eta^m (1-\eta)^n d\eta \quad (D-5)$$

このような部分積分を繰り返すことにより次式を得る。

$$\int_0^1 \eta^m (1-\eta)^n d\eta = \frac{m! n!}{(m+n+1)!} \quad (D-6)$$

$$I(1, m, n) \equiv \frac{2S m! n!}{(m+n+1)!} \int_0^1 X^1 (1-X)^{m+n+1} dx \quad (D-7)$$

従って、(D-7) より

$$I(1, m, n) \equiv \frac{2S m! n!}{(m+n+1)!} \frac{1! (m+n+1)!}{(1+m+n+2)!} \quad (D-8)$$

[証明終わり]

なお、この式より面積座標については次のような重要な関係式が成立する。

$$I(0, 0, 0) \equiv \int \int_T dx dy = \frac{2S}{2!} = S \quad (D-9)$$

$$I(1, 0, 0) \equiv \int \int_T L_1 dx dy = \frac{2S \cdot 1!}{3!} = \frac{S}{3} \quad (D-10)$$

面積座標の性質

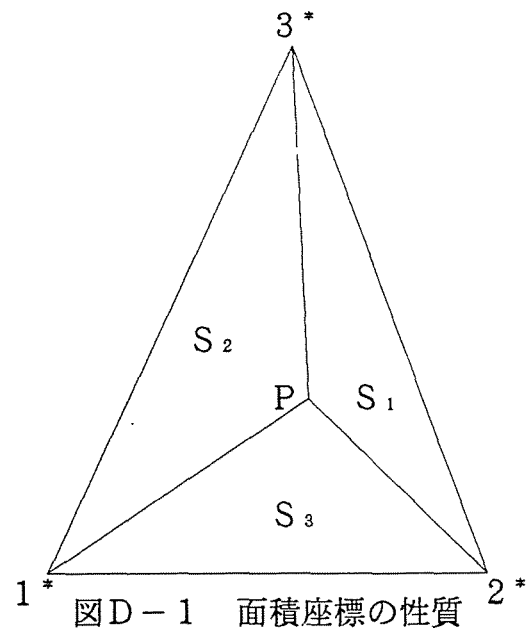
左図に示すように三角形に内点Pを考えて、三角形を三つの小三角形に分割する。各小三角形の面積を $S_i (i=1, 2, 3)$ とすると、点Pの面積座標は次式で与えられる。

$$L_i = S_i / S \quad (D-11)$$

但し、 S は全三角形の面積である。

この式を用いれば容易に次式を得る。

$$L_1 + L_2 + L_3 = 1 \quad (D-12)$$



図D-1 面積座標の性質

一次元の場合の長さ座標や、三次元の場合の体積座標についても対応する性質がある。

APPENDIX-E

クランク・ニコルソン法

$$\text{有限要素式: } [\dot{M}] \{\phi\} + [S] \{\phi\} = \{f\} \quad (E-1)$$

のクランク・ニコルソン差分展開

クランク・ニコルソン差分においては時刻 $t + \frac{\Delta t}{2}$ (Δt は微少時間増分)
における節点温度ベクトルを

$$\{\dot{\phi}(t + \frac{\Delta t}{2})\} = \frac{1}{2} (\{\phi(t + \Delta t)\} + \{\phi(t)\}) \quad (E-2)$$

また、時刻 $t + \frac{\Delta t}{2}$ における節点温度ベクトルの時間微分を

$$\{\phi(t + \frac{\Delta t}{2})\} = \frac{\{\phi(t + \Delta t)\} + \{\phi(t)\}}{\Delta t} \quad (E-3)$$

と表す。式 (E-1) の $\dot{\phi}$ 、 ϕ に式 (E-2)、(E-3) を代入すると

$$\begin{aligned} [S] \left\{ \frac{1}{2} (\{\phi(t + \Delta t)\} + \{\phi(t)\}) \right\} \\ + [M] \left\{ \frac{1}{\Delta t} (\{\phi(t + \Delta t)\} - \{\phi(t)\}) \right\} = \{f\} \end{aligned} \quad (E-4)$$

上式を整理すると

$$\left(-\frac{1}{2} [S] + \frac{1}{\Delta t} [M] \right) \{\phi(t + \Delta t)\}$$

$$= \left[-\frac{1}{2} [S] + \frac{1}{\Delta t} [M] \right) \{ \phi(t) \} + \{ f \} \quad (E-5)$$

ここで式 (E-5) の右辺の $\{ \phi(t) \}$ は既知であるとして、非定常の有限要素式 (E-1) は式 (E-5) を用いることにより逐次解くことができる。

APPENDIX-F

矩形断面無限長コイルの作る S F C 磁界

無限長矩形断面コイルの作る磁界：式（3-19）、（3-20）の証明

ここで考えているような無限長のコイル系（二系統四断面）によって発生する磁界は、一本のコイル（全部で四本）により任意の点に作られる磁界を表す式を求めておけばコイルの位置と磁界を求める点の相対的位置関係を変換することにより求めることができる。従って以下では、図 F-1 において第一象限のコイルにより発生する磁界を求める。これを第一象限ということで $B^1(r)$ とする。

$$B_y^1(r) = \frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \int_{z_1=W/2+\delta}^{z_2=W/2+\delta+b} dz' (z-z') \int_{y_1=(D-a)/2}^{y_2=(D+a)/2} \frac{dy'}{(y-y')^2 + (z-z')^2}$$

ここで、 $Y = y - y'$ とおくと y' 、 z' に関する不定積分 (G' とおく) は、

$$\begin{aligned} G' &= \int dY \int \frac{Z dZ}{(Y^2 + Z^2)} = \frac{1}{2} \int dY \log(Y^2 + Z^2) \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{\partial}{\partial Y}(Y) \cdot dY \log(Y^2 + Z^2) \\ &= \frac{1}{2} \log(Y^2 + Z^2) - \int \frac{Y^2}{(Y^2 + Z^2)} dY \end{aligned}$$

さらに $Y = Z \tan t$ とおくと、

$$\text{右辺第二項} = \int \frac{(Z \tan t)^2}{Z^2(1 + \tan^2 t)} Z \sec^2 t dt$$

$$\begin{aligned}
&= -Z \int \tan^2 t \, dt = -Z(\tan t - 1) \\
&= Z \tan^{-1}\left(\frac{Y}{Z}\right) - Y
\end{aligned}$$

となるので

$$G' = Y \log \sqrt{(Y^2 + Z^2)} - Z \tan^{-1}\left(\frac{Y}{Z}\right) - Y$$

従って、第一象限のコイルによる発生磁界は、

$$\begin{aligned}
B_y^1(r) &= \frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \left[[G'(Y, Z)]_{\substack{Z=z-z_2 \\ Z=z-z_1}} \right]_{\substack{Y=y-y_2 \\ Y=y-y_1}} \\
&= \frac{\mu_0 J_c}{2\pi} [G'(Y, z-z_2) - G'(Y, z-z_1)]_{\substack{Y=y-y_2 \\ Y=y-y_1}} \\
&= \frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \{ G'(y-y_2, z-z_2) - G'(y-y_1, z-z_2) \\
&\quad - G'(y-y_2, z-z_1) + G'(y-y_1, z-z_1) \}
\end{aligned}$$

第3章におけるGとここでのG'の違い(-Y)は、Zに関する定積分をとると消えるので、結局

$$B_y^1(r) = \frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \{ +G(1, 1) - G(1, 2) - G(2, 1) + G(2, 2) \}$$

となる。これが第一象限にあるコイルによって任意の考察点Pに発生する磁界のy成分である。

他の象限のコイルにより発生される磁界分布は、この式で矩形コイルの縁の座標(y_1, y_2, z_1, z_2)に他の象限の値を代入し、コイル電流の符号に注意することにより

$$B_y^2(r) = \frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \{ +G(-1, 1) - G(-1, 2) - G(-2, 1) + G(-2, 2) \}$$

$$B_y^3(r) = \frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \{ -G(-1, -1) + G(-1, -2) + G(-2, -1) - G(-2, -2) \}$$

$$B_y^4(r) = \frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \{-G(1, -1) + G(1, -2) + G(2, -1) - G(2, -2)\}$$

となる。したがって最終的に $B_y(r)$ は、これらを足し合わせて

$$\begin{aligned} B_y(r) &= B_y^1(r) + B_y^2(r) + B_y^3(r) + B_y^4(r) \\ &= \frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \{+G(1, 1) - G(1, 2) - G(2, 1) + G(2, 2) \\ &\quad + G(-1, 1) - G(-1, 2) - G(-2, 1) + G(-2, 2) \\ &\quad - G(-1, -1) + G(-1, -2) - G(-2, -1) - G(-2, -2) \\ &\quad - G(1, -1) + G(1, -2) + G(2, -1) - G(2, -2)\} \end{aligned}$$

よって、式 (3-19) が証明された。

同様にして第一象限のコイルにより発生する磁界の z 成分を求める。

$$B_z^1(r) = -\frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \int_{z_1=W/2+\delta}^{z_2=W/2+\delta+b} dz' \int_{y_1=(D-a)/2}^{y_2=(D+a)/2} \frac{(y-y') dy'}{(y-y')^2 + (z-z')^2}$$

ここで、 $Y = y - y'$ とおくと y' 、 z' に関する不定積分 (F' とおく) は、

$$\begin{aligned} F' &= - \int dz \int \frac{Y dY}{(Y^2 + Z^2)} = -\frac{1}{2} \int dY \log(Y^2 + Z^2) \\ &= -\frac{1}{2} \left\{ Z \log(Y^2 + Z^2) - \int \frac{2Z^2 dZ}{(Y^2 + Z^2)} \right\} \\ &= -Z \log \sqrt{Y^2 + Z^2} - Y \tan^{-1} \left(\frac{Z}{Y} \right) + Z \end{aligned}$$

従って、

$$B_z^1(r) = -\frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \{+F(1, 1) - F(1, 2) - F(2, 1) + F(2, 2)\}$$

$$B_z{}^2(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \{+F(-1, 1) - F(-1, 2) - F(-2, 1) + F(-2, 2)\}$$

$$B_z{}^3(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \{-F(-1, -1) + F(-1, -2) + F(-2, -1) - F(-2, -2)\}$$

$$B_z{}^4(\mathbf{r}) = -\frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \{-F(1, -1) + F(1, -2) + F(2, -1) - F(2, -2)\}$$

よって、

$$\begin{aligned}
 B_z(r) &= B_z^1(r) + B_z^2(r) + B_z^3(r) + B_z^4(r) \\
 &= -\frac{\mu_0 J_c}{2\pi} \{ +F(1, 1) - F(1, 2) - F(2, 1) + F(2, 2) \\
 &\quad + F(-1, 1) - F(-1, 2) - F(-2, 1) + F(-2, 2) \\
 &\quad - F(-1, -1) + F(-1, -2) - F(-2, -1) - F(-2, -2) \\
 &\quad - F(1, -1) + F(1, -2) + F(2, -1) - F(2, -2) \}
 \end{aligned}$$

となり、式(3-20)が証明された。

[証明終わり]

APPENDIX-G

クレセントコイルの断面積

$$S_c = 4 r_1 r_2 (\theta + \sin \theta \cos \theta) \quad (3-24)$$

の証明

図3-3において、第一象限のみを考える。この象限に存在する導体の面積は、

$$\frac{S_c}{4} = \int_0^{c/2+r_1} z_R(y) dy - \int_0^{-c/2+r_1} z_L(y) dy \quad (G-1)$$

ここで、

$$z_R(y) = \frac{r_1^2}{r_1} \sqrt{\{r_1^2 - (y - c/2)^2\}}$$

$$z_L(y) = \frac{r_1^2}{r_1} \sqrt{\{r_1^2 - (y + c/2)^2\}}$$

式(G-1)の右辺を $I_R - I_L$ とおくと、

$$I_R \equiv \frac{r_1^2}{r_1} \int_0^{c/2+r_1} dy \sqrt{\{r_1^2 - (y - c/2)^2\}} \quad (G-2.1)$$

$$I_L \equiv \frac{r_1^2}{r_1} \int_0^{-c/2+r_1} dy \sqrt{\{r_1^2 - (y + c/2)^2\}} \quad (G-2.2)$$

ここで、 $\xi = y - c/2$ とおくと

$$I_R \equiv \frac{r_2}{r_1} \int_{-c/2}^{r_1} d\xi \sqrt{\{r_1^2 - \xi^2\}}$$

さらに、 $\xi = r_1 \sin t$ とおくと $\theta = \sin^{-1}(c/2r_1)$ であるから、

$$\begin{aligned} &= \frac{r_2}{r_1} \int_{-\theta}^{\pi/2} r_1 \cos t \cdot r_1 \cos t \, dt = r_1 r_2 \int_{-\theta}^{\pi/2} \cos^2 t \, dt \\ &= r_1 r_2 \left\{ \int_0^{\pi/2} + \int_{-\theta}^0 \right\} \cos^2 t \, dt \end{aligned}$$

従って、

$$I_R = r_1 r_2 \left\{ \frac{\pi}{4} + \int_0^{\theta} \cos^2 t \, dt \right\}$$

となる。同様にして、

$$I_L = r_1 r_2 \left\{ \frac{\pi}{4} - \int_0^{\theta} \cos^2 t \, dt \right\}$$

従って、

$$\begin{aligned} \frac{S_c}{4} &= I_R - I_L = 2 r_1 r_2 \int_0^{\theta} \cos^2 t \, dt \\ &= I_R - I_L = 2 r_1 r_2 \int_0^{\theta} \cos^2 t \, dt = r_1 r_2 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\theta} \\ &= r_1 r_2 (\theta + \sin \theta \cos \theta) \end{aligned}$$

[証明終わり]